К. Ф. Лебединцев

# ПРЕПОДАВАНИЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

К. Ф. Лебединцев

# ПРЕПОДАВАНИЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

Пособие для учителей

КИЕВ
«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»
1984

Рекомендовано управлением школ Министерства просвещения УССР

ЛЕБЕДИНЦЕВ К. Ф. Преподавание алгебры и начал анализа: Пособие для учителей.— К.: Рад. школа, 1984.— 248 с. — 65 к. 25 000 экз.

В пособии рассматривается система оригинальных приемов изложения фундаментальных вопросов исчисления бесконечно малых. Его автор, выдающийся отечественный математик-методист К. Ф. Лебединцев (1878—1925), особое внимание уделяет раскрытию содержательной, смысловой стороны изучаемого материала.

Введение каждого понятия сопровождается рассмотрением и анализом нескольких физических и геометрических задач с последующим обобщением и выявлением практических применений этого понятия. Явно выражен алгоритмический подход к изложению.

Предназначается учителям математики общеобразовательной школы.

Рукопись рецензировали: главный инспектор Министерства просвещения УССР *Г. Н. Литвиненко*, учителя математики *В. И. Лукавецкий* (г. Кролевец) и *Я. Е. Гольдберг* (г. Хмельницкий).

Предисловие и примечания кандидата педагогических наук *З. И. Слепкань*.

Л $\frac{4306010000-306}{М210(04)-84}$ 230-84

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Более чем десятилетний переход на новое содержание школьного математического образования в нашей стране завершился утверждением в 1982 году усовершенствованной программы по математике, которая является базовой для средних общеобразовательных школ, профессионально-технических училищ и средних специальных учебных заведений. Сегодня, в свете основных задач осуществляемой в нашей стране реформы общеобразовательной и профессиональной школы, особенно актуальной становится проблема методического обеспечения преподавания всех математических предметов.

Как показала практика, в курсе алгебры и начал анализа наибольшую трудность для учащихся представляет изучение предела и непрерывности функций. Это связано, прежде всего, с довольно формализованным изложением в действующем учебном пособии понятия предела функции. Именно поэтому усовершенствованная программа по математике предусматривает основное внимание уделять формированию у учащихся наглядно-интуитивных представлений о сущности предельного перехода, о пределе последовательности и функции.

С этой точки зрения несомненный интерес для учителей и методистов представляет предлагаемое пособие известного отечественного методиста-математика К. Ф. Лебединцева (1878—1925)*, которое было написано в период плодотворной его деятельности на ниве становления советской школы (г. Киев, 1923—1925 гг.) и не успело увидеть свет из-за кончины автора.

Предлагаемый вариант пособия подготовлен к печати дочерью автора — кандидатом физико-математических наук, доцентом Е. К. Лебединцевой.

Данное пособие интересно тем, что в нем определение предела переменной вводится на основании понятия бесконечно малой (автор употребляет термин «безгранично малая») и с помощью только понятия предела переменной (без специаль-

---

* Историческая справка о жизни и деятельности К. Ф. Лебединцева помещена в конце данного пособия (здесь и далее знаком * обозначены примечания редакции, а цифрой — примечания автора).

но вводимых определений предела и непрерывности функции) излагаются начала дифференциального и интегрального исчисления. На преимущества такого методического варианта введения предела еще в 50-е годы указывал один из основателей Академии педагогических наук, член-корреспондент АН СССР профессор А. Я. Хинчин. И в изданном совсем недавно пособии профессора МФТИ С. М. Никольского «Элементы математического анализа» «в помощь школьнику, изучающему математический анализ, а также учителю, преподающему в школе этот предмет» (М., 1981, с. 3), вводится понятие бесконечно малой и на его основе определяется предел переменной. Как справедливо отмечает С. М. Никольский, «название «Анализ посредством бесконечно малых» характеризовало бы предмет более точно» (с. 9).

Пособие К. Ф. Лебединцева выгодно отличается от существующих пособий по алгебре и началам анализа доступностью изложения, удачным сочетанием строгости с интуицией и наглядностью, умелой реализацией межпредметных и внутрипредметных связей.

Материал в основном излагается конкретно-индуктивным методом, просто и ясно. Сложные для восприятия понятия формируются на конкретных примерах, а затем проводятся необходимые обобщения. Основные понятия и методы математического анализа систематически и последовательно связываются с алгеброй, геометрией, физикой и практикой.

В пособии явно выражен алгоритмический подход (четко формулируются алгоритмы решения неравенств, нахождения производных элементарных функций с помощью определения, исследования функций на максимум и минимум и др.) и принцип пропедевтического изучения ведущих понятий (уже в связи с изучением линейной функции вводится понятие отношения приращения функции к приращению независимого переменного (аргумента), термин «первообразная» появляется одновременно с термином «производная» и др.).

К. Ф. Лебединцев, в соответствии с классическим направлением в определении функции, вводит ее как зависимую переменную величину, но вместо термина «величина» использует термин «количество», подчеркивая, что речь идет о скалярных переменных величинах.

Термин «функциональная зависимость» употребляется К. Ф. Лебединцевым в смысле «закона соответствия», согласно которому определяются значения функции по известным значениям одной или нескольких независимых переменных.

Вначале рассматриваются конкретные примеры, в которых этот закон может быть выражен в виде формулы. Далее приводится пример, когда он задается с помощью таблицы. Определение функции охватывало не только функции одной, но и нескольких переменных, а также многозначные функции.

Следует заметить, что в действующем учебнике алгебры для VI класса (под редакцией А. И. Маркушевича) принято более общее определение функции: оно охватывает соответствия не только между значениями переменных величин, но и элементами любой природы.

Подход к классификации целых рациональных функций (К. Ф. Лебединцев употребляет термин «разделение функций») отличается от принятого в действующих учебниках алгебры. За основание классификации функций принимается порядок независимой переменной (степень аргумента). Этим осуществляется единый подход к определению функций вида $y = ax + b$ и $y = ax^2 + bx + c$. В обеих формулах коэффициент при высшей степени $x$ полагается отличным от нуля. В связи с этим первая функция называется функцией первого порядка (а позже, после рассмотрения графика,— линейной, по виду графика), вторая — функцией второго порядка.

При изучении функции $y = ax$ (частный случай функции первого порядка) выразительно объясняется происхождение термина «угловой коэффициент» и его связь с тангенсом угла наклона графика к оси $x$. Одновременно подчеркивается, что $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ — отношение приращения функции к приращению аргумента. Это пример пропедевтического введения производной и ее геометрического смысла. Приводятся интересные примеры практического применения функции $y = ax$ для представления величин в различных единицах измерения.

Функция $y = ax + b$ вводится в связи с решением практической задачи на определение положения ездока в зависимости от времени движения. Такими же практическими соображениями обосновывается и параллельность графиков $y = ax + b$ и $y = ax$. Хороший пример из практики убеждает школьника в том, что условия задачи могут определять функцию так, что графиком ее является отрезок или полупрямая. Это прекрасная возможность показать применение отрезков и полупрямых не только в геометрии, но и в алгебре.

Учитель найдет в пособии К. Ф. Лебединцева и другие убедительные примеры связи алгебраического материала с курсом геометрии, изложенным в ныне действующем учебнике «Геометрия, 6—10» А. В. Погорелова. Например, на с. 32—33 приведен пример доказательства от противного — доказано отсутствие пропорциональности между $x$ и $y$ в случае функции $y = ax + b$. На с. 34 параллельность графиков функций $y = \frac{1}{2}x + 5$ и $y = \frac{1}{2}x + 7$ доказана на основании параллельности каждого из них графику функции $y = \frac{1}{2}x$ (применение первого признака параллельности двух прямых).

Параллельность графиков функций $y = ax + b$ и $y = ax$ (с. 31 ) доказывается с помощью свойств параллелограмма.

При доказательстве существования на координатной плоскости единственной точки с заданными координатами используется утверждение о том, что две прямые либо не пересекаются, либо пересекаются только в одной точке.

В пособии специально рассматриваются приложения прямолинейных графиков функций к изучению равномерного движения и вообще равномерного изменения значений величины. Приводятся интересные примеры применения графиков функций к решению задач практического характера, в частности графиков линейных функций в железнодорожной практике для составления наглядной картины движения нескольких поездов на данном участке пути. При этом подчеркивается, что решение этих задач с помощью уравнений дает тот же результат.

Наряду с этим показано применение графиков функций для решения систем уравнений в алгебре.

Изучение функции $y = x^2$ тоже начинается с задачи практического содержания, приводящей к этой функции, что сразу обеспечивает мотивацию усвоения новых знаний и повышает интерес учащихся к учению. Кроме формального построения графика этой функции по точкам, учащиеся знакомятся и со специальным способом его вычерчивания на основе использования формулы расстояния между двумя точками. Показывается, в частности, что график функции $y = x^2$ есть геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки $F$ и от данной прямой $MM_1$. Рассматривается применение этого графика для извлечения квадратных корней и решения квадратных уравнений с одной неизвестной.

В связи с изучением функции $y = ax^2 + bx + c$ обращается внимание на возможность графического решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ двумя способами: 1) путем предварительного преобразования данного уравнения к виду $ax^2 = -bx - c$ и построения графиков параболы $y = ax^2$ и прямой $y = -bx - c$; 2) путем построения параболы $y = ax^2 + bx + c$ и обосновывается преимущество первого способа.

При изучении синуса и косинуса угла автор не ограничивается формальным введением определений, но показывает также, что синус и косинус являются функциями угла.

С большой степенью доступности излагаются вопросы теории пределов. Понятия о «бесконечно малой» и «бесконечно большой» величинах вводятся на примерах из физики. Все теоремы о бесконечно малых вначале разъясняются на конкретных примерах, и только после этого рассуждения проводятся в общем виде.

Понятие предела переменной вводится на примерах из геометрии и алгебры (обращение обыкновенной дроби в периодическую десятичную дробь). Доказательство формулы предела суммы убывающей геометрической прогрессии связывается с решением известного софизма греческого философа Зенона об Ахиллесе и черепахе.

При доказательстве теорем о пределах широко используются свойства неравенств.

Специально рассматриваются приложения теории пределов в геометрии (доказательство формул длины окружности, площади круга, боковой поверхности и объема цилиндра, конуса, объема шара и пирамиды). Это служит для учащихся мотивацией изучения пределов. Обращает на себя внимание доступность и простота доказательства методом пределов формулы объема пирамиды. Предварительно доказывается нужная формула суммы квадратов $n$ первых чисел натурального ряда с использованием суммы $n$ членов арифметической прогрессии, а затем эта формула применяется для доказательства формулы объема пирамиды.

Понятие о производной также вводится конкретно-индуктивно. Вначале решается задача на определение скорости движения камня по склону горы, а затем — задачи на определение ускорения движения тела в данный момент времени и на проведение касательной к кривой. Решение этих задач обобщается. Подчеркивается, что во всех трех задачах требовалось найти скорость изменения функции. Решается еще одна задача на нахождение скорости изменения конкретной функции $y=\frac{1}{x}$, которую называют производной от данной функции, а данную функцию $y=\frac{1}{x}$, в противоположность ей,— первообразной.

К. Ф. Лебединцев предлагал вводить одновременно понятия производной и первообразной, чтобы показать связь двух взаимно обратных операций, выполняемых при их нахождении. Термин «первообразная» включается и в определение производной функции общего вида. Геометрический смысл производной он раскрывает сразу же после введения ее определения, не откладывая до изучения применений производной в геометрии. Это способствует более глубокому осознанию учащимися природы производной и смысла четырех шагов, связанных с ее введением.

Существенным для восприятия понятия производной является замечание К. Ф. Лебединцева о необходимости различать понятия производной как переменной (функции) и как числа (углового коэффициента касательной). Ученый считал необходимым специально разъяснить учащимся, что для краткости производную функцию (как подъем первообразной для данного значения независимого переменного) называют одним словом «производная».

После рассмотрения ряда примеров вычисления производных функций с помощью соответствующего определения вводится общее правило — алгоритм дифференцирования.

Показывая применение производной к решению практических задач, К. Ф. Лебединцев приводит интересные задачи из военного дела, техники, сельского хозяйства. Эти задачи приводят к исследованию не только рациональных, но и тригонометрических функций, причем даются не готовые алгоритмы, а подробный ход рассуждений при поиске решения.

В связи с применением производной к исследованию функций подчеркивается, что производная будет применяться к исследованию первообразной функции.

Определение первообразной (или интеграла) вводится в связи с решением конкретных физических задач (определение закона изменения пути по известному закону изменения скорости в зависимости от времени движения). Обращается внимание на то, что задачи по нахождению интеграла можно решать двумя способами: во-первых, можно вычислить искомую величину как предел суммы безгранично большого числа безгранично малых слагаемых; во-вторых (и это значительно проще), представить искомую величину как такую функцию, от которой данная является производной (найдя затем эту функцию по ее производной, мы решаем тем самым и обратную задачу).

Кроме интегрирования непосредственно с помощью таблицы первообразных, рассматриваются простейшие правила интегрирования (интегрирование суммы функций, произведения постоянной на функцию) и два способа интегрирования (интегрирование простейшими подстановками и по частям).

Завершается изучение начал интегрального исчисления параграфом о применении интеграла к вычислению площадей и объемов. Здесь в общем виде рассматривается задача о площади криволинейной трапеции, в процессе решения которой учащиеся подводятся к выводу о том, что искомая площадь есть разность между двумя фиксированными значениями интеграла от функции $y = f(x)$. С помощью интеграла вычисляются объемы шара, эллипсоида, синусоидального тела, полученного при вращении одной ветки синусоиды.

В данном пособии помещен материал, не предусмотренный обязательной программой. Учитель может с успехом использовать его во внеклассной работе. Это касается прежде всего вопросов аналитической геометрии, способов интегрирования — подстановкой и по частям.

В заключение отметим, что предлагаемая работа фундатора отечественной методики математики К. Ф. Лебединцева будет полезна и учителям, и учащимся как образец доступного, мастерского изложения основ математической науки.

*З. И. Слепкань*

# Раздел I

# УЧЕНИЕ О ПРОСТЕЙШИХ ФУНКЦИЯХ И ИХ ГРАФИЧЕСКОМ ИЗОБРАЖЕНИИ

## ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К УЧЕНИЮ О ФУНКЦИЯХ

### § 1. Понятие о количествах постоянных и переменных, о независимых переменных и функциях

Пусть имеем задачу.

*Определить площадь прямоугольника, основание которого равно $a$ единицам длины, а высота равна $b$ таким же единицам.*

Искомая площадь: $x = a \cdot b$.

Допустим теперь, что длина основания имеет определенное значение $a = 3$, а длине высоты будем приписывать различные произвольные значения: $b = 2,\ 5,\ 10$.

Посмотрим, каким будет каждый раз значение площади нашего прямоугольника.

Если $b = 2$, то $x = 3 \cdot 2 = 6$;

если $b = 5$, то $x = 3 \cdot 5 = 15$;

если $b = 10$, то $x = 3 \cdot 10 = 30$.

Теперь видим, что при данных условиях количество $a$ (длина основания) имело одно и то же значение, количества же $b$ и $x$ (длина высоты и площадь прямоугольника) — различные значения. Назовем количество $a$ постоянным, количества же $b$ и $x$ — переменными. Но значения $b$, по условию, были совершенно произвольными, значения же площади $x$ изменялись в зависимости от того, какое мы выбирали значение для $b$, и вычислялись по определенному закону, а именно: числовую величину $b$ нужно было умножить на 3, т. е. на длину основания.

Назовем количество $b$ (длину высоты) независимым переменным, количество же $x$ (площадь прямоугольника) — функцией этого независимого переменного $b$, а тот закон, по которому определяется значение $x$, когда известно значение $b$, назовем функциональной зависимостью[1] между $x$ и $b$.

Изменим теперь условия вопроса. Дадим длине высоты постоянное значение $b = 10$, а длине основания будем припи-

---

[1] Иначе: количественной зависимостью или просто зависимостью.

сывать произвольные значения: $a = 2\frac{1}{2}$, 6, 15. Найдем для каждого случая значение площади $x$.

Если $a = 2\frac{1}{2}$, то $x = 2\frac{1}{2} \cdot 10 = 25$;
если $a = 6$, то $x = 6 \cdot 10 = 60$;
если $a = 15$, то $x = 15 \cdot 10 = 150$.

Теперь видим, что при данных условиях постоянным является количество $b$ (длина высоты), количества же $a$ и $x$ будут переменными, причем значения $a$ совершенно произвольны, и потому $a$ будет независимым переменным, значения же $x$ изменяются с изменением значения $a$ (и вычисляются по определенному закону, а именно: значение $a$ нужно умножить на 10), т. е. в данном случае площадь $x$ есть функция $a$ (длины основания).

Наконец, будем придавать как длине основания, так и длине высоты произвольные значения и посмотрим, какие значения будет иметь площадь $x$.

Если $a = 2$, $b = 5$, то $x = 2 \cdot 5 = 10$;
если $a = 6$, $b = 5$, то $x = 6 \cdot 5 = 30$;
если $a = 6$, $b = 3\frac{1}{2}$, то $x = 6 \cdot 3\frac{1}{2} = 21$;
если $a = 24$, $b = 3\frac{1}{2}$, то $x = 24 \cdot 3\frac{1}{2} = 84$.

В данном случае длина основания $a$ и длина высоты $b$ являются независимыми переменными, значения же площади $x$ зависят от того, какие мы выбираем значения для $a$ и $b$; в силу этого количество $x$ называется функцией двух независимых переменных $a$ и $b$.

В дальнейшем *постоянным количеством* будем называть количество, которое в условиях данного вопроса имеет только одно значение, *переменным* — такое, которое в условиях данного вопроса может иметь больше одного значения (обычно — сколько угодно значений).

Если значения переменного количества могут быть изменяемы произвольно, то будем называть его *независимым переменным*.

Если же значения какого-либо переменного количества изменяются соответственно тому, какие мы выбрали значения для другого или нескольких других переменных, то первое количество называется *функцией* второго или всех других переменных.

Тот закон, по которому определяются значения функции, если известны значения ее независимых переменных (и который обыкновенно выражается формулой, содержащей все эти количества), называется *функциональной зависимостью* между данными количествами.

Нетрудно увидеть, что всякое равенство, получаемое при решении какой-либо общей задачи по правилам алгебры, выражает ту или иную функциональную зависимость между значениями данных и искомых величин, или, короче говоря, между величинами, которые входят в данную задачу.

Возьмем, например, такую задачу.

*Пароход прошел $s$ километров за $t$ часов. Сколько километров проходил он в час (если считать его движение равномерным)?*

Обозначим скорость парохода, т. е. число километров, которое он проходит в час, через $a$; тогда будем иметь $a = \frac{s}{t}$. Дадим теперь числу $t$ постоянное значение, например $t = 10$, а числу $s$ будем давать различные произвольные значения: $s = 90$, 115, 160, 48 и т. д. Тогда искомая величина $a$ (скорость парохода) также будет получать различные значения, вычисляемые по формуле $a = \frac{s}{t}$.

При $s = 90$ $\quad a = 90 : 10 = 9$;
при $s = 115$ $\quad a = 115 : 10 = 11{,}5$;
при $s = 160$ $\quad a = 160 : 10 = 16$;
при $s = 48$ $\quad a = 48 : 10 = 4{,}8$.

Очевидно, при данных условиях время ($t$) есть количество постоянное; расстояние ($s$), пройденное пароходом,— переменное независимое; скорость парохода ($a$) — функция от этого независимого переменного; формула $a = \frac{s}{t}$ выражает функциональную зависимость между входящими в задачу величинами, а именно: скорость парохода в час равна частному от деления всего пройденного расстояния на некоторое постоянное число, выражающее время движения (в часах).

Заметим, что зависимость эта известна нам еще из арифметики, так как можно показать, что при данных условиях (если время движения — величина постоянная) скорость движения и пройденное расстояние пропорциональны. В самом деле, если пройденному расстоянию ($s$) мы дадим какие-либо два значения $s_1$ и $s_2$, то скорость ($a$) получит такие значения $a_1$ и $a_2$, которые определяются условиями $a_1 = \frac{s_1}{t}$ и $a_2 = \frac{s_2}{t}$; разделив эти равенства друг на друга, найдем $\frac{a_1}{a_2} = \frac{s_1}{s_2}$, т. е. величины $a$ и $s$ *пропорциональны*.

Изменим теперь условия вопроса.

Пусть $s$ (пройденное расстояние) имеет постоянное значение, например $s = 36$; количество же $t$ (время) пусть получает различные произвольные значения: $t = 3,\ 4\frac{1}{2},\ 10,\ 1\frac{1}{2}$. Тогда искомая величина $a$ будет получать следующие значения:

при $t = 3$ $\quad a = 36 : 3 = 12$;

при $t = 4\frac{1}{2}$ $\quad a = 36 : 4\frac{1}{2} = 8$;

при $t = 10$ $\quad a = 36 : 10 = 3{,}6$;

при $t = 1\frac{1}{2}$ $\quad a = 36 : 1\frac{1}{2} = 24$.

Таким образом, в данном случае $s$ — постоянное, $t$ — переменное независимое, $a$ — его функция; формула же $a = \frac{s}{t}$ выражает следующую функциональную зависимость между входящими в задачу величинами: скорость парохода в час равна частному от деления некоторого постоянного числа (выражающего пройденное расстояние) на число часов движения парохода.

Эта зависимость тоже известна нам, так как при данных условиях (если пройденное расстояние есть величина постоянная) скорость парохода и время его движения обратно пропорциональны. В самом деле, если время $t$ получит у нас какие-либо определенные значения $t_1$ и $t_2$, то скорость парохода ($a$) будет иметь такие значения $a_1$ и $a_2$, которые определяются условиями: $a_1 = \frac{s}{t_1}$, $a_2 = \frac{s}{t_2}$; разделив эти равенства почленно, будем иметь $\frac{a_1}{a_2} = \frac{t_2}{t_1}$, т. е. величины $a$ и $t$ *обратно пропорциональны*.

Возьмем еще такую общую задачу.

*Сторона квадрата равна а метрам. Чему равна его площадь?*

Обозначив искомую площадь, выраженную в квадратных метрах, через $x$, найдем $x = a^2$.

Пусть теперь $a$ получает различные значения, например: $a = 1,\ 4\frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ 100$. Тогда количество $x$ также будет принимать различные значения, определяемые по формуле $x = a^2$.

При $a = 1$ $\quad x = 1^2 = 1$;

при $a = 4\frac{1}{2}$ $\quad x = \left(4\frac{1}{2}\right)^2 = 20\frac{1}{4}$;

при $a = \frac{1}{8}$ $\quad x = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$;

при $a = 100$ $\quad x = 100^2 = 10\,000$.

В данном случае, очевидно, длина стороны квадрата $a$ есть независимое переменное, а площадь квадрата $x$ — его функция; зависимость же между ними такова: площадь квадрата равна квадрату его стороны[1].

Заметим еще, что если какое-либо количество является функцией другого, то и второе можно рассматривать как функцию первого; так, площадь квадрата $x$, как мы только что видели, есть функция его стороны $a$, и функциональная зависимость между ними выражена формулой $x = a^2$; если же площадь $x$ примем за независимое переменное, то длина его стороны $a$ будет получать также различные значения, вычисляемые по формуле $a = \sqrt{x}$, т. е. в этом случае сторона квадрата является функцией его площади.

В предыдущих примерах функциональная зависимость между данными количествами была выражена в виде формулы. Но так бывает не всегда. Например, пусть нам дана следующая запись наблюдений за температурой воздуха:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | ч | утра | 2° | 1 | ч | дня | 10° |
| 7 | » | » | 2,5° | 2 | » | » | 9,5° |
| 8 | » | » | 4° | 3 | » | » | 8° |
| 9 | » | » | 4,5° | 4 | » | » | 7° |
| 10 | » | » | 5,5° | 5 | » | » | 5,5° |
| 11 | » | » | 7° | 6 | » | » | 5° |
| 12 | ч | дня | 8° | | | | |

Мы можем сказать, что в данном случае температура есть функция времени, так как с изменением времени изменяется соответственно и температура; но мы не знаем, по какому именно закону она изменяется, и поэтому не можем знать точно, какова была температура, предположим, в $9\frac{3}{4}$ часа утром или какова она будет в 8 часов вечера.

В таких случаях мы выражаем функциональную зависимость между данными величинами при помощи таблицы числовых значений независимого переменного и соответствующих значений функции; если же мы хотим представить эту зависимость нагляднее, то прибегаем к помощи рисунка.

Возьмем две взаимно перпендикулярные прямые $Ox$ и $Oy$ (они называются *осями*); пусть точка их пересечения $O$ (рис. 1) изображает начальный момент времени — 6 часов

---

[1] Так сокращенно представляют следующее утверждение: «Число, выражающее площадь квадрата в квадратных единицах, равно квадрату числа, выражающего длину его стороны в одноименных линейных единицах».

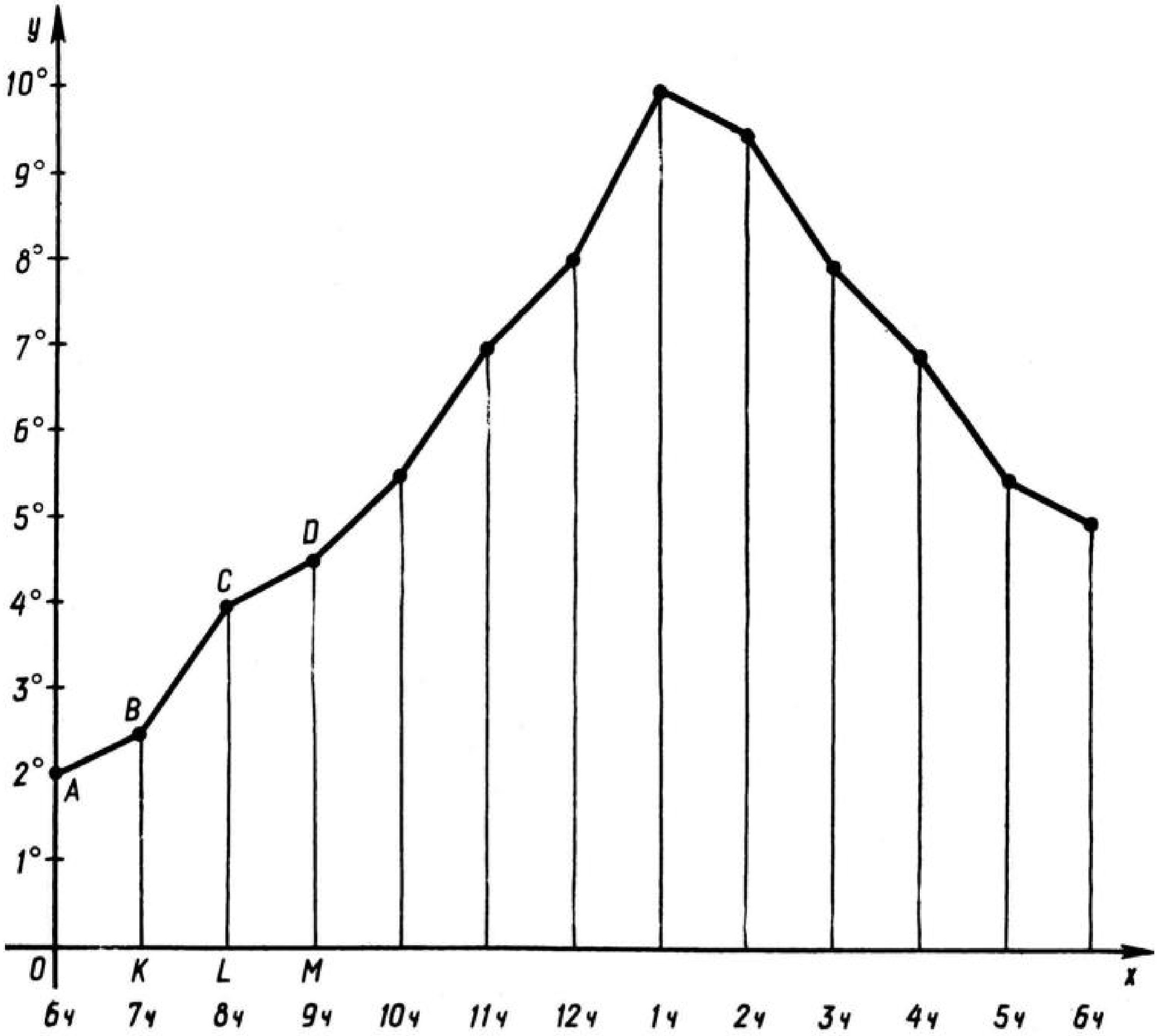


Рис. 1

утра. В этот момент температура была 2°; изобразим ее отрезком $OA$ в 2 каких-либо единицы длины, перпендикулярным к линии $Ox$ (т. е. направленным по оси $Oy$). Затем отложим от точки $O$ вправо по горизонтальной оси $Ox$ отрезок $OK =$ $= 1$ ед.; этот отрезок будет изображать промежуток времени в 1 ч, так что точка $K$ соответствует 7 часам утра. В этот момент температура была 2,5°; изобразим ее отрезком $KB$, равным 2,5 ед. и перпендикулярным к оси $Ox$. Затем снова отложим по горизонтальной оси $Ox$ отрезок $KL = 1$ ед., он опять будет выражать промежуток времени в 1 ч, так что точка $L$ соответствует 8 ч утра. Температура в это время была 4°; мы изобразим ее отрезком $LC$, равным 4 ед. и перпендикулярным к оси $Ox$. Подобным образом будем поступать и дальше, пока не изобразим все значения температуры.

Соединив затем последовательно концы всех перпендикуляров прямыми линиями, получаем ломаную линию, которая наглядно передает ход изменения температуры (ее увеличение и уменьшение).

Этот способ выражения функциональных зависимостей при помощи рисунка часто применяется для наглядного изображения каких-либо статистических данных.

## § 2. Разделение функций

Если количественная зависимость между функцией и ее независимым переменным может быть представлена алгебраическим выражением, целым относительно данного независимого переменного, то такая функция называется *целой*. Так, упомянутые выше функции $y = ax$, $x = a^2$, $z = \frac{m}{n}$ (при постоянном $n$) были целыми; функция же $z = \frac{m}{n}$ при переменном $n$ была дробной и т. д.

Если при этом упомянутое выше алгебраическое выражение, представляющее зависимость между данными величинами, есть одночлен или многочлен первой, второй, третьей... степени относительно данного независимого переменного, то данная функция называется *функцией первого, второго, третьего,... порядка*. Например, функция $y = ax$ при постоянном $a$ и переменном $x$ есть функция первого порядка, функции же $y = x^2$ и $y = ax^2 + bx$ будут функциями второго порядка от $x$.

Мы будем рассматривать пока только функции первого порядка и одного независимого переменного. Подобная функция может быть представлена в общем виде формулой

$$y = ax + b,$$

где $a$ и $b$ обозначают какие-либо постоянные количества, $x$ — независимое переменное, а $y$ — его функцию.

# ГЛАВА II. ФУНКЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ОТ ОДНОГО НЕЗАВИСИМОГО ПЕРЕМЕННОГО И ИХ ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

## § 3. Простейшие функции первого порядка вида $y = ax$ и их наглядное изображение

Возьмем задачу.

*По шоссе движется автомобиль так, что каждую секунду проходит $\frac{1}{2}$ км. В настоящий момент он находится у телеграфного столба. На сколько километров от столба он отъедет через $x$ секунд?*

Очевидно, искомый ответ $y = \frac{1}{2} x$ (км). Если будем придавать времени $x$ различные значения, то и расстояние $y$ будет соответственно изменяться.

Если $x = 1$, то $y = \frac{1}{2}$;
если $x = 2$, то $y = 1$;
если $x = 3$, то $y = 1\frac{1}{2}$;
если $x = 4$, то $y = 2$;
если $x = 5$, то $y = 2\frac{1}{2}$;
если $x = 6$, то $y = 3$.

Таким образом, $y$ будет функцией от $x$, притом функцией первого порядка.

Обратим теперь внимание на некоторые свойства нашей функции.

Рассматривая значения $x$ и соответствующие значения $y$, видим, что, во-первых, каждое значение $y$ вдвое меньше соответствующего значения $x$, т. е. величины $y$ и $x$ пропорциональны; во-вторых, с возрастанием $x$ возрастает и $y$, притом равномерно: при увеличении $x$ на одинаковые числа (например, на 1) величина $y$ получает также одинаковые прибавки (возрастает на $\frac{1}{2}$).

Все это и вообще весь ход изменений функции можно изобразить наглядно при помощи рисунка.

Возьмем две взаимно перпендикулярные оси $Ox$ и $Oy$; отложим на горизонтальной оси $Ox$ (рис. 2) от точки $O$ отрезок $OA$, равный какой-либо единице длины, и пусть этот отрезок изображает промежуток времени в 1 с, тогда промежутки времени в 2, 3, 4, ... с будут изображены отрезками $OB$, $OC$, $OD$, ..., соответственно равными 2, 3, 4, ... ед.

Затем из точки $A$ восставим к оси $Ox$ перпендикуляр $AK$, равный $\frac{1}{2}$ ед.; пусть этот перпендикуляр изобразит расстояние $\frac{1}{2}$ км, на которое автомобиль ушел от столба через 1 с. Подобным образом проведем перпендикуляры $BL$, $CM$, $DN$, ...,

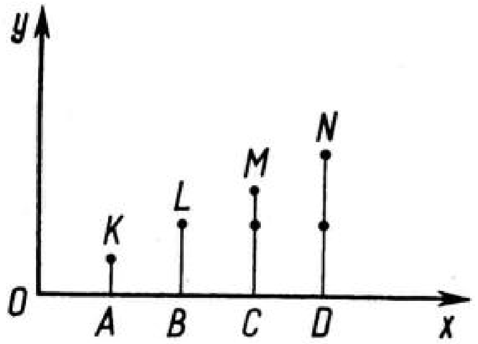


Рис. 2

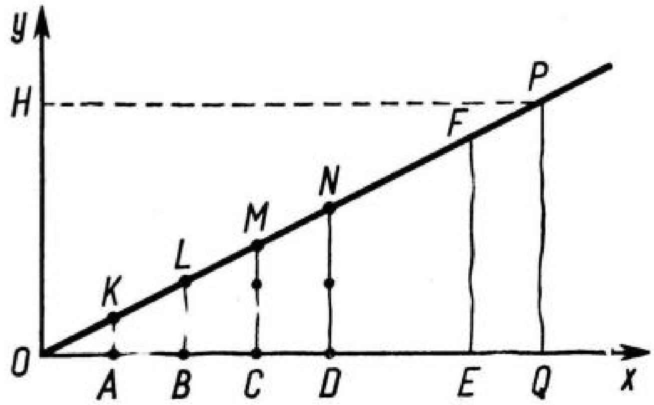


Рис. 3

соответственно равные 1, $1\frac{1}{2}$, 2, ... ед.; эти перпендикуляры изобразят расстояние автомобиля от столба через 2, 3, 4, ... с.

Нетрудно заметить, что концы всех этих перпендикуляров лежат на одной прямой линии. В этом можно убедиться, если приложить линейку к точкам $K$, $L$, $M$, $N$, .... Легко доказать, что так и должно быть: если соединим, например, точки $K$ и $L$ с точкой $O$ (рис. 3), то увидим, что в прямоугольных треугольниках $AOK$ и $BOL$ катеты соответственно пропорциональны:

$$\frac{AK}{OA} = \frac{BL}{OB} = \frac{1}{2},$$

следовательно, треугольники эти подобны и угол $AOK$ равен углу $BOL$, а потому прямые $OK$ и $OL$ совпадают. Точно так же, если мы выберем произвольное (положительное) значение $x$ и построим указанным способом перпендикуляр, изображающий соответственное значение $y$, то конец этого перпендикуляра будет лежать на той же прямой. В самом деле, пусть $x_1$ обозначает произвольное значение времени $x$; соответствующее значение $y$ будет равно $\frac{1}{2}x_1$; отложим по горизонтальной оси отрезок $OE = x_1$ и восставим из его конца перпендикуляр $EF = \frac{1}{2}x_1$; тогда найдем, что в треугольнике $EOF$ отношение катетов $\frac{EF}{OE} = \frac{1}{2}$, следовательно, он подобен треугольнику $AOK$, а потому угол $EOF$ равен углу $AOK$, а прямая $OF$ совпадает с прямой $OK$.

Возьмем теперь на прямой $OF$ произвольную точку $P$ и опустим из нее перпендикуляр $PQ$ на ось $Ox$. Очевидно, $\triangle POQ$ подобен $\triangle AOK$ (так как у этих прямоугольных треугольников есть общий острый угол $O$); следовательно, отношение $\frac{QP}{OQ} = \frac{1}{2}$, или $QP = \frac{1}{2}OQ$. Пусть отрезок $OQ$ имеет длину $x_2$ ед.; тогда он изображает промежуток времени в $x_2$ секунд, а перпендикуляр $QP$, равный $\frac{1}{2}x_2$ ед., изобразит соответствующее расстояние автомобиля от столба: $y_2 = \frac{1}{2}x_2$ (км). Таким образом, любая точка прямой $OP$ изображает (своим расстоянием от оси $Ox$) некоторое значение функции $y$, соответствующее тому значению переменного $x$, которое может быть изображено расстоянием той же точки от оси $Oy$; например на рис. 3 имеем: $PH = OQ = x_2$ (ед.).

Прямая $OP$ называется *графиком* данной функции $y = \frac{1}{2}x$. Как мы видели, она наглядно изображает изменения функции, и на ней мы можем проследить все те особенности изменений данной функции, которые были отмечены нами раньше. Очевидно, например (рис. 4), что перпендикуляры, изображающие значения $y$, пропорциональны отрезкам, изображающим соответственные значения $x$, так как $\triangle AOK$, $\triangle BOL$ и т. д. подобны; ясно также, что с возрастанием отрезков, изображающих $x$, возрастает и длина перпендикуляров, изображающих $y$, и притом это возрастание идет равномерно: при передвижении вправо по горизонтальной оси на 1 ед. длина перпендикуляра увеличивается каждый раз на $\frac{1}{2}$ ед. (рис. 4).

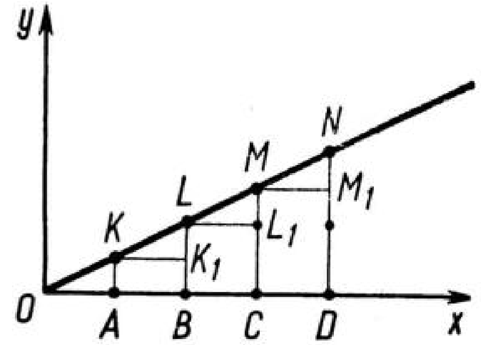

Рис. 4

Точка $O$ (место пересечения осей) изображает первоначальное положение автомобиля у столба; она соответствует значению времени $x$, равному 0; в этом случае и пройденное расстояние $y$ также равно 0.

До сих пор мы брали только положительные значения $x$ и $y$. Но можно рассматривать и отрицательные значения этих величин и графически изображать функцию и для этого случая.

Пусть $x = -1, -2, -3, -4, -5, -6, \ldots$

Тогда $y = -\frac{1}{2}, -1, -1\frac{1}{2}, -2, -2\frac{1}{2}, -3, \ldots$ .

Это означает, что за 1, 2, 3 ... с до начального момента автомобиль находился позади столба в $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, ... км. На рисунке мы будем изображать промежутки времени, выражаемые отрицательными числами (т. е. считаемые до начального момента), отрезками, откладываемыми влево от точки $O$ по оси $Ox$, а соответствующие этим промежуткам времени расстояния (отрицательные) будем изображать перпендикулярами, проводимыми вниз. Получим ряд точек $K_1$, $L_1$, $M_1$, $N_1$, ... (рис. 5) и теперь, повторяя все прежние рассуждения, можем доказать, что все эти точки также лежат на одной прямой $ON_1$, которая является продолжением прежнего графика $OP$.

Легко увидеть, что изменения функции и при отрицательных значениях $x$ и $y$ будут иметь те же особенности, что и при положительных значениях; и весь ход изменений, как и в предыдущем случае, можно проследить на построенном графике.

Предположим теперь, что в предыдущей задаче скорость автомобиля, не изменяя своей величины, стала отрицательной, т. е. что автомобиль движется в сторону, противоположную предыдущей. Тогда формула, выражающая расстояние автомобиля от столба, будет $y = -\frac{1}{2}x$. Исследуем теперь изменения $y$, рассматривая его как функцию от $x$.

Пусть $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots$ .

Тогда $y = -\frac{1}{2},\ -1,\ -1\frac{1}{2},\ -2,\ -2\frac{1}{2},\ -3, \ldots$ .

Очевидно, что и здесь значения $y$ пропорциональны соответствующим значениям $x$, но с возрастанием независимого переменного $x$ его функция $y$ убывает, и притом равномерно (при увеличении $x$ на единицу значения $y$ убывают каждый раз на $\frac{1}{2}$). То же самое обнаружим, если примем во внимание отрицательные значения $x$ и соответствующие им значения $y$:

$x = -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6, \ldots,$

$y = \frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ 2\frac{1}{2}, -3, \ldots$ .

Если и в этом случае построим изображение изменений данной функции, то найдем также, что график функции $y = -\frac{1}{2}x$ — прямая линия $N_1N$, лежащая в левом верхнем и правом нижнем углах осей $Ox$ и $Oy$ (рис. 6). Этот график дает нам возможность наглядно проследить, что значения $y$ и $x$ пропорциональны и что с возрастанием $x$ величина $y$ убывает равномерно (при передвижении слева направо оказывается, что точки графика лежат все ниже и ниже относительно оси $Ox$, причем передвижению вправо на 1 ед. соответствует каждый раз понижение на $\frac{1}{2}$ ед.).

Рассмотрим еще такую задачу.

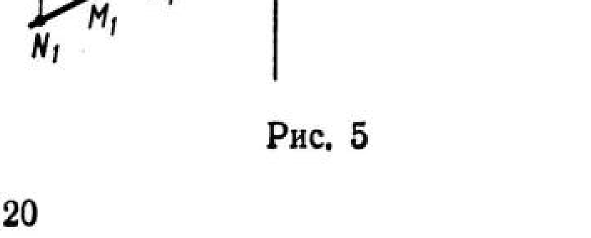


Рис. 5

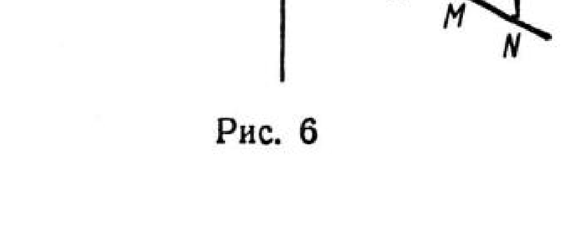


Рис. 6

*В баке есть некоторое количество воды. В каждую минуту в него вливается по 3 ведра. На сколько увеличится запас воды в баке через $x$ минут?*

Пусть искомое количество воды равно $y$, тогда $y = 3x$ (ведер). Исследуем изменение $y$, принимая его за функцию от $x$.

Пусть $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ .

Тогда $y = 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$ .

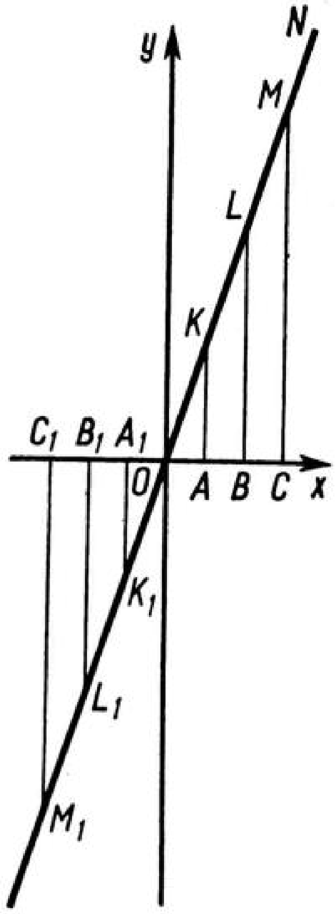


Рис. 7

Нетрудно увидеть, что и здесь значения $y$ пропорциональны соответствующим значениям $x$ (каждое значение $y$ больше соответствующего $x$ в 3 раза); с возрастанием $x$ и функция его $y$ возрастает, и притом равномерно (при увеличении $x$ на 1 единицу значения $y$ возрастают каждый раз на 3 единицы).

Изобразим нашу функцию графически. Взяв пару взаимно перпендикулярных осей $Ox$ и $Oy$, будем откладывать по горизонтальной оси $Ox$ (рис. 7) отрезки $OA, OB, \ldots$, изображающие время (на нашем чертеже одной минуте соответствует отрезок $OA$); из концов их будем проводить к оси $Ox$ перпендикуляры $AK, BL, \ldots$, изображающие количество прибывшей воды (причем каждый из отрезков $OA$, $AB$, $BC$ соответствует 1 ведру). Тогда можем убедиться, как и в предыдущем случае, что концы всех этих перпендикуляров лежат на прямой линии $ON$, которая и будет графиком данной функции $y = 3x$.

Точка $O$ соответствует начальному моменту ($x = 0$, $y = 0$); можно получить продолжение графика по другую сторону оси $Ox$, если принять во внимание отрицательные значения $x$ и соответствующие им значения $y$.

Пусть $x = -1, -2, -3, -4, -5, -6, \ldots$ .

Тогда $y = -3, -6, -9, -12, -15, -18, \ldots$ .

Задача получает при этом такой смысл: за 1, 2, 3, ... мин до настоящего момента в баке было 3, 6, 9, ... ведрами меньше воды, чем теперь.

Полный график данной функции $y = 3x$ располагается, таким образом, в правом верхнем и левом нижнем углах осей и наглядно представляет нам как пропорциональность значений $y$ и $x$, так и равномерное возрастание $y$ при возрастании $x$.

Возьмем еще функцию $y = -3x$ (это соответствовало бы предыдущей задаче, но только при условии, что в каждую

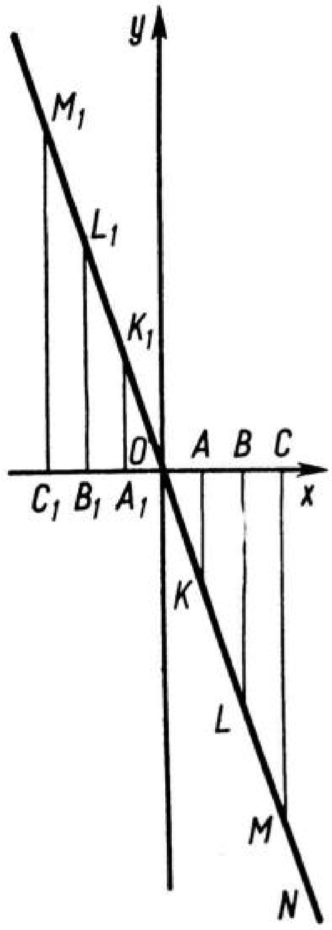

Рис. 8

минуту из бака выливается по 3 ведра воды) и рассмотрим изменения этой функции.

Пусть $x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots; -1, -2, -3, -4, -5, \ldots$ .

Тогда $y = -3, -6, -9, -12, -15; \ldots; 3, 6, 9, 12, 15, \ldots$ .

Как видно, величины $y$ и $x$ по-прежнему пропорциональны, и с возрастанием $x$ его функция $y$ убывает равномерно.

Показав эти изменения на рисунке, убедимся, что график функции $y = -3x$ представляет собой прямую линию, расположенную в левом верхнем и правом нижнем углах осей (рис. 8).

На основании разобранных и других подобных им примеров можем заключить, что всякая функция первого порядка вида $y = ax$ (где $a$ — постоянное число, положительное или отрицательное) обладает следующими свойствами:

1. Функция $y$ и ее независимое переменное $x$ прямо пропорциональны.

В общем виде это можно доказать так: пусть имеем любые два значения переменного $x$: $x_1$ и $x_2$; соответствующие значения функции будут $y_1 = ax_1$ и $y_2 = ax_2$; разделив эти равенства почленно, имеем: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$, т. е. отношение любых двух значений $x$ равно отношению соответствующих значений $y$, а в этом и заключается пропорциональность величин $y$ и $x$.

2. При возрастании независимого переменного $x$ функция его $y$ возрастает, если коэффициент $a$ положительный, и убывает, если этот коэффициент отрицательный.

Это обнаруживается в общем виде так: возьмем два значения переменного — меньше $x_1$ и больше $x_2$ — и определим соответствующие значения функции: $y_1 = ax_1$ и $y_2 = ax_2$. Найдем разность $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$. Сомножитель $x_2 - x_1$ всегда положительный (так как $x_2 > x_1$); следовательно, если $a > 0$, то $y_2 - y_1 > 0$, или $y_2 > y_1$ — функция возросла при возрастании независимого переменного, если же $a < 0$, то $y_2 - y_1 < 0$, или $y_2 < y_1$ — функция убыла.

3. Возрастание и убывание функции равномерно, т. е. при одинаковых приращениях переменного $x$ приращения функции также одинаковы.

Это можно обнаружить так: пусть переменное $x$ получает два произвольных значения, сначала $x_1$, а затем $x_2$; соответственные значения функции будут $y_1 = ax_1$ и $y_2 = ax_2$. Теперь видим, что при этом независимое переменное получило прибавку, или, как принято говорить, *приращение* $x_2 - x_1$, а функция получила приращение $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$. Отсюда видно, что если приращение переменного $x_2 - x_1$ будет иметь постоянную величину, то функция будет получать постоянное приращение $a(x_2 - x_1)$, каковы бы ни были значения переменного $x_1$ и $x_2$.

**Коэффициент $a$ показывает, как видно, отношение между приращением функции $y$ и соответственным ему приращением независимого переменного $x$:**

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Иначе говоря, **он показывает скорость, с которой возрастает или убывает функция:** если, например, $a = 5$, то это значит, что при увеличении $x$ на 1 единицу $y$ возрастает на 5 единиц (в самом деле, если имеем функцию $y = 5x$ и положим $x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, то $y = 5, 10, 15, 20, 25, \ldots$), а если $a = 100$, то это значит, что при увеличении $x$ на 1 единицу $y$ возрастает на 100 единиц (функция $y = 100x$ при $x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ дает $y = 100, 200, 300, 400, 500, \ldots$).

**График функции вида $y = ax$, как мы убедились, есть прямая линия; она проходит через точку пересечения осей и помещается при $a > 0$ в правом верхнем и левом нижнем углах осей** (так как в этом случае при положительном $x$ и $y$ положителен, а при отрицательном $x$ и $y$ отрицателен); **при $a < 0$ график лежит в левом верхнем и правом нижнем углах осей.**

Зная, что график функции вида $y = ax$ есть прямая линия, мы можем строить ее весьма просто по двум ее точкам. Пусть, например, нам надо построить график функции $y = 2x$; мы знаем, что эта прямая проходит через точку пересечения осей (при $x = 0$ и $y = 0$); дадим теперь независимому переменному $x$ произвольное значение, например $x = 1$, и найдем соответствующее значение $y = 2$; отложив по оси $Ox$ отрезок $OA = 1$ (рис. 9) и восставив в этой точке перпендикуляр $AK = 2$, получим вторую точку графика $K$.

Прямая $OK$ и есть искомый график функции $y = 2x$.

Если будем строить графики различных функций вида $y = ax$, например: $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$ и т. д., то найдем, что с увеличением абсолютной величины коэффициента $a$ график поднимается кверху все круче (приближается

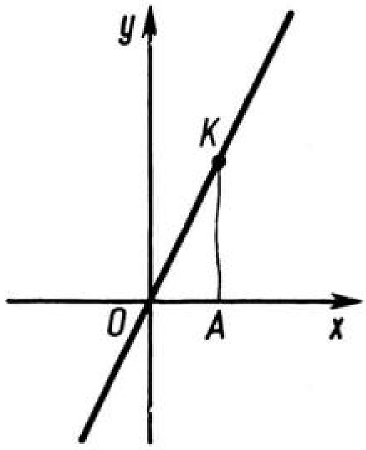


Рис. 9

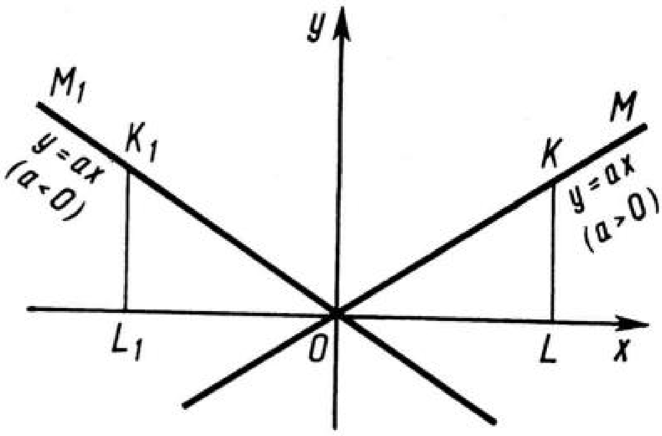


Рис. 10

к вертикальной оси); с уменьшением же абсолютной величины $a$ график становится все более отлогим (приближается к горизонтальной оси). Таким образом, угол, составленный графиком с осью $Ox$, изменяется с изменением коэффициента $a$; по этой причине коэффициент $a$ называют иногда *угловым* коэффициентом.

Угловой коэффициент показывает скорость и направление подъема данной прямой. Например, прямая $y = 2x$ расположена так, что при передвижении вправо на 1 единицу она поднимается на 2 единицы; прямая $y = 3x$ при передвижении вправо на 1 единицу поднимается на 3 единицы; прямая $y = -\frac{1}{2}x$ при передвижении вправо на 1 единицу понижается на $\frac{1}{2}$ единицы и т. д.

Вследствие этого угловой коэффициент иначе называют просто *подъемом прямой*.

При помощи тригонометрии можно истолковать значение углового коэффициента еще яснее. Пусть прямая $OM$ (рис. 10) будет графиком функции $y = ax$ (причем $a > 0$); выберем на ней произвольную точку $K$, соответствующую значениям переменных $x = x_1$, $y = y_1$ и опустим из этой точки перпендикуляр $KL$ на ось $Ox$; тогда $KL = y_1$, $OL = x_1$ и $\operatorname{tg} \angle KOL = \frac{y_1}{x_1}$; но, с другой стороны, данные значения переменных $y_1$ и $x_1$ связаны уравнением: $y_1 = ax_1$, откуда $\frac{y_1}{x_1} = a$, и поэтому получаем:

$$\operatorname{tg} \angle KOL = \frac{y_1}{x_1} = a.$$

Итак, **угловой коэффициент графика равен тангенсу угла, составляемого данной прямой с положительным направлением оси $Ox$.**

С другой стороны, мы видели выше, что этот же угловой коэффициент равен отношению между приращениями данной функции $y$ и независимого переменного $x$:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a,$$

следовательно, отношение между соответствующими приращениями функции $y = ax$ и независимого переменного $x$ выражает также подъем ее графика, или тангенс угла между графиком и осью $Ox$.

Мы полагали до сих пор, что $a > 0$. Но все наши выводы остаются в силе и тогда, когда $a < 0$. В самом деле, возьмем прямую $OM_1$, соответствующую этому случаю (рис. 10); выберем на ней произвольную точку $K_1$, соответствующую значениям $x = x_1$, $y = y_1$, и опустим из нее перпендикуляр $K_1L_1$ на ось $Ox$; тогда тангенс угла $K_1OL$, составленного данной прямой и положительным направлением оси $Ox$, будет равен — $\frac{K_1L_1}{OL_1}$, но $K_1L_1 = y_1$, $OL_1 = -x_1$ (так как $x_1$ — отрицательное число), и мы получаем:

$$\operatorname{tg} \angle K_1OL = \frac{K_1L_1}{OL_1} = \frac{y_1}{x_1} = a,$$

как и в предыдущем случае.

Выше мы нашли, что если функция выражена формулой вида $y = ax$, то величины $y$ и $x$ пропорциональны; можно показать, что и наоборот, если две величины пропорциональны, то формула, выражающая их функциональную зависимость, должна иметь вид $y = ax$. В самом деле, если две величины $y$ и $x$ пропорциональны, то это значит, что отношение любых двух значений одной из них ($y_1$ к $y_2$) равно отношению соответствующих двух значений другой величины ($x_1$ к $x_2$):

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2},$$

отсюда

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Взяв еще и другие пары соответствующих значений: $x_3$ и $y_3$, $x_4$ и $y_4$, ..., найдем подобным же способом, что

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4} = \cdots,$$

т. е. отношение любого значения $y$ к соответствующему значению $x$ есть величина постоянная. Назвав эту постоянную величину буквой $a$, можем написать, что для любого значения $y$ и соответствующего ему $x$ справедливо равенство:

$$\frac{y}{x} = a,$$

отсюда

$$y = ax.$$

Таким образом, **функция $y = ax$ выражает закон прямой пропорциональности и изображается графически прямой линией, проходящей через точку пересечения осей.**

Вот образец практического применения графиков. Известно, что 1 м равен 0,47 сажени; следовательно, если нужно узнать, скольким саженям равны $x$ метров, то искомое число сажен $y = 0{,}47x$ и будет функцией от $x$.

Мы можем получить графическую таблицу превращения метров в сажени, если построим надлежащим образом график этой функции $y = 0{,}47\,x$.

Примем, например, что на горизонтальной оси каждый единичный отрезок соответствует 1 м (а на вертикальной — 1 сажени). Чтобы получить график нашей функции, возьмем точку, соответствующую хотя бы 20 м ($x = 20$, $y = 9{,}4$ — по горизонтальной оси откладываем отрезок в 20 ед. и из конца его восставляем перпендикуляр, равный 9,4 ед.), затем соединим эту точку с точкой пересечения осей (рис. 11).

Наш рисунок позволяет непосредственно переводить метры в сажени и наоборот. Например, по рисунку сразу видно, что 9 м $\approx$ 4,2 саж.; 13 м $\approx$ 6,1 саж.; 17,2 м $\approx$ 8,1 саж.; 4 саж. $\approx$ $\approx$ 8,5 м; 7,3 саж. $\approx$ 15,5 м и т. д.

Подобным способом можно получить графические таблицы для превращения фунтов в килограммы, франков в рубли

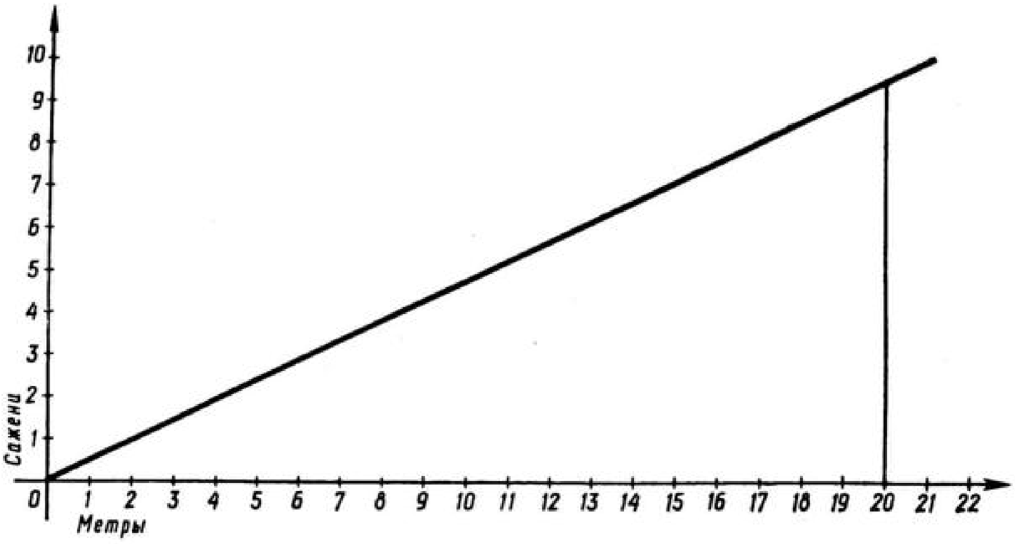


Рис. 11

и т. д.; если нужно увеличить точность таблицы, то достаточно выбрать для этого большую единицу длины и соответственно увеличить размеры рисунка.

## § 4. Необходимые сведения о координатах

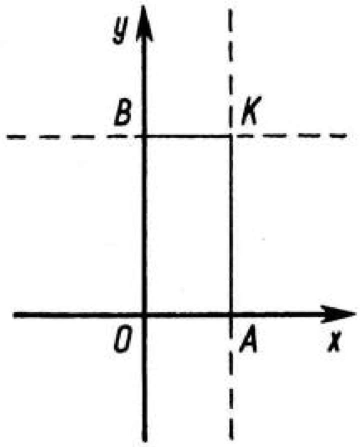


Рис. 12

Припомним, как мы находили отдельные точки, по которым строили график какой-либо функции. Когда, например, нужно было получить график функции $y = 2x$, мы находили два соответствующих значения переменного и функции: $x = 1$ и $y = 2$ и откладывали от точки $O$ по горизонтальной оси $Ox$ вправо отрезок $OA = 1$, а из точки $A$ проводили к оси $Ox$ вверх перпендикуляр $AK = 2$ (рис. 12). Таким образом, положение точки $K$ определялось условиями, что она удалена от горизонтальной оси $Ox$ вверх на расстояние $AK = 2$ ед., а конец этого перпендикуляра $AK$ отстоит от точки $O$ на расстояние $OA = 1$ ед. Можно выразить это условие иначе: опустив из точки $K$ перпендикуляр $KB$ на ось $Oy$, видим, что $KB = AO = 1$, и положение точки $K$ определится так: она удалена от горизонтальной оси $Ox$ вверх на 2 ед. длины, а от вертикальной оси $Oy$ — вправо на 1 ед.

Заметим, что подобными условиями положение точки $K$ определяется на плоскости вполне, т. е. на плоскости нет другой точки, которая удовлетворяла бы тем же условиям. В самом деле, все точки, удаленные от горизонтальной оси $Ox$ вверх на расстояние, равное 2, лежат на прямой $BK$, параллельной оси $Ox$ и отстоящей от нее на 2 ед. вверх; все точки, удаленные от вертикальной оси вправо на расстояние, равное 1, лежат на прямой $AK$, параллельной оси $Oy$ и отстоящей от нее на 1 ед. вправо; точка же, которая удовлетворяет одновременно обоим условиям, должна лежать на пересечении указанных прямых. Но две прямые могут пересекаться только в одной точке, следовательно, точка $K$ есть единственная удовлетворяющая данным условиям.

Итак, положение точки на плоскости вполне определяется, если заданы (по величине и по направлению) ее расстояния от двух взаимно перпендикулярных прямых $Ox$ и $Oy$. Эти расстояния называются *координатами* точки; в частности, расстояние точки от оси $Oy$ (в данном случае $BK$) или равный ему отрезок горизонтальной оси ($OA$) называется *абсциссой* точки («абсцисса» значит «отрезок»), а расстояние точки от оси $Ox$ ($AK$)

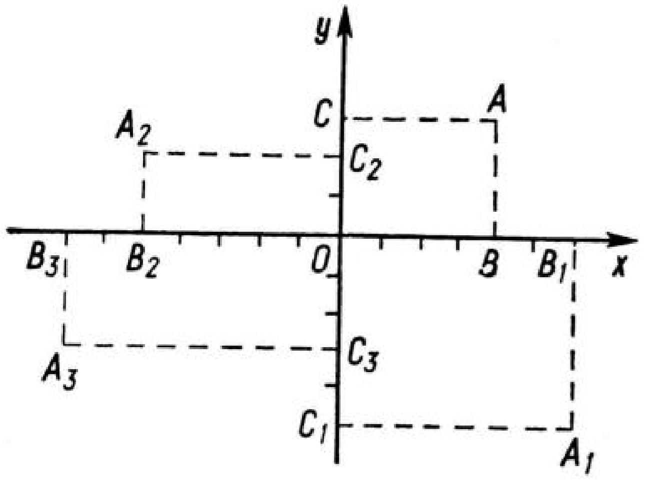


Рис. 13

или равный ему отрезок вертикальной оси ($OB$), называется *ординатой* точки («ордината»—отвес, перпендикуляр). Направления этих расстояний будем обозначать знаками «+» и «—», считая положительными те расстояния, которые откладываются вправо (по горизонтальному направлению) или вверх (по вертикальному), и отрицательными — противоположные им; в данном случае абсцисса точки $K$ равна 1 ед., считая вправо, или $+1$ ед.; ордината ее равна 2 ед., считая вверх, или $+2$ ед.; если взять точку, отстоящую от вертикальной оси на 4 ед. вправо, а от горизонтальной — на 3 ед. вверх (рис. 13, точка $A$), то ее абсцисса $OB = +4$, а ордината $OC = +3$; на том же рисунке видно, что точка $A_1$ имеет абсциссу $OB_1 = +6$ и ординату $OC_1 = -5$; точка $A_2$ — абсциссу $OB_2 = -5$ и ординату $OC_2 = +2$; точка $A_3$ — абсциссу $OB_3 = -7$ и ординату $OC_3 = -3$. Сокращенно обозначают абсциссу буквой $x$, ординату $y$ и пишут так: точка $A$ ($x = 4$; $y = 3$), точка $A_1$ ($x = 6$; $y = -5$), ..., или, еще короче: точка $A$ (4; 3), точка $A_1$ (6; —5) и т. д. Оси для краткости обозначают также одной буквой: вместо «ось $Ox$» пишут «ось $x$», а вместо «ось $Oy$» — «ось $y$».

Следует еще обратить внимание на точки, одна из координат которых есть нуль. Легко увидеть, что такие точки лежат на самих осях. Например, точка $A$ (4; 0) лежит на оси $Ox$, в 4 единицах вправо от начала координат; точка $B$ (0; 3) лежит на оси $Oy$, в 3 единицах вверх от начала координат; точка же, определяемая координатами (0; 0), есть, очевидно, точка пересечения осей, или, как ее иначе называют, *начало координат O*.

Если нам нужно построить точку по заданным ее координатам, то это проще всего выполнить так, как мы делали при графическом изображении функции. Пусть, например, нужно построить точку (—5; 3). Тогда отложим по оси $Ox$ влево отрезок $OD = 5$, а из конца его восставим к оси $x$ вверх перпендикуляр $DE = 3$, и точка $E$ есть искомая.

Определение положения точки на плоскости с помощью координат применяется на практике довольно часто. Так, например, при рисовании по клеточкам мы выполняем и проверяем рисунок, считая, на сколько клеточек удалена та или иная его точка от левого и от нижнего его края. Рисуя хотя бы часы, изображенные на рис. 14, мы должны заметить, что конец левой гири отстоит от левого края чертежа на 3 клеточки, а от нижнего — на 1 клеточку; конец маятника от левого края — на 4 клеточки, а от нижнего — на 5; середина циферблата (место, где прикреплены стрелки)—от левого края на 4 клеточки, а от нижнего — на 12 клеточек и т. д. Левый и нижний край рисунка являются в данном случае осями координат.

Подобным образом производится расчет и при вышивании по канве. Если нужно, например, воспроизвести узор, изображенный на рис. 15, то мы замечаем, что самые нижние концы венка отстоят от нижнего края рисунка на 6, а от левого — на 24 и 34 клеточки; следующие нижние концы венка отстоят от нижнего края рисунка на 8, а от левого — на 13 и 45 клеточек и т. д.

На географических картах положение какого-либо места обозначается его широтой и долготой, т. е. расстоянием от экватора, считая к северу или югу, и от первого меридиана, считая к востоку или западу (экватор и первый меридиан являются, таким образом, осями координат). Расстояния эти выражаются, как известно, в градусах и их частях — минутах и секундах и изображаются на картах прямыми или чаще кривыми линиями (так как поверхность Земли почти шарообразна, то соответствующие расстояния на ней представляют приблизительно дуги окружностей).

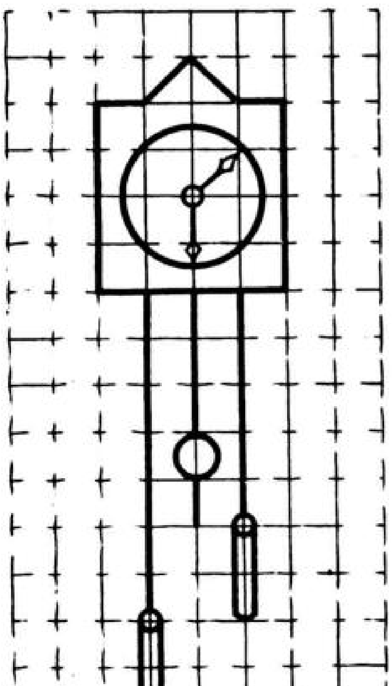

Рис. 14

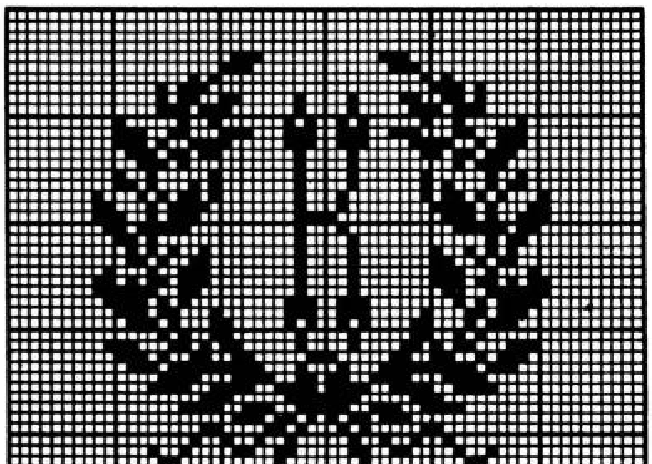

Рис. 15

## § 5. Функции первого порядка вида $y=ax+b$ и их наглядное изображение

Рассмотрим такую задачу.

*Верховой ездок находится в 6 м впереди шоссейной будки и удаляется от нее со скоростью 2 м в каждую секунду. Где будет ездок через $x$ секунд?*

Пусть искомое расстояние верхового ездока от будки $y$ м, очевидно, что $y = 2x + 6$, и если принять $x$ за независимое переменное, то $y$ будет его функцией.

Будем давать $x$ (время) различные значения и следить, как изменяется расстояние $y$.

Пусть $x=0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots; -1, -2, -3, -4, -5, \ldots$.

Тогда $y=6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots; 4, 2, 0, -2, -4, \ldots$.

Нетрудно заметить, что здесь величины $y$ и $x$ уже не пропорциональны (например, второе значение $y$ больше второго значения $x$ в 8 раз, а третье значение $y$ больше соответствующего $x$ в 5 раз); но по-прежнему с возрастанием $x$ возрастает и $y$, притом равномерно (при увеличении $x$ на 1 единицу $y$ возрастает всякий раз на 2 единицы).

Изобразим теперь нашу функцию графически. Возьмем снова оси $Ox$ и $Oy$ и будем откладывать по горизонтальной оси $Ox$ (рис. 16) отрезки $OA=1$, $OB = 2, \ldots$, изображающие время (причем каждая единица длины соответствует 1 с), а из концов их будем восставлять к оси $Ox$ перпендикуляры $AK$, $BL$, ..., изображающие соответственные расстояния верхового от будки (при этом каждая единица длины изображает 1 м). Начальное расстояние верхового (6 м впереди будки) будет изображено отрезком $OH$, а расстояния его от будки в предыдущие моменты (на 1, 2, 3, ... с раньше) — перпендикулярами $A_1K_1$, $B_1L_1$ и т. д.

По рисунку видно, что и в этом случае концы перпендикуляров, изображающих значения нашей функции $y = 2x + 6$, лежат на одной прямой. Докажем, что это так и должно быть.

Проведем сначала одну вспомогательную прямую — график функции $y = 2x$. Предположим, что вслед за нашим верховым по шоссе едет его товарищ с такой же скоростью (2 м в каждую секунду), но в 6 м позади его, тогда в начальный момент этот второй ездок будет проезжать мимо шоссейной будки, а спустя $x$ секунд его расстояние от будки будет выражаться формулой $y = 2x$ (метров). Построим график движения этого второго ездока (это мы уже умеем делать): в начальный момент положение второго ездока выражается точкой $O$ (началом координат), а по истечении 1 с его расстояние от будки равно 2 м и изображается перпендикуляром $AE$ (рис. 17), равным 2 ед. и восставленным из точки $A$ (отстоящей от $O$ на расстояние $OA = 1$); график же функции $y = 2x$, как мы уже знаем, есть прямая линия, проходящая через эти две точки $O$ и $E$.

Докажем теперь, что график функции $y = 2x + 6$ есть прямая, параллельная графику функции $y = 2x$.

С этой целью соединим точки $H$ и $K$ и рассмотрим четырехугольник $OHKE$. В нем сторона $EK = AK - AE = 8 - 2 = 6$ ед.; сторона $OH$ также равна 6 ед.; следовательно, $OH = EK$. Кроме того, стороны $OH$ и $EK$, как видим, параллельны друг другу, а если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то такой четырехугольник есть параллелограмм и, следовательно, линия $HK$ параллельна линии $OE$.

Подобным образом докажем вообще, что, взяв произвольное значение $x$, равное $x_1$, и построив перпендикуляр, изображающий соответственное расстояние первого ездока от будки: $y_1 = 2x_1 + 6$, получим точку, лежащую на той же прямой $HK$. В самом деле, отложим по оси $Ox$ отрезок $OF = x_1$ и восставим в точке $F$ перпендикуляр $FP = 2x_1 + 6$; точку пересечения этого перпендикуляра с прямой $OE$ (т. е. графиком функции $y = 2x$) назовем $Q$. Так как точка $Q$ лежит на графике функции $y = 2x$, то перпендикуляр $QF$, опущенный из нее на ось $Ox$, должен изображать расстояние от будки второго

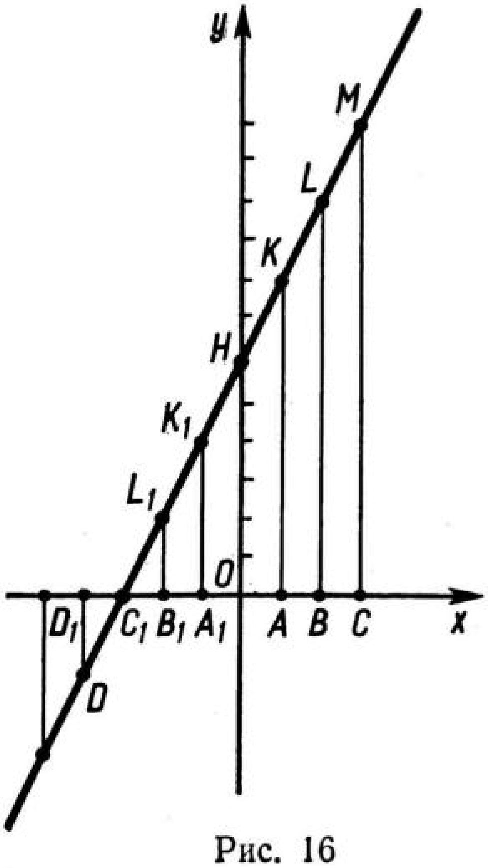

Рис. 16

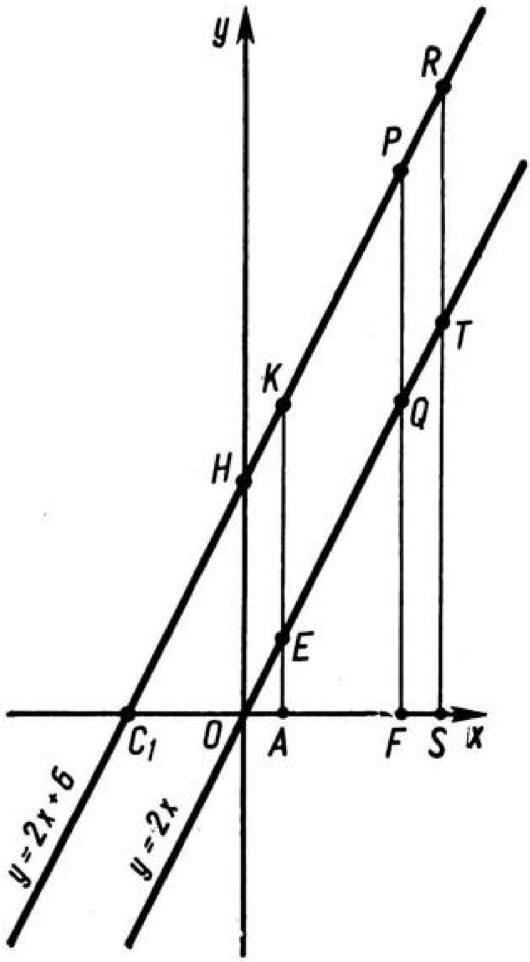

Рис. 17

ездока, соответствующее времени, изображаемому отрезком $OF$, т. е. $x_1$ секундам, следовательно, перпендикуляр $QF$ должен иметь длину $2x_1$. Проведем теперь прямую через точки $H$ и $P$ и рассмотрим четырехугольник $OHPQ$.

Если $FP = 2x_1 + 6$ и $QF = 2x_1$, то $PQ = 6$; сторона $OH$ также равна 6, следовательно, $PQ = OH$; эти стороны сверх того и параллельны, поэтому четырехугольник $OHPQ$ есть параллелограмм, и прямая $HP$ параллельна $OQ$. А так как через точку может проходить только одна прямая, параллельная линии $OQ$, то наша прямая $HP$ должна совпадать с прежде построенной прямой $HK$.

Итак, мы нашли, что конец любого перпендикуляра, изображающего значение функции $y = 2x + 6$, лежит на прямой $HP$; можно показать, что, наоборот, если на прямой $HP$ возьмем любую точку $R$, то перпендикуляр $RS$, опущенный из нее на ось $Ox$, выразит некоторое значение функции $y = 2x + 6$ (соответствующее тому значению времени $x$, которое выражается отрезком горизонтальной оси от точки $O$ до конца этого перпендикуляра $S$). В самом деле, пусть отрезок $OS = x_2$, а перпендикуляр $RS = y_2$, и пусть $T$ будет точка пересечения перпендикуляра $RS$ с линией $OQ$ (т. е. с графиком функции $y = 2x$). По рисунку видно, что $RS = ST + TR$, но так как точка $T$ лежит на графике функции $y = 2x$, то перпендикуляр $ST$ выражает расстояние от будки второго ездока через $x_2$ секунд, т. е. $ST = 2x_2$; отрезок же $TR = OH = 6$ (так как четырехугольник $OHRT$ есть параллелограмм); следовательно, $RS = y_2 = 2x_2 + 6$, т. е. перпендикуляр $RS$ выражает расстояние от будки первого ездока через $x_2$ секунд.

Мы нашли, таким образом, что график функции $y = 2x + 6$ есть прямая, параллельная графику функции $y = 2x$ и пересекающая ось $Y$ в точке ($H$), лежащей на 6 ед. выше начала координат.

На этом графике мы можем, как и в предыдущем случае, проследить, что при перемещении вправо (т. е. с возрастанием независимого переменного) возрастает и длина перпендикуляров, изображающих значения функции; и возрастание это совершается равномерно: при перемещении вправо на 1 ед. длины перпендикуляров увеличиваются всякий раз на 2 ед. длины. График пересекает ось $x$ в точке ($C_1$), отстоящей от $O$ влево на 3 ед. длины; это показывает, что 3 с назад первый ездок проезжал мимо будки. Точки графика, расположенные левее точки $C_1$, лежат вместе с тем и под осью $x$; это показывает, что 4, 5, 6, ... с тому назад (вообще при значениях времени, предшествующих значению $x = -3$) первый ездок находился позади будки.

Возьмем еще задачу.

*Велосипедист находится в 10 м впереди шоссейной будки и приближается к ней со скоростью $2\frac{1}{2}$ м в каждую секунду. Определить его расстояние от будки через x секунд.*

Очевидно, что искомое расстояние $y = 10 - 2\frac{1}{2}x$ (м); примем $x$ за независимое переменное и исследуем изменения его функции $y$.

Пусть $x = 0,\ 1, 2, 3, 4,\ 5, \ldots; -1, -2, -3, -4, \ldots$ .

Тогда $y = 10,\ 7\frac{1}{2},\ 5,\ 2\frac{1}{2},\ 0, -2\frac{1}{2}, \ldots; 12\frac{1}{2},\ 15,\ 17\frac{1}{2},\ 20, \ldots$ .

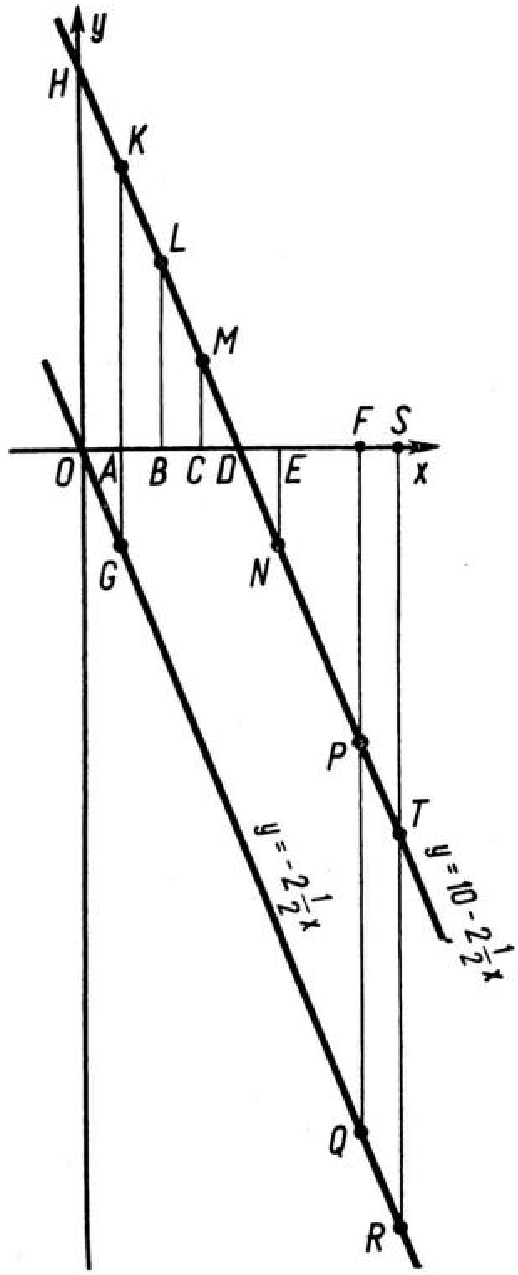

Рис. 18

Величины $y$ и $x$, очевидно, не пропорциональны (например, второе значение $y$ больше второго значения $x$ в $7\frac{1}{2}$ раз, а третье значение $y$ больше соответствующего $x$ только в $2\frac{1}{2}$); с возрастанием $x$ функция его убывает (и наоборот), и притом равномерно (при увеличении $x$ на 1 ед. $y$ убывает всякий раз на $2\frac{1}{2}$ ед.).

Изобразим графически нашу функцию. Первоначальное расстояние нашего велосипедиста (10 м впереди будки) будет представлено на оси $Oy$ отрезком $OH = 10$ ед. (рис. 18); затем будем откладывать по горизонтальной оси $Ox$ отрезки $OA$, $OB$, ..., изображающие время (причем каждая единица длины соответствует 1 с), а из их концов будем восставлять перпендикуляры $AK$, $BL$, ..., изображающие расстояния велосипедиста от будки (причем каждая единица длины соответствует 1 м; в точке $D$ не придется восставлять никакого перпендикуляра, так как по истечении 4 с велосипедист окажется у самой будки).

По чертежу видно, что концы всех перпендикуляров, изображающих значения нашей функции $y = 10 - 2\frac{1}{2}x$, лежат на одной прямой. Как и в предыдущем случае, докажем, что так и должно быть и что график функции $y = 10 - 2\frac{1}{2}x$ параллелен графику функции $y = -2\frac{1}{2}x$.

Пусть перед нашим велосипедистом, в 10 м от него, едет по шоссе его товарищ с такой же скоростью $\left(2\frac{1}{2}\text{ м/с}\right)$ и в том же направлении; тогда в начальный момент он будет проезжать мимо будки, а спустя $x$ секунд будет позади будки на $2\frac{1}{2}$ (метров), т. е. его расстояние от будки будет выражено формулой $y = -2\frac{1}{2}x$. Построим график движения этого второго велосипедиста; как мы знаем, в начальный момент его положение будет изображено точкой $O$, а через одну секунду он будет в $2\frac{1}{2}$ м позади будки, т. е. его расстояние от будки будет изображено перпендикуляром $AG = 2\frac{1}{2}$, опущенным из точки $A$, отстоящей от $O$ на отрезок $OA = 1$; график же функции $y = -2\frac{1}{2}x$, как и в предыдущем случае, будет прямой линией, проходящей через точки $O$ и $G$.

Рассмотрим теперь четырехугольник $OHKG$. В нем $AK = 7\frac{1}{2}$, $AG = 2\frac{1}{2}$, следовательно, $GK = AK + AG = 7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 10$, или $GK = OH$; кроме того, $GK \parallel OH$, следовательно, четырехугольник $OHGK$ есть параллелограмм, и прямая $HK$ параллельна прямой $OG$.

И вообще, возьмем произвольное значение времени, равное $x_1$ (предположим даже, что $x_1$ больше 4 с, так что конец отрезка $OF$, изображающего $x_1$, лежит правее точки $D$), и построим перпендикуляр $FP$, изображающий соответствующее расстояние первого велосипедиста от будки: $y_1 = 10 - 2\frac{1}{2}x_1$; докажем, что конец его $P$ лежит на той же прямой $HK$. В самом деле, пусть $Q$ будет точка пересечения этого перпендикуляра $FP$ с прямой $OG$ $\left(\text{т. е. с графиком функции } y = -2\frac{1}{2}x\right)$; перпендикуляр $FQ$ должен изображать расстояние от будки второго велосипедиста через $x_1$ секунд, следовательно, его абсолютная длина будет $2\frac{1}{2}x_1$ ед. Перпендикуляр же $FP$ имеет длину $2\frac{1}{2}x_1 - 10$ ед. (так как выражаемое им расстояние $y_1 = 10 - 2\frac{1}{2}x_1$ представляет, по условию, отрицательное число); следовательно, отрезок $PQ = 10$ и равен отрезку $OH$, а так как $PQ \parallel OH$, то опять заключаем, что четырехугольник $OHPQ$ есть параллелограмм и линия $HP \parallel OQ$. Но через точку $H$ может проходить только одна прямая, параллельная линии $OQ$; следовательно, наша прямая $HP$ должна совпадать с прежде проведенной прямой $HK$.

Таким образом, конец любого перпендикуляра, изображающего значение функции $y = 10 - 2\frac{1}{2}x$, лежит на прямой $HP$. Можно показать, что, наоборот, если на прямой $HP$ возьмем любую точку $T$, то перпендикуляр $TS$, опущенный из нее на ось $Ox$, выразит некоторое значение функции $y = 10 - 2\frac{1}{2}x$, соответствующее тому значению времени $x$, которое выражается отрезком от точки $O$ до конца этого перпендикуляра $S$. В самом деле, пусть отрезок $OS = x_2$, а перпендикуляр $TS = y_2$. Пусть $R$ будет точка пересечения этого перпендикуляра $TS$ с прямой $OQ$ $\left(\text{т. е. с графиком функции } y = -2\frac{1}{2}x\right)$. На рисунке видно, что $TS = RS - RT$, но так как точка $R$ лежит на графике функции $y = -2\frac{1}{2}x$, то перпендикуляр $RS$ выражает расстояние от будки второго велосипедиста через $x_2$ секунд, т. е. абсолютная длина $RS = 2\frac{1}{2}x_2$; отрезок же $RT = OH = 10$ (так как четырехугольник $OHTR$ есть параллелограмм); следовательно, абсолютная длина $TS = 2\frac{1}{2}x_2 - 10$, если же мы хотим выразить и направление перпендикуляра $TS$, то должны взять его абсолютную длину со знаком минус, т. е. $TS = y_2 = -2\frac{1}{2}x_2 + 10 = 10 - 2\frac{1}{2}x_2$; перпендикуляр $TS$ выражает, таким образом, расстояние от будки первого велосипедиста через $x_2$ секунд.

Итак, оказывается, что график функции $y = 10 - 2\frac{1}{2}x$ есть прямая, параллельная графику функции $y = -2\frac{1}{2}x$ и пересекающая ось $y$ в точке ($H$), лежащей на 10 ед. выше начала координат.

И на этом графике мы можем проследить, что при перемещении вправо (т. е. с возрастанием значений $x$) убывает величина перпендикуляров, изображающих значения функции: точки графика опускаются все ниже и ниже. Точка $D$ (в которой график пересекает ось $x$), имеющая абсциссу 4, показывает, как сказано выше, что, спустя 4 с, первый велосипедист будет проезжать мимо будки; точки графика, расположенные правее ее, лежат в то же время и под осью $x$. Это значит, что по истечении 4 с велосипедист будет ехать уже позади будки, и расстояния от нее будут выражаться отрицательными числами (наоборот, точки графика, лежащие левее точки $D$, расположены вместе с тем над осью $x$, что соответствует положению велосипедиста впереди будки). Убывание функции идет равномерно: при перемещении вправо на 1 ед. длины ордината убывает каждый раз на $2\frac{1}{2}$ ед. и т. д.

Рассматривая подобные примеры, можем таким же образом найти, что график функции $y = 3x - 5$ есть прямая, параллельная графику функции $y = 3x$ и пересекающая ось $y$ в 5 ед. ниже начала координат; что график функции $y = -2x - 7$ параллелен графику функции $y = -2x$ и пересекает ось $y$ в 7 ед. ниже начала координат и т. д.

Вообще можем заключить, что **функция первого порядка вида $y = ax + b$ (где $a$ и $b$ — постоянные числа, не равные нулю) имеет те же свойства, что и функция вида $y = ax$** (см. § 3), **за исключением первого: величины $y$ и $x$ теперь уже не пропорциональны.**

В общем виде это отсутствие пропорциональности между $y$ и $x$ доказывается так.

Пусть имеем два произвольных различных значения $x$: $x_1$ и $x_2$ и соответствующие значения $y$: $y_1 = ax_1 + b$ и $y_2 = ax_2 + b$; тогда отношение $\frac{y_1}{y_2} = \frac{ax_1 + b}{ax_2 + b}$. Если бы это отношение двух значений $y$ было равно отношению соответствующих значений $x$, т. е. если бы имело место равенство $\frac{ax_1 + b}{ax_2 + b} = \frac{x_1}{x_2}$, то, взяв произведение крайних и средних членов пропорции, мы получили бы: $ax_1x_2 + bx_2 = ax_1x_2 + bx_1$, или $bx_2 = bx_1$, т. е. $x_2 = x_1$, а это противоречит условию.

Остальные свойства функции вида $y = ax + b$ доказываются так же, как и для функции $y = ax$ (см. § 3).

Коэффициент $a$ и в этом случае показывает отношение между приращением независимого переменного $x$ и соответствующим приращением функции, или скорость, с которой функция возрастает либо убывает: если имеем значения переменного $x_1$ и $x_2$, то приращение $x$ будет $x_2 - x_1$, а приращение $y$ будет $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ (так как $y_1 = ax_1 + b$ и $y_2 = ax_2 + b$); отсюда $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$. Например, мы рассматривали функцию $y = 10 - 2\frac{1}{2}x$ и видели, что при возрастании $x$ на 1 ед. $y$ убывает на $2\frac{1}{2}$ ед. (при $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ имели $y = 10, 7\frac{1}{2}, 5, 2\frac{1}{2}, 0, \ldots$); если возьмем функцию $y = 1 + 50x$, то при возрастании $x$ на 1 ед. $y$ будет возрастать всякий раз на 50 ед. (при $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ имеем $y = 1, 51, 101, 151, 201, \ldots$).

График функции $y = ax + b$ есть прямая, параллельная графику функции $y = ax$ и пересекающая ось $y$ в точке, расположенной $b$ ед. выше или ниже начала координат в зависимости от знака $b$ (т. е. в точке, ордината которой равна $b$). Ось же $x$ пересекается нашим графиком в такой точке, которая соответствует значению функции $y = 0$ или $ax + b = 0$, отсюда $x = -\frac{b}{a}$, т. е. абсцисса этой точки равна $-\frac{b}{a}$. Очевидно, что и в данном случае проще всего строить график по двум его точкам; пусть, например, нужно построить график функции $y = 6 - 1\frac{1}{2}x$. Наш график пересекает ось $y$ в точке $A$, ордината которой равна 6 (рис. 19); дадим теперь переменному $x$ произвольное значение, например $x = 1$, тогда $y = 4\frac{1}{2}$; следовательно, наш график проходит еще через точку $B\left(1, 4\frac{1}{2}\right)$. Вместо точки $B$ можно было бы найти ту точку, в которой искомый график должен пересечь ось $x$; это будет при $6 - 1\frac{1}{2}x = 0$, или $x = 4$, т. е. абсцисса этой точки ($C$) равна 4.

Если нам даны две функции вида $y = ax + b$ с одинаковыми коэффициентами при $x$, например $y = \frac{1}{2}x + 5$ и $y = \frac{1}{2}x + 7$, то нетрудно увидеть, что их графики взаимно параллельны, так как они оба должны быть параллельны графику функции $y = \frac{1}{2}x$ (рис. 20).

Заметим еще, что если функция вида $y = ax + b$ берется из условия задачи, то график ее не всегда представляет полностью бесконечную прямую, а иногда прямую, ограниченную только с одной стороны, или отрезок прямой

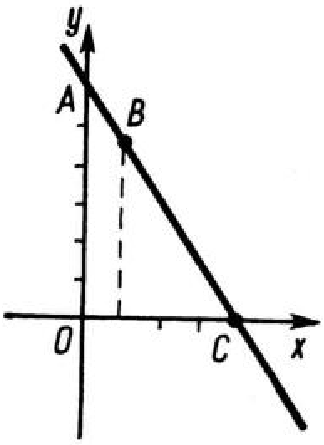


Рис. 19

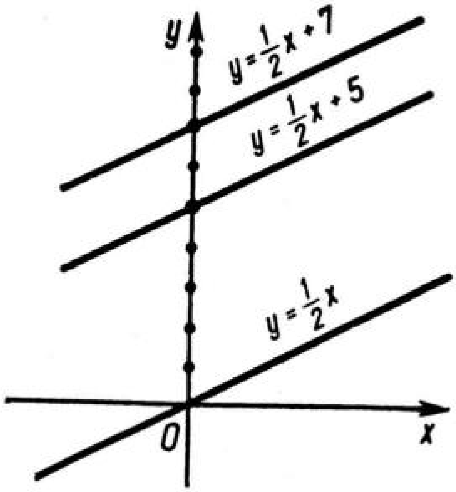


Рис. 20

между двумя точками. Например, пусть нам дано, что бак, вмещающий 10 ведер, в настоящий момент полон воды, и из него выливается каждую минуту по 2 ведра; тогда количество воды, оставшейся в баке через $x$ мин, будет $y=10-2x$ ведер; очевидно, что эта формула годится здесь только для тех значений $x$, которые положительны (так как за 1, 2, 3,... мин до начального момента бак все же не мог вмещать более 10 ведер воды) и притом не превышают 5 ед. (так как по истечении 5 мин бак будет уже пустым, и дальше ничего нельзя будет выливать). График функции $y = 10 - 2x$ между данными значениями будет изображен отрезком прямой $AB$ (между точками $A$ (0; 10) и $B$ (5; 0); продолжение этой прямой левее точки $A$ соответствовало бы значениям функции, большим 10, а продолжение ее правее точки $B$ — отрицательным значениям функции. Ни то, ни другое в данной задаче не имеет места.

Выше было указано, что если функция выражена формулой вида $y = ax + b$, то величина $y$ изменяется при изменении $x$ равномерно; можно показать, что и наоборот, если при изменении некоторой величины $x$ ее функция $y$ изменяется равномерно, то зависимость между этими величинами должна выражаться формулой вида $y = ax + b$. В самом деле, пусть некоторому начальному (постоянному) значению независимого переменного, равному $x_1$, соответствует значение функции, равное $y_1$, а другому, произвольному значению независимого переменного, равному $x$, соответствует значение функции, равное $y$. Если данная функция изменяется равномерно, то это значит, что отношение между приращением функции $(y - y_1)$ и соответствующим приращением независимого переменного $(x - x_1)$ есть количество постоянное; назовем это отношение через $a$, так что $\frac{y - y_1}{x - x_1} = a$. Отсюда $y - y_1 = a(x - x_1)$, или $y = ax + y_1 - ax_1$. Обозначим теперь в этой формуле постоянную величину $y_1 - ax_1$ через $b$; тогда видим, что зависимость между $y$ и $x$ выражается как раз формулой вида $y = ax + b$.

Таким образом, **функция $y = ax + b$ выражает вообще закон равномерного изменения; в частном случае при $b=0$ она обращается в функцию $y = ax$ и выражает закон прямой пропорциональности.** Графически эта функция изображается прямой линией, пересекающей ось $y$ в точке, ордината которой равна $b$, а ось $x$ в точке, абсцисса которой равна $-\frac{b}{a}$ (что соответствует нулевому значению функции). Так как график функции первого порядка вида $y = ax + b$ есть прямая линия, подобные функции называются *линейными*.

## § 6. Применение прямолинейных графиков к вопросам, касающимся равномерного движения и вообще равномерного изменения

Возьмем такую задачу.

*Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу, первый — со станции на шоссе, второй — из деревни, отстоящей от станции на 15 км. Оба они движутся равномерно, но с различной скоростью; второй через 30 мин успел уже прибыть на станцию, а первый за это время отъехал от нее только 10 км. На каком расстоянии от станции и через сколько минут после отъезда встретились автомобили?*

Проведем координатные оси $Ox$ и $Oy$ (рис. 21), причем началу коодинат $O$ соответствует начало движения первого автомобиля со станции. Кроме того, пусть каждая единица по оси $x$ обозначает одну минуту, а по оси $y$ — один километр. Тогда началу движения второго автомобиля соответствует точка $A$ на оси $y$, имеющая ординату 15 ед. В условии сказано, что второй автомобиль прибыл на станцию через 30 мин, следовательно, его положение в этот момент будет изображено на оси $x$ точкой $B$, имеющей абсциссу 30 ед. Первый же автомобиль в это время отстоит от станции на 10 км; следовательно, его положение будет изображено точкой $C$ с координатами (30; 10).

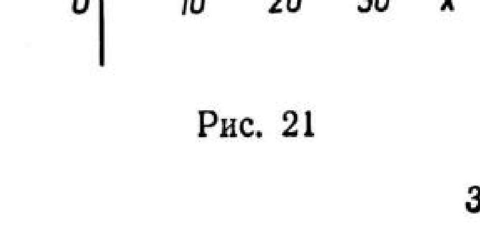

Рис. 21

Так как автомобили движутся равномерно, то графики их движения будут прямыми линиями: $OC$ — для первого и $AB$ — для второго. Эти графики пересекаются в точке

$M$, имеющей, как видно по рисунку, ординату 6 ед. и абсциссу 18 ед.; это показывает, что встреча произойдет на расстоянии 6 км от станции, спустя 18 мин после отъезда.

Алгебраическое (или арифметическое) решение задачи дает, конечно, тот же результат. Пусть $x$ будет искомое число минут от выезда автомобилей до их встречи; так как первый автомобиль проехал за 30 мин 10 км, то за одну минуту он проезжает $\frac{1}{3}$ км, а за $x$ мин проедет $\frac{1}{3}x$ км; второй за те же 30 мин проехал 15 км, следовательно, за 1 мин он проезжает $\frac{1}{2}$ км, а за $x$ мин сделает $\frac{1}{2}x$ км; сумма расстояний, преодоленных обоими автомобилями до встречи, равна 15 км, т. е. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x = 15$, или $\frac{5}{6}x = 15$, откуда $x = 18$, а расстояние от станции до места встречи равно пути, который проехал за это время первый автомобиль, т. е. $\frac{1}{3} \cdot 18 = 6$ км.

Решать задачу при помощи графиков иногда проще и быстрее, чем применять уравнение или арифметическое вычисление. Пусть, например, нам нужно решить такую задачу.

*Между станциями Киев и Боярка, отстоящими друг от друга на 23 км, идут навстречу друг другу два поезда, скорый и пассажирский. Скорый поезд выходит из Киева в 15 ч 10 мин*[1] *и приходит в Боярку в 15 ч 38 мин, а пассажирский выходит из Боярки в 15 ч 2 мин и прибывает в Киев в 15 ч 35 мин. Когда и на каком расстоянии от Киева встретятся поезда?*

Если бы мы попытались решить задачу непосредственно (арифметическими вычислениями), то должны были бы рассуждать так. Пассажирский поезд, как видно из условия, выходит из Боярки на 8 мин раньше, чем встречный скорый поезд из Киева; всего же он идет 33 мин, следовательно, за эти 8 мин он успеет пройти $\frac{8}{33}$ всего пути, и в момент выхода скорого поезда из Киева расстояние между ними будет равно $\frac{25}{33}$ от 23 км, т. е. $17\frac{14}{33}$ км. Скорый поезд проходит все 23 км за 28 мин, следовательно, за 1 мин он пройдет $\frac{23}{28}$ км; пассажирский же, который проходит все расстояние за 33 мин, пройдет в 1 мин $\frac{23}{33}$ км; таким образом, за 1 мин поезда приблизятся друг к другу на расстояние в $\frac{23}{28} + \frac{23}{33} = 1\frac{479}{924}$ км,

[1] По летнему расписанию 1924 г.

а встреча произойдет через столько минут после выхода скорого поезда, сколько раз $1\frac{479}{924}$ км содержится в $17\frac{14}{33}$ км. Произведя вычисление, получаем $11\frac{29}{61}$ мин, приближенно $11\frac{1}{2}$ мин, т. е. встреча произойдет в 15 ч $21\frac{1}{2}$ мин. Расстояние же места встречи от Киева найдем, умножая $\frac{23}{28}$ (расстояние, которое скорый поезд проходит за минуту) на $11\frac{29}{61}$ (число минут, которое он идет до встречи); после вычисления получаем приближенно $9\frac{1}{2}$ км.

Как видим, вычисления были довольно кропотливы, да и на практике, конечно, не требуется вычислять в подобных случаях 61-е доли минуты или 924-е доли километра. Графическое же решение вопроса гораздо проще и скорее дает те же результаты.

Пусть, как и раньше, единица длины на горизонтальной оси $x$ выражает 1 мин, а на вертикальной оси $y$ — 1 км. Станция Киев обозначена точкой пересечения осей (началом координат), а станция Боярка будет тогда выражена на оси $y$ точкой, ордината которой равна 23 (рис. 22). Пусть начало координат соответствует 15 ч; тогда график скорого поезда придется начать на оси $x$ в точке, абсцисса которой равна 10, и закончить в точке (38; 23), а график пассажирского — начать в точке (2; 23) и закончить на оси $x$ в точке, абсцисса которой равна 35. Точка пересечения обоих графиков имеет абсциссу $21\frac{1}{2}$ и ординату приблизительно $9\frac{1}{2}$, т. е. встреча произойдет в 15 ч $21\frac{1}{2}$ мин в $9\frac{1}{2}$ км от Киева, как мы и нашли.

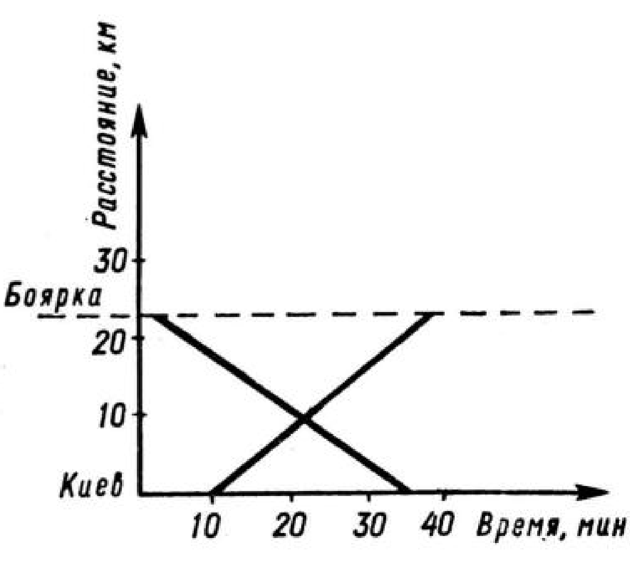

Рис. 22

Подобные графики применяются в железнодорожном деле, когда нужно составить наглядную картину движения нескольких поездов на данном участке пути.

Так, например, на рисунке 23 изображено графически расписание движения поездов на участке

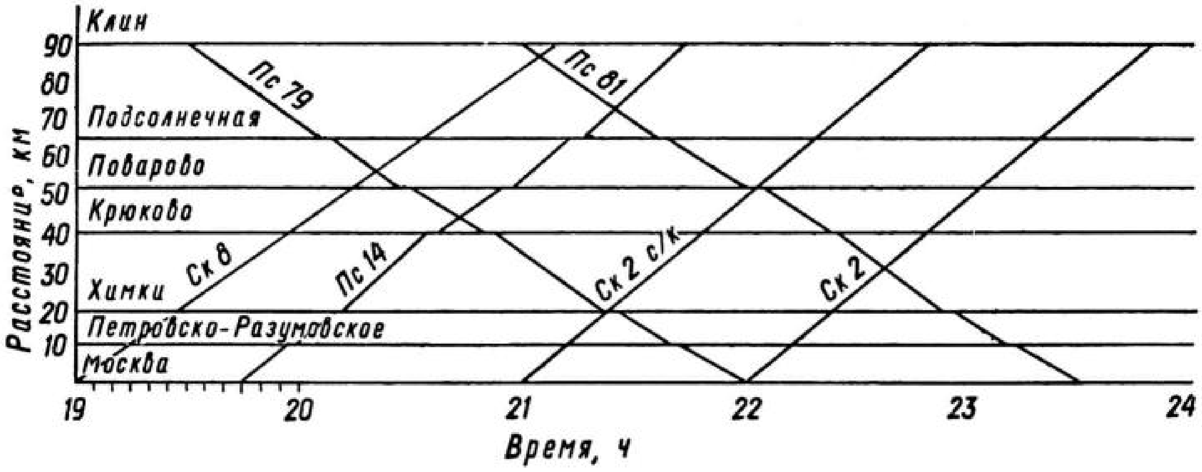


Рис. 23

Москва — Клин Октябрьской железной дороги (летом 1923 г.).

По чертежу мы видим, что пассажирский поезд № 79, отходящий от Клина в 19 ч 30 мин, прибывает в Подсолнечную в 20 ч 6 мин и стоит здесь 3 мин (график его за время остановки изображается горизонтальной прямой, так как расстояние поезда от Москвы не меняется); затем он идет дальше, встречает по дороге скорый поезд № 8 (в 20 ч 21 мин в 56 км от Москвы) и прибывает на станцию Поварово в 20 ч 27 мин; после трехминутной стоянки этот пассажирский поезд отправляется дальше, встречает пассажирский поезд № 14 (Пс. 14; приблизительно в 20 ч 43 мин в 43 км от Москвы) и в 20 ч 50 мин прибывает в Крюково; оттуда выходит в 20 ч 53 мин и прибывает на станцию Химки в 21 ч 22 мин, где делает стоянку в 4 мин; во время стоянки пропускает скорый поезд № 2 с/к, идущий из Москвы, и прибывает в Москву ровно в 22 ч, одновременно с отходом оттуда скорого поезда № 2.

На рисунке сразу видна также и сравнительная скорость движения указанных поездов; чем круче поднимается или падает график данного поезда, тем больше и скорость его на данном участке пути; мы можем даже определить скорость поезда. Например, по рисунку видно, что поезд № 79 сделал перегон между станциями Поварово и Крюково (всего 12 км) за 20 мин, следовательно, средняя скорость его на данном перегоне 36 км/ч.

Составим еще график температуры, дающий возможность наглядно представить себе изменение температуры в течение определенного промежутка времени.

*Пусть, например, в течение полусуток с 12 ч дня до 12 ч ночи мы наблюдаем такую температуру воздуха:*

Полдень . . . 4°
1 ч дня . . . 5°
2 ч » . . . 5,5°
3 ч » . . . 5°
4 ч » . . . 4°
5 ч » . . . 2,5°

6 ч вечера . . . 0,5°
7 ч » . . . —1°
8 ч » . . . —2°
9 ч » . . . —2,5°
10 ч » . . . —3°
11 ч » . . . —3°
Полночь . . . —3,5°

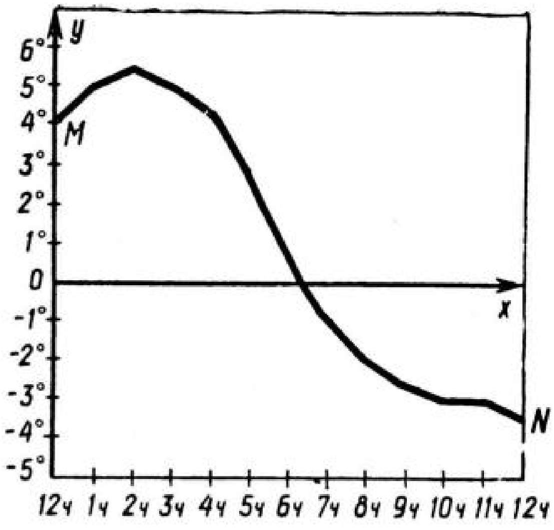

Рис. 24

Возьмем прямоугольные оси координат (рис. 24). Пусть единица длины на оси $x$ соответствует одному часу времени, а единица длины на оси $y$ — одному градусу. Первое показание термометра будет изображено точкой $M$, абсцисса которой 0, а ордината 4, второе даст точку с координатами (1; 5), третье — точку $\left(2;\ 5\frac{1}{2}\right)$ и т. д. Если соединим все полученные точки прямыми, то получим ломаную линию $MN$, которая и будет искомым графиком, если предположить, что температура в течение каждого часа изменялась равномерно. При таком условии наш график даст возможность определить температуру и в промежуточные моменты; например, по чертежу видно, что точка пересечения нашего графика с осью $x$ имеет абсциссу $6\frac{1}{3}$, т. е. термометр должен показывать 0° в 6 ч 20 мин вечера (приблизительно).

Само собой разумеется, что изменения температуры в течение каждого часа или вообще равных промежутков времени не могут быть равномерными, но если бы мы могли составить график температур, записывая показания термометра, например, через каждые 10 мин, то такой график был бы гораздо более точным; вообще, с уменьшением промежутка времени, через который мы повторяем измерение, уменьшается и ошибка, которую мы делаем, считая изменения температуры в этом промежутке времени равномерными, и увеличивается точность графика, который становится все более похожим на кривую линию.

## § 7. Графическое решение уравнений 1-й степени с двумя и одним неизвестным

Применение прямолинейных графиков дает нам возможность решать систему двух уравнений с двумя неизвестными новым способом — графическим.

Возьмем систему уравнений:

$$3x - 2y = 14,$$
$$2x - 3y = 6.$$

Определим из обоих уравнений неизвестное $y$:

$$y = 1\frac{1}{2}x - 7,$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2.$$

Будем теперь рассматривать отдельно первое уравнение; тогда мы можем принять $y$ за функцию от $x$ (так как при изменении величины $x$ будет соответственно изменяться и $y$); начертим график этой функции. Это будет прямая, пересекающая ось $y$ в точке $A$ (0;—7) и проходящая еще, например, через точку $B$ (2; —4) (рис. 25). Координаты каждой точки этой прямой выражают пару соответствующих значений $x$ и функции $y = 1\frac{1}{2}x - 7$, т. е. пару значений $x$ и $y$, удовлетворяющих первому уравнению.

Подобным же образом будем рассматривать отдельно второе уравнение $y = \frac{2}{3}x - 2$, считая $y$ за функцию от $x$, и начертим соответствующий график; он пройдет через точки $C$ (0; —2) и $D$ (3; 0). Координаты каждой точки этого графика дают нам пару соответствующих значений $x$ и функции $y = \frac{2}{3}x - 2$, т. е. пару значений $x$ и $y$, удовлетворяющих второму уравнению; точка же пересечения обеих прямых ($M$), координаты которой $x = 6$ и $y = 2$, показывает, что значения $x = 6$ и $y = 2$ удовлетворяют обоим уравнениям одновременно.

Итак, **графический способ решения системы двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными состоит в том, что мы рассматриваем сначала каждое уравнение отдельно, считая одно неизвестное ($y$) за функцию другого ($x$); затем строим графики обеих функций и находим точку их пересечения; координаты ее и представляют искомое решение.**

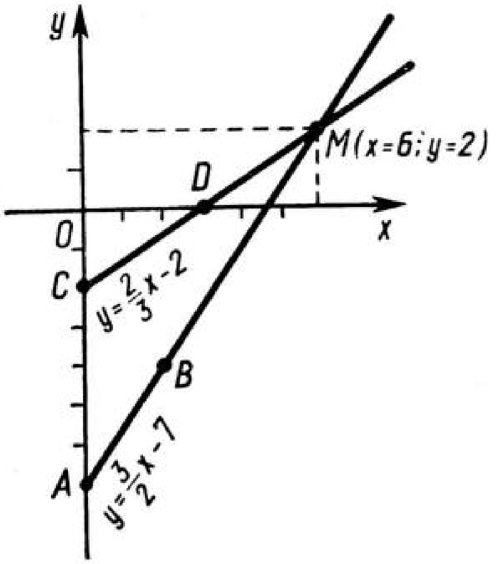


Рис. 25

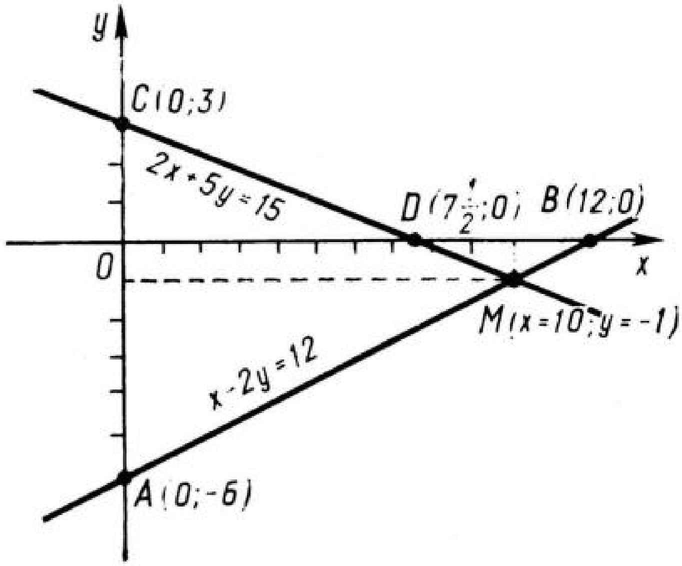


Рис. 26

Заметим, что можно и не определять предварительно $y$ через $x$, как это мы делаем в данном примере. Пусть нам нужно решить такую пару уравнений:

$$x - 2y = 12,$$
$$2x + 5y = 15.$$

Возьмем отдельно первое уравнение и определим две пары удовлетворяющих ему значений $x$ и $y$; проще всего найти значение $y$ при $x = 0$ и значение $x$ при $y = 0$. Получим такие две пары соответствующих значений: $x = 0$, $y = -6$ и $x = 12$, $y = 0$. Это значит, что если мы в данном уравнении будем считать $y$ за функцию от $x$, то ее график пересечет ось $y$ в точке $(0; -6)$, а ось $x$ — в точке $(12; 0)$ (рис. 26). Так же поступим со вторым уравнением; найдем, что соответствующая ему прямая пересечет ось $y$ в точке $(0; 3)$, а ось $x$ — в точке $\left(7\frac{1}{2}; 0\right)$. Видим, что оба графика пересекаются в точке $M$ $(10; -1)$; следовательно, решение данной системы уравнений будет $x = 10$, $y = -1$.

Подобным образом можно решать и одно уравнение 1-й степени с одним неизвестным (приведенное к виду $ax + b = 0$), например $3x - 5 = 0$.

Возьмем функцию $y = 3x - 5$ и построим ее график; он должен проходить через точки $A$ $(0; -5)$, $B$ $(2; 1)$. График этой функции пересекает ось $x$ в точке, абсцисса которой равна $\frac{5}{3}$, следовательно, $x = \frac{5}{3}$ обращает функцию $y=3x-5$ в нуль, как это, конечно, ясно и непосредственно из уравнения $3x - 5 = 0$.

Графический способ решения уравнений бывает полезен особенно тогда, когда коэффициенты при неизвестных суть дроби с довольно большими знаменателями и требуется определить приближенные значения неизвестных. Например, пусть даны такие уравнения:

$$x - 0{,}89y = 1{,}24,$$
$$0{,}95x + y = 2{,}02.$$

Требуется определить значения $x$ и $y$ с точностью до 0,01.

Возьмем кусок миллиметровой бумаги и примем за единицу длины 100 мм, т. е. 1 дм. Находим, что прямая, соответствующая первому уравнению, проходит через точки с координатами $y = 0$, $x = 1{,}24$ и $y = 1$, $x = 2{,}13$; прямая же, соответствующая второму уравнению,— через точки $x = 0$, $y = 2{,}02$ и $x = 1$, $y = 1{,}07$. Начертив эти прямые, видим, что точка их пересечения $M$ имеет координаты $x = 1{,}65$, $y = 0{,}46$ (с точностью до 0,01). Алгебраическое решение уравнений дает, конечно, тот же результат, но вычисления в данном случае кропотливы, так как коэффициенты довольно сложны.

# ГЛАВА III. ФУНКЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТ ОДНОГО НЕЗАВИСИМОГО ПЕРЕМЕННОГО И ИХ ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

## § 8. Исследование функции $y = x^2$

Возьмем задачу.

*Кегельный шар катится вниз по желобу так, что за 1 с скатывается на 1 см, за 2 с — на 4 см, за 3 с — на 9 см и т. д. На какое расстояние скатится он за $x$ секунд?*

Очевидно, искомое расстояние $y = x^2$ (см); исследуем теперь изменения этой функции.

Пусть $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ .

Тогда $y = 0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ .

Видим, что с возрастанием $x$ и функция его $y$ также возрастает, но неравномерно: $x$ возрастает все время на 1 ед., а $y$ — последовательно на 1, 3, 5, 7, 9, ... ед. Заметим, что эти приращения $y$ выражают расстояния, пройденные шаром последовательно за 1-ю, 2-ю, 3-ю и т. д. секунды; видим, что эти расстояния возрастают все время на одну и ту же величину — 2 см; такое движение называется *равномерно ускоренным*. И о нашей функции $y = x^2$ мы можем сказать, что при данных условиях она возрастает равномерно ускоренно.

Постараемся теперь построить график этой функции. Возьмем оси $x$ и $y$ и отметим, как и в предыдущем случае, ряд точек $O$, $A$, $B$, ..., координаты которых изображали бы последовательные соответствующие значения времени $x$ и пройденного пути $y$ (причем 1 ед. по оси $x$ выражает 1 с, а 1 ед. по перпендикулярному к ней направлению соответствует 1 см, пройденному шаром).

Видим, что эти точки лежат не на прямой линии (вскоре мы обнаружим, что они расположены на определенной кривой); чтобы составить себе лучшее представление об искомом графике, отметим еще ряд промежуточных точек, соответствующих значениям $x = 0,1; 0,2; 0,3; \ldots$ и, соединив затем все точки непрерывной кривой, получим линию $OAB$, изображенную на рис. 27; она представляет (приблизительно) график функции $y = x^2$ для положительных значений $x$.

Для отрицательных значений $x$ можно дополнить нашу задачу следующим образом: представим себе, что шар, прежде чем начал скатываться вниз по желобу с его верхнего конца, катился вверх по тому же желобу, постепенно замедляя свое движение, так что за 1 с до начального момента он был на расстоянии 1 см от верхушки желоба, за 2 с — 4 см, за 3 с — 9 см и т. д. Тогда его движение вверх по желобу, предшествовавшее начальному моменту, будет выражено той же формулой $y = x^2$: при $x = -1, -2, -3, -4, -5, \ldots$ будем иметь $y = 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ .

Построим теперь, как и в предыдущем случае, вторую часть графика нашей функции $y = x^2$; получим кривую $OA_1B_1$ (рис. 28).

Теперь мы можем составить себе достаточное представление об изменении нашей функции $y = x^2$. Будем давать переменному $x$ все возрастающие значения, сначала отрицательные, потом 0, и, наконец, положительные. Выпишем соответствующие значения функции.

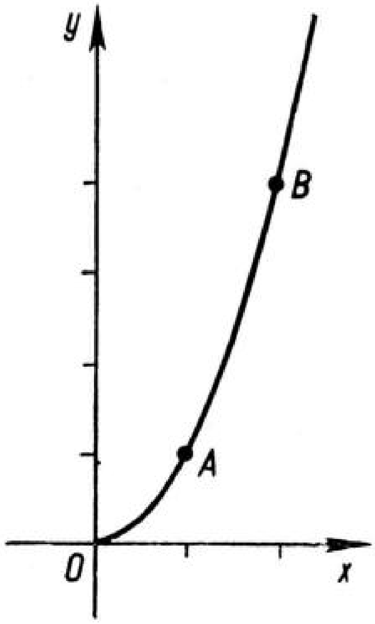


Рис. 27

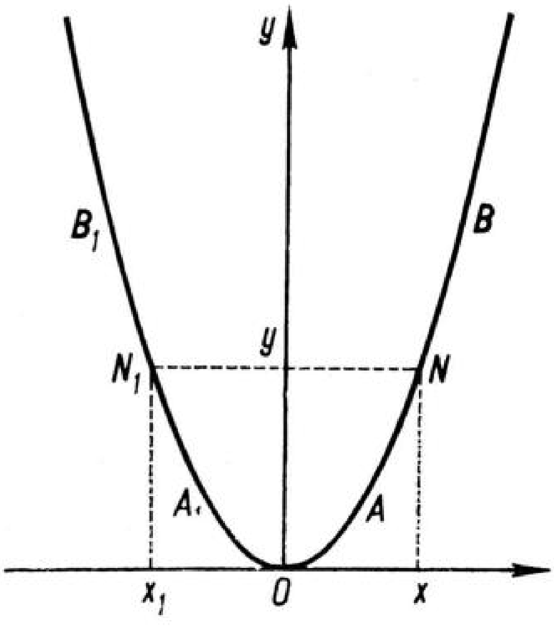


Рис. 28

Если $x = \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, то

$$y = \ldots, 25, 16, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots .$$

Видим, что при постоянном возрастании $x$ функция (оставаясь все время, кроме значения $y = 0$, положительной) изменяется следующим образом: сначала, при $x < 0$, она убывает (равномерно замедленно: каждая следующая ее прибавка на 2 ед. меньше предыдущей), затем при $x = 0$ обращается в нуль и далее при $x > 0$ начинает возрастать и возрастает равномерно ускоренно (каждая следующая прибавка $y$ на 2 ед. больше предыдущей). Значение $y = 0$ является, таким образом, ее наименьшим значением (наибольшего же нет, так как при возрастании $x$ и значения $y$ могут быть как угодно большими). Все это ясно обнаруживается и на графике, который при перемещении слева направо сначала все понижается (по левую сторону оси $y$), пока не достигнет своей нижней точки в начале координат ($x = 0$; $y = 0$), затем опять начинает повышаться и чем дальше поднимается все круче над осью $x$.

Заметим еще, что для значений $x$, равноотстоящих от 0, соответствующие значения функции одинаковы (например, при $x = 4$ имеем $y = 16$ и при $x = -4$ $y$ также 16). На графике это выражается тем, что любые две точки $N$ и $N_1$, имеющие абсциссы $Ox$ и $Ox_1$, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, будут иметь одну и ту же ординату ($Oy$); ясно также, что эти точки симметричны относительно оси $y$ ($Ny = N_1y$). Таким образом, ось $y$ будет осью симметрии для нашего графика.

Постараемся теперь определить, какую именно линию представляет построенный нами график функции $y = x^2$. Но чтобы мы могли решить этот вопрос, необходимо знать, как вычисляется на плоскости расстояние между двумя точками, координаты которых даны.

## § 9. Вычисление расстояния между двумя точками по данным их координатам

Пусть $A$ и $B$ (рис. 29) будут данные точки, координаты которых $x_1$ и $y_1$, $x_2$ и $y_2$. Соединим точки $A$ и $B$ прямой линией, опустим из них перпендикуляры $AA_1$ и $BB_1$ на ось $x$, $AA_2$ и $BB_2$ на ось $y$. Продолжим линию $AA_2$ до пересечения с $BB_1$ в точке $K$; обозначим искомое расстояние $AB$ через $d$, тогда из прямоугольного треугольника $ABK$ имеем:

$$d^2 = AK^2 + BK^2.$$

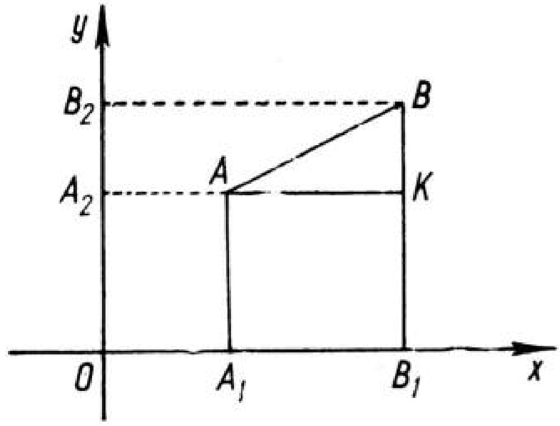


Рис. 29

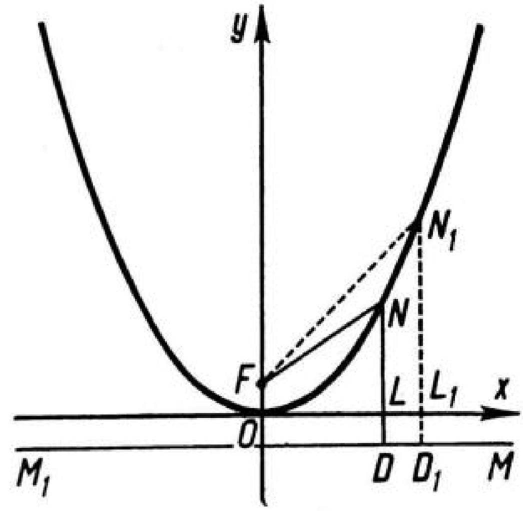


Рис. 30

Но $AK = x_2 - x_1$, $BK = y_2 - y_1$, следовательно,

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Так как $d$ обозначает абсолютное расстояние, то для определения его достаточно извлечь арифметический квадратный корень из обеих частей равенства; получим:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

## § 10. Геометрическое определение графика функции $y = x^2$ и способ его непосредственного вычерчивания

Нетрудно убедиться, что все точки графика функции $y = x^2$ обладают одним отличительным свойством, которое мы сейчас и установим.

Отметим на оси $y$ (рис. 30) точку $F$ с координатами $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ и возьмем на графике произвольную точку $N$ с координатами $(x; y)$. Выразим расстояние между точками $N$ и $F$. Как и в предыдущем случае, имеем:

$$NF = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}.$$

Но координаты каждой точки графика связаны уравнением $y = x^2$; подставим $y$ вместо $x^2$ в подкоренное выражение предыдущей формулы:

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = y + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = y + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} =$$
$$= y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = \left(y + \frac{1}{4}\right)^2,$$

следовательно, имеем:

$$NF = y + \frac{1}{4}.$$

Итак, расстояние $NF$ на $\frac{1}{4}$ больше ординаты данной точки. Опустим из нашей точки $N$ перпендикуляр $NL$ на ось $x$ (изображающий ординату) и продолжим его ниже оси $x$ на расстояние $LD = \frac{1}{4}$; через точку $D$ проведем прямую $MM_1$, параллельную оси $x$ (и, таким образом, отстоящую от нее вниз на расстоянии, равном $\frac{1}{4}$). Расстояние нашей точки от этой прямой, т. е. отрезок $ND$ также равен $y + \frac{1}{4}$; следовательно, $NF = ND$. Итак, всякая точка нашего графика обладает следующим свойством: она одинаково отстоит от точки $F$ и от прямой $MM_1$.

Наоборот, всякая точка, одинаково удаленная от точки $F$ и от прямой $MM_1$, должна иметь координаты, удовлетворяющие уравнению $y = x^2$ (т. е. должна лежать на нашем графике).

В самом деле, пусть имеем точку $N_1$ с координатами $x_1$ и $y_1$, тогда ее расстояние от точки $F (N_1F)$ равно $\sqrt{x_1^2 + \left(y_1 - \frac{1}{4}\right)^2}$, а расстояние ее от прямой $MM_1 = y_1 + \frac{1}{4}$; если эти два расстояния равны, то

$$\sqrt{x_1^2 + \left(y_1 - \frac{1}{4}\right)^2} = y_1 + \frac{1}{4}, \text{ или } x_1^2 + \left(y_1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(y_1 + \frac{1}{4}\right)^2.$$

Упрощая это равенство, будем иметь $y_1 = x_1^2$, что и требовалось доказать.

Итак, **график функции $y = x^2$ есть геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки ($F$) и от данной прямой $MM_1$.** Такая кривая в геометрии называется *параболой*.

Заметим, что данная точка $F$ называется *фокусом* параболы, а прямая $MM_1$ — ее *директрисой*.

Зная указанное отличительное свойство нашего графика, мы можем построить его непосредственно следующим образом. Пусть точка $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ будет фокусом нашего графика, а прямая $MM_1$ параллельная оси $x$ и отстоящая от нее вниз на расстоянии, равном $\frac{1}{4}$)— ее директрисой. Укрепим вдоль директрисы линейку, а другую линейку $ABC$ поместим перпендикулярно к ней вдоль оси $y$ (рис. 31). В точке $B$ прикрепим ко второй линейке нитку, длина которой равнялась бы длине катета $AB$, а другой конец нитки прикрепим в фокусе $F$. Если теперь натянуть нитку вниз острием карандаша, то оно попадет как раз в начало координат $O$. Будем теперь передвигать линейку $ABC$ вправо так, чтобы она скользила по прямой $MM_1$ (вдоль ребра первой линейки), а острием карандаша будем чертить линию так, чтобы наша нитка оставалась все время натянутой, вдоль ребра $AB$ (своей верхней частью). Тогда мы получим на чертеже искомую параболу, так как любая точка ее (например, $N$), будет одинаково отстоять от фокуса $F$ и от директрисы $MM_1$ ($NF = NA_1$).

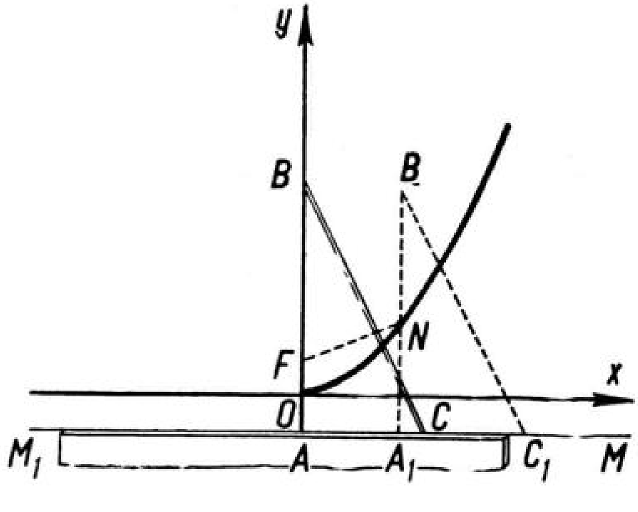

Рис. 31

## § 11. Применение графика функции $y = x^2$ к извлечению квадратных корней и решению квадратных уравнений с одним неизвестным

Из уравнения $y = x^2$ следует, что $x = \pm\sqrt{y}$, т. е. если задана ордината какой-либо точки данной параболы, то абсцисса ее определит квадратный корень из числа, выражающего ординату. Двойной знак перед корнем указывает, что данной ординате соответствуют две точки на противоположных ветвях параболы, имеющие абсциссы, одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку.

На рис. 32 построен график функции $y = x^2$. Этот график дает возможность определять квадратные корни с точностью до 0,1 (и даже до 0,05). Так, например, по рисунку видно, что ординате 10 соответствует абсцисса $\pm 3{,}1$, т. е. $\sqrt{10} \approx \pm 3{,}1$*;

* Символ $\sqrt{\ }$ используется автором для обозначения не только арифметического квадратного корня, но и так называемого алгебраического. В традиционном курсе алгебры различались значения такого корня со знаком «плюс» и со знаком «минус». Первый назывался арифметическим, а второй — алгебраическим.

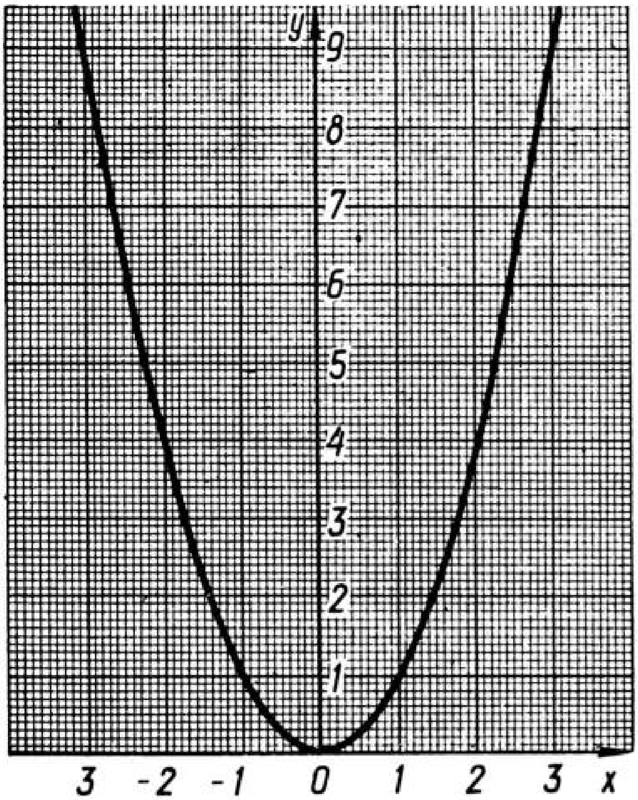


Рис. 32

подобным же образом найдем, что $\sqrt{5} \approx \pm 2{,}2$; $\sqrt{8{,}4} \approx \pm 2{,}9$; $\sqrt{0{,}8} \approx \approx \pm 0{,}9$ и т. д. Рисунок показывает также, что отрицательным значениям $y$ не соответствуют никакие значения $x$, как это мы знаем из алгебры. Если бы понадобилось увеличить точность таблицы, то для этого пришлось бы выбрать большую единицу и соответственно увеличить размеры рисунка.

Другое приложение графика функции $y = x^2$ состоит в том, что при помощи его можно графически решать квадратные уравнения с одним неизвестным. Пусть, например, нам дано уравнение $x^2 - x - 12 = 0$; из него следует, что $x^2 = x + 12$. Будем рассматривать каждую часть уравнения отдельно; тогда левая часть представляет функцию от $x$, которую мы только что рассмотрели, и графиком ее будет известная нам парабола ($y = x^2$); правая же часть уравнения представляет линейную функцию от $x$, и график ее есть прямая линия (определяемая уравнением $y = x + 12$). Начертив на одном и том же чертеже параболу $y = x^2$ и прямую $y = x + 12$ (рис. 33), видим, что они пересекаются в двух точках: $A$ ($x = -3$; $y = 9$) и $B$ ($x = 4$; $y = 16$); эти точки показывают, что при данных значениях абсциссы ($x = -3$ и $x = 4$) прямая $y = x + 12$ и парабола $y = x^2$ будут иметь одинаковые ординаты, т. е. $x^2 = x + 12$, следовательно, найденные значения $x$ (4 и $-3$) удовлетворяют уравнению $x^2 - x - 12 = 0$. Это можно проверить и обычным способом.

Если мы будем решать подобным же образом уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$, то нам придется найти общие точки той же параболы $y = x^2$ и прямой $y = 2x - 1$; увидим, что прямая $y = 2x - 1$ имеет с параболой только одну общую точку $C$ ($x = 1$; $y = 1$), т. е. наше уравнение имеет только одно решение $x = 1$.

Наконец, если будем решать таким же способом уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$, то увидим, что прямая $y = 2x - 3$ вовсе не пересекается с параболой $y = x^2$; следовательно, уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$ не имеет корней. Это подтверждается и при алгебраическом его решении.

Графическое решение квадратных уравнений особенно целесообразно тогда, когда искомые решения иррациональны и нужно найти их приближенные значения, например уравнение $x^2 + x - 1 = 0$ решается пересечением параболы $y = x^2$ и прямой $y = -x + 1$. По рисунку 33 видно, что искомые точки пересечения $D$ и $E$ имеют абсциссы: $x = -1{,}6$ и $x = 0{,}6$ (с точностью до 0,1); решая же наше уравнение алгебраически, мы получили бы $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, что после вычисления с точностью до 0,1 дает те же результаты 0,6 и $-1{,}6$.

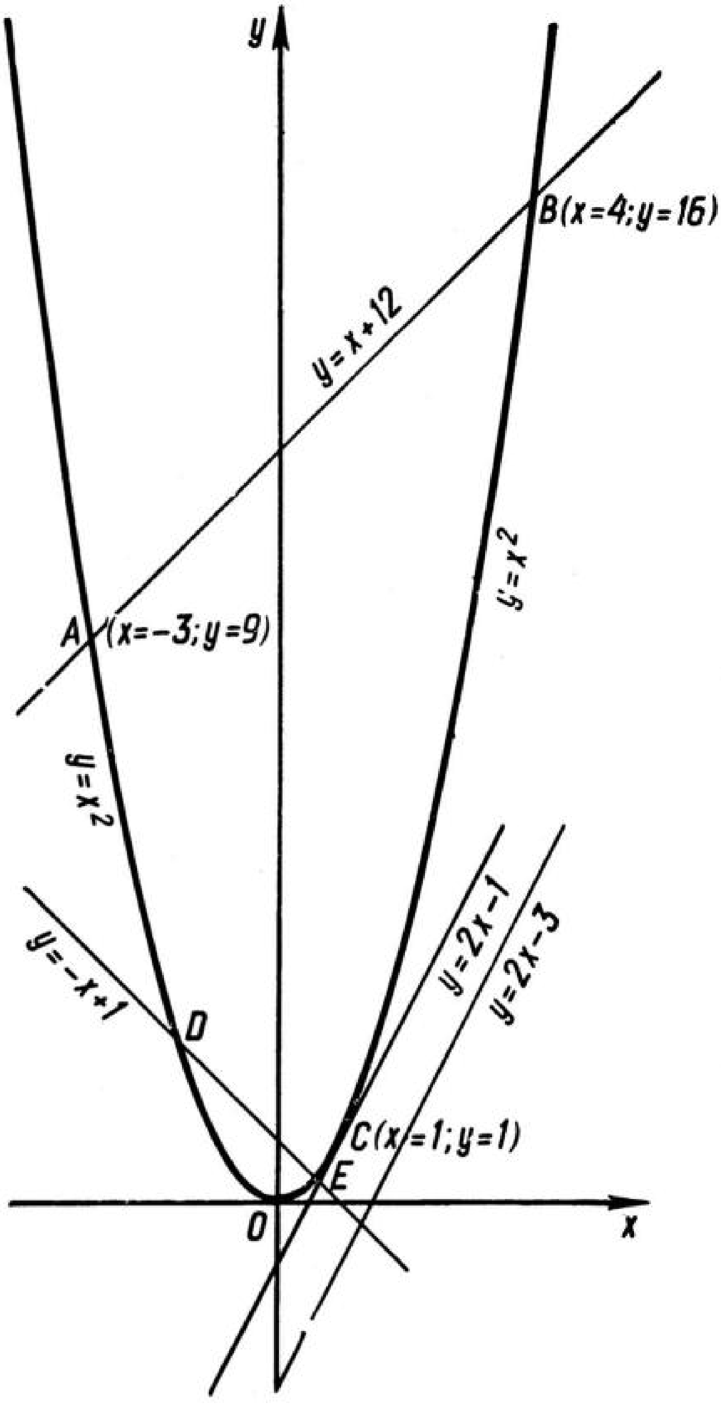


Рис. 33

## § 12. Функция $y = -x^2$

Значения функции $y = -x^2$ отличаются от соответствующих значений функции $y = x^2$ только знаком.

Пусть $x = \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ .

Тогда $y = \ldots -25, -16, -9, -4, -1, 0, -1, -4, -9, -16, -25, \ldots$ .

Видим, что при постоянном возрастании $x$ наша функция $y = -x^2$ изменяется так: при $x < 0$ она возрастает, оставаясь отрицательной (и притом возрастает равномерно замедленно: каждое следующее приращение ее на 2 ед. меньше предыду-

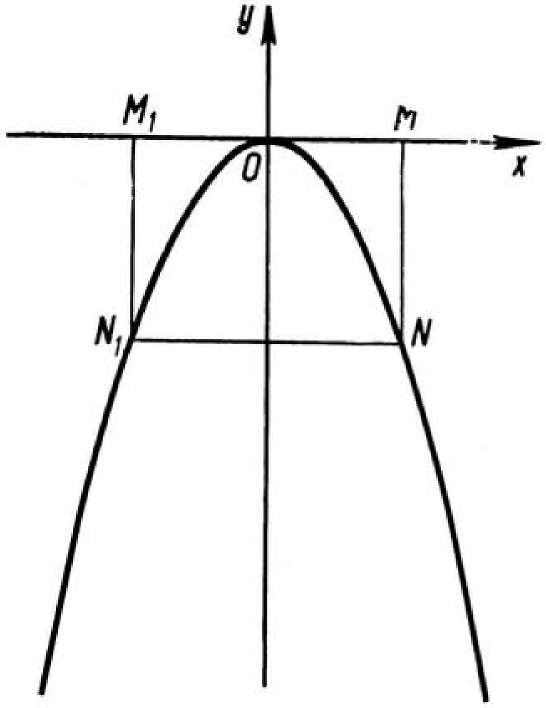


Рис. 34

щего), затем при $x = 0$ функция обращается в нуль, а далее при $x > 0$ становится снова отрицательной и убывает (равномерно ускоренно: каждое следующее приращение по абсолютной величине на 2 ед. больше предыдущего). Значение $y = 0$ является наибольшим значением функции (наименьшего же нет, так как очевидно, что функция может иметь отрицательные значения с какой угодно большой абсолютной величиной).

Все это можно наглядно представить при помощи графика нашей функции $y = -x^2$. Как и в предыдущем случае, мы можем построить его по точкам и видим (рис. 34), что это будет кривая точно такой же формы, как и прежний график $y = x^2$, только расположенная под осью $x$. Сначала (с левой стороны оси $y$) она поднимается, достигая своей высшей точки в начале координат (т. е. при $x = 0$), а затем опять опускается, и чем дальше, тем круче.

Заметим, как и раньше, что для значений $x$, равноотстоящих от 0, соответственные значения функции одинаковы (например, при $x = 4$ имеем $y = -16$ и при $x = -4$ также $y = -16$). И на графике видим, что две точки $N$ и $N_1$, имеющие абсциссы $OM$ и $OM_1$, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, имеют одну и ту же ординату и симметричны относительно оси $y$, так что ось $y$ по-прежнему есть ось симметрии для кривой $y = -x^2$.

Повторяя точь-в-точь все предыдущие рассуждения, мы могли бы убедиться, что кривая $y = -x^2$ есть парабола, имеющая фокусом точку $\left(0; -\frac{1}{4}\right)$, а директрисой — прямую, параллельную оси $x$ и лежащую выше ее на расстоянии $\frac{1}{4}$ ед.

## § 13. Функции вида $y = ax^2$

Исследуем изменения функции $y = 2x^2$.

Пусть $x = \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$.

Тогда $y = \ldots 50, 32, 18, 8, 2, 0, 2, 8, 18, 32, 50, \ldots$.

Видим, что при постоянном возрастании $x$ наша функция $y = 2x^2$ изменяется так: сначала, при $x<0$, она убывает, оставаясь все время положительной (и притом получает последовательно приращения: ... $-18$, $-14$, $-10$, $-6$, $-2$, т. е. убывает равномерно замедленно — каждое следующее приращение по абсолютной величине меньше предыдущего на 4); затем при $x=0$ обращается в нуль (и это будет наименьшее значение функции), а далее при $x>0$ становится снова положительной и возрастает (получая последовательные приращения: 2, 6, 10, 14, 18, ..., т. е. равномерно ускоренно — каждое следующее приращение на 4 больше предыдущего).

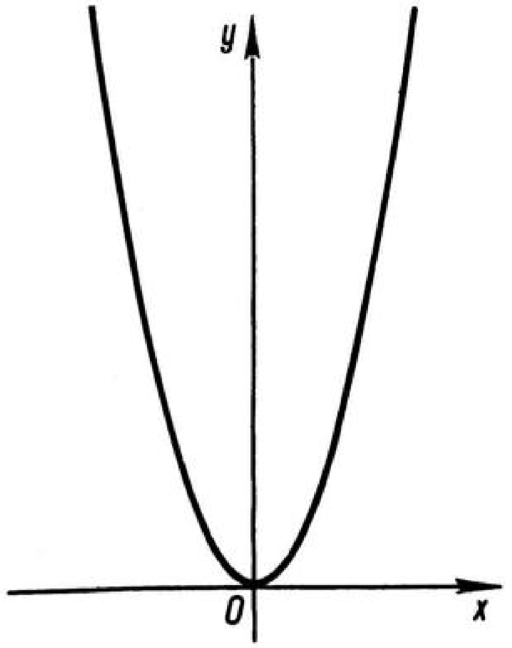

Рис. 35

Для значений $x$, равноотстоящих от 0, соответствующие значения функции одинаковы; например, $y = 18$ как при $x = 3$, так и при $x = -3$.

Если построим по точкам график этой функции, то получим кривую, изображенную на рисунке 35, и увидим, что она наглядно представляет весь ход изменений функции. Как и выше, можно было бы доказать, что график данной функции $y = 2x^2$ есть парабола, имеющая фокусом точку $F\left(0;\ \frac{1}{8}\right)$, а директрисой — прямую, параллельную оси $x$ и отстоящую от нее вниз на расстояние $\frac{1}{8}$.

Можно непосредственно убедиться, что данная парабола $y = 2x^2$ отличается от прежней параболы $y = x^2$ только масштабом, в котором она начерчена. В самом деле, уравнению $y = 2x^2$ можно придать вид $2y = 4x^2$, или $2y = (2x)^2$; если положим $2y = y_1$ и $2x = x_1$, то получим $y_1 = x_1^2$. Следовательно, если мы изобразили график функции $y = 2x^2$, то эта же самая кривая представляет и график функции $y_1 = x_1^2$, но при условии, что для любой точки значения $x_1$ и $y_1$ в 2 раза больше соответствующих $x$ и $y$. В самом деле,

$$\text{при} \begin{cases} x_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ 4,\ \ 5,\ \dots, \\ y_1 = 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \dots; \end{cases}$$

$$\text{будем иметь} \begin{cases} x = 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{2},\ \dots, \\ y = 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{16}{2},\ \frac{25}{2},\ \dots. \end{cases}$$

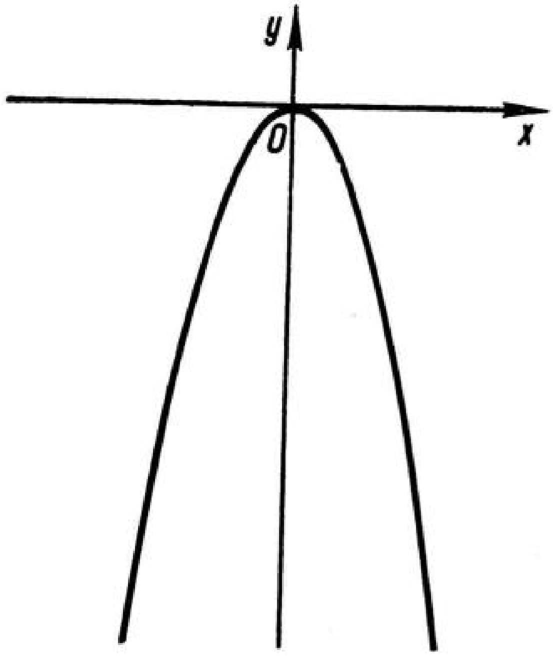


Рис. 36

и очевидно, что будем получать одну за другой совершенно одинаковые точки, если возьмем соответствующие значения $x_1$ и $y_1$ при масштабе в $^1/_2$ см, или же соответствующие значения $x$ и $y$ при масштабе в 1 см.

Если возьмем функцию $y = -2x^2$, то нетрудно увидеть, что ее значения будут отличаться от соответствующих значений функции $y = 2x^2$ только знаком.

Пусть $x = \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ .

Тогда $y = \ldots -50, -32, -18, -8, -2, 0, -2, -8, -18, -32, -50, \ldots$ .

Видим, что при $x < 0$ функция возрастает, оставаясь отрицательной (и возрастает равномерно замедленно); при $x = 0$ она обращается в нуль, и это будет ее наибольшее значение, а далее при $x > 0$ функция делается снова отрицательной и убывает (равномерно ускоренно); значения $y$ одинаковы для значений $x$, равноотстоящих от 0.

Очевидно, что график данной функции $y = -2x^2$ есть кривая совершенно такого же вида, как и график функции $y = 2x^2$, но расположенная (симметрично) под осью $x$ (рис. 36). Ее ветви, конечно, симметричны относительно оси $y$, и можно, как и раньше, доказать, что фокусом ее будет точка $\left(0; -\frac{1}{8}\right)$, а директрисой — прямая, параллельная оси $x$ и лежащая выше ее на $\frac{1}{8}$ ед. длины.

Рассматривая подобные примеры, можем вывести такие заключения об изменении функций вида $y = ax^2$ (где $a$ — постоянное число, положительное или отрицательное).

1. Функция $y$ пропорциональна квадрату независимого переменного $x$.

В общем виде это ясно из следующего рассуждения: пусть будут $x_1$ и $x_2$ любые два значения независимого переменного $x$; соответствующие значения функции будут $y_1 = ax_1^2$ и $y_2 = ax_2^2$; разделив эти равенства почленно, имеем $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1^2}{x_2^2}$, т. е. отношение любых двух значений $y$ равно отношению квадратов соответствующих значений $x$, что и требовалось доказать.

2. При возрастании независимого переменного $x$ функция его $y$ изменяется так:

1) если коэффициент $a$ положителен, то функция при $x < 0$ положительна и убывает, затем при $x = 0$ достигает наименьшего значения $y = 0$, а далее при $x > 0$ снова становится положительной и возрастает;

2) если коэффициент $a$ отрицателен, то функция при $x < 0$ отрицательна и возрастает; при $x = 0$ она достигает наибольшего значения $y = 0$, а далее при $x > 0$ снова делается отрицательной и убывает.

Это обнаруживается в общем виде так. Возьмем два значения переменного: меньшее $x_1$ и большее $x_2$; соответствующие им значения функции будут $y_1 = ax_1^2$ и $y_2 = ax_2^2$. Тогда разность $y_2 - y_1 = a\ (x_2^2 - x_1^2) = a\ (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$. Здесь множитель $x_2 - x_1$ всегда положителен (так как $x_2 > x_1$); следовательно, знак разности $y_2 - y_1$ зависит от знака двух других сомножителей: $a$ и $x_2 + x_1$. Пусть $a > 0$; тогда при отрицательных значениях $x$ сумма $x_2 + x_1$ отрицательна, следовательно, $y_2 - y_1 < 0$, или $y_2 < y_1$ — функция убывает; при положительных же значениях $x$ сумма $x_2 + x_1$ положительна и $y_2 - y_1 > 0$, т. е. $y_2 > y_1$ функция возрастает. При $a < 0$ все будет наоборот.

Значение функции $y = 0$ (при $x = 0$) будет наименьшим при положительном $a$ (и наибольшим при отрицательном); это видно из того, что при любом другом значении $x$ функция $y = ax^2$ положительна при $a > 0$ (и отрицательна при $a < 0$).

3. Возрастание и убывание функции идет равномерно ускоренно при удалении от наибольшего (или наименьшего) значения и равномерно замедленно при приближении к последнему.

В самом деле, будем придавать переменному $x$ значения, возрастающие на одну и ту же величину, например на 1.

Пусть $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ .

Тогда $y = 0, a, 4a, 9a, 16a, 25a, \ldots$ .

Видим, что функция получает при этом приращения $a$, $3a, 5a, 7a, 9a, \ldots$, возрастающие все на одну и ту же величину $2a$, следовательно, при $a > 0$ функция возрастает равномерно ускоренно, а при $a < 0$ убывает равномерно ускоренно.

Возьмем теперь подобный ряд значений, приближающихся к нулевому:

Пусть $x = \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0$.

Тогда $y = \ldots 25a, 16a, 9a, 4a, a, 0$.

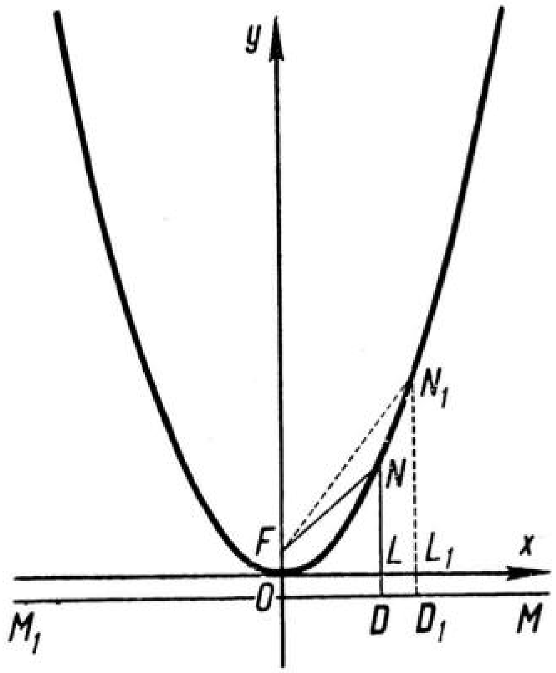


Рис. 37

Здесь функция получает последовательные приращения ... $-9a, -7a, -5a, -3a, -a$, убывающие по абсолютной величине на $2a$, следовательно, при $a > 0$ функция убывает (а при $a < 0$ возрастает) равномерно замедленно.

Очевидно, тот же самый вывод мы получим, если будем давать $x$ ряд значений, возрастающих не на 1, а на какую-нибудь другую величину $h$.

Пусть $x = \ldots -5h, \ -4h, \ -3h, \ -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, 4h, 5h, \ldots$ .

Тогда $y = \ldots 25ah^2, \ 16ah^2, \ 9ah^2, \ 4ah^2, \ ah^2, 0, ah^2, 4ah^2, 9ah^2, 16ah^2, 25ah^2, \ldots$ .

4. При значениях $x$, равноотстоящих от 0, значения функции $y$ одинаковы. В самом деле, при $x = +h$ и при $x = -h$ имеем: $y = ah^2$.

График функции вида $y = ax^2$ есть, как мы видели, парабола, симметричная относительно оси $y$ и расположенная вся над осью $x$ при $a > 0$ и под осью $x$ при $a < 0$; вершина параболы лежит в начале координат, а ось $x$ касается параболы в ее вершине.

Можно показать, что фокус параболы $y = ax^2$ лежит в точке $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$, а директрисой ее служит прямая $y = -\frac{1}{4a}$ $\Big($т. е. прямая, параллельная оси $x$ и проходящая на высоте $y = -\frac{1}{4a}\Big)$. В самом деле, возьмем график функции $y = ax^2$, полагая $a > 0$ (рис. 37); отметим точку $F$ с координатами $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ и выберем на графике произвольную точку $N$ с координатами $(x; y)$. Тогда расстояние между этими точками будет:

$$NF = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2}.$$

Расстояние же $ND$ от данной точки до прямой $MM_1$ $\left(y = -\frac{1}{4a}\right)$ равно $NL + LD$, т. е. $y + \frac{1}{4a}$. Но так как

$y = ax^2$, то $x^2 = \frac{y}{a}$; подставляя это значение в выражение для $NF$ и производя преобразование под корнем, имеем:

$$NF = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} = \sqrt{\frac{y}{a} + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{y^2 + \frac{y}{2a} + \frac{1}{16a^2}} = y + \frac{1}{4a},$$

т. е. $NF = ND$. Значит, любая точка графика одинаково отстоит от точки $F$ и прямой $MM_1$.

И наоборот, если возьмем любую точку, одинаково удаленную от точки $F$ и прямой $MM_1$, то можно также показать, что такая точка должна лежать на нашей параболе (т. е. должна иметь координаты, удовлетворяющие уравнению $y = ax^2$). В самом деле, пусть имеем точку $N_1$ с координатами $x_1$ и $y_1$; ее расстояние от точки $F$ будет равно $\sqrt{x_1^2 + \left(y_1 - \frac{1}{4a}\right)^2}$, а расстояние ее от прямой $MM_1$ будет $y_1 + \frac{1}{4a}$. По условию эти два расстояния равны; следовательно,

$$\sqrt{x_1^2 + \left(y_1 - \frac{1}{4a}\right)^2} = y_1 + \frac{1}{4a}$$

или

$$x_1^2 + \left(y_1 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(y_1 + \frac{1}{4a}\right)^2.$$

Упрощая это равенство, получим $y_1 = ax_1^2$, что и требовалось доказать.

Очевидно, что все наши рассуждения будут справедливы и при $a < 0$, только рисунок будет расположен под осью $x$.

Обратим внимание еще на такое обстоятельство. Возьмем отношение между каким-либо приращением функции $y_2 - y_1$ и соответствующим ему приращением независимого переменного $x_2 - x_1$. Так как $y_1 = ax_1^2$, $y_2 = ax_2^2$, то имеем: $y_2 - y_1 = a(x_2^2 - x_1^2)$, следовательно,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1).$$

Видим, что отношение это уже не постоянно, как в случае функции первого порядка, а переменно: оно зависит от выбранных нами значений $x$; выражает, как говорят, *среднюю скорость изменения функции* в данном промежутке между значениями $x$, равными $x_1$ и $x_2$. Смысл данного отношения мы мо-

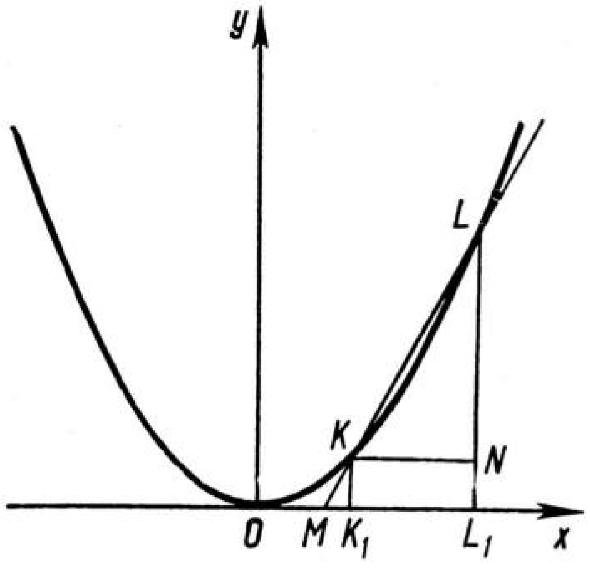

Рис. 38

жем истолковать также и графически (рис. 38). Возьмем на данной параболе две точки: $K$ с координатами $(x_1; y_1)$ и $L$ с координатами $(x_2; y_2)$; соединим эти точки прямой $KL$, которую продолжим до пересечения с осью $x$ в точке $M$ и опустим из точек $K$ и $L$ перпендикуляры $KK_1$ и $LL_1$ на ось $x$, а также проведем перпендикуляр $KN$ к линии $LL_1$, тогда $LL_1 = y_2$, $KK_1 = y_1$, $OL_1 = x_2$, $OK_1 = x_1$, и приращение функции $y_2 - y_1$ выразится разностью $LL_1 - KK_1$ или $LL_1 - NL_1$, т. е. отрезком $LN$; приращение же независимого переменного $x_2 - x_1$ выразится разностью $OL_1 - OK_1 = K_1L_1$, или же равным ему отрезком $KN$, а потому отношение

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{LN}{KN} = \operatorname{tg} \angle LKN = \operatorname{tg} \angle LML_1,$$

т. е. **отношение между приращением функции и соответствующим приращением независимого переменного равно тангенсу угла, образуемого секущей линией, проходящей через данные две точки кривой, с положительным направлением оси $x$.**

Как выражается скорость изменения функции в любой ее точке и каково ее геометрическое истолкование, мы увидим впоследствии (в разделе IV).

## § 14. Функции вида $y = ax^2 + bx + c$

Рассмотрим функцию $y = x^2 + 3$.

Пусть $x = \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ .

Тогда $y = \ldots 28, 19, 12, 7, 4, 3, 4, 7, 12, 19, 28, \ldots$ .

Очевидно, что функция при всяком $x$ остается положительной и изменяется так: сначала при $x < 0$ она убывает и притом равномерно замедленно (последовательные прибавки ее будут $\ldots -9, -7, -5, -3, -1$), затем при $x = 0$ функция получает наименьшее значение $y = 3$, а далее при $x > 0$ она возрастает равномерно ускоренно (последовательные прибавки ее: 1, 3, 5, 7, 9 ...). При значениях $x$, равноотстоящих от 0, значения функции одинаковы, например $y = 12$ при $x = -3$ и при $x = 3$.

Построим теперь график нашей функции $y = x^2 + 3$. Отметим прежде всего точку $M$ ($x = 0$; $y = 3$), соответствующую наименьшему значению функции, а затем — точки, изображающие другие последовательные значения функции (лучше всего для значений $x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; ..., возрастающих последовательно на $0{,}1$); соединив их непрерывной кривой, получим линию, изображенную на рисунке 39.

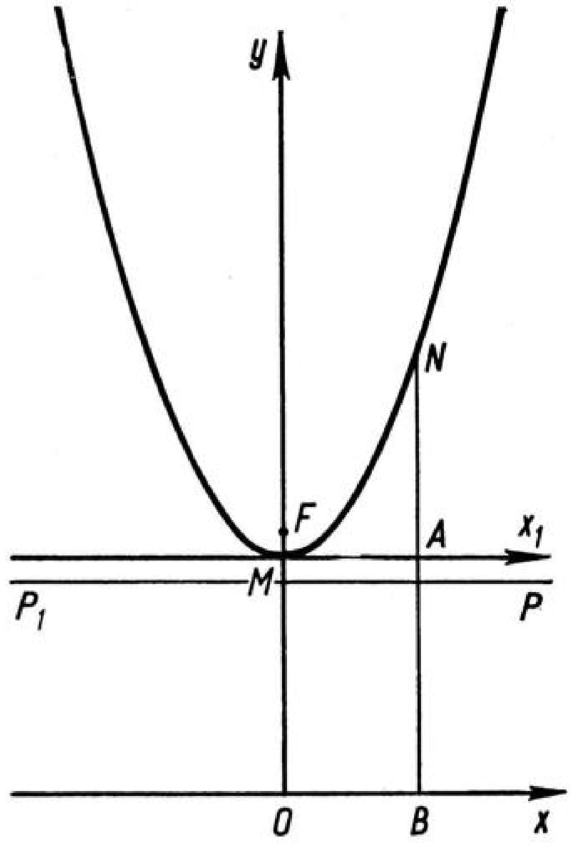


Рис. 39

Этот график наглядно представляет нам все изменения нашей функции $y = x^2 + 3$. Можно показать, что он есть также парабола, вроде кривой $y = x^2$. В самом деле, проведем через точку $M$ прямую $Mx_1$, параллельную оси $x$, и возьмем на нашем графике произвольную точку $N$ с координатами $(x, y)$. Уравнение $y = x^2 + 3$ можно представить в виде $y - 3 = x^2$, а положив $y - 3 = y_1$, будем иметь $y_1 = x^2$. Рассмотрим, каков геометрический смысл этого равенства. По чертежу видно, что $y_1$ представляет расстояние точки $N$ от прямой $Mx_1$; иначе говоря, если принять за координатные оси линии $Mx_1$ и $My$, то $y_1$ будет ординатой точки $N$ относительно этих новых осей, а абсцисса точки $N$ останется прежней, и равенство $y_1 = x^2$ означает, что наш график расположен относительно осей $Mx_1$ и $My$ точно так же, как была бы расположена парабола $y = x^2$ относительно осей $Ox$ и $Oy$. Следовательно, наш график есть парабола с фокусом в точке $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, считая по новой системе координат, или $\left(0; 3\frac{1}{4}\right)$ по старой, а директрисой ее служит прямая, параллельная оси $Mx_1$ и лежащая ниже ее на расстоянии $\frac{1}{4}$, т. е. выше оси $Ox$ на расстоянии $2\frac{3}{4}$; осью симметрии ее служит ось $y$, а линия $Mx_1$ касается графика при его вершине.

Возьмем теперь функцию $y = -x^2 + 4$.

Пусть $x = \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$.

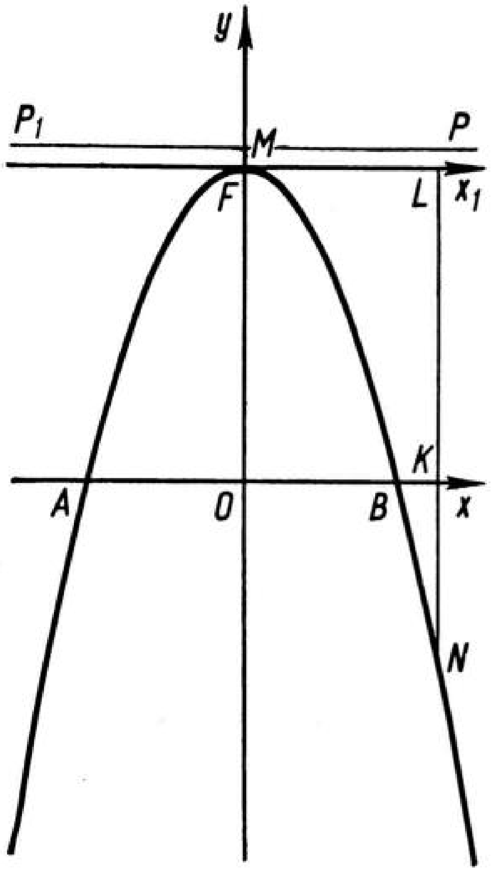


Рис. 40

Тогда $y = \dots -21, -12, -5, 0, 3, 4, 3, 0, -5, -12, -21, \dots$.

При возрастании $x$ наша функция изменяется следующим образом: при $x < 0$ она возрастает (равномерно замедленно), причем сперва она отрицательна (пока $x < -2$), затем обращается в нуль при $x = -2$ и далее становится положительной и продолжает возрастать, пока не достигает наибольшего значения $y = 4$ при $x = 0$. При $x > 0$ функция убывает (равномерно ускоренно), причем сначала она положительна (пока $x < 2$), затем при $x = 2$ она снова обращается в нуль, после этого становится опять отрицательной и продолжает убывать. При значениях $x$, равноотстоящих от 0, значения функции одинаковы (например, $y = 3$ при $x = -1$ и $x = 1$; $y = -12$ при $x = -4$ и $x = 4$).

Все эти изменения функции $y = -x^2 + 4$ наглядно обнаруживаются на ее графике, который можно построить подобно предыдущему по точкам (рис. 40). Наибольшему значению функции ($x = 0$; $y = 4$) соответствует вершина графика $M$; точки $A$ и $B$, в которых график пересекает ось $x$, соответствуют нулевым значениям функции ($x = -2$, $y = 0$ и $x = 2$, $y = 0$). Видно, что график лежит под осью $Ox$ для отрицательных значений $x$, меньших чем $-2$, и для положительных значений $x$, больших чем 2; для промежуточных же значений $x$ график расположен над осью $Ox$.

Покажем, что этот график есть такая же парабола, как и кривая $y = -x^2$, только перенесенная на 4 единицы вверх по вертикальному направлению. Проведем через вершину графика прямую $Mx_1$, параллельную оси $Ox$, и примем прямые $Mx_1$ и $My$ за новые координатные оси. Возьмем на графике какую-либо точку $N$, координаты которой относительно прежних осей $Ox$ и $Oy$ были бы $x$ и $y$; тогда относительно новых осей ее абсцисса будет та же самая ($ML = OK = x$), а ордината ее $y_1$ будет равна длине отрезка $NL$, взятой со знаком минус (так как точка $N$, как и другие точки нашей кривой, лежит под осью $Mx_1$). Но $NL = NK + KL$; длина $NK = -y$ (так как точка $N$ лежит под осью $Ox$, то ее ордината $y$ отрицательна, и абсолютная длина отрезка $NK$ выражается числом $-y$), а $KL = OM = 4$; следовательно, $NL = -y + 4$; ордината же точки $N$ относительно новых осей равна $-NL$, т. е. $y_1 = y - 4$. Но из уравнения нашей функции $y = -x^2 + 4$ имеем: $y - 4 = -x^2$, или $y_1 = -x^2$; следовательно, точки нашего графика относительно новых осей $Mx_1$ и $My$ расположены точно так же, как точки параболы $y = -x^2$ относительно прежних осей $Ox$ и $Oy$. Фокус нашей параболы лежит в точке $F\left(0; -\frac{1}{4}\right)$, считая по новой системе координат, или $\left(0; 3\frac{3}{4}\right)$ по старой, а директрисой служит прямая $PP_1$, параллельная оси $Mx_1$ и лежащая выше ее на расстоянии $\frac{1}{4}$ (т. е. выше оси $Ox$ на $4\frac{1}{4}$ ед.). Осью симметрии нашего графика служит ось $y$, а линия $Mx_1$ касается графика при вершине.

Рассмотрим теперь функцию, представленную полным квадратным трехчленом, например такую:

$$y = x^2 - 4x + 7.$$

Преобразуя трехчлен, стоящий в первой части равенства, получим:

$$y = x^2 - 4x + 4 + 3 = (x - 2)^2 + 3.$$

Очевидно, при $x = 2$ будем иметь $y = 3$, при всяком же значении $x$, отличном от 2, количество $(x - 2)^2$ будет иметь некоторую положительную числовую величину, а потому значение $y$ будет более 3. Таким образом, $y$ имеет наименьшее значение, равное 3, и получает это значение при $x = 2$.

Будем теперь придавать независимому переменному $x$ все возрастающие значения, сначала меньше 2, затем равное 2, потом больше 2, и каждый раз будем определять значение $y$:

$x = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots,$

$y = \ldots 28, 19, 12, 7, 4, 3, 4, 7, 12, 19, 28, \ldots .$

Видим, что функция изменяется почти так же, как и рассмотренная нами раньше функция $y = x^2 + 3$: будучи всегда положительной, она сначала, при $x < 2$, убывает (равномерно замедленно), пока не достигает наименьшего значения $y = 3$ при $x = 2$, и затем при $x > 2$ начинает возрастать (равномерно ускоренно); при значениях $x$, равноотстоящих от 2, значения функции одинаковы (например, $y = 4$ при $x = 1$ и $x = 3$; $y = 12$ при $x = -1$ и $x = 5$ и т. д.).

Построим теперь по точкам график нашей функции

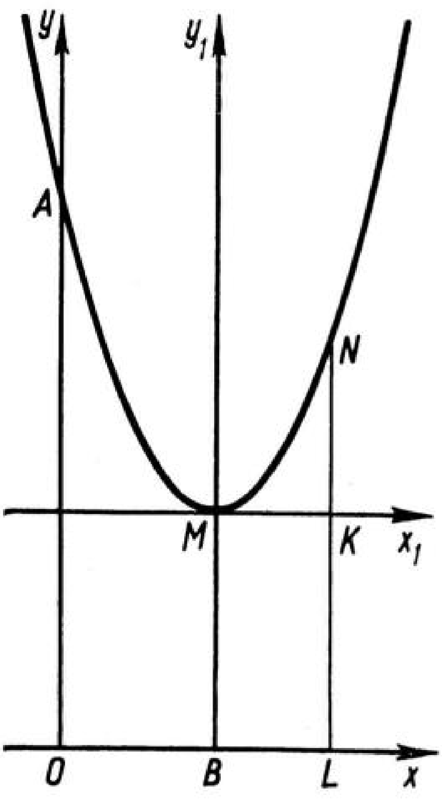


Рис. 41

(рис. 41). Его нижней точкой будет точка $M(x = 2,\ y = 3)$, соответствующая наименьшему значению функции; ось $y$ пересекается графиком в точке $A\ (x = 0;\ y = 7)$. Проведем через точку $M$ прямые $Mx_1$ и $My_1$, соответственно параллельные осям $Ox$ и $Oy$. Можно показать, что наш график есть парабола, вроде кривой $y = x^2$.

Возьмем на нашем графике произвольную точку $N$ с координатами $(x,\ y)$ и выразим ее координаты относительно новых осей $Mx_1$ и $My_1$. На рисунке видно, что $MK = OL - OB$ и $NK = NL - KL$, т. е. искомые новые координаты будут $x_1 = x - 2$ и $y_1 = y - 3$. Но из уравнения нашей функции $y = (x - 2)^2 + 3$ имеем: $y - 3 = (x - 2)^2$, или $y_1 = x_1^2$. Следовательно, точки нашего графика относительно осей $Mx_1$ и $My_1$ расположены так же, как точки параболы $y = x^2$ относительно осей $Ox$ и $Oy$; фокус нашей параболы лежит в точке $(0;\ \frac{1}{4})$ по отношению к новым осям, или $(2;\ 3\frac{1}{4})$ к старым, а директрисой ее будет прямая, параллельная оси $Mx_1$ и лежащая ниже этой оси на расстоянии $\frac{1}{4}$ (или же выше оси $Ox$ на расстоянии $2\frac{3}{4}$); ее осью симметрии будет прямая $My_1$, а прямая $Mx_1$ касается графика в его вершине.

В этом примере мы имели дело со случаем, когда коэффициент при $x^2$ был положительным; возьмем теперь такой случай, чтобы этот коэффициент был отрицательным, например исследуем функцию

$$y = -x^2 + 10x - 2.$$

Преобразуя трехчлен, стоящий в правой части, найдем:

$$y = -x^2 + 10x - 25 + 4 = -(x - 5)^2 + 4.$$

Очевидно, при $x = 5$ имеем $y = 4$; при всяком же значении $x$, отличном от 5, количество $-(x - 5)^2$ будет иметь отрицательную числовую величину, а потому значение $y$ будет непременно менее 4. Итак, $y$ имеет наибольшее значение, равное 4, получаемое при $x = 5$.

Будем теперь придавать независимому переменному $x$ все возрастающие значения, сначала меньше 5, потом $x=5$ и, наконец, больше 5, и будем каждый раз вычислять соответствующие значения функции:

$x= \dots -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots ,$

$y = \dots -32, -21, -12, -5, 0, 3, 4, 3, 0, -5, -12, -21, -32, \dots .$

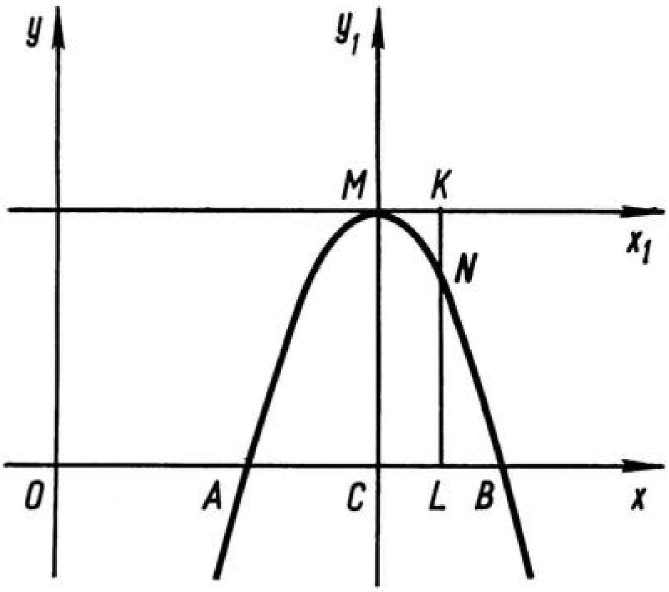


Рис. 42

Видим, что функция возрастает при $x<5$ (и возрастает равномерно замедленно), причем сначала, пока $x<3$, она отрицательна, при $x=3$ она обращается в нуль и далее при $x>3$ положительна; при $x=5$ функция получает наибольшее значение $y=4$, а затем при $x>5$ она убывает (равномерно ускоренно); при этом сначала она положительна, пока $x<7$, при $x=7$ она обращается в нуль, а при $x>7$ становится отрицательной и продолжает убывать.

Построив по точкам график функции (рис. 42), видим, что весь ход изменений нашей функции представлен на рисунке: для значений $x<5$ график поднимается, причем при $x<3$ он расположен под осью $Ox$, затем при $x=3$ пересекает ось $Ox$ и далее при $x>3$ поднимается над нею, пока не достигнет своей высшей точки $M$ ($x=5$; $y=4$); далее он опускается, причем при $x<7$ лежит все еще над осью $Ox$, при $x=7$ пересекает ось $Ox$ и затем при $x>7$ снова спускается ниже оси $Ox$.

Если возьмем на графике произвольную точку $N$ с координатами $(x; y)$, то нетрудно видеть, что ее координаты относительно новых осей $Mx_1$ и $My_1$ будут $x_1 = x-5$ и $y_1 = y-4$, но из уравнения нашей функции $y = -(x-5)^2+4$ имеем: $y-4 = -(x-5)^2$, или $y_1 = -x_1^2$; следовательно, наша кривая есть парабола, расположенная относительно осей $Mx_1$ и $My_1$ точно так же, как кривая $y=-x^2$ относительно осей $Ox$ и $Oy$.

Сделаем теперь общие выводы относительно изменений функции $y=ax^2+bx+c$. Но предварительно преобразуем наш трехчлен $ax^2+bx+c$ в другой вид, более удобный для исследования.

Выводя за скобку $a$, получаем:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Рассматривая же трехчлен $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$, замечаем, что первый член его представляет квадрат количества $x$, второй $\left(\frac{b}{a}x=2x\cdot\frac{b}{2a}\right)$ — удвоенное произведение $x$ на $\frac{b}{2a}$; присоединяя к нашему выражению два члена $+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ и $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, найдем по раскрытии скобок:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}.$$

Но $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$ есть полный квадрат $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, а выражение $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, следовательно, имеем:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2},$$

$$y=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Пусть $a>0$. Видим, что значение $y$ представляет сумму двух слагаемых, из которых второе $\frac{4ac-b^2}{4a}$ есть постоянное количество, а первое зависит от $x$ и обращается в нуль при $x=-\frac{b}{2a}$; при всяком же другом значении $x$ первое слагаемое положительно. Следовательно, в этом случае функция при $x=-\frac{b}{2a}$ получает наименьшее значение, равное $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Если же $a<0$, то $y$ опять же представляет сумму двух слагаемых, причем второе $\frac{4ac-b^2}{4a}$ постоянно, а первое при $x=-\frac{b}{2a}$ обращается в нуль и при всяком другом $x$ отрицательно. Следовательно, в этом случае при $x=-\frac{b}{2a}$ функция получает наибольшее значение, равное $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Будем теперь придавать независимому переменному $x$ значения, возрастающие все на одну и ту же величину $h$, которые сначала меньше, чем $-\frac{b}{2a}$, затем $x=-\frac{b}{2a}$ и, наконец, больше, чем $-\frac{b}{2a}$, и будем каждый раз определять значения $y$. Для сокращения записи обозначим величину $-\frac{b}{2a}$ через $m$, а величину $\frac{4ac-b^2}{4a}$ — через $n$; получим:

$x=\cdots m-4h,\ m-3h,\ m-2h,\ m-h,\ m,\ m+h,\ m+2h,\ m+3h,\ m+4h,\ \ldots;$

$y=\cdots n+16ah^2,\ n+9ah^2,\ n+4ah^2,\ n+ah^2,\ n,\ n+ah^2,\ n+4ah^2,\ n+9ah^2,\ n+16ah^2,\ \ldots;$

Если $a>0$, то, очевидно, наша функция сначала убывает, пока $x<m$, а затем при $x>m$ возрастает; при $a<0$ ее изменения пойдут в обратном порядке.

Итак, мы нашли следующее.

1. При возрастании независимого переменного $x$ функция его $y$ изменяется так:

1) если коэффициент $a$ положительный, то функция сначала убывает, пока $x<-\frac{b}{2a}$; затем при $x=-\frac{b}{2a}$ достигает наименьшего значения $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$, а далее, при $x>-\frac{b}{2a}$, возрастает;

2) если коэффициент $a$ отрицательный, то функция при $x<-\frac{b}{2a}$ возрастает, затем при $x=-\frac{b}{2a}$ достигает наибольшего значения $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$, а далее при $x>-\frac{b}{2a}$ убывает.

Мы можем доказать это для любых значений, если возьмем два произвольных значения $x$ (меньшее $x_1$ и большее $x_2$) и найдем разность соответствующих значений функции ($y_2-y_1$). Будем иметь:

$$y_2=a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

$$y_1=a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Отсюда $y_2 - y_1 = a\left(\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2\right)$; преобразуя разность квадратов в скобках, найдем:

$$y_2 - y_1 = a\left(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}\right)(x_2 - x_1).$$

По условию $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$; если при этом $a > 0$, то знак разности $y_2 - y_1$ зависит от сомножителя $x_2 + x_1 + \frac{b}{a}$. Очевидно, что если данные значения $x$ будут менее $-\frac{b}{2a}$, то сумма их $x_2 + x_1$ менее $-\frac{b}{a}$, а следовательно, $x_2 + x_1 + \frac{b}{a} < 0$, и тогда $y_2 - y_1 < 0$ (функция убывает), если же $x_1$ и $x_2$ более $-\frac{b}{2a}$, то сумма $x_2 + x_1$ более $-\frac{b}{a}$; следовательно, $x_2 + x_1 + \frac{b}{a} > 0$, и мы имеем $y_2 - y_1 > 0$ (функция возрастает).

При $a < 0$ все будет наоборот.

2. Возрастание и убывание функции идет равномерно ускоренно. Это видно из составленного нами ряда значений функции (помещенного на предыдущей странице).

3. При значениях $x$, равноотстоящих от числа $-\frac{b}{2a}$, значения функции одинаковы. В самом деле, любые два значения $x$, равноотстоящие от $-\frac{b}{2a}$, можно представить в виде $-\frac{b}{2a} + h$ и $-\frac{b}{2a} - h$ (где $h$ — положительное число). Вычисляя для обоих случаев соответствующие значения $y$, имеем один и тот же результат:

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} + ah^2.$$

Если выразим отношение между каким-либо приращением функции $(y_2 - y_1)$ и соответствующим ему приращением независимого переменного $(x_2 - x_1)$, то найдем:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a\left(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}\right) = a(x_2 + x_1) + b.$$

Очевидно, как и в случае функции $y = ax^2$, это отношение не постоянно, а переменно. Оно зависит от значений $x_1$ и $x_2$ и выражает среднюю скорость изменения функции между значениями $y_1$ и $y_2$.

Заметим, что функция $y = ax^2 + bx + c$, как оказывается, имеет те же основные свойства, что и функция $y = ax^2$, за исключением одного: она уже не пропорциональна квадрату независимого переменного, как это было для функции $y = ax^2$.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола такого же вида, как и график функции $y = ax^2$. В самом деле, уравнение $y = ax^2 + bx + c$ мы преобразовали так:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

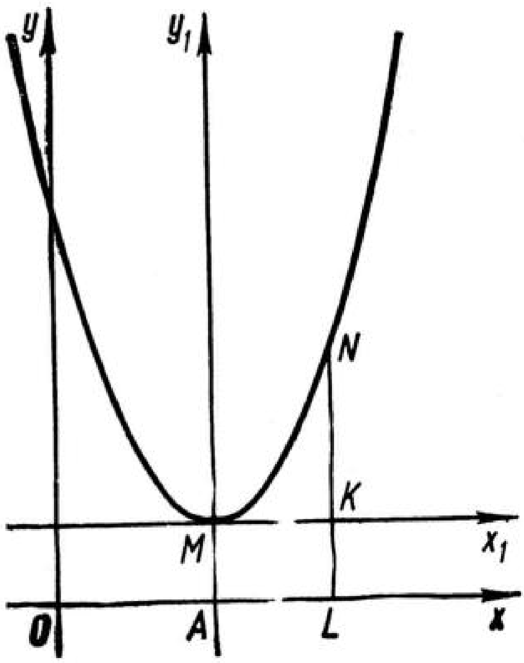


Рис. 43

Обозначая величину $-\frac{b}{2a}$ через $m$, а $\frac{4ac - b^2}{4a}$ через $n$, будем иметь:

$$y = a(x - m)^2 + n, \quad \text{или} \quad y - n = a(x - m)^2.$$

Отметим теперь на рисунке точку $M$ с координатами $m$ и $n$ (рис. 43) и проведем через нее прямые $Mx_1$ и $My_1$, параллельные осям $Ox$ и $Oy$. Пусть $N$ будет произвольная точка нашего графика с координатами $x$ и $y$ (относительно осей $Ox$ и $Oy$); выразим координаты этой точки относительно новых осей $Mx_1$ и $My_1$. На рисунке видно, что $MK = OL - OA$ и $NK = NL - KL$, т. е. искомые новые координаты будут $x_1 = x - m$ и $y_1 = y - n$. Заменяя в нашем уравнении $y - n = a(x - m)^2$ величины $x - m$ и $y - n$ через $x_1$ и $y_1$, мы приведем его к виду $y_1 = ax_1^2$, т. е. наш график относительно осей $Mx_1$ и $My_1$ расположен точно так же, как была бы расположена кривая $y = ax^2$ относительно осей $Ox$ и $Oy$.

Наш рисунок соответствует случаю, когда $a > 0$; при $a < 0$ мы имели бы тот же результат, только рисунок был бы перевернут сверху вниз сравнительно с предыдущим.

В зависимости от величины $m = \frac{4ac - b^2}{4a}$ прямая $Mx_1$ (касающаяся графика при его вершине) может пройти над осью $Ox$ (рис. 44), или совпасть с осью $Ox$ (рис. 45), или пройти ниже ее (рис.46). Эти рисунки соответствуют случаю, когда $a > 0$. При $a < 0$ могут быть такие же положения прямой $Mx_1$, но график окажется расположенным под этой прямой (рис. 47, 48 и 49).

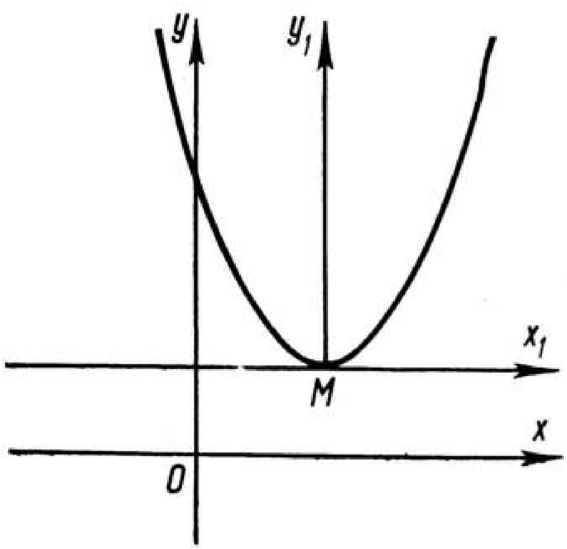


Рис. 44

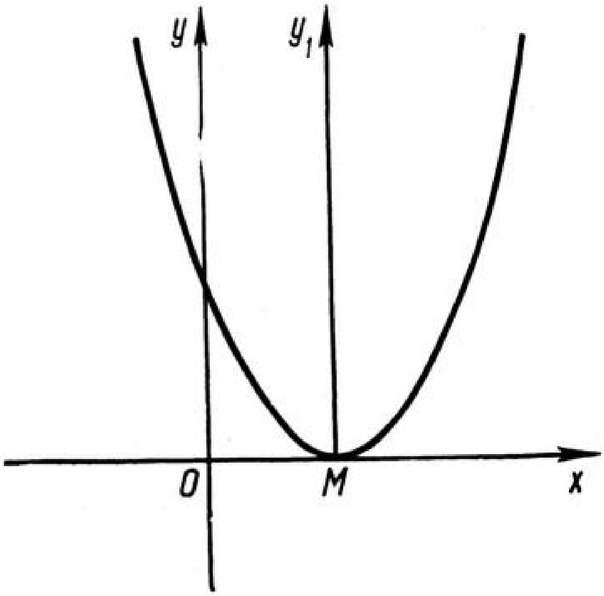


Рис. 45

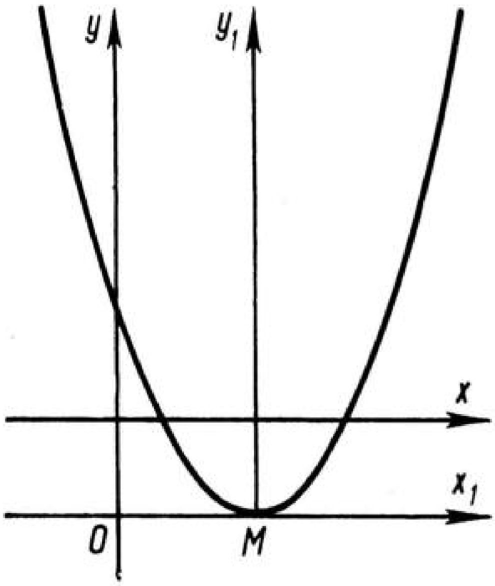


Рис. 46

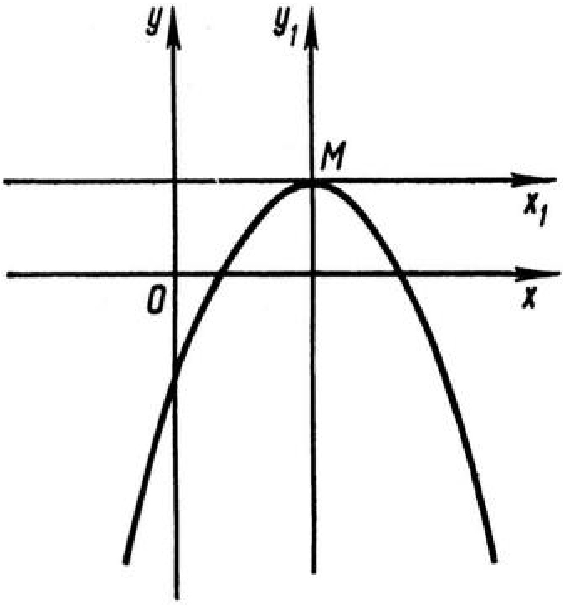


Рис. 47

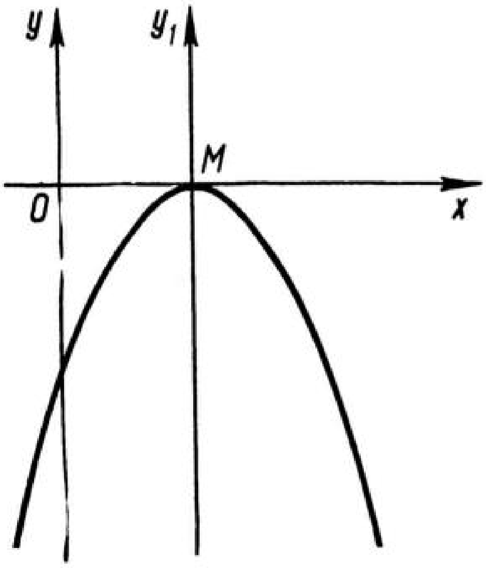


Рис. 48

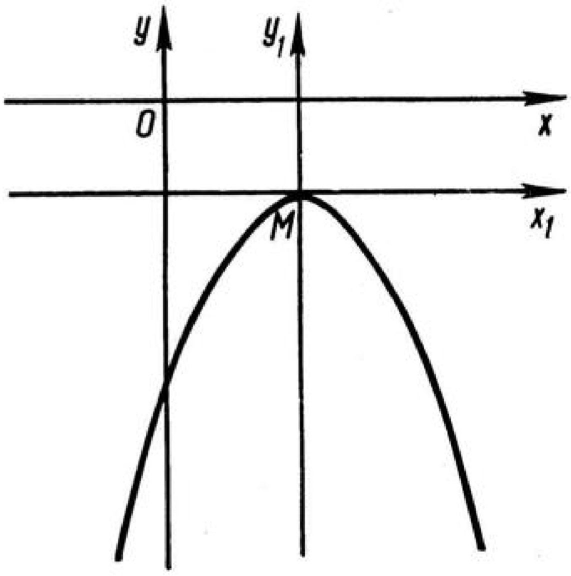


Рис. 49

Точки пересечения графика с осью $Ox$ соответствуют тем случаям, когда значение функции равно нулю, т. е. когда $ax^2 + bx + c = 0$. Абсциссы этих точек выражают значения $x$, при которых удовлетворяется уравнение $ax^2 + bx + c = 0$; это будут значения:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Таким образом, построив график функции $y = ax^2 + bx + c$ и определив точки его пересечения с осью $Ox$, мы вместе с тем находим графическое решение уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. На рисунках 44—49 мы можем проследить и все другие случаи, которые могут встретиться при решении уравнения $ax^2 + bx + c = 0$; именно: уравнение имеет два корня при $b^2 - 4ac > 0$ (рис. 46 и 47; график функции пересекает ось $Ox$ в двух точках), один корень при $b^2 - 4ac = 0$ (рис. 45 и 48; график касается оси $Ox$) и ни одного корня при $b^2 - 4ac < 0$ (рис. 44 и 49; график не пересекает оси $Ox$).

Из двух способов графического решения квадратного уравнения (только что изложенного и указанного в § 11) на практике более удобен предыдущий, так как при нем достаточно вычертить параболу $y = x^2$ один раз, а искомые решения находятся посредством проведения прямых линий; при последнем же способе для каждого уравнения придется чертить особую параболу.

## § 15. Решение задач при помощи разыскания наибольших или наименьших значений функций второго порядка

Рассмотрим несколько задач, для решения которых придется разыскать наибольшее или наименьшее значение функций второго порядка.

Задача 1. *Определить прямоугольник, который при данном периметре 2 р имел бы наибольшую площадь.*

Если периметр прямоугольника есть $2p$, то очевидно, что сумма двух соседних его сторон будет $p$; если одну из его сторон назовем $x$, то другая будет $p - x$, а площадь прямоугольника

$$S = x(p - x) = px - x^2.$$

Принимая $x$ за независимое переменное, видим, что $S$ есть функция (второго порядка) от $x$; так как в данном случае коэффициент при $x^2$ отрицателен, то функция имеет наибольшее значение. Из предыдущего мы знаем, что функция вида $y =$

$= ax^2 + bx + c$, где $a < 0$, имеет наибольшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$; в данном случае имеем $a = -1$, $b = p$, следовательно, функция получит наибольшее значение при $x = \frac{p}{2}$.

Но если одна из сторон прямоугольника есть $\frac{p}{2}$, то соседняя равна $p - \frac{p}{2}$, т. е. тоже $\frac{p}{2}$. Итак, искомый прямоугольник есть квадрат со стороной $\frac{p}{2}$, а площадь его равна, очевидно, $\frac{p^2}{4}$.

З а д а ч а 2. *Среди всех треугольников данного периметра $2p$ и данного основания $a$ найти тот, который имеет наибольшую площадь.*

Как известно из геометрии, площадь искомого треугольника выражается формулой

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $a$, $b$, $c$ — стороны треугольника.

Очевидно, эта площадь будет иметь наибольшее значение тогда, когда получит наибольшее значение подкоренное количество

$$p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Так как здесь первые два сомножителя постоянны, остается найти, при каких условиях будет наибольшим произведение последних двух:

$$(p-b)(p-c).$$

Обозначим $p - b$ через $x$ и постараемся выразить второй сомножитель $p - c$ в виде функции от $x$. Для этого сложим $p - b$ и $p - c$; получим:

$$(p-b) + (p-c) = 2p - b - c = a.$$

Отсюда $p - c = a - (p - b) = a - x$; поэтому:

$$(p-b)(p-c) = x(a-x) = ax - x^2.$$

Рассуждая, как и при решении предыдущей задачи, делаем вывод, что функция $ax - x^2$ получит наибольшее значение при $x = \frac{a}{2}$; следовательно, имеем:

$$p - b = \frac{a}{2};\ p - c = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2},$$

или окончательно $p - b = p - c$, откуда $b = c$; искомый треугольник равнобедренный.

З а д а ч а 3. *Тяжелое тело подбросили вертикально вверх с начальной скоростью $v_0$. Определить наибольшую высоту, на которую оно поднимется.*

Как известно из физики, высота, на которой окажется это тело через $t$ с, определяется по формуле

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

где $g$ — ускорение силы тяжести.

Очевидно, здесь высота $h$ есть функция второго порядка от $t$. Как известно, общая функция $y = ax^2 + bx + c$ (где $a < 0$) имеет наибольшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$; в данном случае коэффициент $a = -\frac{1}{2} g$, $b = v_0$, следовательно, наша функция получит наименьшее значение при $t = \frac{v_0}{g}$, а искомая наибольшая высота будет:

$$h = v_0 \left(\frac{v_0}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Итак, тело достигает наибольшей высоты через $\frac{v_0}{g}$ с, а самая высота, на которую оно поднимется, будет $\frac{v_0^2}{2g}$.

З а д а ч а 4. *Прямолинейный кусок проволоки длиною $d$ (см) согнут под прямым углом так, чтобы расстояние между его концами было наименьшим.*

Пусть длина одной части согнутой проволоки будет $x$ (см); тогда длина другой части $d - x$, а расстояние между их концами — гипотенуза прямоугольного треугольника, катеты которого $x$ и $d - x$, поэтому оно равно

$$\sqrt{x^2 + (d - x)^2}.$$

Это расстояние примет наименьшую величину тогда, когда получит наименьшее значение подкоренное количество:

$$x^2 + (d - x)^2 = 2x^2 - 2dx + d^2.$$

Это количество есть, очевидно, функция второго порядка от $x$, причем коэффициент $a = 2$, $b = -2d$; по предыдущему, функция получит наименьшее значение при

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{2d}{4} = \frac{d}{2}.$$

Но если длина одной части $\frac{d}{2}$, то длина другой части будет $d - \frac{d}{2}$ или тоже $\frac{d}{2}$; итак, проволоку нужно перегнуть пополам.

## § 16. Функция $y = \frac{1}{x}$

Возьмем такую задачу:

*Площадь прямоугольника 1 см$^2$; основание его $x$ (см). Какова его высота?*

Пусть высота равна $y$ см; значит, $y = \frac{1}{x}$. Исследуем изменения этой функции.

Пусть $x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$.

Тогда $y = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots; 2, 3, 4, 5, \ldots$.

Рассматривая соответствующие значения $x$ и $y$, замечаем прежде всего, что с возрастанием $x$ функция его $y$ убывает неравномерно (когда $x$ возрастает на 1, то $y$ убывает последовательно на $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20} \ldots$); затем видим, что величины $y$ и $x$ обратно пропорциональны: с увеличением $x$ в 2, 3, 4, ... раза значения $y$ уменьшаются во столько же раз. Увеличивая постепенно $x$, мы можем сделать $y$ как угодно малым. Например, мы будем иметь $y = \frac{1}{1000}$ при $x = 1000$, $y = \frac{1}{100\,000}$ при $x = 100\,000$ и т. д. Наоборот, уменьшая $x$, мы можем сделать $y$ как угодно большим: при $x = \frac{1}{1000}$ будем иметь $y = 1000$, при $x = \frac{1}{100\,000}$ найдем $y = 100\,000$ и т. д.

Функция не имеет значения, соответствующего $x = 0$ (так как при $x = 0$ дробь $\frac{1}{x}$ теряет смысл); обратно, ни при каком значении $x$ функция не обращается в нуль, так как уравнение $\frac{1}{x} = 0$ не имеет решения.

Изобразим графически изменения данной функции. Приняв за единицу 1 см, будем откладывать на оси $x$ отрезки, равные 1, 2, 3, 4, ...; $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, ..., изображающие основания наших прямоугольников. Из концов их будем проводить перпендикуляры, соответствующие значениям $y$, т. е. высотам прямоугольников (для удобства возьмем и ряд промежуточных значений $x = 1{,}1$; $1{,}2$; $1{,}3$; ... и соответствующие им значения $y$). Соединив концы всех перпендикуляров непрерывной кривой, получим линию, изображенную на рисунке 50 в правом верхнем углу осей. Это и будет график функции $y = \frac{1}{x}$ для положительных значений $x$.

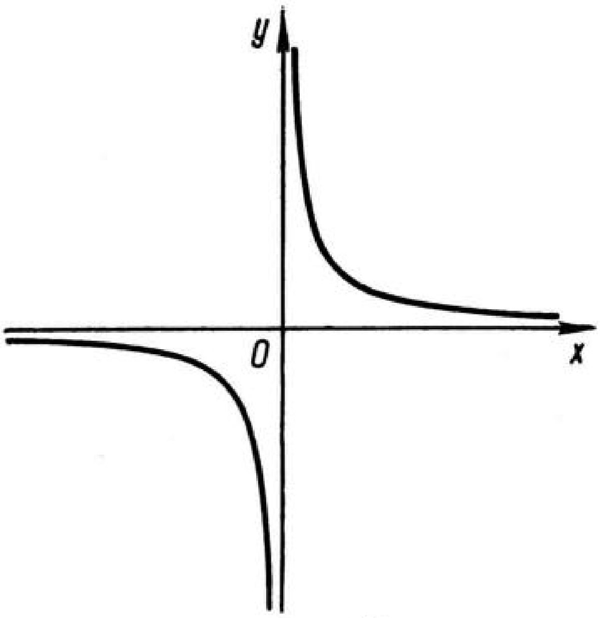


Рис. 50

Исследуем теперь изменения нашей функции для отрицательных значений $x$ (чтобы наша первоначальная задача сохранила смысл, условимся считать положительной площадь прямоугольника, расположенного в правом верхнем или левом нижнем углу осей). Пусть

$$x = -1, -2, -3, -4, -5, \dots ;$$
$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots,$$

тогда

$$y = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots ; -2,$$
$$-3, -4, -5 \dots .$$

Видим, что по-прежнему при возрастании $x$ функция его $y$ убывает и наоборот и что значения $y$ и $x$ обратно пропорциональны (если значение $x$ умножить на 2, 3, 4, ..., то соответствующее значение $y$ получится посредством деления на те же числа).

Если построим график функции, то получим кривую, лежащую в левом нижнем углу осей (рис. 50) и по виду похожую на предыдущую. Обе найденные кривые вместе представляют полный график функции $y = \frac{1}{x}$; они наглядно показывают, что при увеличении $x$ функция его $y$ убывает как при отрицательных, так и при положительных значениях $x$; ясно также, что обе ветви графика не сходятся между собой и не пересекают осей, но могут подойти как угодно близко и к оси $y$ (при значениях $x$, близких к нулю) и к оси $x$ (при значениях $x$, имеющих достаточно большую абсолютную величину).

## § 17. Геометрические свойства графика функции $y = \frac{1}{x}$ и способ его непосредственного вычерчивания

Рассмотрим некоторые геометрические свойства графика функции $y = \frac{1}{x}$; прежде всего укажем на отличительное свойство точки $O$. Выберем на графике (рис. 51) две точки $K$ и $K_1$, абсциссы которых выражались бы взаимно противоположными числами $+h$ и $-h$; ординаты их будут соответственно $\frac{1}{h}$ и $-\frac{1}{h}$. Соединим точки $K$ и $K_1$ с точкой $O$ и рассмотрим прямоугольные треугольники $OKL$ и $OK_1L_1$; видим, что катеты их $OL$ и $OL_1$ равны, так как их абсолютная длина по условию одинакова ($h$); катеты $KL$ и $K_1L_1$ также равны, так как имеют одну и ту же абсолютную длину $\frac{1}{h}$, следовательно:

$$\triangle OKL = \triangle OK_1L_1,$$

откуда

$$OK = OK_1$$

и

$$\angle KOL = \angle K_1OL_1,$$

т. е. точки $K$ и $K_1$ одинаково отстоят от начала координат и лежат на одной прямой. Иначе говоря, если соединить какую-либо точку графика ($K$) с началом координат, то эта прямая пересечет другую ветвь графика в такой точке $K_1$, которая удалена от начала координат на одинаковое с нею расстояние ($OK_1 = OK$).

Отсюда следует, что **точка $O$ (начало координат) есть середина всех хорд графика, проходящих через нее.** Выражая это обстоятельство, говорят, что точка $O$ есть *центр* графика.

Покажем теперь, что наш **график имеет оси симметрии.** С этой целью возьмем на графике (рис. 52) произвольную точку $K$ с абсциссой $h$; ордината ее будет $\frac{1}{h}$. Выберем теперь на графике другую точку $L$ с абсциссой $\frac{1}{h}$; ордината ее будет $h$. Проведем в прямом углу $XOY$ биссектрису $OZ$ и докажем, что точки $K$ и $L$ симметричны относительно этой биссектрисы.

В самом деле, прямоугольные треугольники $OKP$ и $OLQ$ равны между собой (так как у них соответственно равны катеты: $OP = OQ = h$ и $KP = LQ = \frac{1}{h}$, поэтому $OK = OL$ и $\angle POK = \angle LOQ$). Соединив точки $K$ и $L$, получаем равнобедренный $\triangle KOL$; в нем линия $OM$ делит угол между равными сторонами пополам (так как углы $KOM$ и $LOM$ можно

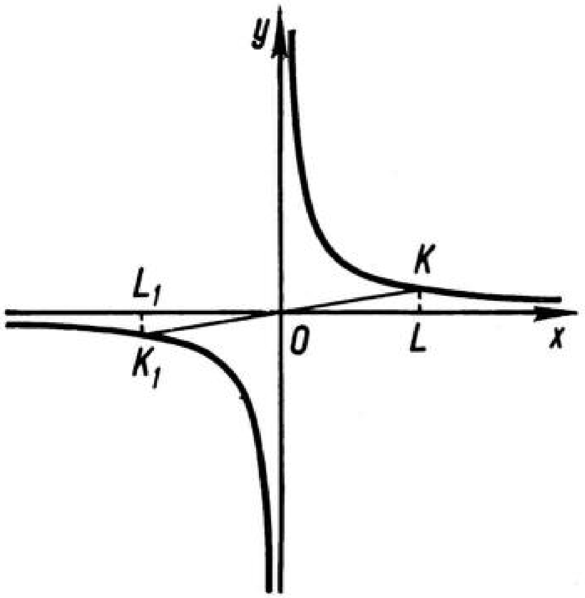


Рис. 51

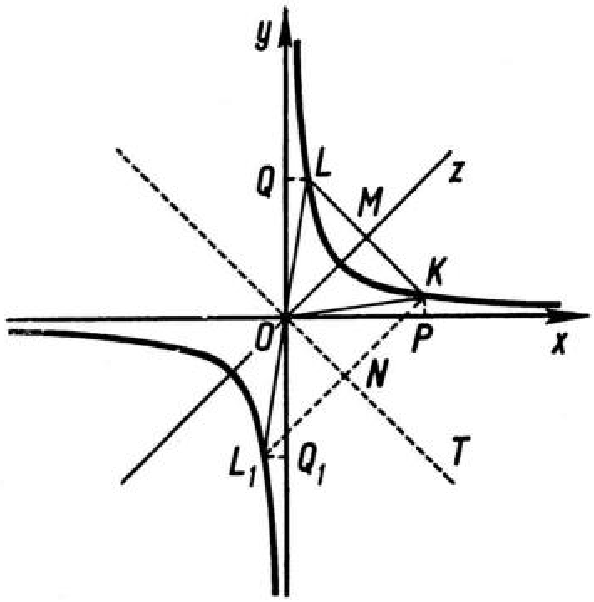


Рис. 52

представить как остатки от вычитания равных углов $KOP$ и $LOQ$ из равных друг другу углов $XOM$ и $YOM$, а потому $\angle KOM = \angle LOM$); следовательно, она будет также и медианой, и высотой треугольника, т. е. $MK = ML$ и $OM \perp KL$, а точки $K$ и $L$ симметричны относительно прямой $OZ$.

Наш **график имеет и другую ось симметрии.** Проведем через $O$ прямую $OT$, перпендикулярную к $OZ$ (она будет биссектрисой прямых углов, смежных с углом $XOY$). Продолжим линию $OL$ до пересечения с другой ветвью графика в точке $L_1$; как доказано выше, расстояние $OL_1 = OL = OK$ и $\triangle OL_1Q_1$ равен $\triangle OLQ$, следовательно, и $\triangle OKP$, откуда $\angle L_1OQ_1 = \angle KOP$. Соединив теперь точки $K$ и $L_1$, получаем снова равнобедренный $\triangle KOL_1$. Прямая $ON$ делит в нем угол между равными сторонами пополам (так как углы $KON$ и $L_1ON$ получаются от сложения равных углов $KOP$ и $L_1OQ_1$ с равными между собою углами $PON$ и $Q_1ON$); следовательно, как и в предыдущем случае, эта прямая будет и медианой, и высотой: $NK = NL_1$ и $ON \perp KL_1$, т. е. точки $K$ и $L_1$ симметричны относительно прямой $OT$. Эта прямая и будет второй осью симметрии.

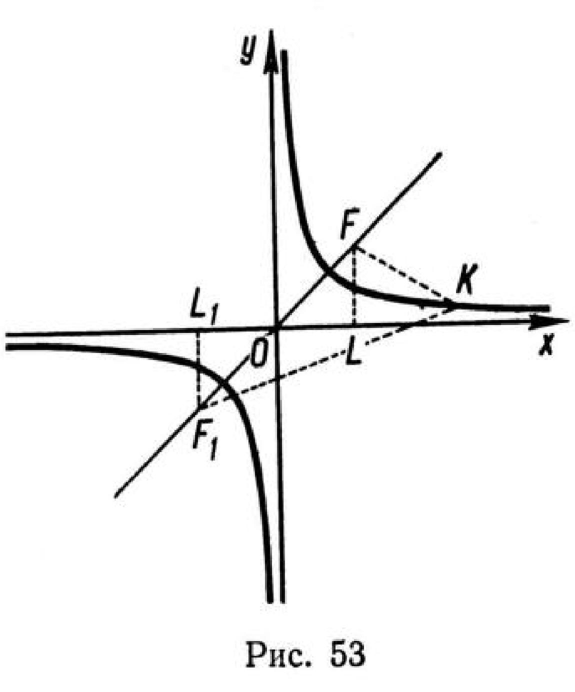


Рис. 53

Укажем теперь отличительное геометрическое свойство точек нашего графика.

Отложим на первой оси симметрии (рис. 53) от точки $O$ вправо и влево два отрезка, каждый из которых равен 2 единицам длины; полученные точки назовем $F$ и $F_1$; координаты этих точек будут, очевидно, $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Выберем на графике любую точку $K$ с координатами $(x; y)$, определим ее расстояние от точек $F$ и $F_1$ и найдем затем разность этих расстояний.

Расстояния $KF$ и $F_1K$ выражаются (см. § 9) так:

$$KF = \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2},$$

$$KF_1 = \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2}.$$

Преобразуем теперь оба подкоренные выражения; начнем со второго.

Раскрыв скобки, найдём:

$$(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 = x^2 + 2x\sqrt{2} + \\ + 2 + y^2 + 2y\sqrt{2} + 2.$$

Из уравнения нашего графика $y = \frac{1}{x}$ имеем $xy = 1$, или $2xy = 2$; заменяя третий член последнего многочлена (2) на $2xy$, получим:

$$(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 = x^2 + 2x\sqrt{2} + \\ + 2xy + y^2 + 2y\sqrt{2} + 2.$$

Первый, третий и четвертый члены этого выражения представляют в совокупности полный квадрат суммы $x+y$; во втором и пятом членах есть общий множитель $2\sqrt{2}$. Находим:

$$(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 = (x+y)^2 + 2(x+y)\sqrt{2} + 2.$$

Теперь ясно, что в правой части первый член можно рассматривать как квадрат количества $x+y$, второй — как удвоенное произведение $x+y$ на $\sqrt{2}$ и третий — как квадрат числа $\sqrt{2}$; следовательно, все выражение — полный квадрат суммы $x+y$ и $\sqrt{2}$:

$$(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 = (x+y+\sqrt{2})^2.$$

Повторяя это рассуждение, найдем, что

$$(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = (x+y-\sqrt{2})^2.$$

На основании найденного получаем:

$$KF_1 = x + y + \sqrt{2},$$
$$KF = x + y - \sqrt{2};$$

следовательно,

$$KF_1 - KF = (x + y + \sqrt{2}) - (x + y - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

Итак, **всякая точка графика обладает таким отличительным свойством: разность расстояний ее от двух определенных точек $F_1$ и $F$ есть величина постоянная, равная $2\sqrt{2}$.**

Обратно, если возьмем любую точку, обладающую указанным свойством, то можно сказать, что такая точка должна иметь координаты, удовлетворяющие уравнению $y = \frac{1}{x}$ (т. е. должна лежать на нашем графике)[1]. В самом деле, пусть имеем некоторую точку с координатами $x_1$ и $y_1$; ее расстояние от точки $F$ будет равно

$$\sqrt{(x_1 - \sqrt{2})^2 + (y_1 - \sqrt{2})^2},$$

а расстояние ее от $F_1$ будет

$$\sqrt{(x_1 + \sqrt{2})^2 + (y_1 + \sqrt{2})^2};$$

по условию разность этих расстояний должна быть равна $2\sqrt{2}$; следовательно, имеем:

$$\sqrt{(x_1 + \sqrt{2})^2 + (y_1 + \sqrt{2})^2} =$$
$$= \sqrt{(x_1 - \sqrt{2})^2 + (y_1 - \sqrt{2})^2} \pm 2\sqrt{2}.$$

Упрощая это равенство (возведением в квадрат и дальнейшими преобразованиями), получим в конце концов $x_1 y_1 = 1$, или $y_1 = \frac{1}{x_1}$, что и требовалось доказать.

Итак, **график функции $y = \frac{1}{x}$ есть геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек $F$ и $F_1$ есть постоянная величина ($2\sqrt{2}$).** Такая кривая называется *гиперболой*. Точки $F$ и $F_1$ называются *фокусами* гиперболы.

Зная это отличительное свойство нашего графика, мы можем построить его следующим образом.

Пусть точки $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $F_1(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ будут фокусами искомой кривой; установим вдоль прямой линии $FF_1$

---

[1] Мы должны поставить перед числом $2\sqrt{2}$ знак «+» или «—», смотря по тому, какое из расстояний данной точки (до $F_1$ или до $F$) будет больше, но окончательный результат от этого не изменяется.

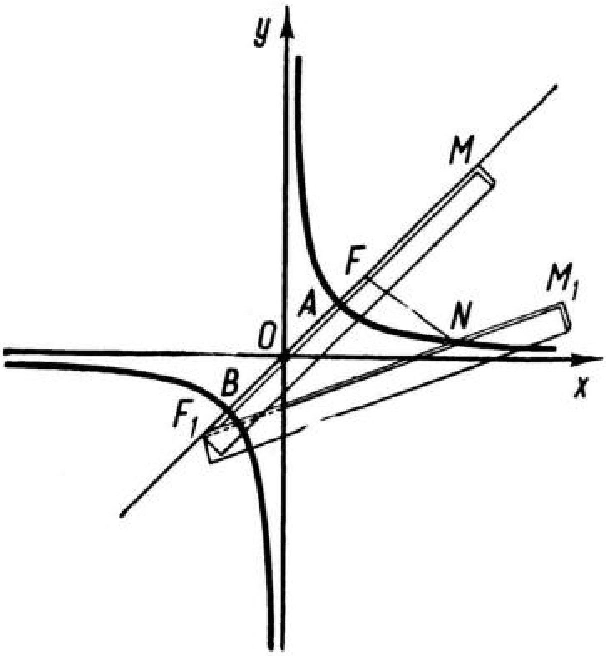


Рис. 54

(рис. 54) линейку $F_1M$, укрепив ее конец в фокусе $F_1$ так, чтобы она могла вращаться около точки $F_1$. Затем возьмем нитку такой длины, чтобы она была короче нашей линейки на $2\sqrt{2}$ единиц, и прикрепим ее одним концом в фокусе $F$, а другим — в конце линейки $M$.

Если теперь натянуть нитку острием карандаша вдоль линейки $F_1M$ (влево), то карандаш попадет в точку $A$. Эта точка должна лежать на нашем графике, так как для нее разность расстояний $AF_1 - AF$ будет равна данной величине $2\sqrt{2}$. В самом деле, разность $AF_1 - AF$ не изменится, если мы увеличим каждую из длин $AF_1$ и $AF$ на длину $AM$, но $AF_1 + AM$ равно длине линейки $F_1M$, а $AF + AM$ — длине натянутой нитки, которая по условию короче линейки на $2\sqrt{2}$. Будем теперь вращать линейку около точки $F_1$, а острие карандаша перемещать, удерживая его при линейке так, чтобы и нитка оставалась все время натянутой. Тогда получим искомую гиперболу (правую ее ветвь). В самом деле, любая точка нашей кривой, например $N$, будет удовлетворять основному условию, так как величина $NF_1 - NF = (NF_1 + NM_1) - (NF + NM_1)$ равна длине линейки без длины нитки, т. е. $2\sqrt{2}$. Чтобы начертить левую ветвь гиперболы, нужно только переместить линейку вращающимся концом в фокус $F$ и повторить предыдущее построение.

## § 18. Приложение функции $y = \frac{1}{x}$ в физике

Нам известен в физике, в учении о газах, закон Бойля — Мариотта, состоящий в следующем: **произведение чисел, выражающих объем газа и давление, под которым он находится, есть величина постоянная** (при неизменной температуре). Если мы имеем 1 единицу объема газа при давлении в 1 атмосферу и объем того же газа при давлении в $p$ атмосфер назовем через $V$, то будем иметь: $V \cdot p = 1$, или $V = \frac{1}{p}$. Если давление $p$ будет меняться, то будет меняться и объем газа $V$, причем $V$

есть функция $p$, и мы можем изобразить эти изменения графически, приняв, например, что каждый сантиметр по оси $x$ изображает 1 атмосферу, а каждый сантиметр по оси $y$ — 1 единицу объема газа. Мы получим гиперболу, изображенную на рис. 50, но не всю целиком, а только правую ее ветвь (находящуюся в правом верхнем координатном углу), так как давление и объем газа могут выражаться лишь положительными числами. График этот наглядно покажет нам, как изменяется объем газа при изменении давления. Например, видно, что при давлении в 1,7 атмосферы объем газа равен 0,6 первоначального (получаемые при этом результаты приблизительны, но следует иметь в виду, что и самый закон Бойля—Мариотта также приблизителен).

## § 19. Функция $y = -\frac{1}{x}$ и ее график

Значения функции $y = -\frac{1}{x}$, очевидно, отличаются от соответствующих значений функции $y = \frac{1}{x}$ только знаком.

Если $x = \cdots -5, -4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$, то $y = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$;

если $x = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, то $y = \cdots -5, -4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$.

Видим, что при возрастании $x$ функция его $y$ возрастает (и, очевидно, неравномерно): кроме того, можем заметить, что величины $y$ и $x$ обратно пропорциональны: если значение $x$ мы умножим на 2, 3, 4, 5, ..., то соответствующее значение $y$ получится при помощи деления на то же число. Увеличивая абсолютную величину $x$, мы можем сделать $y$ как угодно малым по абсолютной величине, например: при $x = 1000$ имеем $y = -\frac{1}{1000}$, при $x = 100\,000$ $y = -\frac{1}{100\,000}$ и т. д.; наоборот, уменьшая абсолютную величину $x$, мы можем сделать $y$ как угодно большим по абсолютной величине: при $x = \frac{1}{1000}$ имеем $y = -1000$, при $x = \frac{1}{100\,000}$ $y = -100\,000$ и т. д.

Функция не имеет значения, соответствующего $x = 0$, и не обращается в нуль ни при каком значении $x$.

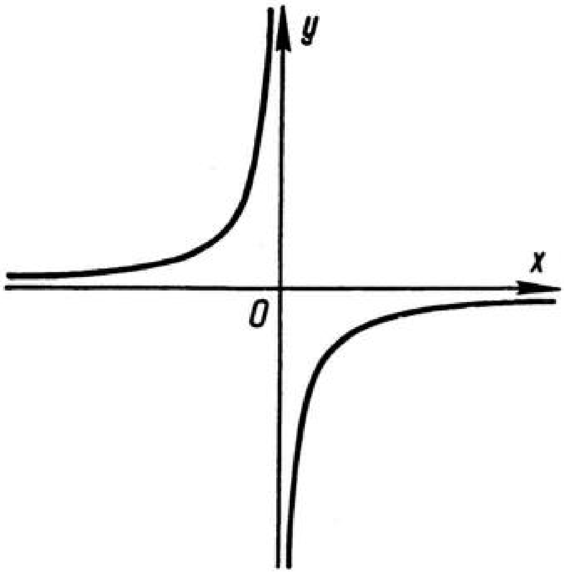


Рис. 55

Построив по точкам график нашей функции, получим кривую, изображенную на рис. 55; видим, что это будет кривая такой же формы, как и график функции $y = \frac{1}{x}$, только расположенная в других координатных углах (мы можем получить ее, повернув прежний график сверху вниз вокруг оси $x$).

Данный график наглядно показывает, что при возрастании $x$ его функция $y$ постоянно возрастает как при отрицательных, так и при положительных значениях $x$.

Повторяя точь-в-точь все прежние рассуждения, мы могли бы убедиться, что эта кривая есть также гипербола, имеющая фокусы в точках $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

## § 20. Функция вида $y = \frac{a}{x}$

Исследуем изменения функции $y = \frac{4}{x}$.

Если $x = \cdots -5, -4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$, то $y = \cdots -\frac{4}{5}, -1, -1\frac{1}{3}, -2, -4, -8, -12, -16, -20, \ldots$;

если $x = \cdots \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, то $y = \ldots 20, 16, 12, 8, 4, 2, 1\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{5}, \ldots$.

При возрастании $x$ функция его $y$ очевидно убывает как при $x < 0$, так и при $x > 0$ (и убывает неравномерно); и по-прежнему величины $y$ и $x$ обратно пропорциональны. Увеличивая абсолютную величину $x$, мы можем сделать $y$ как угодно малым по абсолютной величине, например: при $x = 1000$ $y = 0{,}004$; при $x = 100\,000$ $y = 0{,}00004$ и т. д.; наоборот, уменьшая абсолютную величину $x$, мы можем сделать $y$ как угодно большим по абсолютной величине: при $x = 0{,}001$ имеем $y = 4000$; при $x = 0{,}00001$ $y = 400\,000$ и т. д.

И здесь функция при $x = 0$ не имеет соответствующего значения и не обращается в 0 ни при каком $x$.

График нашей функции изображен на рисунке 56. Он дает возможность наглядно проследить постоянное убывание нашей функции; ветви графика, как и в предыдущих случаях, не сходятся между собой и не пересекают осей, но могут подойти как угодно близко и к оси $y$ (при значениях $x$, близких к нулю) и к оси $x$ (при значениях $x$, имеющих достаточно большую абсолютную величину).

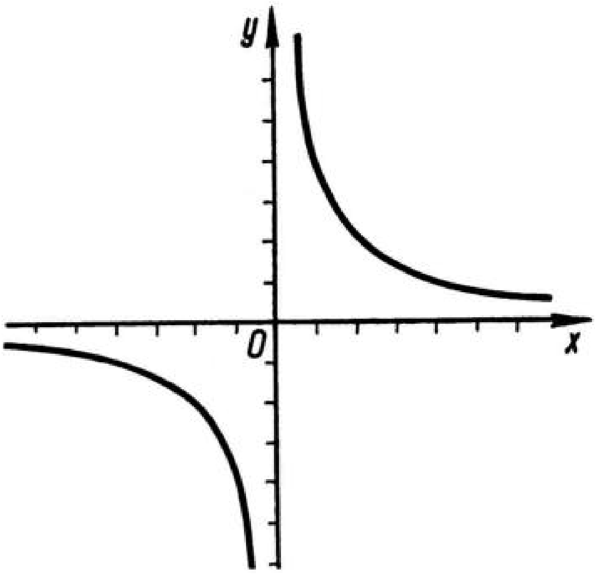


Рис. 56

Можно было бы доказать, как и в предыдущем случае, что эта кривая есть гипербола, имеющая фокусы в точках $(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ и $(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$. Но и так можно убедиться, что график данной функции $y=\frac{4}{x}$ отличается от прежней гиперболы $y=\frac{1}{x}$ только масштабом, в котором он выполнен.

В самом деле, уравнение $y=\frac{4}{x}$ можно представить в виде $\frac{y}{2}=\frac{2}{x}$, или $\frac{y}{2}=\frac{1}{\frac{x}{2}}$; обозначая теперь $\frac{y}{2}$ через $y_1$ и $\frac{x}{2}$ через $x_1$, получаем $y_1=\frac{1}{x_1}$. Следовательно, если мы изобразили график функции $y=\frac{4}{x}$, приняв за единицу длины определенный отрезок, то та же самая кривая представляет и график функции $y_1=\frac{1}{x_1}$, но при условии, что для любой точки значения $x_1$ и $y_1$ в 2 раза меньше соответствующих $x$ и $y$, т. е. если за единицу длины взять отрезок, длина которого в два раза больше.

В самом деле, при

$$x_1=\ldots\frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots;$$

$$y_1=\ldots 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$$

будем иметь:

$$x=\ldots\frac{2}{5},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{3},\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots;$$

$$y=\ldots 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{5},\ \ldots.$$

Если бы мы взяли функцию $y=-\frac{4}{x}$, то увидели бы, что ее значения отличаются от соответствующих значений функции $y=\frac{4}{x}$ только знаками, причем функция $y=-\frac{4}{x}$ будет постоянно возрастать при возрастании $x$, а график ее получится, если повернуть гиперболу $y=\frac{4}{x}$ сверху вниз вокруг оси $x$.

Сделаем теперь общие выводы относительно изменения функции вида $y=\frac{a}{x}$ (где $a$ — постоянное число, положительное или отрицательное).

1. Функция $y$ и независимое переменное $x$ обратно пропорциональны.

В общем виде это можно доказать так: пусть будут $x_1$ и $x_2$ — любые два значения независимого переменного $x$, а соответствующие им значения функции будут $y=\frac{a}{x_1}$ и $y_2=\frac{a}{x_2}$; разделив эти равенства почленно, найдем $\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_2}{x_1}$, т. е. отношение любых двух значений $y$ равно обратному отношению соответствующих значений $x$, а в этом и состоит обратная пропорциональность величин.

2. При возрастании независимого переменного $x$ функция его $y$ изменяется так:

1) Если коэффициент $a$ положителен, то функция все время убывает, причем при $x<0$ она отрицательна и может иметь сколь угодно большую абсолютную величину при приближении $x$ к нулю; при $x=0$ функция не имеет значения, а при $x>0$ положительна и снова убывает, причем при достаточно большом $x$ может получить сколь угодно малые значения.

2) Если коэффициент $a$ отрицателен, то функция все время возрастает, причем сначала при $x<0$ она положительна и может стать сколь угодно большой при приближении $x$ к нулю; при $x=0$ она не имеет значения, а при $x>0$ функция отрицательна (и снова возрастает), причем при достаточно большом $x$ может получить сколь угодно малую абсолютную величину.

Что функция $y=\frac{a}{x}$ при $x=0$ не имеет соответствующего значения, это видно из самой ее формулы. Точно так же из ее формулы ясно, что при $a>0$ величина $y$ имеет тот же знак, что и $x$ (т. е. положительна при $x>0$ и отрицательна при $x<0$); при $a<0$ величина $y$ имеет знак, противоположный $x$.

Возрастание и убывание функции обнаруживается так: пусть имеем два противоположных значения $x$: меньшее $x_1$ и большее $x_2$; соответствующие им значения функции будут: $y_1 = \frac{a}{x_1}$ и $y_2 = \frac{a}{x_2}$. Возьмем разность

$$y_2 - y_1 = \frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1} = \frac{a}{x_1 x_2}(x_1 - x_2).$$

Так как по условию $x_1 < x_2$, то сомножитель $x_1 - x_2$ всегда отрицателен; произведение же $x_1 x_2$ положительно, будут ли оба значения $x_1$ и $x_2$ отрицательными или положительными; следовательно, знак всей разности зависит от знака $a$ и будет ему противоположен: при $a > 0$ имеем $y_2 - y_1 < 0$ и функция убывает; при $a < 0$ — наоборот.

Придавая независимому переменному $x$ значения, близкие к нулю, например: $x = \ldots -0{,}01; -0{,}001; -0{,}00001, \ldots$, видим, что $y$ получает значения $\ldots -100a, -1000a, -10\,000a, \ldots$, т. е. может иметь сколь угодно большую абсолютную величину, а придавая $x$ все возрастающие значения $x = \ldots 100, 1000, 10\,000 \ldots$, найдем, что $y$ может получить сколь угодно малую абсолютную величину: $y = \ldots 0{,}01a; 0{,}001a; 0{,}0001a$ и т. д.

3. Возрастание и убывание функции неравномерно; это видно из только что рассмотренной формулы $y_2 - y_1 = \frac{a}{x_1 x_2}(x_1 - x_2)$; из нее следует, что

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{x_1 x_2},$$

т. е. отношение между приращением $y$ и соответственным приращением $x$ не постоянно, а зависит от выбранных нами значений $x$. Из этой формулы видно, что средняя скорость изменения функции будет тем больше, чем меньше по абсолютной величине значения $x$ и наоборот.

График функции $y = \frac{a}{x}$ при $a > 0$ есть гипербола, расположенная в левом нижнем и в правом верхнем углу осей и имеющая фокусы в точках $(\sqrt{2a}, \sqrt{2a})$ и $(-\sqrt{2a}, -\sqrt{2a})$. Это можно доказать точно так же, как и для кривой $y = \frac{1}{x}$, но и непосредственно можно убедиться, что кривая $y = \frac{a}{x}$ отличается от кривой $y = \frac{1}{x}$ только масштабом; уравнение $y = \frac{a}{x}$ приводится к виду $\frac{y}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{x}$ или $y : \sqrt{a} = 1 : \frac{x}{\sqrt{a}}$, а приняв $\frac{y}{\sqrt{a}} = y_1$ и $\frac{x}{\sqrt{a}} = x_1$, получим $y_1 = \frac{1}{x_1}$.

Следовательно, кривая $y=\frac{a}{x}$, изображенная при масштабе в 1 см, будет совпадать с кривой $y_1=\frac{1}{x_1}$, начерченной при условии, что за единицу длины взят отрезок в $\sqrt{a}$ см.

При $a<0$ разница лишь в том, что гипербола будет расположена в левом верхнем и в правом нижнем углах осей и повернута сверху вниз вокруг оси $x$ сравнительно с предыдущим положением.

**Мы показали, что если функция выражена формулой вида $y=\frac{a}{x}$, то величины $y$ и $x$ обратно пропорциональны; можно показать, что и наоборот: если две величины обратно пропорциональны, то формула, выражающая их зависимость, должна иметь вид $y=\frac{a}{x}$.** В самом деле, если две величины $y$ и $x$ обратно пропорциональны, то это значит, что отношение любых двух значений одной из них ($y_1$ и $y_2$) равно обратному отношению соответствующих значений другой величины, т. е.

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_2}{x_1}.$$

Отсюда

$$y_1x_1=y_2x_2.$$

Взяв еще и другие пары соответствующих значений: $x_3$ и $y_3$, $x_4$ и $y_4$, ..., найдем подобным же способом, что

$$y_1x_1=y_2x_2=y_3x_3=y_4x_4=\ldots,$$

т. е. произведение любых двух соответствующих значений $y$ и $x$ есть величина постоянная. Выразив эту постоянную величину через $a$, можем написать, что для любого значения $y$ и соответствующего ему $x$ существует равенство:

$$yx=a,$$

откуда

$$y=\frac{a}{x}.$$

Таким образом, функция $y=\frac{a}{x}$ выражает закон обратной пропорциональности и изображается графически гиперболой, расположенной в одной или другой паре противоположных координатных углов.

Функция $y=\frac{a}{x}$ есть дробная функция относительно $x$ и причисляется к функциям второго порядка, так как уравнение $y = \frac{a}{x}$ по освобождении от знаменателя приводится к виду $xy = a$, а в выражении $xy$ сумма показателей при переменных $x$ и $y$, или, как иначе говорят, *измерение выражения*, есть 2.

# ГЛАВА IV. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ФУНКЦИЯХ И ИХ ГРАФИКАХ

## § 21. Функции рациональные и иррациональные

Мы рассматривали до сих пор функции целые и дробные, т. е. такие, в которых зависимость между функцией и независимыми переменными была представлена выражением, целым или дробным относительно данных переменных. Целые и дробные функции в общем носят название *рациональных*, так как в них над переменными производятся лишь действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в постоянную целую степень (и количество этих действий постоянно). Иначе говоря, зависимость между функцией и переменными выражается формулой, рациональной относительно переменных; если же зависимость между функцией и ее переменными выражается формулой, иррациональной относительно переменных (т. е. если к упомянутым выше действиям присоединяется еще и извлечение корня), то функция называется *иррациональной;* таковы, например, функции $y = \sqrt{x+4}$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

Всякую функцию от одного переменного (как рациональную, так и иррациональную) мы можем изобразить графически, и при этом обычно получается на чертеже та или иная кривая линия. Мы рассмотрим здесь два вида иррациональных функций, графики которых заслуживают особого внимания.

## § 22. Функция вида $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

Возьмем функцию

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

где $a$ — постоянное положительное число, $x$ —независимое переменное, $y$ — его функция, а знак $\sqrt{\ }$ обозначает алгебраический корень, т. е. взят со знаками «+» и «—».

Эта функция будет иметь значения только при изменении $x$ от $-a$ до $a$, так как если $x$ превосходит $a$ по абсолютной величине, то под знаком корня будет отрицательное число. При этом для каждого значения $x$ (кроме крайних $x = \pm a$) функция будет иметь два значения, одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку.

При $x = -a$ будем иметь $y = 0$, далее при изменении $x$ от $a$ до 0 функция будет увеличиваться по абсолютной величине от 0 до $a$, при $x = 0$ достигнет наибольших по абсолютной величине значений ($y = \pm a$), далее — при изменении $x$ от 0 до $a$ — уменьшается по абсолютной величине от $a$ до 0.

График нашей функции мы можем построить по точкам, если нам задано значение $a$, но можем получить его и непосредственно, если обратим внимание на следующее его свойство.

Возьмем на графике (рис. 57) произвольную точку $K$ с координатами $x$ и $y$ и выразим ее расстояние от начала координат 0; получим $\sqrt{x^2 + y^2}$ (где знак $\sqrt{\phantom{x}}$ обозначает арифметический корень). Но из уравнения функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ имеем $y^2 = a^2 - x^2$, откуда $x^2 + y^2 = a^2$, или $\sqrt{x^2 + y^2} = a$. Таким образом, **любая точка нашего графика отстоит от начала координат на постоянное расстояние $a$: график есть окружность круга радиуса $a$, имеющего центр в начале координат.**

## § 23. Графическое решение системы уравнений второй степени с двумя неизвестными

При помощи графика функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, приведенной к виду $x^2 + y^2 = a^2$, мы можем графически решать систему уравнений с двумя неизвестными, в состав которой входит квадратное уравнение указанного вида. Так, например, на рисунке 58 мы имеем графическое решение системы урав-

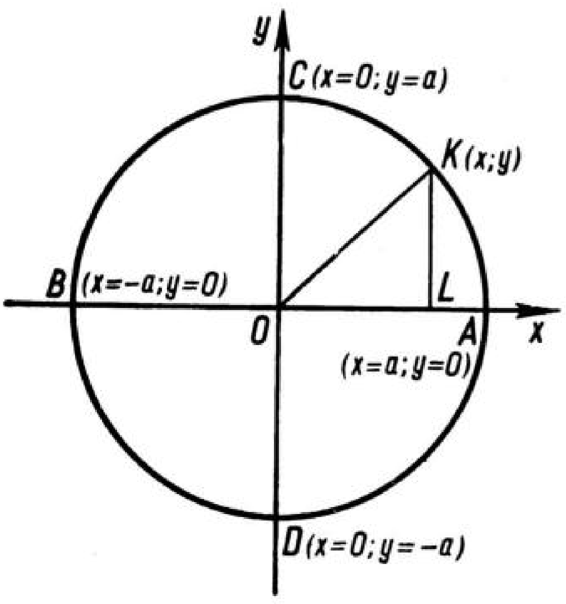


Рис. 57

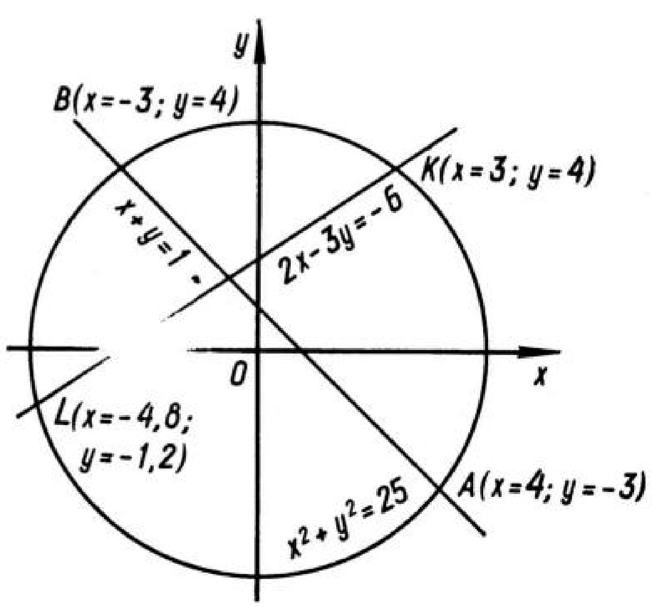


Рис. 58

нений $x^2 + y^2 = 25$, $x + y = 1$ (при помощи пересечения окружности с прямой $AB$ находим $x = 4$, $y = -3$ и $x = -3$, $y = 4$), а также уравнений $x^2 + y^2 = 25$, $2x - 3y = -6$ (пересечение той же окружности с прямой $KL$ дает $x = 3$, $y = 4$ и $x = -4{,}8$; $y = -1{,}2$; последнее решение приближенное, так как при вычислении по формулам мы имели бы $x = -4\frac{11}{13}$, $y = -1\frac{3}{13}$). Подобным же образом мы могли бы получить решение системы уравнений $x^2 + y^2 = 25$, $xy = 12$, если бы начертили, кроме данной окружности, еще гиперболу, соответствующую последнему уравнению $\left(y = \frac{12}{x}\right)$.

## § 24. Функция вида $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Возьмем функцию $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, где $a$ и $b$ — постоянные положительные числа, причем $b < a$; $x$ — независимое переменное, $y$ — его функция, а знак $\sqrt{\phantom{x}}$ обозначает алгебраический корень (со знаками «+», «—»).

Очевидно, что и здесь функция имеет значения только при изменении $x$ от $-a$ до $+a$, и притом два значения для каждого $x$ (кроме крайних его значений $x = \pm a$).

При $x = -a$ имеем $y = 0$; далее при увеличении $x$ от $-a$ до 0 функция увеличивается по абсолютной величине от 0 до $b$, при $x = 0$ достигает наибольших по абсолютной величине значений ($y = \pm b$) и далее при увеличении $x$ от 0 до $a$ уменьшается по абсолютной величине от $b$ до 0.

График нашей функции мы можем построить по точкам, если нам даны значения $a$ и $b$ (например, на рисунке 59 имеем $a = 5$, $b = 4$), но можно строить его и непосредственно, если найти основное свойство его точек. Для того чтобы установить это свойство, поступим так: возьмем точку $C$, соответствующую наибольшему значению функции ($x = 0$, $y = b$), и опишем из нее дугу окружности радиуса $a$; эта дуга пересечет ось $x$ в двух точках $F$ и $F_1$, отстоящих от 0 на расстоянии, равном $\sqrt{a^2 - b^2}$ (так как $OC = b$, $CF = CF_1 = a$, то $OF = OF_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$), таким образом коорди-

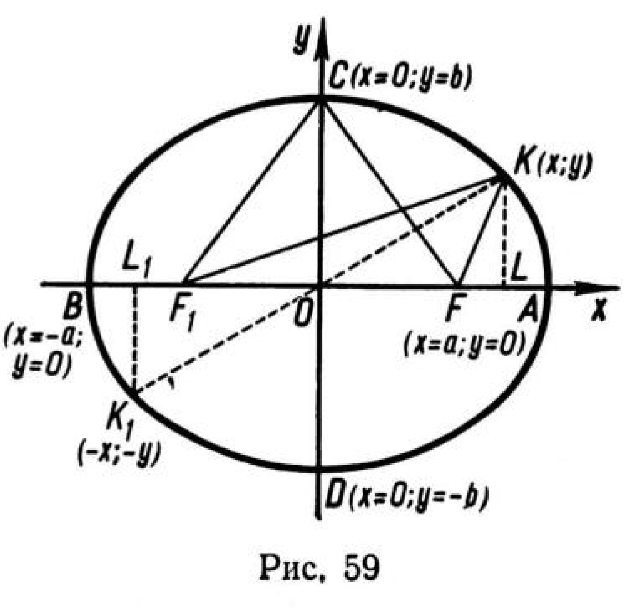


Рис. 59

наты точек $F$ и $F_1$ будут, соответственно, $(\sqrt{a^2-b^2}; 0)$ и $(-\sqrt{a^2-b^2}; 0)$. Выберем теперь на графике произвольную точку $K$ с координатами $x$ и $y$, определим ее расстояние от $F$ и $F_1$, а затем и сумму этих расстояний.

Используя формулы § 9, будем иметь:

$$KF = \sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2},$$
$$KF_1 = \sqrt{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}.$$

Преобразуя первое подкоренное выражение, имеем:

$$(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2 = x^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2+y^2.$$

Но из уравнения нашей функции получим:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) = b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}.$$

Подставляя эту величину в предыдущую формулу, найдем:

$$(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2 = x^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2+$$
$$+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2} = a^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2.$$

Рассматривая полученное выражение, видим, что, в нем первый член есть квадрат числа $a$, третий — квадрат выражения $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x$, а второй — их удвоенное произведение

$$2x\sqrt{a^2-b^2} = 2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x,$$

взятое со знаком минус; следовательно, весь трехчлен есть полный квадрат разности:

$$\left(a-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x\right)^2.$$

Извлекая корень, находим:

$$KF = a-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x.$$

Повторяя те же рассуждения, найдем:

$$KF_1 = a+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x;$$

отсюда $KF+KF_1 = 2a$, т. е. **любая точка нашего графика обладает таким отличительным свойством: сумма расстояний ее от двух определенных точек $F$ и $F_1$ есть величина постоянная, равная $2a$.**

**И наоборот, если бы мы взяли произвольную точку с координатами $x_1$ и $y_1$, но обладающую указанным свойством, то можно показать, что ее координаты должны удовлетворять уравнению $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, т. е. такая точка должна лежать на нашем графике.**

В самом деле, расстояние этой точки от $F$ будет равно $\sqrt{(x_1 - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y_1^2}$, а от $F_1 \sqrt{(x_1 + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y_1^2}$ по условию сумма этих расстояний есть $2a$, следовательно, будем иметь:

$$\sqrt{(x_1 - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y_1^2} = 2a - \\ - \sqrt{(x_1 + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y_1^2}.$$

Упрощая это равенство, получим в конце концов $y_1^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \times (a^2 - x_1^2)$, или $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}$, что и требовалось доказать.

Итак, график функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек $F$ и $F_1$ есть постоянная величина ($2a$). Такая кривая называется *эллипсом*; точки $F$ и $F_1$ называются *фокусами* эллипса.

Теперь видно, что искомый эллипс мы можем начертить так. Отметив на оси $x$ точки $F$ и $F_1$, удаленные от 0 на расстоянии $\sqrt{a^2 - b^2}$ (рис. 59), закрепим в этих точках концы нитки, имеющей длину $2a$. Если теперь натянуть нитку острием карандаша и чертить кривую, держа нить все время натянутой, то для каждой точки сумма ее расстояний от $F$ и $F_1$ будет равна длине нити, т. е. $2a$, и мы получим искомый эллипс.

Очевидно, что наш **эллипс симметричен как относительно оси $x$, так и относительно оси $y$**; в самом деле, каждому значению абсциссы $x$ соответствуют два значения ординаты $y$, одинаковых по абсолютной величине, но противоположных по знаку $\left(y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)$; с другой стороны, при значениях $x$, одинаковых по абсолютной величине, но противоположных по знаку, значения ординаты $y$ будут одинаковы, при $x = +h$ и $x = -h$ имеем: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - h^2}$.

Точка $O$ (начало координат) будет центром эллипса, т. е. серединой всех хорд, проходящих через нее. В самом деле, если соединим с точкою $O$ любые две точки $K$ и $K_1$ (рис. 59), имеющие координаты $(x; y)$ и $(-x; -y)$, то окажется, что все три точки $K$, $O$ и $K_1$ лежат на одной прямой (так как $\triangle KOL$ и $\triangle K_1OL_1$ равны, то $\angle KOL = \angle K_1OL_1$). Следовательно, если мы произвольную точку $K (x, y)$ соединим с $O$, то продолжение прямой $KO$ пересекает эллипс в такой точке $K_1$, координаты которой будут $(-x; -y)$. Очевидно, что $OK_1 = OK$ (каждое из этих расстояний равно $x^2 + y^2$), т. е. точка $O$ есть середина хорды $KK_1$.

# ГЛАВА V. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

## § 25. Синус и косинус как функции угла

Возьмем координатные оси $Ox$ и $Oy$ и проведем через начало координат линию $OM$ под углом $t$ к оси $Ox$ (рис. 60); на этой линии отложим произвольный отрезок $OK = r$ и опустим из точки $K$ перпендикуляр $KL$ на ось $Ox$. Очевидно, что длина $KL = h$ представит ординату точки $K$, длина $OL = p$ — абсциссу этой точки; линию же $OK = r$ называют *радиусом-вектором** той же точки.

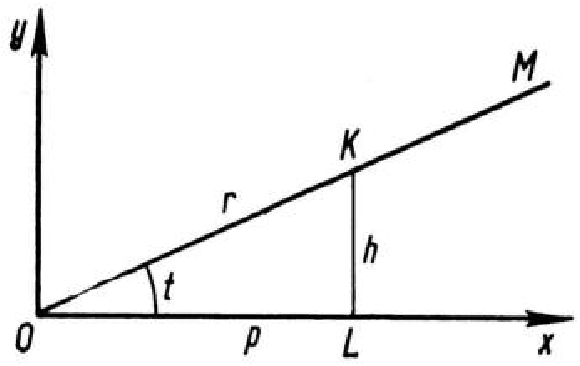


Рис. 60

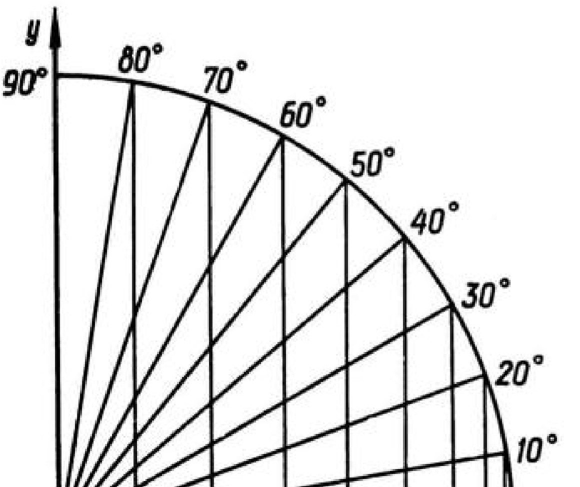


Рис. 61

Как известно из тригонометрии, отношение ординаты точки $K$ к радиусу-вектору называется *синусом* данного угла, т. е.

$$\frac{h}{r} = \sin t.$$

Постараемся теперь исследовать, как изменяется величина синуса при изменении угла, т. е. примем угол $t$ за независимое переменное и исследуем изменения функции $y = \sin t$.

* Радиусом-вектором автор называет не вектор, как это принято, например, в учебнике «Геометрия, 6—10» А. В. Погорелова, а отрезок (не направленный).

Начертим четверть круга $xOy$ (рис. 61) и разделим соответствующую дугу на равные части, например по 10 градусов[1]. Соединим все точки деления с центром, потом из каждой точки деления опустим перпендикуляры на ось $Ox$. Взяв отношение их к радиусу-вектору, мы получим и ряд соответствующих синусов:

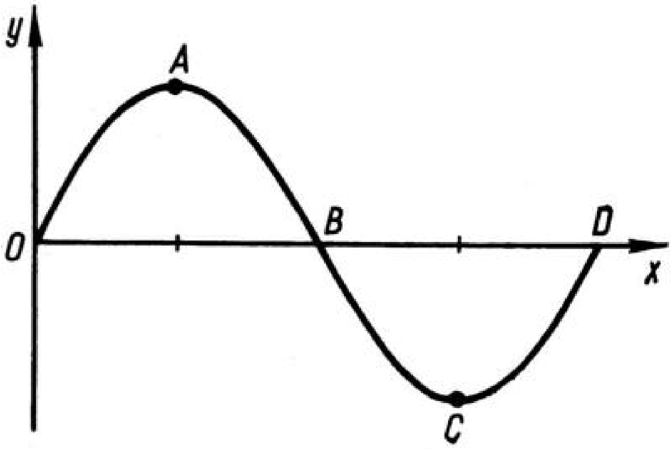

Рис. 62

$$\sin 10° \approx 0{,}17 \qquad \sin 50° \approx 0{,}77$$
$$\sin 20° \approx 0{,}34 \qquad \sin 60° \approx 0{,}87$$
$$\sin 30° = 0{,}50 \qquad \sin 70° \approx 0{,}94$$
$$\sin 40° \approx 0{,}64 \qquad \sin 80° \approx 0{,}98$$

Принимая еще во внимание, что $\sin 0° = 0$, $\sin 90° = 1$, мы имеем теперь таблицу изменений синуса при изменении угла от 0° до 90° (через каждые 10°).

Изобразим эти изменения графически. Построим ряд точек, соответствующих найденным последовательным значениям синуса, и соединив их, получим кривую $OA$ (рис 62), которая и является графиком синуса в данном промежутке. Когда угол будет меняться от 90° до 180°, то значения его синуса нет надобности вычислять отдельно, их можно получить на основании известной из тригонометрии формулы

$$\sin (90° + x) = \sin (90° - x),$$

полагая $x = 5°$, 10°, 15° и т. д. Вычисляя по этой формуле значения синуса для углов 100°, 110° и т. д., мы убедимся, что синус в этом промежутке получает тот же ряд значений, что и в предыдущем, только в обратном порядке. График синуса для этого промежутка изображается дугой кривой $AB$.

Для значений угла, больших 180° (и до 360°), значения синуса можно непосредственно находить по формуле

$$\sin (180° + x) = -\sin x.$$

[1] Деление лучше всего выполнять так: сначала последовательным подбором дуг при помощи циркуля разделяем дугу $xy$ на три равные части, а потом каждую третью часть еще на три равные части.

Пользуясь ею, мы можем найти, что для этих значений угла синус проходит тот же ряд значений, что и до сих пор, но с противоположным знаком (—0,17; —0,34 и т. д.).

Соответственно этому график синуса изображается дугой $BCD$, после чего значения синуса, как известно, снова повторяются сначала, и график его должен дать вторую, третью и т. д. волну в таком же порядке, как и первую.

График синуса называется иначе *синусоидой;* она состоит из ряда волн, подобных изображенной на рис. 62, и достигает наибольшей высоты в точках, соответствующих углам 90°, 450°, 810° и т. д,, а наименьшей — углам 270°, 630°, 980° и т. д.

Если бы мы захотели проследить изменения косинуса, то могли бы получить значения его для углов между 0° и 90° (рис. 61). В самом деле, косинус есть отношение абсциссы точки (конца дуги) к радиусу-вектору, поэтому нам достаточно для каждого из углов 10°, 20° и т. д. измерить в миллиметрах проекции радиуса-вектора на горизонтальную ось $Ox$ и взять их отношение к самому радиусу-вектору; мы получим тогда ряд соответствующих косинусов:

$$\begin{aligned}
\cos 0° &= 1 \\
\cos 10° &\approx 0{,}98 \\
\cos 20° &\approx 0{,}94 \\
\cos 30° &\approx 0{,}87 \\
\cos 40° &\approx 0{,}77 \\
\cos 50° &\approx 0{,}64 \\
\cos 60° &= 0{,}50 \\
\cos 70° &\approx 0{,}34 \\
\cos 80° &\approx 0{,}17 \\
\cos 90° &= 0
\end{aligned}$$

Видим теперь, что эти значения те же, что и для синуса в промежутке от 90° до 180°, значит, график косинуса в промежутке от 0° до 90° имеет тот же вид, что и график синуса между точками $A$ и $B$. Это так и должно быть, ведь нам известно из тригонометрии, что

$$\cos x = \sin (90° + x).$$

Эта формула, как можно непосредственно проверить, остается справедливой и для значений $x > 90°$, поэтому мы можем на основании ее получить ряд значений косинуса до 360° и далее. Таким образом, ясно, что график косинуса — *косинусоида* должен совпадать с синусоидой, только передвинутой влево на полволны.

## § 26. Тангенс и котангенс как функции угла

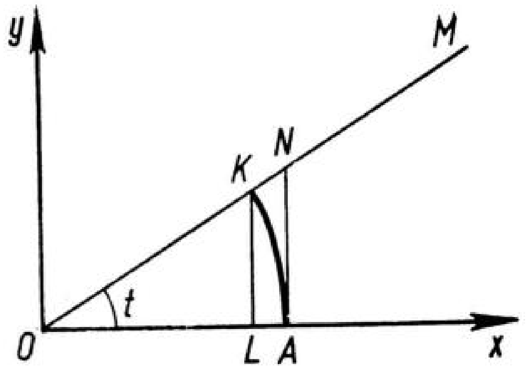


Рис. 63

Рассмотрим изменения тангенса угла (рис. 60). Как известно, тангенс угла $t$ есть отношение ординаты точки $K$ к абсциссе, т. е.

$$\frac{h}{p} = \operatorname{tg} t.$$

Иссследуем теперь, как изменяется величина тангенса при изменении самого угла, т. е. примем угол $t$ за независимое переменное и исследуем изменения функции

$$y = \operatorname{tg} t.$$

Так как для углов от 0° до 90° абсциссы и ординаты конца дуги известны нам по рисунку 61, то мы могли бы получить величину соответствующих тангенсов делением этих чисел, например $\operatorname{tg} 20° \approx 34 : 94 \approx 0{,}36$. Но мы сейчас покажем, что можно узнать значения тангенса и непосредственно по рисунку. В самом деле, возьмем фигуру, которую мы имеем на рисунке 60, и опишем из начала координат (рис. 63) дугу радиусом-вектором $OK$ до пересечения ее с осью $Ox$ в точке $A$, а затем через точку $A$ проведем касательную к этой дуге до пересечения с продолженным радиусом-вектором в точке $N$. Мы видим теперь, что треугольники $OKL$ и $OAN$ подобны, а потому тангенс угла $t$, или отношение $\frac{KL}{OL}$ будет равняться отношению $\frac{AN}{OA}$, т. е. отношению отрезка касательной к радиусу-вектору. Пользуясь этим, мы можем графически получить последовательные тангенсы следующим образом.

Возьмем четверть круга (рис. 64) и разделим ее дугу на части по 10°, как делали раньше для вычисления синусов. Соединим все точки деления с центром, потом через начало дуги проведем к ней касательную и продолжим все радиусы-векторы до пересечения с ней. Взяв отношения длин отрезков касательной к радиусу-вектору, мы получим и соответствующие тангенсы (за исключением углов, близких к 90°, где размеры рисунка были бы слишком велики, а точность его очень мала). Путем такого вычисления (непосредственным делением или по рисунку) мы получим:

$$\operatorname{tg} 10^\circ \approx 0{,}18$$
$$\operatorname{tg} 20^\circ \approx 0{,}36$$
$$\operatorname{tg} 30^\circ \approx 0{,}58$$
$$\operatorname{tg} 40^\circ \approx 0{,}84$$
$$\operatorname{tg} 50^\circ \approx 1{,}19$$
$$\operatorname{tg} 60^\circ \approx 1{,}73$$
$$\operatorname{tg} 70^\circ \approx 2{,}75$$
$$\operatorname{tg} 80^\circ \approx 5{,}67$$

Примем еще во внимание, что $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, а $\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{1}{0} = \infty$, т. е. не существует (что ясно и из рисунка 64: касательная при угле 90° параллельна радиусу-вектору и не может пересечься с ним), и изобразим теперь изменения тангенса графически. Построим ряд точек, соответствующих найденным последовательным значениям тангенса и, соединив их, получим кривую $OK$ (рис. 65), которая и является графиком тангенса в промежутке от 0° до 90°. Как видно, при приближении угла к 90° эта кривая поднимается безгранично кверху и при $t = 90^\circ$ соответствующей точки нет.

Когда угол изменяется от 90° до 180°, то значения тангенса можно вычислить по формуле

$$\operatorname{tg}(90^\circ + x) = -\operatorname{tg}(90^\circ - x).$$

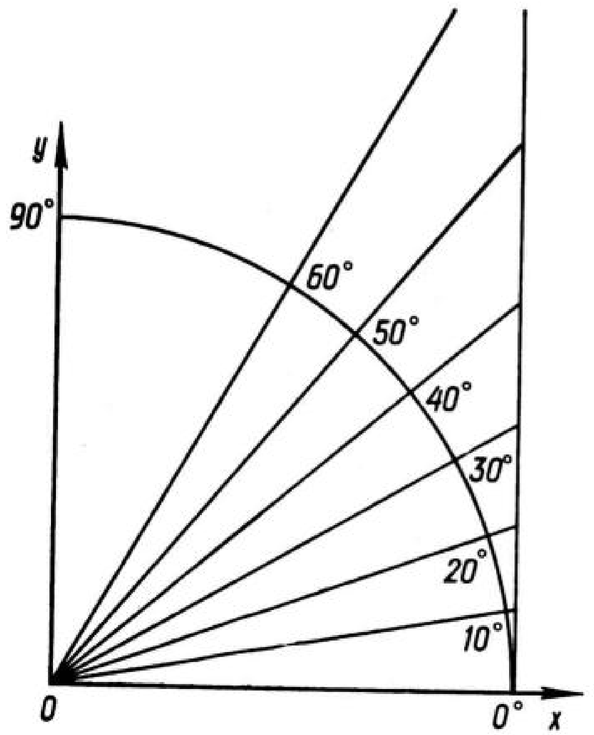


Рис. 64

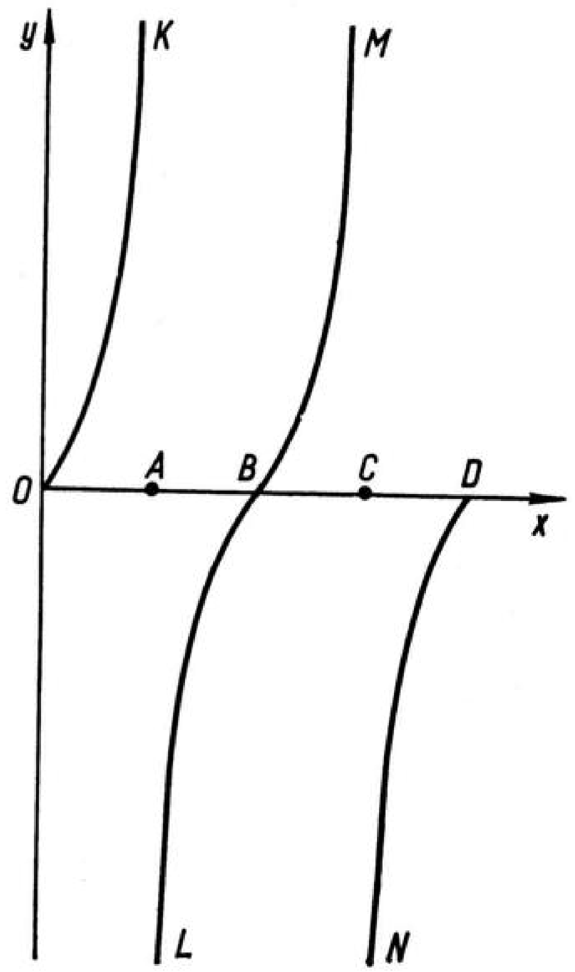


Рис. 65

Определив по этой формуле значения тангенса для углов 100°, 110° и т. д., мы убедимся, что тангенс, будучи теперь отрицательным, получает по абсолютной величине тот же ряд значений, что и раньше, только в обратном порядке (—5,67, —2,75, —1,73 и т. д.). График тангенса для этого промежутка изображается отдельной ветвью кривой $LB$ (рис. 65), которая симметрична с предыдущей относительно точки $A$.

Для определения дальнейших значений тангенса мы пользуемся формулой

$$\operatorname{tg}(180^\circ + x) = \operatorname{tg} x,$$

из которой видно, что значения тангенса после 180° повторяются в том же порядке, что и для углов первых двух четвертей (от 0° до 180°).

Соответственно этому будут повторяться и ветви кривой; график тангенса, или так называемая *тангенсоида*, состоит из ряда отдельных ветвей, которые прерываются в точках, соответствующих углам 90°, 270° и т. д., а перед разрывом уходят в бесконечность.

Подобным же образом мы можем проследить и изменения котангенса, вычисляя его для первой четверти по формуле

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(90^\circ - x),$$

для второй — по формуле

$$\operatorname{ctg}(90^\circ + x) = -\operatorname{tg} x,$$

а далее по формуле

$$\operatorname{ctg}(180^\circ + x) = \operatorname{ctg} x.$$

Построив же по точкам соответствующую кривую, мы убедимся, что график котангенса — *котангенсоида* состоит, подобно тангенсоиде, из ряда бесконечных ветвей, только повернутых в противоположную сторону и передвинутых влево на полволны.

# Раздел II

# ОСНОВЫ УЧЕНИЯ О НЕРАВЕНСТВАХ

## ГЛАВА I. ПОНЯТИЕ О НЕРАВЕНСТВАХ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

### § 27. Понятие о неравенствах

Из алгебры мы знаем, что *неравенством* называется формула, состоящая из двух числовых или буквенных выражений, соединенных знаком неравенства; таковы, например, формулы:

$$a \neq b,$$
$$x + y > z,$$
$$2x - 3 < 1 - x$$

и т. п.

Смысл знаков $>$ (больше) и $<$ (меньше) известен еще из арифметики; знак $\neq$ обозначает «не равно». Формулы $a \geqslant b$, $2x \leqslant 15$ обозначают: «$a$ больше или равно $b$»; «$2x$ меньше или равно 15».

### § 28. Основные свойства неравных чисел

Нам известно следующее свойство неравных чисел: **если к двум неравным числам прибавить поровну или отнять от них поровну, то полученные результаты не равны, и тот из них будет больше, где и данное число было больше.**

Это свойство остается справедливым и для алгебраических* чисел. Возьмем, например, два неравных числа: $-7$ и $-12$; из них первое больше второго: $-7 > -12$; прибавим к каждому из них по 10; получим в первом случае 3, а во втором $-2$ и опять имеем $3 > -2$, т. е. первое число больше второго.

Возьмем числа 5 и $-3$; из них первое больше второго: $5 > -3$; отнимем от них по 5, получим числа 0 и $-8$ и видим, что опять $0 > -8$, т. е. первое число больше второго.

На опыте можем убедиться, что это свойство справедливо, какие бы числа мы ни подбирали. Так как левая и правая части любого неравенства представляют два неравных числа, то мы можем выразить указанное свойство в применении к неравенствам другими словами так: **Если к обеим частям неравенства прибавить поровну или отнять от них поровну, то знак неравенства не изменится.**

---

* Термином «алгебраические числа» в традиционном курсе алгебры назывались положительные и отрицательные числа.

Нам знакомо еще и такое свойство неравных чисел: если два неравных числа умножить или разделить на одно и то же число, то полученные результаты не равны, и тот из них будет больше, где и данное число было больше*. Посмотрим, сохранится ли это свойство для алгебраических чисел.

Возьмем два числа: $-6$ и $-10$, из которых первое больше второго ($-6 > -10$). Умножим каждое из них на одно и то же положительное число, например на 3, получим $-18$ и $-30$ и увидим, что $-18 > -30$, т. е. первое число больше второго. Точно так же, разделив каждое из данных чисел на одно и то же положительное число, например на 2, имеем $-3$ и $-5$, и снова первое больше второго: $-3 > -5$.

Возьмем те же числа $-6$ и $-10$ и умножим каждое из них на одно и то же отрицательное число, например на $-3$; будем иметь 18 и 30, при этом $18 < 30$, т. е. первое число теперь меньше второго. Точно так же, разделив каждое из данных чисел $-6$ и $-10$ на одно и то же отрицательное число, например на $-2$, получим числа 3 и 5, и снова первое число меньше второго ($3 < 5$).

На опыте можем убедиться, что так будет всегда, какие бы числа мы ни подбирали; указанное свойство в применении к неравенствам можно выразить так: **Если обе части неравенства умножить или разделить на одинаковые положительные числа, то знак неравенства не изменится. Если обе части неравенства умножить или разделить на одинаковые отрицательные числа, то знак неравенства меняется на обратный.**

Если умножить обе части неравенства на нуль, то неравенство обращается в равенство (получим в обеих частях 0), при делении же на нуль обеих частей неравенства оно теряет смысл.

## ГЛАВА II. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВ И РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ 1-й СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

### § 29. Преобразование неравенств

Установленные нами основные свойства неравенств дают возможность выполнять над ними различные преобразования, подобные тем, какие мы производили над уравнениями, чтобы их упрощать и решать.

---

* В этом утверждении необходима оговорка относительно неравенства нулю чисел, на которые делятся два данных неравных числа.

Заметим только, что, преобразуя неравенство, содержащее неизвестное, мы должны (как и при решении уравнений) предполагать, что буква $x$ (или другие ей подобные) обозначает некоторое определенное число, удовлетворяющее данному неравенству, и притом одно и то же при всех преобразованиях данного неравенства. При этом условии мы можем считать части неравенства определенными неравными числами и использовать свойства неравенства, описанные в предыдущей главе.

Преобразования, которые мы можем выполнять, суть следующие:

1. Перенесение членов неравенства из одной части в другую с обратным знаком.

Возьмем неравенство:

$$9-2x > 12-5x.$$

Чтобы перенести член $-5x$ в другую сторону, прибавим к обеим частям неравенства по $5x$; при этом знак неравенства не изменится, и мы получим:

$$9-2x+5x > 12-5x+5x,$$

или

$$9-2x+5x > 12.$$

Сравнивая это неравенство с первоначальным, видим, что намеченный нами член $-5x$ действительно перешел в другую часть неравенства с обратным знаком.

Пусть теперь нам нужно в полученном неравенстве

$$9-2x+5x > 12$$

перенести в другую часть член 9. Тогда отнимем от обеих частей неравенства по 9 (или, что все равно, прибавим по $-9$); при этом знак неравенства не изменится, и мы получим:

$$9-2x+5x-9 > 12-9.$$

В левой части члены 9 и $-9$ взаимно уничтожаются, и мы получим:

$$-2x+5x > 12-9.$$

Член 9, как и в предыдущем случае, перешел в другую часть неравенства с обратным знаком.

После выполнения действий в обеих частях неравенство приводится к виду:

$$3x > 3,$$

т. е. при помощи перенесения членов мы значительно упростили наше неравенство (его решение будет $x > 1$).

2. Уничтожение одинаковых членов в обеих частях неравенства.

Пусть имеем неравенство:

$$2x-5>\frac{3}{4}x-5.$$

Чтобы уничтожить в обеих частях неравенства член —5, достаточно прибавить к обеим частям по 5; при этом знак неравенства не изменится, и мы будем иметь:

$$2x-5+5>\frac{3}{4}x-5+5$$

или

$$2x>\frac{3}{4}x.$$

Эти два преобразования неравенств были основаны на первом из свойств, установленных нами выше; следующие основаны уже на втором свойстве неравенств.

3. Освобождение неравенства от дробей*.

Возьмем неравенство (с числовыми коэффициентами):

$$\frac{2x-3}{6}>\frac{x}{4}-\frac{4}{3}.$$

Умножим обе части неравенства на наименьшее кратное всех знаменателей, т. е. на 12; при этом знак неравенства не изменится, и мы получим:

$$2(2x-3)>3x-16.$$

Это неравенство уже не содержит дробей (освобождение неравенства от дробей может выполняться при помощи того же сокращенного приема, который был нами установлен для уравнений).

4. Перемена знака у всех членов неравенства.

Пусть имеем неравенство:

$$-3x+5>2x-8.$$

Если хотим переменить знак у всех членов неравенства, то для этого нужно умножить обе его части на —1, но при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число меняется и знак самого неравенства; следовательно, мы полу чим:

$$3x-5<-2x+8.$$

---

* Здесь рассматриваются преобразования только таких связанных с неравенствами дробей, которые не содержат переменной в знаменателе.

Итак, видим, что можно изменить знаки у всех членов неравенства, но при этом необходимо изменить знак самого неравенства на обратный.

5. Сокращение неравенства на общий сомножитель обеих частей.

Если имеем неравенство:

$$3(x-2) > 15,$$

то мы можем разделить обе части его на 3, и знак неравенства при этом не изменится; получим:

$$x-2 > 5.$$

Если нам дано неравенство:

$$-2(x-8) > 6,$$

то мы можем разделить обе его части на —2, но при этом необходимо изменить знак неравенства, и мы будем иметь:

$$x-8 < -3.$$

Заметим, что мы можем умножать или делить обе части неравенства на буквенное выражение только в том случае, если нам известен знак этого выражения, так как в противном случае мы не знаем, сохраняется ли знак данного неравенства или нет.

## § 30. Решение неравенств 1-й степени с одним неизвестным

Пусть, например, нам нужно решить неравенство:

$$\frac{3x-8}{6} - 1 < \frac{4x-9}{15} - \frac{x}{5}.$$

Освободим его от дробей, умножая все неравенство на наименьшее кратное всех знаменателей, т. е. на 30 (вместо этого, как известно, достаточно умножить каждый числитель на дополнительный множитель); получим:

$$\frac{3x-\overset{5}{8}}{6} - \overset{30}{1} < \frac{4x-\overset{2}{9}}{15} - \frac{\overset{6}{x}}{5},$$

$$15x-40-30 < 8x-18-6x,$$

или

$$15x-70 < 2x-18.$$

Перенесем теперь член $2x$ в левую часть, а $-70$ — в правую:

$$15x-2x < -18+70,$$

или

$$13x < 52,$$

откуда, разделив все неравенство на 13, имеем:

$$x < 4.$$

Возьмем еще неравенство:

$$2(2x + 5) + 6 > 3\,(3x + 2) + 18.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$4x + 10 + 6 > 9x + 6 + 18,$$

затем, отбросив от обеих частей по 6, получим:

$$4x + 10 > 9x + 18.$$

Перенесем теперь $9x$ в левую часть, а 10 — в правую:

$$4x - 9x > 18 - 10,$$

или

$$-5x > 8.$$

Делим теперь все неравенство на коэффициент при $x$, т. е. на $-5$, меняя при этом и знак неравенства; получим:

$$x < -1\frac{3}{5}.$$

Способ решения неравенств 1-й степени с одним неизвестным сходен с тем, который был в свое время выведен для уравнений.

Можно изложить этот способ так.

Чтобы решить неравенство 1-й степени с одним неизвестным, нужно произвести над ним следующие преобразования:

1. Раскрыть скобки и освободить неравенство от дробей, умножая его на наименьшее кратное всех знаменателей или, вместо этого, числитель каждой дроби на ее дополнительный множитель.

2. Перенести члены, содержащие неизвестное, в одну часть, а остальные — в другую и выполнить приведение.

3. Разделить обе части неравенства на коэффициент при неизвестном, изменяя при этом знак самого неравенства, если коэффициент этот был отрицательным.

Решение неравенств получается в виде $x > a$ или $x < b$, т. е. для неизвестного указывается одна низшая или высшая граница, а в ограничиваемой области неизвестное может принимать какие угодно значения.

С преобразованием и решением неравенств нам придется встретиться прежде всего в следующем разделе, в учении о безгранично больших и безгранично малых количествах.

## Раздел III

# ОСНОВЫ УЧЕНИЯ О ПРЕДЕЛАХ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ В ОБЛАСТИ ГЕОМЕТРИИ

## ГЛАВА I. БЕЗГРАНИЧНО БОЛЬШИЕ И БЕЗГРАНИЧНО МАЛЫЕ КОЛИЧЕСТВА *

### § 31. Понятие о безгранично большом количестве. Примеры безгранично больших количеств

Рассмотрим такой вопрос.

*Некоторое тело, двигаясь равномерно, каждую секунду проходит $v$ метров. Сколько метров пройдет оно за $t$ секунд?*

Искомое количество метров $s = vt$; дадим теперь количеству $v$ какое-либо постоянное значение, например $v = 10$, а количеству $t$ будем придавать ряд значений:

$$t = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ .$$

Тогда количество $s$ будет также переменным и получит соответственный ряд значений:

$$s = 10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ \ldots\ .$$

Значения чисел $t$ и $s$ возрастают. Поставим себе вопрос: Могут ли эти числа сделаться больше любого постоянного положительного числа, как бы велико последнее ни было?

Для числа $t$ это свойство очевидно; легко показать, что подобным же свойством обладает и число $s$. В самом деле, чтобы число $s$ было больше некоторого постоянного положительного числа $h$, т. е. чтобы существовало неравенство $s > h$ или $vt > h$, необходимо условие:

$$t > \frac{h}{v},$$

или для данного случая

$$t > \frac{h}{10},$$

а это условие всегда выполнимо. Так, например, количество $s$ будет более 1000 м, если положим $t > 100$, т. е. при данных условиях тело пройдет более 1000 м, если время движения будет более 100 с, количество $s$ будет более 100 000 м, если положим $t > 10\,000$, и т. д.

Итак, переменные количества $t$ и $s$ в условиях данного вопроса могут сделаться больше любого постоянного положи-

* В современных курсах анализа употребляются термины «бесконечно малая последовательность» и «бесконечно малая функция».

тельного числа $h$, как бы велико последнее ни было, и при дальнейшем изменении остаются больше этого числа. Чтобы выразить эти свойства, будем называть их безгранично большими.

В данном случае рассматриваемые количества $t$ и $s$ имели только положительные значения; придадим теперь количеству $v$ отрицательное значение, например: $v = -10$ (скорость, направленная в противоположную сторону), и посмотрим, каковы будут значения $s$ при прежних значениях $t$.

Будем иметь:

$$\begin{array}{llllll} t=1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots, \\ s=-10, & -20, & -30, & -40, & -50, \ldots . \end{array}$$

Если мы рассмотрим, как изменяется абсолютная величина количества $s$ (которую мы обозначим через $|s|$), то увидим, что она получает такой ряд значений:

$$|s| = 10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ \ldots .$$

Этот ряд значений одинаков с рассмотренным выше, и на основании предыдущего заключаем, что количество $s$ в данном случае обладает таким свойством: абсолютная величина его может сделаться и оставаться больше любого постоянного положительного числа.

Условимся и в этом случае называть переменное число $s$ безгранично большим; вообще, будем называть *безгранично большим* такое переменное число, абсолютная величина которого в условиях данного вопроса может сделаться и оставаться больше любого постоянного положительного числа, как бы велико последнее ни было.

Так, например, тангенс острого угла, приближающегося к 90°, будет, как мы видели выше (см. § 26), безгранично большим; точно так же будет безгранично большим и тангенс тупого угла, приближающегося к 90°, так как он хотя и отрицателен, но по абсолютной величине может сделаться и оставаться более любого числа.

Вот еще примеры безгранично больших количеств.

Пусть имеем арифметическую прогрессию:

$$7,\ 11,\ 15,\ 19,\ \ldots .$$

Покажем, что при безграничном возрастании числа ее членов $n$-й член ее есть количество безгранично большое.

В самом деле, разность данной прогрессии равна 4, следовательно, $n$-й ее член и выражается формулой:

$$u = 7 + 4\,(n - 1).$$

Чтобы величина $u$ стала больше произвольного положительного числа $h$, необходимо, чтобы удовлетворялось неравенство:

$$7 + 4(n-1) > h.$$

Отсюда имеем:

$$4(n-1) > h - 7,$$

$$n - 1 > \frac{h-7}{4},$$

$$n > \frac{h-7}{4} + 1, \text{ или } n > \frac{h-3}{4}.$$

Итак, $n$-й член данной прогрессии станет больше числа $h$, когда число членов превысит $\frac{h-3}{4}$, а это всегда возможно, каково бы ни было $h$. Следовательно, при данных условиях $u$ есть количество безгранично большое.

Так, например, мы найдем, что величина $u$ превысит 100 при $n > \frac{100-3}{4}$, или при $n > 24\frac{1}{4}$, т. е. уже 25-й член прогрессии будет более 100: он равен $7 + 4 \cdot 24$, или 103. Величина $u$ превысит 1000 при $n > \frac{1000-3}{4}$ или при $n > 249\frac{1}{4}$, т. е. 250-й член прогрессии будет более 1000 (он равен $7 + 4 \cdot 249$, или 1003), и т. д.

Можно показать, что и вообще **в арифметической прогрессии при безграничном возрастании числа ее членов $n$-й член ее есть количество безгранично большое.**

В самом деле, если $a$ — первый член арифметической прогрессии, $n$ — число членов и $r$ — разность, то $n$-й член ее выражается формулой:

$$u = a + (n-1)r.$$

Пусть данная прогрессия — возрастающая, рассмотрим, при каком значении $n$ величина $u$ станет больше $h$ ($h$ — любое постоянное положительное число).

Из неравенства

$$a + (n-1)r > h$$

мы получаем:

$$(n-1)r > h - a,$$

$$n - 1 > \frac{h-a}{r},$$

$$n > \frac{h-a}{r} + 1.$$

Видим, что $n$-й член $u$ превзойдет данное число $h$, когда число членов $n$ будет больше числа $\frac{h-a}{r}+1$, а это, конечно, всегда возможно.

Если же данная прогрессия убывающая, то найдем, при каком $n$ величина $u$ станет меньше произвольного отрицательного числа $h$ (тогда абсолютная величина $u$ станет больше абсолютной величины числа $h$). Для этого должно существовать неравенство:

$$a+(n-1)r<h,$$

отсюда

$$(n-1)r<h-a.$$

Теперь, как и в предыдущем случае, разделим обе части неравенства на $r$, но здесь $r$ — число отрицательное (так как прогрессия убывающая), следовательно, нужно изменить знак неравенства, и мы получим:

$$n-1>\frac{h-a}{r},$$

$$n>\frac{h-a}{r}+1.$$

Опять видим, что $u$ станет меньше данного отрицательного числа $h$, когда число членов $n$ станет больше $\frac{h-a}{r}+1$, а это всегда возможно.

Например, если дана прогрессия

$$9,\ 6,\ 3,\ 0,\ -3,\ -6,\ -9,\ \ldots,$$

то ее $n$-й член будет менее $-100$ при $n>\frac{-109}{-3}+1$, т. е. при $n>37\frac{1}{3}$ (в самом деле, 38-й член прогрессии равен $9-$ $-3\cdot 37=-102$); $n$-й член будет меньше $-1000$ при $n>$ $>\frac{-1009}{-3}+1$, или при $n>337\frac{1}{3}$ (338-й член прогрессии равен $9-3\cdot 337=-1002$) и т. д.

Возьмем теперь возрастающие геометрические прогрессии:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1, | 10, | 100, | 1000, | 10 000... |
| 3, | 6, | 12, | 24, | 48... |
| 1,01; | $(1,01)^2$; | $(1,01)^3$; | $(1,01)^4$; | $(1,01)^5$... |

Совершенно очевидно, что в первой из этих прогрессий найдутся члены, превосходящие любое заранее заданное число. Почти очевидно это и для второй прогрессии; увеличивая число вдвое, мы можем достигнуть того, что получаемый нами результат превзойдет любую указанную границу. Но относительно последней прогрессии мы не можем с уверенностью утверждать то же самое; мы знаем, что члены ее возрастают, но для нас не ясно, могут ли они превзойти любое заданное число.

Можно, однако, доказать, что **в возрастающей геометрической прогрессии, при безграничном увеличении числа ее членов, $n$-й член есть количество безгранично большое.**

Чтобы обнаружить это, рассмотрим сначала две прогрессии — геометрическую: $1+k$, $(1+k)^2$, $(1+k)^3$, ..., $(1+k)^n$, ... и арифметическую: $1+k$, $1+2k$, $1+3k$, ..., $1+nk$, ...., где $k$ обозначает постоянное положительное число, и постараемся выяснить, какая из этих прогрессий возрастает быстрее.

Мы видели, что первые члены обеих прогрессий одинаковы, а далее члены арифметической прогрессии возрастают всякий раз на $k$, члены же геометрической прогрессии возрастают соответственно на такие числа:

$$k(1+k),\ k(1+k)^2,\ \dots,\ k(1+k)^{n-1},\ \dots .$$

Ясно, что каждое из этих чисел больше $k$, и потому каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, больше соответствующего члена арифметической прогрессии. Выражая общее положение, что $n$-й член геометрической прогрессии $(1+k)^n$ больше $n$-го члена арифметической $1+nk$, мы получаем неравенство:

$$(1+k)^n > 1+nk.$$

Воспользуемся теперь этим неравенством для доказательства указанного выше положения. Пусть имеем возрастающую геометрическую прогрессию с положительными членами и пусть ее первый член будет $a$, а знаменатель $q$, тогда $n$-й член $u = aq^{n-1}$. Так как прогрессия возрастающая, то $q > 1$. Обозначим избыток числа $q$ над единицею через $k$, тогда $q = 1+k$ (где $k$ — положительное число), и мы имеем:

$$u = a(1+k)^{n-1}.$$

Применяя только что доказанное неравенство, найдем:

$$u = a(1+k)^{n-1} > a[1+k(n-1)].$$

Теперь видим, что величина $u$ станет больше произвольного положительного числа $h$, если правая часть последнего неравенства, т. е. число $a[1+k(n-1)]$, будет больше или равно $h$:

$$a[1+k(n-1)] \geqslant h.$$

Определим, при каком $n$ это будет:

$$1+k(n-1)\geqslant \frac{h}{a},$$

$$k(n-1)\geqslant \frac{h}{a}-1,$$

$$n-1\geqslant \frac{h-a}{ak},$$

$$n\geqslant \frac{h-a}{ak}+1,$$

или, так как $k=q-1$:

$$n\geqslant \frac{h-a}{a(q-1)}+1.$$

Итак, видим, что величина $n$-го члена $u$ превзойдет данное число $h$, когда число членов будет более (или равно) $\frac{h-a}{a(q-1)}+1$. А это, конечно, всегда возможно; следовательно, в данном случае $u$ есть количество безгранично большое.

Мы предполагали, что в нашей прогрессии все члены положительны; если же в прогрессии будут отрицательные члены, то мы возьмем прогрессию из их абсолютных величин и, рассуждая, как в предыдущем случае, докажем, что абсолютная величина $n$-го члена $u$ может стать и оставаться больше данного числа $h$, как бы велико оно ни было.

В частном случае, когда $q=a$, то $u=a^n$, и доказанное нами положение принимает следующий вид.

**Степень $a^n$, где основание $a$ есть постоянное число, по абсолютной величине больше единицы, а показатель $n$ безгранично возрастает, будет количеством безгранично большим, причем мы получаем:**

$$u=a^n>h \text{ при условии } n\geqslant \frac{h-a}{a(a-1)}+1.$$

Так, например, степень $(1{,}01)^n$ будет более 1000 при условии, что $n\geqslant \frac{1000-1{,}01}{1{,}01\cdot 0{,}01}+1$, или, после упрощений, при $n>98910$.

Степень $2^n$ будет более 1000 при $n\geqslant \frac{1000-2}{2}+1$, т. е. при $n\geqslant 500$. На самом деле, степень $2^n$ превзойдет 1000 уже при гораздо меньших значениях показателя $n$, именно $2^{10}=$ $=1024>1000$.

## § 32. Понятие о безгранично малом количестве. Примеры безгранично малых количеств

Рассмотрим такую задачу.

*Некоторое тело, двигаясь равномерно, в секунду проходит $v$ метров. За сколько секунд оно пройдет $s$ метров?*

Искомое число секунд обозначим буквой $t$, тогда

$$t = \frac{s}{v}.$$

Дадим количеству $s$ какое-либо постоянное значение, например: $s = 8$, а количеству $v$ будем придавать ряд значений, безгранично возрастающих:

$$v = 1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ \ldots .$$

Тогда $t$ будет количеством переменным (функцией от $v$) и получит такой ряд соответствующих значений:

$$t = 8;\ 0{,}8;\ 0{,}08;\ 0{,}008,\ \ldots .$$

Значения $t$ убывают. Может ли число $t$ сделаться меньше любого постоянного положительного числа, как бы мало последнее ни было?

Чтобы число $t$ сделалось меньше некоторого постоянного положительного числа $h$, т. е. чтобы существовало неравенство $t < h$ или $\frac{s}{v} < h$, необходимо условие $v > \frac{s}{h}$, или, для данного случая, $v > \frac{8}{h}$, а это условие всегда выполнимо, так как $v$ безгранично возрастает; при выполнении его и будем иметь $t < h$.

Например, количество $t$ будет меньше чем $\frac{1}{1000}$, если примем $v > 8 : \frac{1}{1000}$, или $v > 8000$, т. е. время движения будет меньше $\frac{1}{1000}$ с, если скорость превышает 8000 м в секунду; количество $t$ будет меньше $\frac{1}{100000}$ с, если, предположим, $v > 8 : \frac{1}{100\,000}$, или $v > 800\,000$, и т. д.

Итак, переменное количество $t$ может сделаться меньше любого постоянного положительного числа $h$, как бы мало последнее ни было; при дальнейшем же своем изменении оно остается меньше этого числа; выражая эти свойства числа $t$, будем называть его безгранично малым.

В данном случае число $t$ получало только положительные значения; придадим теперь количеству $s$ отрицательное значение, например: $s = -8$ (пройденный путь отсчитывается в противоположную сторону), и посмотрим, каковы будут значения $t$ при прежних значениях $v$.

Полагая, что $v = 1, \quad 10, \quad 100, \quad 1000, \ldots,$
будем иметь: $t = -8; \quad -0{,}8; \quad -0{,}08, \quad -0{,}008, \ldots.$

Абсолютная величина $t$ получит такой ряд значений:

$$|t| = 8;\ 0{,}8;\ 0{,}08;\ 0{,}008,\ \ldots,$$

и, как мы видели выше, она может сделаться меньше любого постоянного положительного числа $h$ и при дальнейшем изменении остается меньше этого числа.

Условимся и в этом случае называть переменное число $t$ безгранично малым, и вообще, будем называть *безгранично малым* такое переменное число, абсолютная величина которого в условиях данного вопроса может сделаться и оставаться меньше любого постоянного положительного числа, как бы мало последнее ни было.

Так, например, переменное число $x$, получающее ряд значений:

$$x = 1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4} \ldots,$$

будет, очевидно, безгранично малым.

Вот еще пример безгранично малого количества. **Пусть в окружность вписан правильный многоугольник, число сторон которого безгранично увеличивается, тогда длина его стороны будет переменным количеством.** Докажем, что она будет количеством безгранично малым.

Обозначим число сторон многоугольника через $n$, а длину его стороны через $a_n$, тогда периметр многоугольника выразится количеством $na_n$. При безграничном увеличении числа $n$ периметр будет изменяться, но всегда останется меньше периметра любого описанного многоугольника, например описанного квадрата. Так как сторона описанного квадрата равна диаметру круга, то периметр описанного квадрата равен $8R$ (где $R$ — длина радиуса); следовательно, имеем:

$$na_n < 8R,$$

или

$$a_n < \frac{8R}{n}.$$

Чтобы длина $a_n$ была меньше постоянного положительного числа $h$, необходимо условие:

$$\frac{8R}{n} \leqslant h,$$

откуда

$$n \geqslant \frac{8R}{h},$$

а это условие всегда выполнимо, так как $n$ безгранично возрастает; при соблюдении указанного условия и будем иметь $a_n < h$.

Итак, длина стороны $a_n$ может быть меньше любого постоянного положительного числа $h$; при дальнейшем же увеличении числа сторон многоугольника она остается меньше того же числа $h$; следовательно, $a_n$ есть количество безгранично малое. Например, при $R = 1$ длина $a_n$ сделается меньше $\frac{1}{1000}$, если возьмем $n \geqslant 8000$, и т. д.

С безгранично малыми количествами мы встречаемся и в тригонометрии, например при безграничном уменьшении угла его синус и тангенс будут также безгранично малыми количествами.

Можно подобрать безгранично малые количества и в прогрессиях. Докажем, что **в убывающей геометрической прогрессии при безграничном увеличении числа ее членов $n$-й, член ее есть количество безгранично малое.**

Возьмем убывающую геометрическую прогрессию с положительными членами:

$$a, b, c, \ldots, r, t, u, \ldots .$$

Пусть $n$-й член ее есть $u$, а знаменатель $q$, докажем, что $u$ может стать и оставаться меньше $h$ (где $h$ — произвольное постоянное положительное число).

Напишем прогрессию чисел, обратных по отношению к членам данной прогрессии:

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{r}, \frac{1}{t}, \frac{1}{u}, \ldots .$$

Эта прогрессия будет уже возрастающей, так как знаменатель ее есть $\frac{1}{q}$ $\left(\text{если } q \text{ было меньше } 1, \text{ то } \frac{1}{q} \text{ больше } 1\right)$; ее $n$-й член $\frac{1}{u}$ (см. § 31) может быть больше любого числа, например больше числа $\frac{1}{h}$ $\left(\text{это будет при } n \geqslant \frac{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{q}-1\right)}+\right.$ $\left.+1\right)$. Но из неравенства $\frac{1}{u} > \frac{1}{h}$ следует (после освобождения от дробей) $h > u$, или $u < h$. Следовательно, $n$-й член данной убывающей прогрессии $u$ станет меньше данного числа $h$ при $n \geqslant \frac{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{q}-1\right)}+1$; при дальнейшем же возрастании $n$ величина $u$ будет становиться еще меньше. Итак, при данных условиях $u$ есть количество безгранично малое, что и требовалось доказать.

Мы брали прогрессию с положительными членами, но если бы нам была задана прогрессия с отрицательными членами, то мы взяли бы прогрессию из их абсолютных величин и при помощи прежних рассуждений пришли бы к тому же результату.

В частности, если $q = a$, то $u = a^n$, и доказанное нами положение обращается в такое:

**Степень $a^n$, где основание $a$ есть постоянное число, по абсолютной величине меньше единицы, а показатель $n$ безгранично возрастает, будет количеством безгранично малым;**

она станет меньше числа $h$ при $n \geqslant \frac{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}-1\right)}+1$, или (по упрощении) при $n \geqslant \frac{\frac{a}{h}-1}{\frac{1}{a}-1}+1$.

Например, число $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ будет меньше 0,001 при $n \geqslant \frac{500-1}{2-1}+1$, т. е. при $n \geqslant 500$ (на самом деле уже при $n = 10$ имеем: $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} < 0{,}001$).

Число $(0{,}999)^n$ будет меньше 0,001 при

$$n \geqslant \frac{999-1}{\frac{1000}{999}-1}+1, \text{ т. е. при } n \geqslant 997003, \text{ и т. д.}$$

Заметим еще, что могут существовать переменные количества, которые не будут ни безгранично большими, ни безгранично малыми; таковы, например, количества:

$$m = 4;\quad 4{,}9;\quad 4{,}99;\quad 4{,}999\ldots,$$
$$n = 7;\quad 7{,}3;\quad 7{,}03;\quad 7{,}003\ldots,$$
$$p = 5;\quad 2;\quad 5;\quad 2\ldots \text{ и т. д.}$$

Такие переменные количества называются *конечными*. Значения таких количеств всегда могут быть заключены между двумя постоянными границами, например: значения числа $m$ больше (или равны) 4, но меньше 5; значения $n$ больше 7, но не превышают 10 и т. д.

## § 33. Смысл действий над переменными количествами

В дальнейшем нам постоянно придется говорить о сумме безгранично малых и вообще переменных чисел, их разности и т. д., а также о результатах действий над количествами переменными и постоянными. Поэтому необходимо помнить, что, говоря о действиях над переменными количествами, мы подразумеваем действия над их соответственными значениями. Например, имея два переменных (безгранично малых) числа:

$$x = 5;\quad 0{,}5;\quad 0{,}05;\quad 0{,}005\ldots,$$
$$y = 1;\quad 0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001\ldots,$$

мы будем под суммою их подразумевать число, ряд значений которого получится от сложения соответственных значений слагаемых:

$$x + y = 6;\quad 0{,}6;\quad 0{,}006;\quad 0{,}006\ \ldots.$$

Под произведением их будем подразумевать число, ряд значений которого получится от умножения соответственных значений сомножителей:

$$xy = 5;\quad 0{,}05;\quad 0{,}0005;\quad 0{,}000005;\quad \ldots \text{ и т. д.}$$

Такой же смысл будем приписывать и действиям над переменным и постоянным числом; условимся только постоянное число рассматривать как такое, которое принимает ряд одинаковых значений. Например, имея переменное число

$$x = 1,\quad 0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001,\quad \ldots$$

постоянное $a = 5$ и рассматривая $a$ как число, принимающее ряд значений

$$a = 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ldots,$$

под суммою их подразумеваем по-прежнему число, ряд значений которого получается от сложения соответственных значений слагаемых:

$$x + a = 6;\quad 5{,}1;\quad 5{,}01;\quad 5{,}001;\quad \ldots \text{ и т. д.}$$

## § 34. Свойства результатов действий над безгранично малыми количествами

В дальнейшем нам придется нередко производить действия над безгранично малыми количествами и нужно будет знать, окажется ли получаемый при этом результат также безгранично малым или нет; поэтому мы рассмотрим поочередно, каковы будут результаты действий над безгранично малыми количествами.

1. Возьмем два безгранично малых числа (упомянутых в предыдущем параграфе)

$$x = 5;\quad 0{,}5;\quad 0{,}005;\quad 0{,}005;\ \ldots,$$
$$y = 1;\quad 0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001;\quad \ldots$$

и, сложив их, получим такую сумму:

$$x + y = 6;\quad 0{,}6;\quad 0{,}06;\quad 0{,}006;\ \ldots.$$

Видим, что эта сумма есть также безгранично малое количество. Возьмем теперь такие два безгранично малых числа:

$$x = 1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{4}, \ldots,$$

$$y = -1;\ \frac{1}{2};\ \frac{-1}{3};\ \frac{1}{4}, \ldots.$$

Складывая их, получаем $x + y = 0$. На основании этих (и других подобных) примеров можем установить следующее: **сумма двух безгранично малых количеств есть либо безгранично малое количество, либо нуль.**

Докажем это в общем виде. Пусть $x$ и $y$ будут какие-либо два безгранично малых количества, а $|x|$ и $|y|$ — их абсолютные величины. Нам достаточно рассмотреть абсолютную величину суммы $x + y$ и доказать, что она может сделаться (и оставаться) меньше произвольного постоянного положительного числа $h$.

Мы знаем, что абсолютная величина суммы $x + y$ равна или сумме, или разности абсолютных величин слагаемых (смотря по тому, будут ли у слагаемых одинаковые или разные знаки):

$$|x + y| = |x| + |y| \text{ или } |x| - |y| \text{ или } |y| - |x|.$$

Так как абсолютные величины $x$ и $y$, т. е. $|x|$ и $|y|$, могут сделаться и оставаться как угодно малыми, то сделаем каждую из них меньше $\frac{h}{2}$:

$$|x| < \frac{h}{2}; \quad |y| < \frac{h}{2}.$$

Тогда будем иметь в первом случае:

$$|x + y| < h,$$

а в двух других:

$$|x + y| < \frac{h}{2},$$

а следовательно, во всех случаях имеет место неравенство:

$$|x + y| < h.$$

Итак, абсолютная величина суммы может сделаться (и оставаться) меньше любого положительного числа $h$; следовательно, сумма $x + y$ есть количество безгранично малое или нуль; последний случай имеет место тогда, когда всякое значение $x$ по абсолютной величине равно соответственному значению $y$, но противоположно ему по знаку.

Нетрудно распространить доказанное положение и на любое постоянное число слагаемых (если всех слагаемых будет $n$, то достаточно сделать абсолютную величину каждого из них меньше $\frac{h}{n}$.

2. Возьмем прежние два безгранично малых числа:

$$x = 5;\ 0{,}5;\ 0{,}05;\ 0{,}005;\ \ldots,$$
$$y = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots$$

и вычтем второе из первого; получим разность:

$$x - y = 4;\ 0{,}4;\ 0{,}004;\ 0{,}004;\ \ldots,$$

Очевидно, что эта разность безгранично мала.

Вычтем теперь друг из друга два равных[1] безгранично малых числа:

$$x = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \ldots$$

$$y = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \ldots.$$

[1] Равными безгранично малыми или вообще равными переменными числами будут такие, соответственные значения которых все совершенно одинаковы.

Мы получим разность $x - y = 0$. На основании подобных примеров заключаем, что и **разность двух безгранично малых количеств есть либо безгранично малое количество, либо нуль.**

В общем виде это положение прямо выводится из предыдущего, так как разность $x - y$ равносильна сумме $x + (-y)$.

3. Возьмем еще раз прежние два безгранично малых числа

$$x = 5;\quad 0{,}5;\quad 0{,}05;\quad 0{,}005;\quad \ldots,$$
$$y = 1;\quad 0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001;\quad \ldots$$

и перемножим их. Получим произведение:

$$xy = 5;\ 0{,}05;\ 0{,}0005;\ 0{,}000005;\ \ldots.$$

Очевидно, что и это произведение будет числом безгранично малым. Докажем, что и вообще **произведение двух безгранично малых количеств есть количество безгранично малое.** В самом деле, пусть имеем безгранично малые количества $x$ и $y$: абсолютная величина их произведения $xy$ равна произведению абсолютных величин сомножителей:

$$|xy| = |x||y|.$$

Пусть $h$ обозначает любое постоянное положительное число; сделаем абсолютную величину каждого из сомножителей менее $\sqrt{h}$:

$$|x| < \sqrt{h},\ |y| < \sqrt{h},$$

тогда будем иметь:

$$|xy| < h,$$

т. е. произведение $xy$ есть количество безгранично малое.

Положение это может быть распространено на любое постоянное число сомножителей (если, например, всех сомножителей будет $n$, то достаточно сделать абсолютную величину каждого из них меньше $\sqrt[n]{h}$); в частном случае, когда сомножители равны между собой, положение принимает такой вид:

4. **Степень безгранично малого количества при постоянном целом положительном показателе есть количество безгранично малое.**

5. Возьмем какое-либо безгранично малое число

$$x = 1;\quad 0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001;\quad \ldots$$

и умножим его на постоянное число $a = 5$; получим произведение

$$ax = 5;\quad 0{,}5;\quad 0{,}05;\quad 0{,}005;\quad \ldots,$$

которое будет также безгранично малым. Подобным же образом, разделив наше безгранично малое число

$$1;\quad 0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001;\quad \ldots$$

на постоянное $a = 5$, получим частное:

$$\frac{x}{a} = 0{,}2;\quad 0{,}02;\quad 0{,}002;\quad 0{,}0002;\quad \ldots,$$

которое также является безгранично малым.

На основании подобных примеров заключаем:

**Произведение безгранично малого количества на постоянное, отличное от нуля, а также и частное от деления безгранично малого количества на постоянное, отличное от нуля, суть количества безгранично малые.**

Докажем это в общем виде. Взяв безгранично малое количество и постоянное $a$, отличное от нуля, будем иметь:

$$|ax| = |a||x|\ .$$

Чтобы абсолютная величина произведения была меньше любого постоянного положительного числа $h$, необходимо иметь:

$$|a|\ |x| < h,$$

или

$$|x| < \frac{h}{|a|},$$

а это условие всегда выполнимо (так как $x$ есть количество безгранично малое); следовательно, произведение $ax$ есть количество безгранично малое.

Так как частное $\frac{x}{a}$ можно представить в виде произведения $x \cdot \frac{1}{a}$, то заключаем, что оно также есть количество безгранично малое, и наше положение доказано.

6. Возьмем прежнее безгранично малое число:

$$x = 1;\quad 0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001;\quad \ldots$$

и умножим его на переменное конечное число:

$$m = 4;\ 4{,}9;\quad 4{,}99;\quad 4{,}999;\quad \ldots\ .$$

Получим произведение $mx = 4;\ 0{,}49;\ 0{,}0499;\ 0{,}004999;\ \ldots$, которое будет безгранично малым количеством, так как все его значения соответственно меньше значений безгранично малого числа:

$$k = 5;\quad 0{,}5;\quad 0{,}5;\quad 0{,}005;\quad \ldots\ .$$

Разделим теперь безгранично малое число

$$x = 1;\quad 0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001;\quad \ldots$$

на переменное конечное

$$m = 4;\quad 4{,}9;\quad 4{,}99;\quad 4{,}999;\quad \ldots .$$

Получим частное:

$$\frac{x}{m} = \frac{1}{4};\ \frac{1}{49};\ \frac{1}{499};\ \frac{1}{4999};\ \ldots .$$

Это частное будет также безгранично малым, так как все его значения, начиная со 2-го, соответственно меньше значений безгранично малого числа $l = \frac{1}{4};\ \frac{1}{40};\ \frac{1}{400};\ \frac{1}{4000};\ \ldots$ (или $l = 0{,}25;\ 0{,}025;\ 0{,}0025;\ 0{,}00025;\ \ldots$).

На основании подобных примеров можем заключить, что **произведение безгранично малого количества на переменное конечное, а также и частное от деления безгранично малого количества на переменное конечное суть количества безгранично малые.**

Чтобы доказать это в общем виде, возьмем безгранично малое количество $x$ и переменное конечное $m$; абсолютная величина их произведения $mx$ равна произведению абсолютных величин сомножителей, т. е.

$$|mx| = |m|\,|x|\,.$$

Но если $m$ есть переменное конечное, то можно подобрать такое постоянное положительное число $k$, чтобы абсолютная величина $m$ была всегда меньше $k$ ($|m| < k$), тогда

$$|m|\,|x| < k\,|x|\,.$$

Произведение постоянного числа $k$ и безгранично малого $|x|$ будет количеством безгранично малым и может быть сделано меньше любого постоянного положительного числа $h$ ($k|x| < h$ или $|x| < \frac{h}{k}$, и тогда будем иметь $|m|\,|x| < h$, т. е. произведение $mx$ будет также безгранично малым.

Частное же $\frac{x}{m}$ мы можем представить в виде произведения $x \cdot \frac{1}{m}$ и если $m$ есть переменное конечное, то, разумеется, и число $\frac{1}{m}$ будет также переменным конечным, следовательно, и частное $\frac{x}{m}$ будет безгранично малым.

7. Разделим друг на друга два безгранично малых количества:

$$x = 5;\quad 0{,}5;\quad 0{,}05;\quad 0{,}005;\quad \ldots,$$
$$y = 1;\quad 0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001;\quad \ldots.$$

Получим постоянное частное $\frac{x}{y} = 5$. Но в других случаях будет иначе. Например, разделив друг на друга числа:

$$x = 5;\quad 0{,}5;\quad 0{,}05;\quad 0{,}005;\quad \ldots,$$
$$y = 5;\quad 0{,}05;\quad 0{,}0005;\quad 0{,}000005;\quad \ldots,$$

получим безгранично большое частное:

$$\frac{x}{y} = 1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ \ldots.$$

Разделив числа

$$x = 2;\quad 0{,}02;\quad 0{,}0002;\quad 0{,}000002;\quad \ldots,$$
$$y = 2;\quad 0{,}2;\quad 0{,}02;\quad 0{,}002;\quad \ldots,$$

получим безгранично малое частное

$$\frac{x}{y} = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots.$$

Наконец, разделив числа

$$x = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\quad \ldots.$$
$$y = \frac{1}{2};\ \frac{1}{29};\ \frac{1}{299};\ \frac{1}{2999};\quad \ldots,$$

получим в частном переменное конечное количество:

$$\frac{x}{y} = 2;\ 2{,}9;\ 2{,}99;\ 2{,}999;\quad \ldots.$$

Итак, **деля друг на друга два безгранично малых количества, мы можем получить в результате и безгранично малое, и безгранично большое, и постоянное, и переменное конечное количество**; иначе говоря, частное от деления двух безгранично малых количеств есть количество неопределенного изменения, т. е. такое, закон изменения которого не может быть указан заранее.

## § 35. Понятие о пределе. Примеры переменных величин, имеющих предел

Рассмотрим следующий вопрос.

*Сколько градусов содержит каждый из углов правильного многоугольника, имеющего $n$ сторон?*

Как известно из геометрии, сумма углов всякого многоугольника, имеющего $n$ сторон, равна $2d(n-2)$, где $d$ обозначает прямой угол. Выразив величину угла правильного многоугольника (с $n$ сторонами) через $x$, будем иметь:

$$x = \frac{2d(n-2)}{n} = 2d - \frac{4d}{n} = 180° - \frac{360°}{n}.$$

Будем теперь давать числу $n$ ряд значений, безгранично возрастающих: $n = 3, 4, 5, \ldots$, и рассмотрим, как будет изменяться $x$:

Если: $n = 3$, то $x = 60°$,
$n = 4$, $x = 90°$,
$n = 5$, $x = 108°$,
$n = 6$, $x = 120°$,
$n = 7$, $x = 128°$,
$n = 8$, $x = 135°$,
$n = 9$, $x = 140°$,
$n = 10$, $x = 144°$.

Значения $x$ все возрастают, но остаются всегда меньше $180°$, так как $x$ представляет из себя разность между $180°$ и $\frac{360°}{n}$, а последнее число всегда положительно.

Таким образом, количество $x$, возрастая, приближается к $180°$; покажем, что оно может быть сделано как угодно близким к этому числу. С этой целью определим разность между $180°$ и $x$; найдем:

$$180° - x = \frac{360°}{n}.$$

Чтобы количество $x$ отличалось от $180°$ не больше, чем на $h$ градусов (где $h$ — постоянное положительное число), мы должны положить:

$$\frac{360}{n} \leqslant h,$$

$$n \geqslant \frac{360}{h}.$$

Это условие всегда выполнимо, так как $n$ безгранично возрастает; при соблюдении же его количество $x$ будет иметь требуемую величину. Так, например, угол правильного многоугольника будет отличаться от $180^\circ$ не больше, чем на один градус, если мы положим:

$$n \geqslant 360.$$

Действительно, для правильного 360-угольника находим:

$$x = 180^\circ - \frac{360^\circ}{360} = 179^\circ;$$

при дальнейшем же увеличении числа сторон многоугольника разность $180^\circ - x = \frac{360^\circ}{n}$ убывает; следовательно, угол его становится еще более близким к $180^\circ$. Он будет отличаться от $180^\circ$ не больше чем на одну минуту $\left(\frac{1}{60}\text{ градуса}\right)$, если мы положим:

$$n \geqslant 360 : \frac{1}{60}, \text{ т. е. } n \geqslant 21\,600.$$

Действительно, для правильного многоугольника с 21 600 сторонами найдем:

$$x = 180^\circ - \frac{360^\circ}{21600} = 180^\circ - 1' = 179^\circ 59'.$$

Итак, мы убедились, что разность между постоянным количеством $180^\circ$ и переменным $x$ может приобресть как угодно малое значение и при дальнейшем изменении $x$ убывает, т. е. остается меньше этого значения; иначе говоря, разность $180^\circ - x$ безгранично мала. Выражая это обстоятельство, назовем постоянное количество $180^\circ$ пределом переменного $x$.

И вообще, если имеем некоторое постоянное количество и другое переменное и если разность между ними безгранично мала, то данное постоянное количество будем называть *пределом* переменного.

Рассмотрим еще несколько примеров переменных количеств, имеющих пределы.

1. Пусть имеем переменное число $k$, получающее ряд значений:

$$k = 9; \quad 9{,}9; \quad 9{,}99; \quad 9{,}999; \quad \ldots .$$

Число $k$, очевидно, возрастает, но не может быть больше 10. Найдем разность между числом 10 и последовательными значениями $k$:

$$10 - k = 1; \quad 0{,}1; \quad 0{,}01; \quad 0{,}001; \quad \ldots .$$

Очевидно, что разность $10 - k$ безгранично мала; следовательно, число $k$ имеет предел 10.

2. Возьмем переменное число $l$, получающее ряд значений:

$$l = 6{,}2;\quad 6{,}02;\quad 6{,}002;\quad 6{,}0002;\quad \ldots\,.$$

Число $l$, очевидно, убывает, но не может сделаться меньше 6. Найдем разность между $l$ и числом 6[1]:

$$l - 6 = 0{,}2;\ 0{,}02;\ 0{,}002;\ 0{,}0002;\ \ldots\,.$$

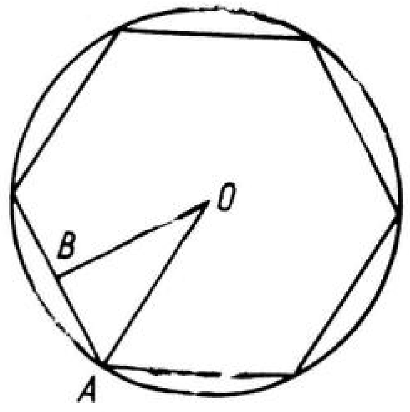

Рис. 66

Очевидно, что эта разность безгранично мала; следовательно, переменное число $l$ имеет предел 6.

3. Рассмотрим длину апофемы правильного вписанного многоугольника, определяемую по формуле:

$$x = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}},$$

где $R$ обозначает радиус круга, $a_n$ — сторону многоугольника.

**При безграничном увеличении числа сторон многоугольника длина апофемы, очевидно, является переменной. Докажем, что ее пределом будет длина радиуса.**

Вообразим какой-либо правильный многоугольник, вписанный в круг (рис. 66); рассмотрим прямоугольный $\triangle AOB$, гипотенузой которого является радиус ($OA$), а катетами апофема ($OB$) и половина стороны многоугольника ($AB$). Так как во всяком треугольнике одна сторона меньше суммы двух других, то имеем:

$$OA < OB + AB, \text{ или } R < x + \frac{a_n}{2},$$

откуда

$$R - x < \frac{a_n}{2}.$$

Поскольку длина стороны многоугольника ($a_n$) при данных условиях есть количество безгранично малое (см. § 32), а разность $R - x$ меньше половины $a_n$, то очевидно, что и разность $R - x$ безгранично мала (мы будем иметь $R - x < h$,

[1] В данном случае и в других ему подобных безразлично, в каком порядке выполняется вычитание, так как от перемены порядка вычитания абсолютная величина разности не меняется; и если разность $l - 6$ безгранично мала, то и разность $6 - l$ безгранично мала.

если сделаем $a_n < 2h$), а следовательно, **длина радиуса $R$ есть предел длины апофемы $x$.**

4. Исследуем, как изменяется косинус какого-либо угла при безграничном уменьшении этого угла. Для этого обратимся к рисунку 60 и рассмотрим на нем треугольник $OKL$, составленный радиусом-вектором ($r$), абсциссой ($p$), и ординатой ($h$) точки $K$.

Во всяком треугольнике разность двух сторон меньше третьей стороны, поэтому имеем:

$$r - p < h$$

или, разделив это неравенство почленно на $r$,

$$1 - \frac{p}{r} < \frac{h}{r}.$$

Отношение $\frac{p}{r}$ есть косинус угла $t$, а отношение $\frac{h}{r}$ его синус, поэтому

$$1 - \cos t < \sin t.$$

При безграничном уменьшении угла $t$ и его синус есть безгранично малое количество, значит, разность $1 - \cos t$ также безгранично мала. А если так, то постоянное число 1 есть предел $\cos t$, т. е. **при безграничном уменьшении угла его косинус имеет предел 1***.

## § 36. Предел суммы членов убывающей геометрической прогрессии. Обращение десятичных периодических дробей в простые

Возьмем прогрессию:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots.$$

и будем находить последовательно сумму ее 2, 3, 4, ... членов. Получим:

$$1\frac{1}{2}, \ 1\frac{3}{4}, \ 1\frac{7}{8}; \ 1\frac{15}{16}, \ 1\frac{31}{32}, \ \ldots.$$

Видим, что получаемая сумма все больше и больше приближается к числу 2 и отличается от него последовательно на числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$. Очевидно, что при безгра-

---

* Рассуждения относительно предела $\cos t$, очевидно, проводятся для острого угла.

ничном возрастании числа членов прогрессии сумма ее членов может отличаться от 2 на число, сколь угодно малое, т. е. эта сумма будет иметь предел, равный 2.

Возьмем еще прогрессию:

$$9;\quad 0{,}9;\quad 0{,}09;\quad 0{,}009;\quad 0{,}0009;\quad \ldots$$

и будем вычислять сумму ее 2, 3, 4, ... членов. Найдем:

$$9{,}9;\quad 9{,}99;\quad 9{,}999;\quad 9{,}9999;\quad \ldots .$$

Очевидно, что при безграничном возрастании числа членов прогрессии получаемая нами сумма все приближается к числу 10 и отличается от него последовательно на 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001;..., т. е. на безгранично малое количество, иначе говоря, она имеет предел, равный 10.

Можно доказать, что и **во всякой убывающей геометрической прогрессии**

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ r,\ t,\ u,\ \ldots$$

**при безграничном увеличении числа ее членов сумма $n$ членов имеет предел, равный**

$$\frac{a}{1-q},$$

где $a$ — первый член прогрессии, а $q$ — ее знаменатель.

В самом деле, искомая сумма выражается так:

$$s=\frac{a-uq}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{uq}{1-q}.$$

Первый член этого выражения $\left(\frac{a}{1-q}\right)$ есть количество постоянное, а второй представляет произведение $n$-го члена $u$ прогрессии и на постоянное количество $\frac{q}{1-q}$, но $n$-й член убывающей геометрической прогрессии при безграничном возрастании числа ее членов есть количество безгранично малое, следовательно, второй член нашей формулы $\left(\frac{uq}{1-q}\right)$ безгранично мал. Преобразуем теперь наше равенство так:

$$\frac{a}{1-q}-s=\frac{uq}{1-q}.$$

Видим, что разность между постоянным числом $\frac{a}{1-q}$ и переменным $s$ равна безгранично малому $\frac{uq}{1-q}$; следовательно, $\frac{a}{1-q}$ есть предел суммы $s$.

Вычислим по найденной формуле предел суммы членов такой прогрессии:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \ldots .$$

Здесь имеем $a=\frac{1}{4}$ и $q=\frac{1}{4}$, следовательно, искомый предел равен:

$$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}.$$

Указанное свойство убывающей геометрической прогрессии дает возможность вывести способ обращения бесконечной десятичной периодической дроби в простую.

Заметим прежде всего, что **простую дробь, из которой получилась данная периодическая, можно рассматривать как предел ряда последовательных десятичных приближений этой периодической дроби.**

В самом деле, обратим, например, дробь $\frac{17}{33}$ в десятичную:

```
17,0 |33
16,5 |0,5151...
  50
  33
  170
  165
   50
   33
   17
```

От обращения данной дроби мы получили периодическую дробь 0,515151 ...; последовательные ее десятичные приближения с недостатком будут:

0,5; 0,51; 0,515; 0,5151; ... .

Разность между нашей дробью $\frac{17}{33}$ и этими последовательными приближениями будет, конечно, число переменное, и мы знаем из самого процесса деления, что она будет соответственно меньше чем 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ..., т. е. она безгранично мала. Следовательно, данная простая дробь $\frac{17}{33}$ есть предел переменного числа, последовательные значения которого даются рядом десятичных приближений соответствующей периодической дроби.

Возьмем теперь периодическую дробь:

$$0,4444 \ldots .$$

Простая дробь $x$, от обращения которой она получилась, должна быть пределом переменного числа:

$$k = 0,4; \quad 0,44; \quad 0,444; \quad 0,4444 \ldots .$$

Представим теперь последовательные значения числа $k$ в таком виде:

$$\begin{aligned} 0,4 \quad &= 0,4 \\ 0,44 \quad &= 0,4 + 0,04, \\ 0,444 \quad &= 0,4 + 0,04 + 0,004, \\ 0,4444 &= 0,4 + 0,04 + 0,004 + 0,0004, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Легко видеть, что каждое значение $k$ представляет сумму членов убывающей геометрической прогрессии:

$$0,4; \quad 0,04; \quad 0,004; \quad 0,0004; \ldots,$$

число членов которой получает значения: 1, 2, 3, 4, ..., т. е. безгранично возрастает.

Чтобы найти предел $k$, достаточно найти предел суммы членов указанной прогрессии; так как первый член ее 0,4, а знаменатель 0,1, то имеем:

$$\text{пред } k = \frac{0,4}{1 - 0,1} = \frac{0,4}{0,9} = \frac{4}{9},$$

или

$$x = \frac{4}{9}.$$

Пусть имеем дробь:

$$0,363636\ldots .$$

Составив для нее ряд десятичных приближений

$$k = 0,36; \quad 0,3636; \quad 0,363636; \quad \ldots,$$

мы можем представить ее как предел переменного числа $k$ или же как предел суммы членов убывающей геометрической прогресии

$$0,36; \quad 0,0036; \quad 0,000036; \quad \ldots,$$

число членов которой безгранично возрастает.

Так как первый член этой прогрессии 0,36, а знаменатель 0,01, то предел суммы ее членов равен:

$$\frac{0{,}36}{1-0{,}01}=\frac{0{,}36}{0{,}99}=\frac{36}{99}=\frac{4}{11};$$

следовательно, наша дробь равна $\frac{4}{11}$.

Чтобы вывести правило обращения чистой периодической дроби в обыкновенную, рассмотрим тот же вопрос в общем виде. Вообразим дробь, период которой равен $a$ и состоит из $m$ цифр; простая дробь $x$, из которой она получилась, будет пределом следующего переменного числа $k$ (последовательные значения которого представляет ряд десятичных приближений нашей дроби):

$$k=\frac{a}{10^m},\ \frac{a}{10^m}+\frac{a}{10^{2m}},\ \frac{a}{10^m}+\frac{a}{10^{2m}}+\frac{a}{10^{3m}},\ \ldots.$$

Но всякое значение $k$ может быть рассматриваемо как сумма нескольких членов убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{a}{10^m},\ \frac{a}{10^{2m}},\ \frac{a}{10^{3m}},\ \ldots,$$

первый член которой $\frac{a}{10^m}$, а знаменатель $\frac{1}{10^m}$.

Предел $k$ равен пределу суммы членов этой прогрессии при безграничном возрастании числа ее членов:

$$\text{пред } k=\left(\frac{a}{10^m}\right):\left(1-\frac{1}{10^m}\right)=\frac{a}{10^m-1}.$$

Таким образом, мы нашли:

$$k=\frac{a}{10^m-1}.$$

Рассматривая этот результат, мы видим, что числителем искомой простой дроби служит число $a$, т. е. период данной дроби, знаменатель же, равный разности $10^m-1$, будет выражен $m$ девятками, т. е. содержит столько девяток, сколько цифр в данном периоде. Таким образом, мы получаем следующее правило: **чтобы обратить чистую периодическую дробь в простую, достаточно написать числителем период, а знаменателем число, изображаемое столькими девятками, сколько цифр в периоде.**

Подобный же вывод можно сделать и для смешанной периодической дроби.

Формула предела суммы членов геометрической прогрессии дает нам возможность разрешить известный софизм греческого философа Зенона об Ахиллесе и черепахе[1]:

*Ахиллес находится в 10 шагах позади черепахи и движется в 10 раз быстрее. Когда он пройдет эти 10 шагов, то черепаха успеет продвинуться вперед на 1 шаг; когда он сделает этот шаг, то черепаха проползет еще* $\frac{1}{10}$ *шага; когда Ахиллес сделает и эту* $\frac{1}{10}$ *шага, то черепаха продвинется вперед на* $\frac{1}{100}$ *шага и т. д. Следовательно, заключает Зенон, Ахиллес никогда не догонит черепаху.*

Ошибочность этого заключения для нас, конечно, ясна; и мы можем без труда вычислить, когда именно Ахиллес догонит черепаху. Пусть Ахиллес тратит 1 с на каждый шаг, тогда черепаха проходит в секунду $\frac{1}{10}$ шага, и Ахиллес, таким образом, приближается к ней в секунду на $\frac{9}{10}$ шага. Всего же он должен приблизиться к ней на 10 шагов; следовательно, ему понадобится на это столько секунд, сколько раз $\frac{9}{10}$ шага содержится в 10 шагах, т. е.

$$10 : \frac{9}{10} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}.$$

Но главное в нашей задаче — это найти, в чем же именно заключается ошибка в рассуждении Зенона. Посмотрим, сколько времени Зенон дает Ахиллесу, чтобы догнать черепаху. Сначала Ахиллес проходит 10 шагов и на это затрачивает 10 с; затем он делает 1 шаг, и на это уходит 1 с; далее на $\frac{1}{10}$ шага ему нужно затратить $\frac{1}{10}$ с, на $\frac{1}{100}$ шага — $\frac{1}{100}$ с и т. д. Всего, таким образом, Ахиллес затратит столько секунд, сколько получится от сложения ряда чисел

$$10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \ldots .$$

Этот ряд чисел есть геометрическая прогрессия, первый член которой 10, а знаменатель $\frac{1}{10}$; сколько бы мы ни складывали подряд ее члены, их сумма будет меньше, чем предел суммы членов этой прогрессии, который равен:

$$\frac{10}{1-\frac{1}{10}} = 10 : \frac{9}{10} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}.$$

[1] *Софизм* — заведомо ошибочное рассуждение, неправильность которого нелегко сразу обнаружить. *Ахиллес* — древнегреческий герой, славившийся своею храбростью и быстротой в беге.

Но мы уже подсчитали, что Ахиллесу как раз и необходимо $11\frac{1}{9}$ с, чтобы догнать черепаху, а в условиях задачи Зенона он имеет в своем распоряжении время всегда меньшее, чем это число секунд. Поэтому нет ничего удивительного, что Ахиллес за этот промежуток времени не успевает догнать черепаху, но отсюда не следует еще, что он ее не догонит никогда. Погрешность рассуждения Зенона как раз и заключается в необоснованности этого последнего вывода.

## § 37. Распространение понятия о пределе на случаи безгранично малых, постоянных и безгранично больших количеств. Обозначение пределов

Пусть имеем какое-либо безграничное малое число:

$$k = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots .$$

Очевидно, что разность между ним и нулем равна самому числу $k$:

$$k - 0 = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots .$$

Так как число $k$ — переменное, а 0 — постоянное и разность же между ними, как видно, безгранично мала, то согласно принятому определению, число $k$ имеет предел 0; очевидно, что и **всякое безгранично малое число имеет пределом 0.**

Если рассматриваются постоянные числа наряду с переменными, то для удобства иногда условливаются пределом постоянного числа $a$ называть это самое число. Впоследствии мы убедимся, что это условие позволяет излагать многие выводы в более сокращенной форме.

Если имеем безгранично большое число, то оно, по самому смыслу своему, не имеет предела, но для удобства иногда говорят, что оно имеет пределом «бесконечность» ($\infty$); если при этом желают указать, что данное безгранично большое число может сделаться положительным и оставаться больше любого постоянного положительного числа, то говорят, что предел его есть «плюс бесконечность» ($+\infty$); если же хотят выразить, что данное безгранично большое число может стать отрицательным и приобресть как угодно большую абсолютную величину, то говорят, что предел его есть «минус бесконечность» ($-\infty$).

Чтобы сокращенно обозначить, что данное переменное число $x$ имеет предел, равный $a$, мы будем употреблять запись:

$$\text{пред } x = a\text{ [1]},$$

или

$$x \to a\text{ [2]}.$$

Так, например, чтобы выразить, что величина угла правильного многоугольника, вычисляемая по формуле

$$x = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n},$$

имеет (при безграничном увеличении числа сторон многоугольника) предел, равный $180^\circ$, запишем:

$$\text{пред } x = 180^\circ.$$

Если же мы хотим в нашей записи указать, при каком именно изменении независимого переменного $n$ количество $x$ будет иметь своим пределом $180^\circ$, то выразим это следующим образом:

$$\underset{n\to\infty}{\text{пред}}\, x = 180^\circ\text{ [3]}.$$

Чтобы выразить, что длина стороны того же многоугольника ($a_n$), вписанного в круг, безгранично мала (т. е. имеет своим пределом 0), мы можем написать:

$$\underset{n\to\infty}{\text{пред}}\, a_n = 0.$$

## § 38. Некоторые положения о пределах

**1. Всякое переменное число может иметь только один предел.**

Пусть имеем переменное число $u$, имеющее предел $a$; для доказательства допустим, что данное число $u$ имеет другой предел $b$. Введем теперь следующие обозначения:

$$a - u = x,$$
$$b - u = y.$$

---

[1] Читается так: «предел $x$ равен $a$». Во многих сочинениях слово «предел» обозначается знаком lim (начало французского слова «limite», соответствующего нашему «предел»), и указанное нами обозначение заменяется таким: $\lim x = a$.

[2] Читается так «$x$ имеет предел $a$» или «$x$ безгранично близко к $a$» (т. е. разность между $x$ и $a$ безгранично мала).

[3] Читается так: «предел $x$ при $n$, имеющем предел $\infty$, равен $180^\circ$ или «предел $x$ при $n$, безгранично большом, равен $180^\circ$».

Так как разность между пределом и соответствующим ему переменным числом безгранично мала, то $x$ и $y$ обозначают безгранично малые числа. Вычитая почленно написанные равенства, найдем:

$$a - b = x - y.$$

Левая часть этого равенства представляет число постоянное; разность же двух безгранично малых количеств $x - y$ есть или безгранично малое количество, или нуль (см. § 34, положение 2). Так как постоянное число не может быть безгранично малым, то равенство возможно только тогда, когда правая часть его есть нуль, но если $a - b = 0$, то $a = b$, что и требовалось доказать.

Это самое положение можно выразить еще в такой форме: **если имеем два равных переменных числа $u$ и $v$ и одно из них имеет предел $a$, то и другое имеет тот же предел.**

2. **Если постоянное число заключено между двумя переменными, разность которых безгранично мала, то оно есть предел каждого из этих переменных.**

В самом деле, пусть имеем постоянное число $a$, удовлетворяющее неравенству

$$u < a < v,$$

где $u$ и $v$ — переменные числа, а разность $v - u$ — безгранично мала.

Из этого неравенства следует, что

$$a - u < v - u,$$
$$v - a < v - u.$$

Разность $v - u$, по условию, может стать (и оставаться) меньше любого постоянного положительного числа $h$; в таком случае будем иметь:

$$a - u < h,$$
$$v - a < h,$$

т. е. разности $a - u$ и $v - a$ — количества безгранично малые; следовательно, число $a$ есть предел каждого из переменных чисел $u$ и $v$.

3. **Если разность двух переменных количеств безгранично мала и если одно из них имеет предел, то и другое имеет тот же самый предел.**

Пусть имеем переменные количества $u$ и $v$, причем разность $u - v$ безгранично мала, и пусть количество $u$ имеет предел $a$.

Введем такие обозначения:

$$u - v = x,$$
$$a - u = y.$$

Из условия следует, что разности $x$ и $y$ будут безгранично малыми количествами; сложим теперь написанные равенства почленно; получим:

$$a - v = x + y.$$

Сумма же двух безгранично малых количеств $x$ и $y$ безгранично мала (в данном случае она не может быть равна нулю, так как тогда вышло бы, что $a - v = 0$ и постоянное количество $a$ равнялось бы переменному $v$); следовательно, разность между постоянным количеством $a$ и переменным $v$ равна безгранично малому количеству, и $a$ есть предел $v$, что и требовалось доказать.

## § 39. Свойства результатов действий над количествами, имеющими пределы

Пусть два переменных количества $u$ и $v$, имеющие соответственно пределы $a$ и $b$; докажем следующие положения:

1. **Предел суммы данных количеств равен сумме их пределов.**

2. **Предел разности их равен разности пределов.**

3. **Предел произведения равен произведению пределов.**

4. **Предел частного равен частному пределов, если предел делителя отличен от нуля.**

Для доказательства этих положений обозначим разности $u - a$ и $v - b$ соответственно через $x$ и $y$, т. е. положим:

$$u - a = x,$$
$$v - b = y,$$

где $x$ и $y$, согласно понятию о пределе, обозначают безгранично малые количества.

1) Складывая написанные равенства, имеем:

$$a - u + b - v = x + y,$$

или

$$(a + b) - (u + v) = x + y.$$

Сумма двух безгранично малых количеств $x$ и $y$, как мы знаем (см. § 34, положение 1), есть либо безгранично малое количество, либо нуль. В первом случае видим, что разность между постоянным количеством $a + b$ и переменным $u + v$ безгранично мала, т. е. находим, что

$$\text{пред } (u + v) = a + b.$$

Во втором случае имеем $(a + b) - (u + v) = 0$, или $u + v = a + b$, т. е. сумма данных переменных есть постоянное количество, равное $a + b$. А в таком случае мы условились пределом $u + v$ называть это же самое количество (см. § 37), т. е. напишем:

$$\text{пред } (u + v) = u + v = a + b.$$

Следовательно, в обоих случаях имеем:

$$\text{пред } (u + v) = a + b = \text{пред } u + \text{пред } v,$$

что и требовалось доказать.

2) Разность данных чисел $u - v$ может быть представлена в виде суммы:

$$u - v = u + (-v).$$

Если число $(-v)$ имеет предел, то, согласно положению 1), будем иметь:

$$\text{пред } (u - v) = \text{пред } u + \text{пред } (-v) = a + \text{пред } (-v).$$

Докажем теперь, что пред $(-v) = -b$. В самом деле, по условию имеем:

$$b - v = y,$$

где $y$ обозначает безгранично малое количество.

Поменяв знак в обеих частях этого равенства, найдем:

$$-b + v = -y,$$

или

$$-b - (-v) = -y.$$

Так как абсолютные величины количеств $y$ и $-y$ одинаковы, то $(-y)$ есть также безгранично малое количество; иначе говоря, разность между постоянным количеством $-b$ и переменным $(-v)$ безгранично мала, или

$$\text{пред } (-v) = -b.$$

Теперь имеем:

$$\text{пред } (u - v) = a + \text{пред } (-v) = a - b = \text{пред } u - \text{пред } v.$$

Второе положение тоже доказано.

3) На основании обозначений $a - u = x$ и $b - v = y$ определяем

$$u = a - x,$$
$$v = b - y.$$

Перемножая эти равенства почленно, найдем:

$$uv = ab - bx - ay + xy,$$

откуда

$$ab - uv = bx + ay - xy = bx + ay + (-xy):$$

Рассматривая правую часть полученного равенства, видим, что каждое из первых двух слагаемых ($bx$ и $ay$) представляет произведение постоянного числа на безгранично малое; следовательно, оба слагаемых безгранично малы или равны нулю (последнее имеет место тогда, когда постоянный сомножитель равен 0); третье же слагаемое ($-xy$) представляет произведение двух безгранично малых количеств и потому также безгранично мало. Следовательно, сумма всех трех слагаемых либо безгранично мала, либо равна 0.

В первом случае видим, что разность между постоянным количеством $ab$ и переменным $uv$ безгранично мала, т. е.

$$\text{пред } (uv) = ab;$$

во втором же имеем $ab - uv = 0$, или $uv = ab$, т. е. произведение данных переменных есть постоянное количество, равное $ab$. В таком случае можем условиться пределом $uv$ называть это же количество (см. § 37) и напишем:

$$\text{пред } (uv) = uv = ab.$$

Таким образом, в обоих случаях будем иметь:

$$\text{пред } (uv) = ab = \text{пред } u \cdot \text{пред } v,$$

что и требовалось доказать.

4) Частное данных количеств $u$ и $v$ может быть представлено в виде произведения:

$$\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}.$$

Если число $\frac{1}{v}$ имеет предел, то, по положению 3), будем иметь:

$$\text{пред}\left(\frac{u}{v}\right) = \text{пред } u \cdot \text{пред}\left(\frac{1}{v}\right) = a \cdot \text{пред}\left(\frac{1}{v}\right).$$

Докажем, что $\text{пред}\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{b}$. В самом деле, разность $\frac{1}{b} - \frac{1}{v}$ может быть преобразована так:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{v} = \frac{v-b}{bv} = -\frac{y}{bv} = -\frac{\frac{y}{b}}{v}.$$

Число $y$ по условию безгранично мало; от деления его на постоянное $b$ (которое по условию отлично от нуля) получается в частном безгранично малое количество (§ 34, п. 5), а от деления последнего на переменное конечное $v$ получается также безгранично малый результат (§ 34, п. 6); следовательно, разность между постоянным числом $\frac{1}{b}$ и переменным $\frac{1}{v}$ равна безгранично малому количеству, иначе говоря,

$$\text{пред}\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{b}.$$

Теперь получаем:

$$\text{пред}\left(\frac{u}{v}\right) = a \cdot \text{пред}\left(\frac{1}{v}\right) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{\text{пред}\ u}{\text{пред}\ v},$$

что и требовалось доказать.

Доказанные нами положения могут быть распространены и на случай, когда одно из данных количеств будет постоянным, если мы условимся пределом постоянного числа называть это самое число.

В самом деле, пусть мы складываем постоянное количество $a$ и переменное $v$, имеющее пределом $b$; согласно прежнему обозначению имеем: $b - v = y$ (где $y$ — безгранично малое количество); прибавив к уменьшаемому $b$ и к вычитаемому $v$ по постоянному количеству $a$, мы не изменим разности и получим:

$$(a + b) - (a + v) = y,$$

т. е. разность между постоянным количеством $a + b$ и переменным $a + v$ безгранично мала, или

$$\text{пред}\ (a + v) = a + b = a + \text{пред}\ v.$$

Но мы условились рассматривать постоянное количество $a$ как предел того же $a$; следовательно, приходим к прежнему равенству:

$$\text{пред}\ (a + v) = \text{пред}\ a + \text{пред}\ v.$$

Так как разность $u - v$ равносильна сумме $u + (-v)$, то сказанное нами относительно суммы распространяется и на случай разности.

Пусть теперь нужно умножить постоянное количество $a$ на переменное $v$, имеющее предел $b$. Взяв прежнее равенство $b - v = y$ (где $y$ — безгранично малое количество), умножим его обе части на постоянное количество $a$, получим:

$$ab - av = ay.$$

Произведение постоянного количества $a$ на безгранично малое $y$ безгранично мало; следовательно, разность между постоянным количеством $ab$ и переменным $av$ равна безгранично малому количеству, или

$$\text{пред } (av) = ab = a \cdot \text{пред } v.$$

Но постоянное количество $a$, согласно нашему условию, служит само себе пределом: $a = \text{пред } a$; следовательно, получим прежнюю формулу:

$$\text{пред } (av) = \text{пред } a \cdot \text{пред } v.$$

Так как частное $\frac{a}{v}$ равносильно произведению $a \cdot \frac{1}{v}$, то сказанное нами относительно произведения распространяется и на частное.

Распространим теперь положения относительно предела суммы и предела произведения на случаи, когда число слагаемых или множителей будет больше двух.

Пусть, например, мы складываем три переменных количества $u$, $v$, $z$, имеющие соответственно пределы $a$, $b$, $c$. Сумму этих трех количеств мы можем рассматривать как сумму двух слагаемых:

$$u + v + z = (u + v) + z,$$

а в этом случае, по доказанному, будем иметь:

$$\text{пред } (u + v + z) = \text{пред } (u + v) + \text{пред } z = \text{пред } u + \\ + \text{пред } v + \text{пред } z.$$

Подобным же способом можем распространить наше положение на случай сложения скольких угодно слагаемых, если только число этих слагаемых постоянно.

Если же число слагаемых переменное, то данное положение может и не иметь места. Пусть, например, имеем сумму:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m},$$

где число всех слагаемых равно $m - 1$; эта сумма равна $\frac{m-1}{m}$, или $1 - \frac{1}{m}$. Если примем, что $m$ (а следовательно, и $m - 1$) безгранично возрастает, что каждое слагаемое $\frac{1}{m}$ будет безгранично мало, т. е. предел его есть 0, и сумма пределов также равна 0; предел же суммы, равной $\left(1 - \frac{1}{m}\right)$, равен 1.

Пусть мы перемножаем прежние три количества $u$, $v$, $z$; произведение их мы можем рассматривать как произведение двух сомножителей:

$$uvz = (uv)\,z.$$

Получаем:

$$\text{пред}\,(uvz) = \text{пред}\,(uv) \cdot z = \text{пред}\,u \cdot \text{пред}\,v \cdot \text{пред}\,z.$$

Подобным же способом может быть распространено доказанное положение и на случай скольких угодно сомножителей, если только число этих сомножителей постоянно.

Из последнего положения вытекает такое следствие:

5. Если данное переменное число $u$, имеющее предел $a$, возвышается в степень, показатель которой $m$ есть число постоянное (целое положительное), то предел степени равен той же степени от предела основания:

$$\text{пред}\,(u^m) = (\text{пред}\,u)^m.$$

В самом деле, степень $u^m$ есть произведение $m$ сомножителей, равных $u$:

$$u^m = \underbrace{u \cdot u \cdot u \;\ldots}_{m\ \text{раз}}\; u.$$

Следовательно, имеем:

$$\text{пред}\,(u^m) = \underbrace{\text{пред}\,u \cdot \text{пред}\,u \cdot \text{пред}\,u \;\ldots \text{пред}\;u}_{m\ \text{раз}} = (\text{пред}\,u)^m,$$

что мы и хотели доказать.

# ГЛАВА III. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ К ГЕОМЕТРИИ

## § 40. Основные условия относительно величины дуги и окружности. Длина окружности как предел периметров правильных вписанных и описанных многоугольников

Когда нам приходится сравнивать по величине два прямолинейных отрезка, мы накладываем их друг на друга и, если они совмещаются полностью, говорим, что они равны. Если же один полностью укладывается на другом, не совмещаясь с ним вполне, то считаем первый меньшим, а второй — большим.

С помощью наложения мы производим и измерение прямолинейных отрезков: выбранную единицу длины или какую-либо ее долю мы откладываем на измеряемом прямолинейном отрезке и замечаем, сколько раз она на нем уложится; полученное число и выражает длину отрезка в данных единицах. Но если мы пожелали бы узнать длину дуги или окружности или просто сравнить по величине дугу с данным прямолинейным отрезком, то здесь воспользоваться этим обычным способом мы не можем, так как никакой прямолинейный отрезок не может быть наложен на дугу окружности. Поэтому мы должны ввести особые условия, определяющие, какие прямолинейные отрезки мы будем считать меньшими и какие большими, чем данная дуга или окружность.

Чтобы установить эти условия, обратим внимание на следующее обстоятельство. Возьмем какой-либо выпуклый многоугольник $ABCD$ (рис. 67) и увеличим его площадь, заменив часть его периметра $BC$ выпуклой ломаной $BKC$; затем снова увеличим его площадь, заменив ломаную $BKC$ какой-либо объемлющей ломаной $BLMC$. Тогда с увеличением площади будет каждый раз увеличиваться и периметр многоугольника, так как ломаная $BKC$ больше прямой $BC$, а объемлющая ломаная $BLMC$, в свою очередь, больше $BKC$.

Возьмем опять наш выпуклый многоугольник $ABCD$ (рис. 68) и увеличим его площадь, заменив часть его периметра $BC$ выпуклой кривой $BFC$, а затем снова увеличим его площадь, заменив кривую $BFC$ какой-либо объемлющей ломаной $BLMC$. Увеличивается ли при этом каждый раз и периметр нашей фигуры, этого мы не можем сказать, пока не установим, какую из линий — $BC$, $BFC$ и $BLMC$ — мы будем считать меньшей, а какую большей. Но если мы желаем, чтобы в подобных случаях с увеличением площади выпуклой фигуры по-прежнему увеличивался и ее периметр, то мы должны считать кривую $BFC$ большей, чем прямая $BC$, и меньшей, чем объемлющая ее ломаная $BLMC$. И вообще **будем считать выпуклую кривую большей, чем прямая, соединяющая ее концы, но меньшей, чем объемлющая ее ломаная линия.** Условие это совпадает и с данными нашего повседневного опыта: если бы мы попробовали произвести непосредственное измерение линий $BC$, $BFC$ и $BLMC$ с помощью нерастяжимой нити, то нашли бы, что результат измерения соответствует указанному соотношению.

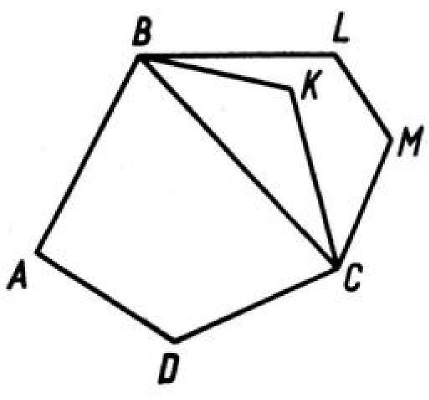


Рис. 67

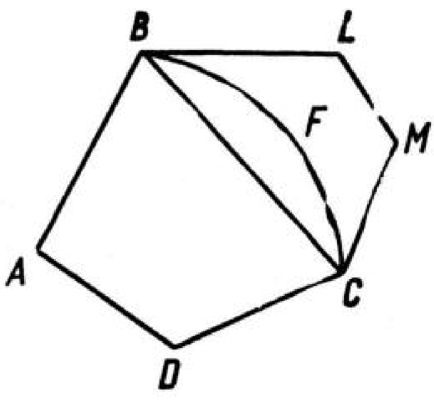


Рис. 68

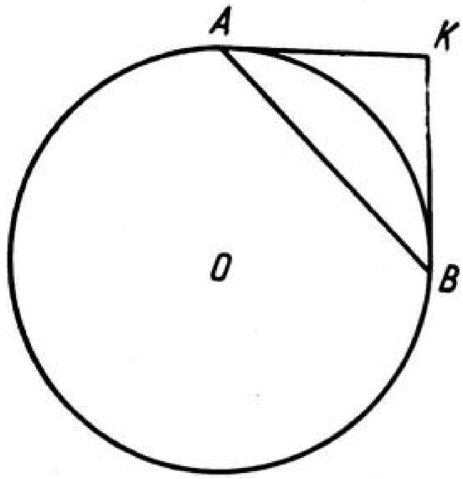

Рис. 69

Для дуги окружности указанное условие может быть выражено в более простой форме. Возьмем дугу $AB$ (рис. 69), меньшую, чем полуокружность, проведем хорду $AB$ и две касательных $AK$ и $BK$ через ее концы, тогда ломаная линия $AKB$ будет объемлющей по отношению к дуге. Следовательно,

$$AB < \smile AB < AK + KB,$$

т. е. если имеем дугу, меньшую, чем полуокружность, то эта дуга будет большей, чем ее хорда, но меньшей, чем сумма касательных, проведенных через ее концы.

Окружность можно рассматривать как сумму нескольких дуг, каждая из которых меньше полуокружности; поэтому из предыдущего мы можем сделать вывод относительно сравнительной величины окружности и прямолинейных отрезков.

Пусть в окружность вписан некоторый многоугольник и через его вершины проведены касательные, образующие описанный многоугольник (рис. 70), тогда:

$$AB < \smile AB < AK + KB,$$
$$BC < \smile BC < BL + LC,$$
$$CD < \smile CD < CM + MD,$$
$$DE < \smile DE < DN + NE,$$
$$EA < \smile EA < EP + PA.$$

Складывая эти неравенства, делаем вывод, что **окружность больше периметра всякого вписанного в нее многоугольника и меньше периметра описанного вокруг нее многоугольника.**

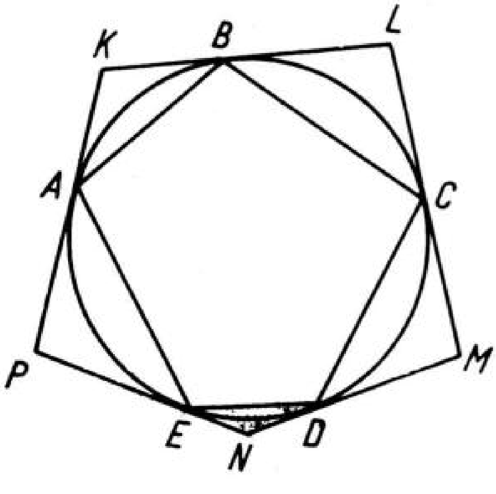

Рис. 70

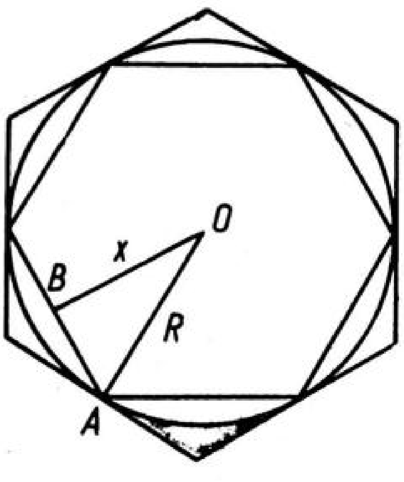

Рис. 71

Пусть теперь в данный круг (рис. 71) вписан некоторый правильный многоугольник, имеющий $n$ сторон, и вокруг этого же круга описан соответствующий правильный многоугольник с таким же числом сторон, тогда по предыдущему окружность круга больше периметра вписанного правильного многоугольника и меньше периметра описанного многоугольника. Пусть мы выбрали некоторую единицу длины и, измерив ею периметр вписанного многоугольника, нашли, что он имеет длину $p_n$, а периметр описанного — длину $P_n$. Тогда длина окружности должна выразиться таким количеством $C$, которое было бы больше $p_n$ и меньше $P_n$:

$$p_n < C < P_n.$$

Если теперь будем безгранично увеличивать число сторон вписанного и описанного многоугольников, то периметры их $p_n$ и $P_n$ будут количествами переменными, но наше неравенство будет оставаться справедливым. Докажем, что **разность $P_n - p_n$ будет при данных условиях безгранично мала.**

В самом деле, преобразуя эту разность, можем написать:

$$P_n - p_n = P_n\left(1 - \frac{p_n}{P_n}\right).$$

Но из геометрии известно, что периметры одноименных правильных многоугольников, вписанного и описанного, относятся как апофема первого из них к радиусу круга:

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{x}{R}.$$

Следовательно,

$$P_n - p_n = P_n\left(1 - \frac{x}{R}\right) = \frac{P_n(R - x)}{R}.$$

Здесь в числителе дроби имеем произведение переменного конечного количества $P_n$ на безгранично малое $R - x$; следовательно, числитель дроби безгранично мал; знаменатель же постоянен; значит, вся дробь, выражающая величину разности $P_n - p_n$, безгранично мала.

Итак, видим, что постоянное количество $C$ заключено между двумя переменными $p_n$ и $P_n$, разность которых безгранично мала; следовательно, оно есть их общий предел:

$$C = \text{пред}\, p_n = \text{пред}\, P_n.$$

Мы нашли, таким образом, что **длина окружности есть общий предел длин периметров правильных вписанных и описанных многоугольников при условии, что число сторон их безгранично возрастает.**

Этот вывод можно представить наглядно. Вообразим, что на некоторой прямой $Ox$ от точки $O$ мы стали откладывать

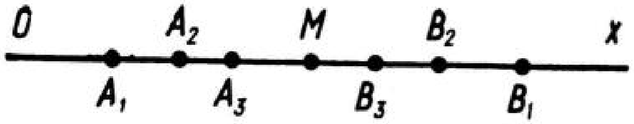

Рис. 72

отрезки $OA_1$, $OA_2$, $OA_3$, ... (рис. 72), длины которых соответственно равны периметрам вписанных многоугольников, и отрезки $OB_1$, $OB_2$, $OB_3$, ..., длины которых соответственно равны периметрам описанных многоугольников. Мы доказали, что длина нашей окружности должна выражаться таким количеством $C$, которое больше периметра всякого вписанного многоугольника и меньше периметра всякого описанного многоугольника (и является общим пределом этих периметров); соответственно этому на прямой $Ox$ существует такая точка $M$, которая лежит правее всех точек $A_n$ и одновременно левее всех точек $B_n$ и расстояние которой от $O$ равно этому количеству $C$[1].

Отрезок $OM$ имеет, таким образом, длину, равную длине данной окружности, или, как говорят, он равновелик окружности; иначе его называют *выпрямленной окружностью*.

## § 41. Формула, выражающая длину окружности

Выведем формулу, по которой определяется длина окружности, если известна длина радиуса.

Пусть имеем две окружности, длина которых $C$ и $C_1$, а длины радиусов их $R$ и $R_1$; пусть в каждую из этих окружностей вписан правильный многоугольник с $n$ сторонами и пусть число сторон его безгранично удваивается; назовем периметры этих многоугольников $p$ и $p_1$. Из геометрии известно, что периметры правильных многоугольников с одинаковым числом сторон относятся, как диаметры кругов, в которые они вписаны:

$$\frac{p}{2R}=\frac{p_1}{2R_1}.$$

При безграничном удвоении числа сторон обоих многоугольников их периметры $p$ и $p_1$ будут иметь пределами длины окружностей $C$ и $C_1$, а переменные количества $\frac{p}{2R}$ и $\frac{p_1}{2R_1}$ будут

---

[1] Как известно из геометрии, прямая линия обладает таким основным свойством: «Каково бы ни было данное число — рациональное или иррациональное, всегда можно найти на этой прямой такую точку, чтобы расстояние ее от некоторой определенной точки было равно данному числу». В силу этого свойства, которое не доказывается, а входит в определение прямой линии, мы и утверждаем существование точки $M$, каково бы ни было количество $C$.

иметь пределами: $\frac{C}{2R}$ и $\frac{C_1}{2R_1}$. Но эти переменные количества равны; следовательно, и пределы их равны (см. § 38, положение 1):

$$\frac{C}{2R} = \frac{C_1}{2R_1}.$$

Если бы мы взяли еще ряд окружностей, длины которых $C_2$, $C_3$, ..., а длины радиусов $R_2$, $R_3$, ..., то подобным же образом доказали бы, что

$$\frac{C}{2R} = \frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2} = \frac{C_3}{2R_3} = \dots .$$

Иначе говоря, **отношение длины окружности к длине соответствующего диаметра есть величина постоянная**; обозначив это отношение буквой $\pi$, будем иметь:

$$\frac{C}{2R} = \pi,$$

откуда

$$C = 2\pi R.$$

Значит, **длина окружности равна произведению длины диаметра на некоторое постоянное число, выражающее отношение длины всякой окружности к длине соответствующего диаметра.**

## § 42. Вычисление $\pi$

Чтобы можно было применять предыдущую формулу к вычислениям, необходимо предварительно вычислить число $\pi$.

В высшей математике доказывается, что это число — иррациональное, и даются удобные способы его вычисления. Но и данные нам выше условия дают возможность определить любое приближение $\pi$, хотя и путем сложных вычислений.

Возьмем неравенство

$$p_n < C < P_n$$

или равносильное ему

$$p_n < 2\pi R < P_n,$$

где $p_n$ и $P_n$ обозначают периметры правильного вписанного и описанного многоугольников с $n$ сторонами. Положив в нем $R = 1$ и разделив все неравенство на 2, найдем:

$$\frac{1}{2} p_n < \pi < \frac{1}{2} P_n.$$

Будем теперь придавать числу $n$ ряд значений: 6, 12, 24, ... (т. е. вообразим сперва вписанный и описанный шестиугольник, а затем будем безгранично удваивать число его сторон), тогда получим:

$$\frac{1}{2} p_6 < \pi < \frac{1}{2} P_6,$$

$$\frac{1}{2} p_{12} < \pi < \frac{1}{2} P_{12},$$

$$\frac{1}{2} p_{24} < \pi < \frac{1}{2} P_{24}.$$

Вычисляя периметры $p_6$, $p_{12}$, $p_{24}$, ... и соответствующие им $P_6$, $P_{12}$, $P_{24}$, ... по известным геометрическим формулам, можем определить любое приближение $\pi$, так как разность между периметрами вписанного и описанного многоугольников может быть как угодно малой.

Так, например, если мы доведем вычисления до вписанного 96-угольника, то найдем, что его сторона

$$a_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}.$$

Выполнив здесь вычисления (причем достаточно извлекать каждый из внутренних корней с 6-ю десятичными знаками, а окончательный корень с 5-ю), получим $a_{96} = 0{,}06543$ с недостатком, с точностью 0,00002.

Умножая это число на 48, найдем полупериметр вписанного 96-угольника:

$$\frac{1}{2} p_{96} = 3{,}140 \text{ (с недостатком, с точностью 0,002).}$$

Чтобы найти полупериметр описанного 96-угольника, достаточно разделить полученное число на апофему вписанного многоугольника $\left(\text{так как } \frac{1}{2} P_{96} = \frac{1}{2} p_{96} \cdot \frac{R}{x_{96}} \text{ и } R = 1\right)$.

Эта апофема определяется по известной геометрической формуле

$$x_{96} = \sqrt{R^2 - \frac{a_{96}^2}{4}},$$

где $R = 1$, а величина $a_{96}^2$ известна из предыдущего вычисления (формула может дать 6 верных десятичных знаков, но для дальнейшего вычисления достаточно и 4-х), и мы получаем $x_{96} = 0{,}9994$ с недостатком, с точностью до 0,0001. Теперь нам нужно найти частное $\frac{p_{96}}{2x_{96}}$ с избытком; для этого нужно взять значение делимого с избытком, а делителя — с недостатком, и мы будем иметь:

$$\frac{1}{2}P_{96}=\frac{3{,}142}{0{,}9994}=3{,}144$$

(с избытком, с точностью 0,003).

Итак, мы получили, что

$$3{,}140<\pi<3{,}144,$$

т. е. что $\pi=3{,}14$ (с недостатком, с точностью до 0,01 или даже до 0,004).

Если выполнить подобное же вычисление для многоугольников с 3072 сторонами (причем для вписанного многоугольника опять же определяется приближение с недостатком, а для описанного —с избытком), то мы могли бы найти, что $\frac{1}{2}p_{3072}=3{,}141592$, $\frac{1}{2}P_{3072}=3{,}141594$, откуда $\pi=3{,}14159$ с точностью до 0,00001 с недостатком.

Дальнейшие вычисления дают:

$$\pi=3{,}1415926535\ldots\,.$$

## § 43. Вычисление площади круга

Докажем сперва, что **площадь круга есть общий предел площадей вписанных и описанных правильных многоугольников при условии, что число сторон их безгранично возрастает.**

Возьмем многоугольники, о которых шла речь выше (рис. 71), и обозначим площадь описанного многоугольника через $S$, вписанного — через $s$, а площадь круга — через $Q$.

Так как площадь круга больше площади всякого вписанного и меньше площади всякого описанного многоугольника, то имеем:

$$s<Q<S.$$

Рассмотрим разность площадей $S-s$. Так как площадь правильного многоугольника равна половине произведения периметра на апофему, то имеем:

$$S=\frac{1}{2}P_n\cdot R,$$

$$s=\frac{1}{2}p_n\cdot x,$$

откуда

$$S - s = \frac{1}{2}(P_n R - p_n x).$$

Преобразуем теперь выражение, стоящее в скобках, прибавив к нему и отняв по количеству $p_n R$:

$$P_n R - p_n x = P_n R - p_n x + p_n R - p_n R,$$

а затем выведем общие сомножители в крайних и средних членах; получим:

$$P_n R - p_n x = R(P_n - p_n) + p_n (R - x).$$

Первый член полученного выражения представляет произведение постоянного количества $R$ на безгранично малое $P_n - p_n$, а второй — произведение переменного конечного $p_n$ на безгранично малое $R - x$. Следовательно, оба они безгранично малы, и сумма их безгранично мала (нулем эта сумма не может быть, так как оба слагаемые положительны); если же количество $P_n R - p_n x$ безгранично мало, то и разность $S - s$, равная его половине, также безгранично мала.

Теперь мы видим, что постоянное количество $Q$ заключено между двумя переменными $s$ и $S$, разность которых безгранично мала; следовательно, оно есть их общий предел:

$$\text{пред}\, s = Q = \text{пред}\, S,$$

что и требовалось доказать.

Составим теперь формулу, по которой вычислялась бы площадь круга, если известна длина радиуса. По только что доказанному $Q = \text{пред}\, S$, но $S$ (площадь описанного многоугольника) равняется половине произведения периметра многоугольника на радиус круга:

$$S = \frac{1}{2} P \cdot R.$$

Принимая во внимание, что предел произведения равен произведению пределов сомножителей и что предел $P = C$ (длине окружности), найдем:

$$Q = \text{пред}\, S = \frac{1}{2} CR,$$

а так как $C = 2\pi R$, то находим:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

Это и есть искомая формула.

## § 44. Вычисление боковой поверхности и объема цилиндра

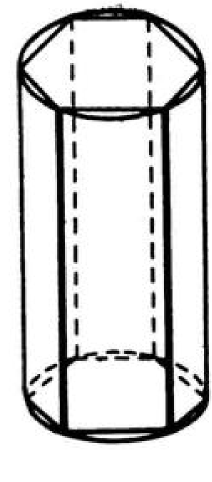

Рис. 73

Чтобы найти формулу, по которой вычисляется боковая поверхность цилиндра, вообразим, что в данный цилиндр вписана правильная призма и около него же описана соответствующая правильная призма (рис. 73; для простоты на рисунке изображена только вписанная призма). Так как никакая часть цилиндрической поверхности не может быть непосредственно наложена на плоскость, то мы должны условиться, какие части плоскости будем считать меньшими и какие — большими, чем поверхность данного цилиндра. **Будем считать боковую поверхность цилиндра большей, чем боковая поверхность всякой вписанной призмы, и меньшей, чем боковая поверхность всякой описанной призмы.** Выберем некоторую единицу площади и, измерив ею боковые поверхности наших призм, найдем, что поверхность вписанной имеет величину $S_1$, а описанной $S_2$. Тогда боковая поверхность цилиндра должна выразиться таким количеством $S$, которое было бы более $S_1$ и менее $S_2$:

$$S_1 < S < S_2.$$

Будем теперь безгранично увеличивать число граней наших призм; тогда их боковые поверхности $S_1$ и $S_2$ будут переменными, а неравенство $S_1 < S < S_2$ останется справедливым. Докажем теперь, что **боковая поверхность цилиндра $S$ есть при данных условиях предел боковых поверхностей вписанных и описанных правильных призм $S_1$ и $S_2$.**

С этой целью рассмотрим разность $S_2 - S_1$. Мы знаем, что боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту. Пусть периметр основания вписанной призмы будет $p_1$, описанной $p_2$, высота обеих призм (и цилиндра) $H$, тогда

$$S_2 = p_2 H,$$

$$S_1 = p_1 H,$$

$$S_2 - S_1 = (p_2 - p_1) H.$$

Но разность периметров правильных описанных и вписанных многоугольников $p_2 - p_1$ безгранично мала; от умножения ее на постоянное $H$ получается также безгранично малое количество; следовательно, разность $S_2 - S_1$ безгранично мала. Теперь видим, что постоянное количество $S$ заключено между двумя переменными $S_1$ и $S_2$, разность которых безгранично мала; следовательно, оно есть их общий предел:

$$S = \text{пред } S_1 = \text{пред } S_2.$$

Отсюда можем вывести и формулу для $S$. Так как $S_1 = p_1H$ и предел произведения равен произведению пределов сомножителей, то

$$S = \text{пред } (p_1H) = \text{пред } p_1 \cdot \text{пред } H.$$

Но предел $p_1$, т. е. периметра правильного вписанного многоугольника, равен длине окружности основания, т. е. $C$, или $2\pi R$, а предел постоянного количества $H$ равен ему самому, следовательно,

$$S = CH = 2\pi RH,$$

т. е. боковая поверхность цилиндра равна произведению окружности основания на высоту.

Подобным же образом вычисляется и объем цилиндра. Пусть объем цилиндра будет $V$, а объемы вписанной и описанной призмы $V_1$ и $V_2$; очевидно, что объем цилиндра больше объема вписанной призмы, но меньше объема описанной призмы:

$$V_1 < V < V_2.$$

Докажем, что **объем цилиндра есть общий предел объемов правильных вписанных и описанных призм, если число граней их безгранично возрастает.**

Рассмотрим разность $V_2 - V_1$. Так как объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту, то имеем:

$$V_2 = S_2H,$$
$$V_1 = S_1H,$$
$$V_2 - V_1 = (S_2 - S_1)\,H.$$

Разность площадей $(S_2 - S_1)$ правильных вписанных и описанных многоугольников, по предыдущему, безгранично мала; умножая ее на постоянное $H$, мы получаем безгранично малое количество, следовательно, разность $V_2 - V_1$ безгранично мала. Опять видим, что постоянное количество $V$ заключено между двумя переменными $V_1$ и $V_2$, разность которых безгранично мала; следовательно, оно есть их общий предел:

$$V = \text{пред } V_1 = \text{пред } V_2.$$

Теперь можем получить и формулу для $V$:

$$V = \text{пред } V_1 = \text{пред } (S_1H) = \text{пред } S_1 \cdot \text{пред } H.$$

Но предел $S_1$ есть предел площади правильного вписанного многоугольника; он равен площади круга, являющегося основанием цилиндра, т. е. $Q$, или $\pi R^2$, предел же $H$ есть само $H$; следовательно,

$$V = QH = \pi R^2 H.$$

Значит, объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

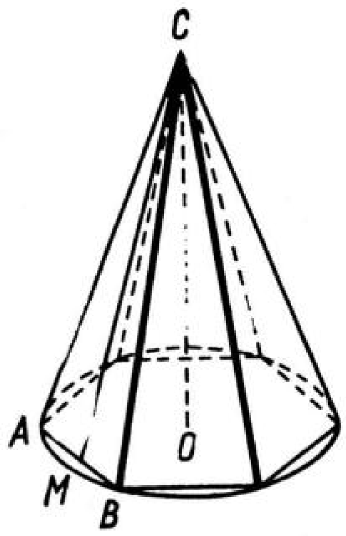

Рис. 74

## § 45. Вычисление боковой поверхности и объема конуса

Чтобы вывести формулу боковой поверхности конуса, вообразим, что в данный конус вписана правильная пирамида, а вокруг него описана соответствующая правильная пирамида (рис. 74; для простоты на рисунке изображена только вписанная пирамида). Так как никакая часть конической поверхности не может быть непосредственно наложена на плоскость, то мы должны условиться, какие части плоскости мы будем считать меньшими, а какие — большими, чем поверхность данного конуса.

Будем считать боковую поверхность конуса большей, чем боковая поверхность всякой вписанной пирамиды, и меньшей, чем боковая поверхность всякой описанной пирамиды. Выберем некоторую единицу площади и, измерив ею боковые поверхности наших пирамид, найдем, что поверхность вписанной имеет величину $S_1$, а описанной $S_2$. Тогда боковая поверхность конуса должна выразиться таким количеством $S$, которое было бы больше $S_1$ и меньше $S_2$:

$$S_1 < S < S_2.$$

Если мы будем безгранично увеличивать число граней наших правильных пирамид, то их боковые поверхности $S_1$ и $S_2$ будут переменными, а неравенство $S_1 < S < S_2$ все же останется справедливым.

Докажем теперь, что **боковая поверхность конуса есть при данных условиях общий предел боковых поверхностей вписанных и описанных правильных пирамид.**

С этой целью рассмотрим разность $S_2 - S_1$. Мы знаем, что боковая поверхность правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему пирамиды. Пусть периметр основания вписанной пирамиды будет $p_1$, описанной $p_2$; апофема вписанной пирамиды $CM = k$, а апофемой описанной пирамиды будет служить образующая конуса $CA = l$. Тогда имеем:

$$S_2 = \frac{1}{2} p_2 l,$$

$$S_1 = \frac{1}{2} p_1 k,$$

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{2} (p_2 l - p_1 k).$$

Преобразуем разность $p_2 l - p_1 k$, придав к ней и отняв по количеству $p_1 l$:

$$p_2 l - p_1 k = p_2 l - p_1 k + p_1 l - p_1 l.$$

Теперь выведем общие сомножители в крайних и средних членах:

$$p_2 l - p_1 k = l (p_2 - p_1) + p_1 (l - k).$$

В полученной сумме первый член есть произведение постоянного количества $l$ на безгранично малое $p_2 - p_1$, а второй — произведение переменного конечного $p_1$ на безгранично малое $l - k$ (разность $l - k$ безгранично мала, так как из треугольника $ACM$ на рисунке 74 видно, что она должна быть меньше $AM$, т. е. меньше половины стороны правильного вписанного многоугольника). Поэтому как оба слагаемых, так и их сумма безгранично малы; если же количество $p_2 l - p_1 k$ безгранично мало, то и разность $S_2 - S_1$, равная его половине, также безгранично мала.

Теперь видим, что постоянное количество $S$ заключено между двумя переменными $S_1$ и $S_2$, разность которых безгранично мала; следовательно, оно есть их общий предел:

$$S = \text{пред } S_1 = \text{пред } S_2.$$

Отсюда получим формулу для $S$:

$$S = \text{пред} \left( \frac{1}{2} p_1 k \right) = \frac{1}{2} \text{пред}\, p_1 \cdot \text{пред}\, k.$$

Но предел $p_1 = C = 2\pi R$, а предел апофемы $k$ равен образующей конуса $l$ (так как разность $l - k$ безгранично мала), следовательно,

$$S = \frac{1}{2} Cl = \pi R l.$$

Итак, **боковая поверхность конуса равна половине произведения окружности основания на образующую конуса.**

Подобным же способом вычисляется и объем конуса. Очевидно, что объем конуса $V$ больше объема вписанной пирамиды $V_1$, но меньше объема описанной пирамиды $V_2$:

$$V_1 < V < V_2.$$

Нетрудно доказать, что **объем конуса есть общий предел объемов правильных вписанных и описанных пирамид, если число граней их безгранично возрастает.**

Так как объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту, то имеем:

$$V_2 = \frac{1}{3} S_2 H \text{ (здесь } H \text{ — высота обеих пирамид и конуса),}$$

$$V_1 = \frac{1}{2} S_1 H,$$

$$V_2 - V_1 = \frac{1}{3} H (S_2 - S_1).$$

Здесь мы имеем произведение постоянного количества $\frac{1}{3} H$ на безгранично малое $S_2 - S_1$; следовательно, разность $V_2 - V_1$ безгранично мала и, как и в предыдущем случае, количество $V$ есть общий предел $V_1$ и $V_2$:

$$V = \text{пред}\, V_1 = \text{пред}\, V_2.$$

Теперь найдем формулу для $V$:

$$V = \text{пред}\, V_1 = \text{пред}\left(\frac{1}{3} S_1 H\right) = \frac{1}{3} \text{пред}\, S_1 H.$$

Так как предел $S_1$ равен площади круга, являющегося основанием конуса, т. е. $Q$, или $\pi R^2$, то получаем:

$$V = \frac{1}{3} QH = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Значит, объем конуса равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту.

## § 46. Вычисление поверхности и объема шара

Чтобы вывести формулы поверхности и объема шара, мы должны уметь вычислять поверхность и объем многогранника, получаемого от вращения половины правильного многоугольника (с четным числом сторон) вокруг диаметра описанного круга.

Пусть вокруг диаметра $AF$ (рис. 75) вращается правильный полумногоугольник $ABCDEF$; от его вращения получается многогранник, ограниченный поверхностями конусов, полных и усеченных, а иногда (посредине) и цилиндрической поверхностью.

Из геометрии известно, что боковые поверхности трех тел — конуса, усеченного конуса и цилиндра — могут быть выражены одной и той же формулой $S = 2\pi ch$, где $c$ — длина перпендикуляра к образующей, опущенного на ее середину и продолженного до пересечения с осью, а $h$ — высота данного тела. Заметим, что в данном случае указанный перпендикуляр к образующей, проходящий через ее середину, будет для всех поверхностей один и тот же, так как он есть апофема нашего многоугольника. Введем еще такие обозначения для отдельных последовательных поверхностей, ограничивающих наш многоугольник: $S_{AB}$ — поверхность, образованная вращением стороны $AB$, $S_{BC}$— поверхность, образованная вращением стороны $BC$, и т. д., а высоты соответствующих тел обозначим: $Ab = h_1$, $bc = h_2$, $cd = h_3$, ..., $eF = h_n$, тогда, по указанной формуле, будем иметь:

$$\begin{aligned} S_{AB} &= 2\pi c \cdot h_1, \\ S_{BC} &= 2\pi c \cdot h_2, \\ S_{CD} &= 2\pi c \cdot h_3, \\ &\cdots\cdots \\ S_{EF} &= 2\pi c \cdot h_n. \end{aligned}$$

Складывая все эти количества, найдем, что поверхность всего многогранника

$$S_1 = 2\pi c\,(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n) = 2\pi c \cdot 2R = 4\pi Rc,$$

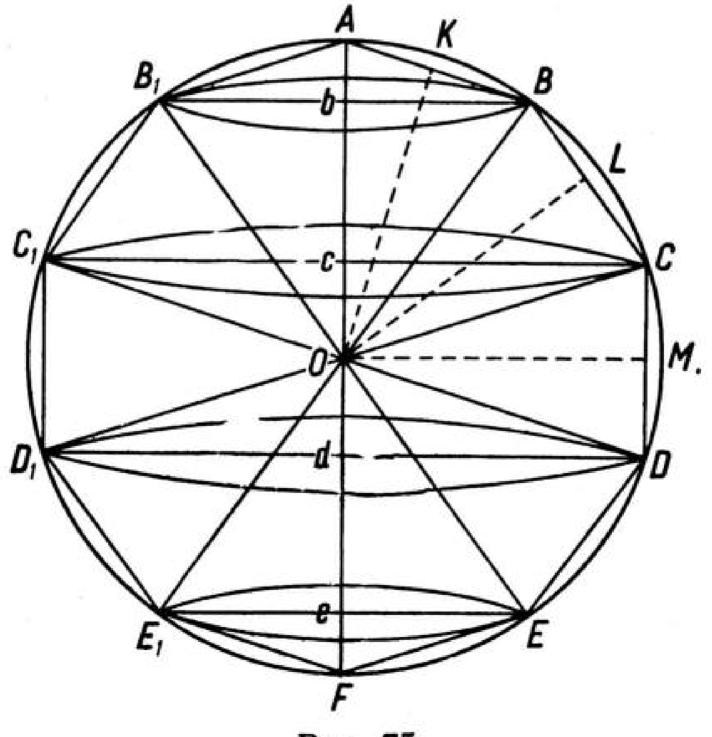


Рис. 75

**т. е. искомая поверхность равна произведению окружности круга, вписанного в многоугольник, на диаметр круга, описанного вокруг него.**

Объем нашего многогранника можно рассматривать как сумму объемов тел, полученных от вращения треугольников $AOB$, $BOC$, ... вокруг диаметра $AF$. Обозначим эти объемы соответственно через $V_{AOB}$, $V_{BOC}$ и т. д.; мы знаем из геометрии, **что каждый такой объем равен $\frac{1}{3}$ произведения поверхности, описанной вращающейся стороной, на длину высоты, опущенной на эту сторону треугольника.** В данном случае высоты, опущенные из точки $O$ на стороны $AB$, $BC$, ...., будут одинаковыми, и каждая из них опять равна апофеме $c$; следовательно, объемы выразятся так:

$$V_{AOB} = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot c,$$

$$V_{BOC} = \frac{1}{3} S_{BC} \cdot c,$$

$$V_{COD} = \frac{1}{3} S_{CD} \cdot c,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$V_{EOF} = \frac{1}{3} S_{EF} \cdot c.$$

Сложив все эти равенства; найдем, что объем многогранника

$$V_1 = (S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + \ldots + S_{EF}) \cdot \frac{1}{3} c = S_1 \cdot \frac{1}{3} c = \frac{1}{3} S_1 c,$$

т. е. искомый объем равен $\frac{1}{3}$ произведения поверхности данного многогранника на апофему многоугольника, его образующего.

Теперь приступим к вычислению повехности и объема шара и вообразим себе, что, кроме вписанного правильного полумногоугольника $ABCDEF$ (рис. 75), у нас имеется еще одноименный правильный описанный вокруг того же круга полумногоугольник, стороны которого параллельны сторонам данного (он не изображен на рисунке). Тогда при вращении полукруга вокруг диаматра получится шар, в котором будет вписан многогранник, образованный вращением полумногоугольника $ABCDEF$, а вокруг этого шара будет описан многогранник такой же формы, образованный вращением описанного полумногоугольника.

Мы не можем совместить никакую часть поверхности шара ни с плоскостью, ни даже с частями поверхностей указанных многогранников, но, как и в предыдущем случае, **будем считать поверхность шара большей, чем поверхность всякого вписанного многогранника, и меньшей, чем поверхность всякого описанного многогранника.** Пусть $S_1$ и $S_2$ — числа, выражающие соответственно поверхности данного вписанного и описанного многогранника в одинаковых единицах; тогда поверхность шара должна выразиться таким количеством $S$, которое больше $S_1$, но меньше $S_2$:

$$S_1 < S < S_2.$$

Это неравенство будет иметь место и тогда, когда мы станем безгранично увеличивать число граней наших многогранников; количества $S_1$ и $S_2$ станут тогда переменными, и мы докажем, что **поверхность шара $S$ есть при данных условиях общий предел поверхностей вписанных и описанных многогранников $S_1$ и $S_2$.**

Мы видели, что $S_1 = 4\pi Rc$, где $R$ — радиус данного круга (и шара), $c$ — апофема вписанного многоугольника. Для описанного многоугольника апофемой будет служить радиус данного круга $R$, а радиус круга, описанного около него, назовем через $R_1$; тогда поверхность описанного многогранника $S_2 = 4\pi R_1 R$. Разность же $S_2 - S_1 = 4\pi R(R_1 - c)$; преобразуем выражение $R_1 - c$, прибавив и вычтя из него по количеству $R$:

$$R_1 - c = R_1 - c + R - R = (R_1 - R) + (R - c).$$

Но первое слагаемое представляет разность между радиусом и апофемой описанного многоугольника, второе — разность между радиусом и апофемой вписанного многоугольника; следовательно, каждое слагаемое безгранично мало и сумма их, равная $R_1 - c$, также безгранично мала. Итак, мы видим, что разность $S_2 - S_1$ равна произведению постоянного количества $4\pi R$ на безгранично малое $R_1 - c$; значит, она безгранично мала, и постоянное количество $S$ будет общим пределом $S_1$ и $S_2$:

$$S = \text{пред}\, S_1 = \text{пред}\, S_2.$$

Чтобы получить формулу для $S$, вспомним, что $S_1 = 4\pi Rc$; следовательно,

$$S = \text{пред}\, S_1 = \text{пред}\,(4\pi Rc) = 4\pi R \cdot \text{пред}\, c,$$

а так как пред $c = R$, то имеем:

$$S = 4\pi R \cdot R = 4\pi R^2.$$

Значит, поверхность шара равна учетверенной площади круга, имеющего с ним одинаковый радиус.

Подобным же образом вычисляется и объем шара. Ясно, что объем шара $V$ больше объема вписанного многогранника $V_1$, но меньше объема описанного многогранника $V_2$:

$$V_1 < V < V_2.$$

Можем доказать, что **при данных условиях объем шара $V$ есть общий предел объемов вписанных и описанных многогранников $V_1$ и $V_2$.**

Так как объем каждого из указанных многогранников равен $\frac{1}{3}$ произведения его поверхности на апофему соответствующего многоугольника, то имеем:

$$V_2 = \frac{1}{3} S_2 R,$$

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1 c,$$

$$V_2 - V_1 = \frac{1}{3} (S_2 R - S_1 c).$$

Преобразуем выражение $S_2 R - S_1 c$, прибавляя к нему и вычитая по количеству $S_1 R$:

$$S_2 R - S_1 c = S_2 R - S_1 c + S_1 R - S_1 R,$$

а затем выведем общие сомножители в крайних и средних членах:

$$S_2 R - S_1 c = R(S_2 - S_1) + S_1 (R - c).$$

Мы уже доказали, что разность поверхностей наших многогранников $S_2 - S_1$ при данных условиях безгранично мала; следовательно, первый член нашей суммы представляет собой произведение постоянного количества $R$ на безгранично малое $S_2 - S_1$, второй есть произведение переменного конечного $S_1$ на безгранично малое $R - c$. Поэтому они оба безгранично малы, и сумма их, равная $S_2 R - S_1 c$, безгранично мала, а также и разность $V_2 - V_1$, равная $\frac{1}{3}$ предыдущего количества, безгранично мала.

Отсюда следует, что $V$ есть общий предел $V_1$ и $V_2$:

$$V = \text{пред}\, V_1 = \text{пред}\, V_2.$$

Чтобы найти формулу для $V$, принимаем во внимание, что $V_1 = \frac{1}{3} S_1 c$; следовательно:

$$V = \text{пред}\, V_1 = \text{пред} \frac{1}{3} S_1 c = \frac{1}{3}\, \text{пред}\, S_1\, \text{пред}\, c.$$

Так как предел $S_1 = 4\pi R^2$, а предел $c = R$, то найдем окончательно:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Значит, объем шара равен произведению его поверхности на $\frac{1}{3}$ радиуса.

## § 47. Вычисление объема пирамиды

Вывод формулы объема пирамиды обыкновенно основывается на предварительной теореме о равновеликости треугольных пирамид, у которых основания равновелики и высоты равны. Затем доказывают, что треугольная пирамида равновелика $\frac{1}{3}$ призмы, имеющей с нею одинаковое основание и высоту. Мы покажем, как при помощи теории пределов непосредственно определяется объем пирамиды, но для этого нужно знать формулу, по которой вычисляется сумма квадратов чисел натурального ряда $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$. Покажем сначала, как вычисляется эта сумма.

Найдем разность между числами $n^3$ и $(n-1)^3$. Так как $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$, то имеем $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$. Подставляя в эту формулу последовательно числа 1, 2, 3, ..., $n$, получим такие равенства:

$$\begin{aligned}
1^3 - 0^3 &= 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1,\\
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1,\\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1,\\
4^3 - 3^3 &= 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n^3 - (n-1)^3 &= 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1.
\end{aligned}$$

Складывая все эти равенства почленно, найдем:

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n.$$

Здесь в первых скобках имеем искомую сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, которую мы обозначим через $S$; во вторых же скобках имеем сумму чисел натурального ряда, которая вычисляется по формуле суммы членов арифметической прогрессии и равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Таким образом, получаем:

$$n^3 = 3S - \frac{3n(n+1)}{2} + n,$$

или

$$3S = n^3 - n + \frac{3n(n+1)}{2}.$$

Выводя в правой части за скобки $n$ и $n+1$, найдем:

$$3S = n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

откуда

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

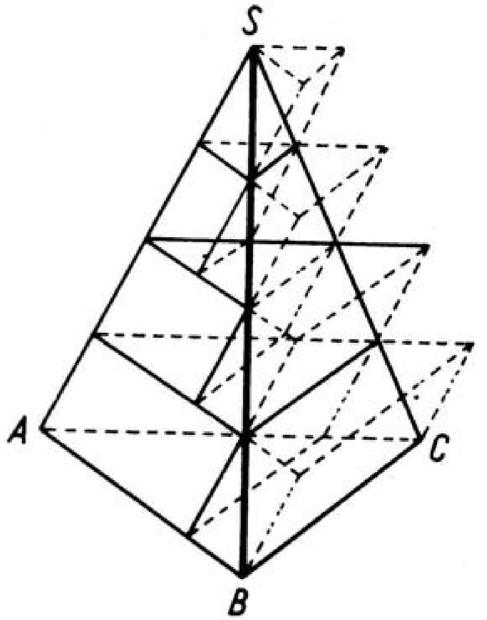

Рис. 76

Возьмем теперь какую-либо пирамиду (рис. 76), разделим ее высоту на $n$ равных частей и через все точки деления проведем плоскости, параллельные основанию. Получим ряд сечений, удаленных от вершины соответственно на $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots, \frac{n-1}{n}$ долей высоты и по величине соответственно равных $\frac{1}{n^2}, \frac{4}{n^2}, \frac{9}{n^2}, \ldots, \frac{(n-1)^2}{n^2}$ долям основания. Через вершины этих сечений проведем прямые, параллельные какому-либо одному ребру пирамиды (например, $SA$), продолжим эти прямые до пересечения с ближайшими нижними плоскостями и соединим эти точки пересечения между собой; таким образом, получим ряд входящих призм, числом $n-1$ (они образуют внутреннюю «лестницу»). Подобным же образом построим и ряд выходящих призм, числом $n$ (это будет внешняя «лестница»). Очевидно, что объем нашей пирамиды $V$ больше суммы объемов всех входящих призм $V_1$, но меньше суммы объемов всех выходящих призм $V_2$:

$$V_1 < V < V_2.$$

Если мы будем безгранично увеличивать значение $n$ (число делений высоты), то величины $V_1$ и $V_2$ будут переменными, но неравенство $V_1 < V < V_2$ будет оставаться в силе. Рассмотрим разность $V_2 - V_1$ и докажем, что при данных условиях она безгранично мала.

В самом деле, каждая из входящих призм имеет соответственно равную по величине выходящую; но среди выходящих призм имеется одна лишняя, построенная на основании нашей пирамиды. Следовательно, разность между суммой объемов всех выходящих призм $V_2$ и суммой объемов всех входящих призм $V_1$ будет как раз равна объему этой последней выходящей призмы. Но объем этой призмы равен $S \cdot \frac{h}{n}$ (где $S$ — площадь основания данной призмы и вместе с тем нашей пирамиды, $\frac{h}{n}$ — высота призмы). При безграничном возрастании $n$ количество $\frac{h}{n}$ будет безгранично малым (чтобы сделать его меньше какого-либо постоянного числа $k$, достаточно сделать знаменатель $n$ больше $\frac{h}{k}$, следовательно, и произведение постоянного $S$ на $\frac{h}{n}$ будет также безгранично малым, и разность $V_2 - V_1$ безгранично мала.

Отсюда заключаем, что **объем пирамиды $V$ есть предел суммы объемов как входящих призм $V_1$, так и выходящих $V_2$:**

$$V = \text{пред}\, V_1 = \text{пред}\, V_2.$$

Вычислим хотя бы сумму объемов выходящих призм. У них всех одна и та же высота $\frac{h}{n}$, а площади оснований, как указано выше, соответственно равны $\frac{1}{n^2}S$, $\frac{4}{n^2}S$, $\frac{9}{n^2}S$, ..., $\frac{(n-1)^2}{n^2}S$, $\frac{n^2}{n^2}S$. Умножая каждую из этих величин на $\frac{h}{n}$ и складывая полученные произведения, найдем:

$$V_2 = \frac{h}{n}\left[\frac{1}{n^2}S + \frac{4}{n^2}S + \frac{9}{n^2}S + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}S + S\right] =$$

$$= \frac{h}{n} \cdot \frac{1}{n^2}S\,[1 + 4 + 9 + \cdots + (n-1)^2 + n^2].$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет сумму квадратов чисел натурального ряда от 1 до $n^2$; эта сумма, как мы видели, равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; подставляя это выражение в нашу формулу, найдем:

$$V_2 = \frac{h}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot S\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{Sh}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Чтобы найти предел $V_2$, нужно взять предел каждого из сомножителей последнего произведения и полученные результаты перемножить. Но $\frac{Sh}{6}$ есть постоянное количество, и предел его будет тот же; выражение $1 + \frac{1}{n}$ имеет пределом 1, так как дробь $\frac{1}{n}$ при безграничном возрастании $n$ безгранично мала, а выражение $2+\frac{1}{n}$ по той же причине имеет пределом 2. Следовательно;

$$V = \text{пред}\, V_2 = \frac{Sh}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}Sh.$$

Значит, **объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту.**

Заметим, что наш вывод справедлив не только для треугольной, но и для любой многоугольной пирамиды, так как и построение и вычисление не изменятся, если мы заменим треугольную пирамиду многоугольной.

## § 48. Вычисление площади криволинейного треугольника, ограниченного дугой параболы

При помощи найденной в предыдущем параграфе формулы суммы квадратов чисел натурального ряда мы можем также вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой параболы $OA$, осью абсцисс $Ox$ и ординатой $AK$ (рис. 77).

Разделим абсциссу $OK = a$ на $n$ равных частей и через все точки деления проведем ординаты до пересечения с дугой параболы; через все точки пересечения проведем прямые, параллельные оси абсцисс, вправо до встречи с ближайшими ординатами. Мы получим ряд входящих прямоугольников, числом $n-1$, которые образуют внутреннюю «лестницу». Подобным же образом строим и внешнюю «лестницу» из $n$ выходящих прямоугольников. Очевидно, что искомая площадь $S$ больше суммы площадей входящих прямоугольников $S_1$, но меньше суммы выходящих $S_2$:

$$S_1 < S < S_2.$$

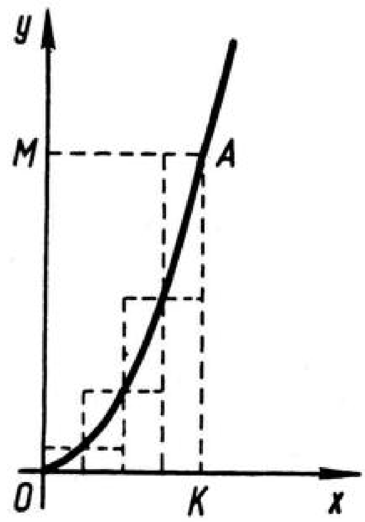

Рис. 77

Если мы будем безгранично увеличивать число $n$ (число делений абсциссы $OK$), то величины $S_1$ и $S_2$ будут переменными, но неравенство $S_1 < S < S_2$ остается в силе. Рассмотрим разность $S_2 - S_1$ и докажем, что при данных условиях она безгранично мала.

В самом деле, каждому входящему прямоугольнику соответствует равный ему по величине выходящий, но среди выходящих прямоугольников имеется один лишний — это как раз последний прямоугольник, имеющий высоту $AK =$

$=h$. Так как основание его равно $\frac{a}{n}$, то площадь его равна $\frac{a}{n} \cdot h$; при безграничном возрастании $n$ это количество будет безгранично малым, следовательно, и разность $S_2 - S_1$ безгранично мала. Отсюда ясно, что площадь $S$ есть общий предел суммы площадей как входящих, так и выходящих прямоугольников:

$$S = \text{пред}\, S_1 = \text{пред}\, S_2.$$

Вычислим одну из этих сумм, например сумму площадей выходящих прямоугольников. Все они имеют одно и то же основание $\frac{a}{n}$, а высоты их легко вычислить, так как каждая из них представляет ординату параболы $y = x^2$ и потому равна квадрату соответствующей абсциссы. Таким образом, высоты прямоугольников будут соответственно:

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2, \left(\frac{2a}{n}\right)^2, \left(\frac{3a}{n}\right)^2, \ldots, \left[\frac{(n-1)a}{n}\right]^2, a^2,$$

а площади их:

$$\frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^2, \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{2a}{n}\right)^2, \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{3a}{n}\right)^2, \ldots, \frac{a}{n}\left[\frac{(n-1)a}{n}\right]^2, \frac{a}{n} \cdot a^2.$$

Складывая эти величины и выводя за скобку множитель $\frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^2$, имеем:

$$S_2 = \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^2 \cdot [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2].$$

Сумма квадратов чисел, стоящая в последних скобках, равна, как мы знаем, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Следовательно,

$$S_2 = \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

При безграничном возрастании $n$ дробь $\frac{1}{n}$ безгранично мала, поэтому

$$S = \text{пред}\, S_2 = \frac{a^3}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3} a^3.$$

Этот последний результат можно представить еще и так:

$$S = \frac{1}{3} a^3 = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{1}{3} OK \cdot AK,$$

т. е. искомая площадь равна $\frac{1}{3}$ площади прямоугольника $(AMOK)$, построенного на координатах конца дуги.

## Раздел IV

# ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛЕ С ПРОСТЕЙШИМИ ПРИЛОЖЕНИЯМИ

## ГЛАВА I. ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

### § 49. Скорость и ускорение неравномерного движения

Рассмотрим такой случай движения:

*Камень катится по склону горы так, что за 1 с проходит 1 м, за 2 с 4 м, за 3 с 9 м и т. д.; вообще, если $t$ будет обозначать время движения камня (в секундах), а $s$ — пройденное им расстояние (в метрах), то зависимость между расстоянием и временем движения выразится формулой $s = t^2$.*

Постараемся определить скорость камня по истечении нескольких секунд движения, например 5 с. Мы знаем, что *средней скоростью* движущегося тела называется отношение между расстоянием, пройденным телом, и тем промежутком времени, за который это расстояние пройдено. Найдем среднюю скорость нашего камня, по истечении 5 с от начала движения, за такие промежутки времени: 1 с, 0,1 с, 0,01 с, 0,001 с и т. д.

Чтобы найти среднюю скорость камня за 1 с по истечении 5 с, нужно найти, какое расстояние пройдет камень за эту секунду (шестую), и полученное число метров разделить на число секунд движения, т. е. на 1. Расстояние же, пройденное камнем за шестую секунду, мы найдем, если вычислим, сколько метров прошел камень за 6 с, и из найденного числа отнимем расстояние, пройденное камнем за 5 с. Из предыдущего ясно, что за 6 с камень пройдет $6^2$, или 36 м, а за 5 с $5^2$, или 25 м; поэтому за одну шестую секунды он пройдет 11 м (36—25), а средняя скорость его за эту секунду будет 11 : 1, т. е. 11 м/с. Подобным же образом, чтобы найти среднюю скорость камня за 0,1 с по истечении 5 с, мы должны найти расстояние, которое пройдет камень за 0,1 с, и полученное число метров разделить на 0,1. Подобно предыдущему, мы найдем расстояние, пройденное камнем, если вычислим сначала, сколько метров пройдет камень за 5,1 с, а от полученного числа отнимем расстояние, пройденное за 5 с; это будет $5{,}1^2 - 5^2$ (метров), а искомая средняя скорость за 0,1 с после 5 с будет:

$$\frac{5{,}1^2 - 5^2}{0{,}1} = \frac{(5{,}1 + 5)(5{,}1 - 5)}{0{,}1} = 10{,}1 \text{ м/с}.$$

Таким же образом найдем среднюю скорость камня за 0,01 с после 5 с пути; она будет:

$$\frac{5{,}01^2 - 5^2}{0{,}01} = \frac{(5{,}01 + 5)\,(5{,}01 - 5)}{0{,}01} = 10{,}01 \text{ м/с}.$$

Скорость камня за 0,001 с после 5 с будет:

$$\frac{5{,}001^2 - 5^2}{0{,}001} = \frac{(5{,}001 + 5)\,(5{,}001 - 5)}{0{,}001} = 10{,}001 \text{ м/с}$$

и т. д.

Рассмотрим теперь ряд полученных скоростей:

11; 10,1; 10,01; 10,001; ... (м/с).

Ясно, что каждый член этого ряда состоит из постоянного слагаемого 10 и переменной добавки (1; 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.), которая может быть как угодно малой; значит, средняя скорость движения нашего камня при данных условиях имеет предел 10 м/с. Этот предел называется *истинной скоростью* или просто *скоростью движения* камня (после 5 с).

Если мы подобным же способом определим средние скорости движения камня после 6 с за 1 с; 0,1 с; 0,01 с; 0,001 с и т. д., то получим такой ряд чисел:

13; 12,1; 12,01; 12,001; ... (м/с).

Ясно, что в данном случае средняя скорость движения камня имеет предел 12 м/с, это и будет истинная скорость камня после 6 с движения.

Вычислив среднюю скорость камня после 7 с за 1 с; 0,1 с; 0,01 с; 0,001 с и т. д., мы получили бы такой ряд чисел:

15; 14,1; 14,01; 14,001; ... (м/с),

а предел этой средней скорости, или истинная скорость камня после 7 с, будет 14 м/с.

Рассмотрим тот же вопрос в общем виде. Найдем сначала среднюю скорость движения камня по истечении $t$ секунд за промежуток времени $\Delta t$ секунд[1]. За время $t + \Delta t$ секунд наш камень пройдет расстояние $(t + \Delta t)^2$ метров, а за $t$ секунд $t^2$ метров; следовательно, за $\Delta t$ секунд он пройдет всего $(t +$

---

[1] Запись $\Delta t$ читается «дельта $t$» и обозначает прибавку времени — добавочный промежуток времени после $t$ секунд, за который и вычисляется средняя скорость.

$+ \Delta t)^2 - t^2$ метров, а средняя скорость его за это время будет:

$$v_m = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{(2t+\Delta t)\cdot\Delta t}{\Delta t} = 2t + \Delta t \text{ м/с}.$$

Если теперь наш добавочный промежуток времени $\Delta t$ будет безгранично уменьшаться, то средняя скорость $v_m$ будет иметь предел $2t$ м/с. Это и будет истинная скорость камня спустя $t$ секунд после начала движения.

Мы видим, что *истинною скоростью движущегося тела (или скоростью для данного момента) называется предел, к которому стремится средняя скорость тела после данного момента, при условии, что добавочный промежуток времени, за который вычисляется эта средняя скорость, будет безгранично малым.*

Найдем теперь скорость тела, движущегося так, что зависимость между пройденным расстоянием ($s$) и временем движения ($t$) выражается формулой

$$s = at^2.$$

Вычислим сначала среднюю скорость движения по истечении $t$ секунд за некоторый промежуток времени $\Delta t$. Это будет

$$v_m = \frac{a(t+\Delta t)^2 - at^2}{\Delta t} = \frac{a(2t+\Delta t)\cdot\Delta t}{\Delta t} = 2at + a\cdot\Delta t.$$

Если промежуток времени $\Delta t$ будет безгранично убывать, то средняя скорость $v_m$ будет иметь пределом количество $2at$. Это и будет истинная скорость тела по истечении $t$ секунд:

$$v = \text{пред}\, v_m = 2\,at.$$

Пусть еще нам дано такое движение, где связь между пройденным расстоянием и временем выражается формулой

$$s = at^3.$$

Средняя скорость этого движения по истечении $t$ секунд за промежуток времени $\Delta t$ будет:

$$v_m = \frac{a(t+\Delta t)^3 - at^3}{\Delta t} = \frac{a(t^3 + 3t^2\cdot\Delta t + 3t\cdot\Delta t^2 + \Delta t^3) - at^3}{\Delta t} =$$
$$= 3at^2 + 3at\cdot\Delta t + \Delta t^2\ [1].$$

Если же мы сделаем добавку времени $\Delta t$ безгранично малой

[1] Записи $\Delta t^2$, $\Delta t^3$ и т. д., обозначающие вторую, третью и иные степени количества $\Delta t$, даются без скобок, так как $\Delta t$ представляет собой один нераздельный знак.

и найдем предел средней скорости $v_m$, то будем иметь истинную скорость движения по истечении $t$ секунд:

$$v = \text{пред}\, v_m = 3at^2.$$

Заметим, что в этих примерах мы считали время ($t$), по истечении которого вычисляем скорость движения, постоянным. Если же будем изменять значение времени, например придавать ему различные значения $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ и т. д., то скорость движения для этих моментов будет выражаться подобными же формулами:

$$\begin{array}{lll} \text{в первом примере:} & v_1 = 2at_1, & \text{во втором: } v_1 = 3at_1^2; \\ & v_2 = 2at_2, & v_2 = 3at_2^2; \\ & v_3 = 2at_3, & v_3 = 3at_3^2; \\ & v_4 = 2at_4, & v_4 = 3at_4^2. \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Отсюда ясно, что скорость неравномерного движения есть величина переменная (она изменяется сообразно с изменениями времени), а зависимость между скоростью и временем может быть выражена прежними формулами:

$$v = 2at \text{ и } v = 3at^2,$$

если только мы будем считать в них время $t$ уже переменным количеством.

Если скорость неравномерного движения есть величина переменная, то мы можем поставить вопрос: как же она изменяется с течением времени (возрастает или убывает, равномерно или нет, и т. п.). Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны найти ускорение движения. Рассмотрим, как это сделать.

Если, например, по истечении 5 с движения тело имело скорость 10 м, а по истечении 8 с — 16 м, то мы видим, что за прошедшие 3 с скорость тела возросла на 6 м, а за 1 с она возрастала в среднем на 2 м. Это и есть ускорение движения. И вообще, как известно из физики, *средним ускорением* называется отношение между приращением скорости и тем промежутком времени, за который это приращение произошло.

Возьмем теперь снова случай движения, определяемого уравнением

$$S = at^3.$$

Скорость этого движения, как мы нашли, выражается формулой:

$$v = 3at^2.$$

Нам нужно найти среднее ускорение этого тела по истечении $t$ секунд за промежуток времени $\Delta t$. Ясно, что по истечении $t$ секунд скорость тела будет равна $3\,at^2$ метров в секунду, а по истечении $t + \Delta t$ секунд она будет $3a\,(t + \Delta t)^2$ метров в секунду; таким образом, приращение скорости за $\Delta t$ секунд будет

$$3a\,(t + \Delta t)^2 - 3at^2,$$

а среднее ускорение

$$u_m = \frac{3a\,(t+\Delta t)^2 - 3at^2}{\Delta t} = \frac{3a\,(2t + \Delta t)\cdot\Delta t}{\Delta t} = 6at + 3a\cdot\Delta t.$$

Если теперь время $t$ мы будем считать постоянным количеством, а добавочный промежуток $\Delta t$ — безгранично малым, то среднее ускорение $u_m$ будет стремиться к пределу $6at$. Этот предел и называется истинным ускорением тела после $t$ секунд движения:

$$u = \text{пред}\,u_m = 6at.$$

Итак, *истинным ускорением тела (или ускорением для данного момента) называется предел, к которому стремится среднее ускорение тела после данного момента при условии, что добавочный промежуток времени, за который вычисляется это среднее ускорение, будет безгранично малым.*

Найдем еще ускорение тела, движение которого определяется уравнением

$$s = at^2,$$

а скорость, как мы видели выше, вычисляется по формуле:

$$v = 2at.$$

Очевидно, что по истечении $t$ секунд скорость тела будет $2at$ метров в секунду, а по истечении $t + \Delta t$ секунд $2a\,(t + \Delta t)$ метров в секунду. Приращение скорости за данный промежуток ($\Delta t$ секунд) будет

$$2a\,(t + \Delta t) - 2at,$$

а ускорение

$$u_m = \frac{2a\,(t + \Delta t) - 2at}{\Delta t} = \frac{2a\cdot\Delta t}{\Delta t} = 2a.$$

Мы видим, что в данном случае ускорение тела есть величина постоянная (для всякого данного момента); такое движение называется *равномерно ускоренным.*

В других же случаях неравномерного движения ускорение его есть величина переменная (т. е. оно изменяется в зависимости от времени). Например, в предыдущем случае, где мы нашли, что ускорение $u = 6\,at$, при других значениях времени, соответственно равных $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots$ секунд, мы имели бы

$$u_1 = 6at_1,$$
$$u_2 = 6at_2,$$
$$u_3 = 6at_3,$$
$$u_4 = 6at_4,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

## § 50. Касательная к кривой

Возьмем параболу, определяемую уравнением:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 8.$$

Выберем на этой параболе (рис. 78) точку $M$ с координатами $(x;\ y)$ и другую точку $N$ с координатами $(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$. Проведем через точки $M$ и $N$ секущую линию $MN$ и определим ее *подъем* (*угловой коэффициент*, или *тангенс угла* $MCx$, составляемого ею с осью $Ox$). Опустим из точек $M$ и $N$ перпендикуляры $MK$ и $NP$ на ось $x$, а также из точки $M$ перпендикуляр $ML$ на линию $NP$; тогда угол $MCx$ будет равен углу $NML$, а тангенс этого последнего угла равен отношению отрезков $NL$ и $ML$, но отрезок $NL$ представляет собою приращение ординаты $\Delta y$, а отрезок $ML$ — приращение абсциссы $\Delta x$, поэтому имеем:

$$\operatorname{tg} \angle MCx = \operatorname{tg} \angle NML = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

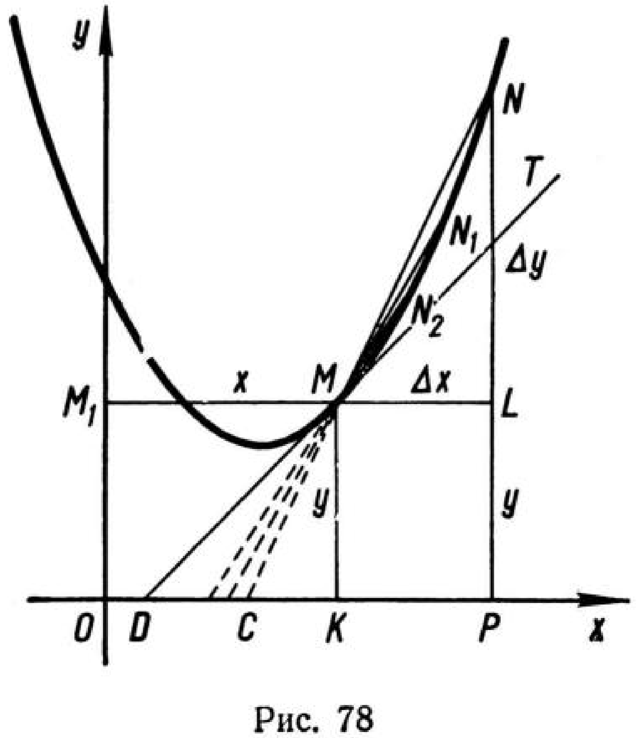


Рис. 78

Вычислим теперь это отношение. Так как координаты точек $N$ и $M$, т. е. $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ и $(x, y)$, должны удовлетворять уравнению нашей кривой, то имеем:

$$y+\Delta y=\frac{1}{4}(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)+8,$$

$$y=\frac{1}{4}x^2-2x+8.$$

Вычитая эти равенства почленно, находим:

$$\Delta y=\frac{1}{4}[(x+\Delta x)^2-x^2]-2\cdot\Delta x=\frac{1}{4}(2x+\Delta x)\cdot\Delta x-2\cdot\Delta x=$$

$$=\left[\frac{1}{4}(2x+\Delta x)-2\right]\cdot\Delta x.$$

Отсюда получаем окончательно:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{4}(2x+\Delta x)-2.$$

Будем теперь считать количество $x$ постоянным, а $\Delta x$ переменным и притом безгранично малым, т. е. положим, что точка $N$ безгранично приближается к точке $M$. Тогда секущая $MN$ будет поворачиваться около точки $M$, занимая последовательно положения $MN_1$, $MN_2$, ..., и ее подъем (угловой коэффициент) будет постепенно меняться, стремясь к определенному пределу, а именно:

$$\text{пред}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{4}\cdot 2x-2=\frac{1}{2}x-2.$$

Проведем теперь через точку $M$ прямую $MT$, подъем которой был бы равен этому пределу (для точки $M$, данной на рисунке, имеем $x=6$, следовательно, искомый ее подъем равен 1). Эта прямая называется **касательной** к данной кривой в точке $M$.

И вообще *касательной к данной кривой в данной точке мы будем называть такую прямую, подъем которой есть предел подъема секущей, проходящей через данную точку, при условии, что расстояние ее второй точки пересечения от данной безгранично уменьшается.*

## § 51. Скорость изменения функции. Понятие о производной функции и его геометрическое истолкование

В предыдущих параграфах мы решили при помощи нахождения пределов две разнородные задачи — вычисление скорости (или ускорения) движения для данного момента и вычисление подъема касательной в данной точке кривой. Проследим теперь, какое рассуждение лежит в основе решения подобных задач.

Заметим прежде всего, что в каждой из этих задач нам были даны две величины, одна из которых была функцией другой: в первой задаче нам было дано уравнение движения тела, т. е. зависимость между пройденным расстоянием и временем; во второй — уравнение кривой, т. е. зависимость между ординатой и абсциссой для каждой точки.

Мы находим в первой задаче отношение между пройденным расстоянием и временем, затраченным на это, а во второй — отношение между приращениями ординаты и абсциссы, т. е. находим отношение между приращением функции и соответствующим приращением независимого переменного, или иначе — среднюю быстроту возрастания функции в данном промежутке.

Наконец, мы находим предел указанного отношения (при условии, что приращение функции безгранично мало); этот предел и давал решение задачи.

Возьмем теперь какую-либо произвольную функцию, например

$$y=\frac{1}{x},$$

и постараемся найти, с какой скоростью изменяется она в каком-либо определенном месте. Пусть мы имеем какое-либо постоянное значение независимого переменного $x$; придадим ему некоторое приращение $\Delta x$ и посмотрим, как изменится от этого наша функция. Прежнее значение функции было $y=\frac{1}{x}$; когда мы заменим $x$ через $x+\Delta x$, то функция должна получить некоторое (пока неизвестное) приращение $\Delta y$, так что ее значение будет:

$$y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}.$$

Найдем теперь приращение функции $\Delta y$; для этого достаточно из нового ее значения вычесть прежнее, т. е.

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

Возьмем отношение между приращением функции ($\Delta y$) и приращением независимого переменного ($\Delta x$); оно покажет нам, во сколько раз приращение функции больше приращения независимого переменного (или же какую часть составляет первое приращение от второго), т. е. оно дает нам среднюю быстроту изменения функции в данном промежутке, когда независимое переменное изменяется от $x$ до $x + \Delta x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}.$$

Допустим, что приращение $\Delta x$ безгранично мало (т. е. второе значение независимого переменного безгранично приближается к первому); тогда отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будет стремиться к пределу:

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Этот предел называется *подъемом функции для данного значения независимого переменного $x$ и выражает скорость изменения функции в данном месте;* мы обозначим его через $y'$, так что

$$y' = \underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

До сих пор мы считали количество $x$ постоянным, но наше рассуждение и выводы не изменятся, если мы под $x$ будем понимать любое значение независимого переменного[1]. При этом $y'$ будет получать различные значения в зависимости от $x$, т. е. будет функцией от $x$.

Эту функцию

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

называют *производной* от данной[2], а данная функция $y = \frac{1}{x}$ в противоположность ей называется *первообразной*.

Таким образом, *производной функцией от данной мы будем называть такую функцию от того же независимого переменного, которая выражает зависимость между любым значением этого переменного и соответствующим подъемом данной (первообразной) функции.* Иначе говоря, производная функция для каждого данного значения независимого переменного

[1] Кроме, конечно, значения $x = 0$, при котором ни сама функция, ни ее подъем не существуют.

[2] В математической литературе употребляются и другие обозначения производной, например вместо $y'$ пишут $\frac{dy}{dx}$, заменяя этим знаком слова «производная от $y$ по $x$», т. е. обозначая не только функцию, от которой берется производная, но и ее независимое переменное. Мы же в таких случаях будем писать просто так: $y'_x$.

имеет своим соответствующим значением подъем первообразной функции при том же значении переменного.

Возьмем теперь график данной нам функции $y = \frac{1}{x}$ (рис. 79). Выберем два значения независимого переменного $x$ и $x + \Delta x$, найдем соответствующие значения функции $y$ и $y + \Delta y$ и построим на графике точки $M$ и $N$, координаты которых будут соответственно $(x; y)$ и $(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Проведем прямую через точки $M$ и $N$ и продолжим ее до пересечения с осью $x$ (в точке $P$); кроме того, опустим из точек $M$ и $N$ перпендикуляры $MM_1$ и $NN_1$ на ось $x$, а из точки $N$ — перпендикуляр $NK$ на линию $MM_1$. На рисунке видно, что $\Delta x = KN$, $\Delta y = -MK$ (величина $\Delta y$ отрицательна, так как ордината в данном случае убывает); следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{MK}{KN} = \operatorname{tg} \angle MNL = \operatorname{tg} \angle MPX.$$

Но угол $MPX$ есть угол между данной прямой $MN$ и положительным направлением оси $x$, поэтому тангенс его есть подъем (угловой коэффициент) прямой $MN$, и, таким образом, отношение между приращением функции и соответствующим приращением независимого переменного представляет подъем (угловой коэффициент) прямой, пересекающей график в двух данных точках (координаты которых определяются начальным и конечным значениями независимого переменного и функции).

Допустим теперь, что значение $x$ остается постоянным, а $\Delta x$ будет переменным количеством и притом безгранично малым. Будем отмечать на графике точки, соответствующие каждой паре новых значений $x + \Delta x$ и $y + \Delta y$, тогда получим

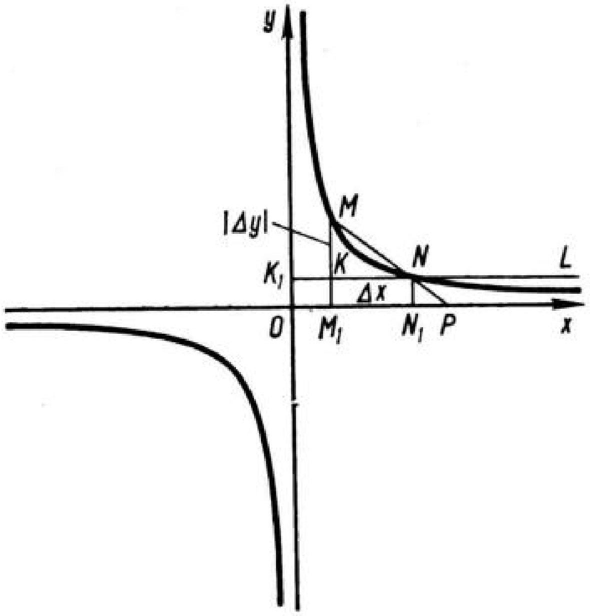

Рис. 79

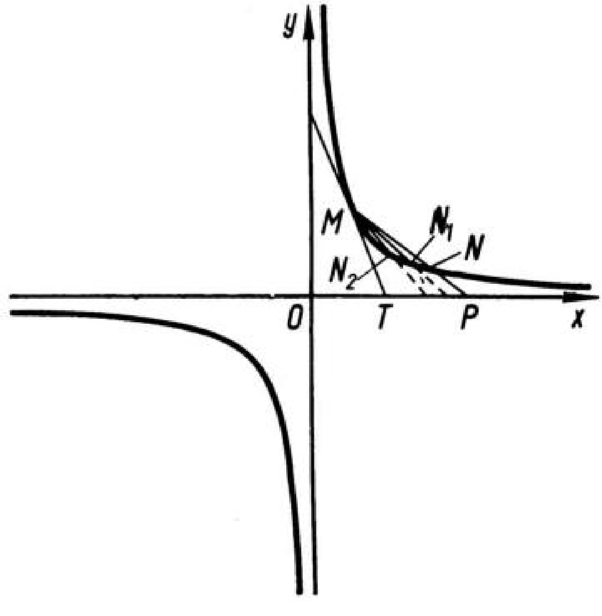

Рис. 80

ряд точек $N_1$, $N_2$, ..., а прямая $MN$, угловой коэффициент которой равен $\frac{1}{\Delta x}$, займет последовательно положения $MN_1$, $MN_2$ и т. д. (рис. 80). Возьмем теперь предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\left(\text{он равен в данном случае } -\frac{1}{x^2}\right)$ и проведем через точку $M$ прямую $MT$, угловой коэффициент которой равен этому пределу; эта прямая, как мы знаем из предыдущего, есть касательная к графику в данной точке.

Теперь ясно, что предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, или подъем функции для данного значения $x$, равен подъему (угловому коэффициенту) касательной в соответствующей точке графика данной функции $M\ (x, y)$. Таким образом, понятие о подъеме функции получает геометрическое истолкование. Подобное же геометрическое истолкование мы можем дать и производной функции. Мы видели, что производная функция $y' = -\frac{1}{x^2}$ выражает зависимость между любым значением $x$ и соответствующим подъемом первообразной функции $y = \frac{1}{x}$. Теперь мы можем сказать, что **производная функция выражает зависимость между абсциссой любой точки графика данной (первообразной) функции и подъемом (угловым коэффициентом) касательной к графику в данной точке.**

Заметим, что в математической литературе для краткости производную функцию, как переменную величину, и ее частные значения (т. е. подъем первообразной для данного значения независимого переменного) называют одним словом *производная*. Мы в дальнейшем также будем пользоваться этим сокращенным обозначением. А выражает ли оно производную функцию вообще, или ее отдельное частное значение, это будет видно каждый раз из самой задачи.

## § 52. Примеры нахождения производных. Общее правило дифференцирования

Рассмотрим на нескольких примерах, как вычисляются производные, главным образом от тех функций, которые были изучены нами раньше.

1. Возьмем линейную функцию

$$y = ax + b.$$

Выберем произвольное значение $x$ и заменим его через $x + \Delta x$, тогда функция $y$ получит также некоторое приращение $\Delta y$, и ее значение будет:

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b.$$

Определяем теперь приращение функции $\Delta y$ и для этого из последнего значения функции отнимем прежнее, получаем:

$$\Delta y = a(x + \Delta x) + b - ax - b = a \cdot \Delta x,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Видим, что отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно постоянному количеству, а если так, то и предел его равен тому же количеству, т. е.

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = a,$$

или

$$y' = a.$$

Таким образом, **производная линейной функции равна коэффициенту при независимом переменном в уравнении, определяющем функцию**; например, для функции $y = 5x + 3$ производная $y' = 5$; для функции $y = 1 - 4x$ производная $y' = -4$ и т. д.

2. Возьмем теперь квадратную функцию

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Берем произвольное значение $x$ и заменяем его через $x + \Delta x$; тогда функция $y$ получает некоторое приращение $\Delta y$, и ее значение будет

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c.$$

Вычитаем отсюда прежнее значение функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

и получаем приращение функции

$$\Delta y = a[(x + \Delta x)^2 - x^2] + b \cdot \Delta x = \\ = [a(2x + \Delta x) + b]\Delta x,$$

или

$$\Delta y = [a(2x + \Delta x) + b] \cdot \Delta x.$$

Теперь находим отношение приращений

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a(2x + \Delta x) + b$$

и вычисляем предел этого отношения при безгранично малом $\Delta x$:

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 2ax + b.$$

Эта формула (при переменном $x$) и выражает искомую производную функцию, т. е.

$$y' = 2ax + b.$$

На основании этой общей формулы мы можем получить производную от любой функции второго порядка вида $y = ax^2 + bx + c$ при помощи простой подстановки; например для функции

$$y = x^2 - 4x + 7$$

имеем $a = 1$, $b = -4$, и потому производная

$$y' = 2x - 4.$$

Для функции

$$y = -x^2 + 10x - 21$$

имеем ($a = -1$, $b = 10$):

$$y' = -2x + 10.$$

3. Найдем производную от дробной функции

$$y = \frac{a}{x}.$$

Заменяем значение $x$ через $x + \Delta x$, тогда функция $y$ получает некоторое приращение $\Delta y$, и ее значение будет

$$y + \Delta y = \frac{a}{x + \Delta x}.$$

Вычитаем отсюда прежнее значение функции

$$y = \frac{a}{x}$$

и находим приращение

$$\Delta y = \frac{a}{x + \Delta x} - \frac{a}{x} = -\frac{a \cdot \Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

Затем находим отношение приращений

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a}{x(x + \Delta x)}$$

и вычисляем его предел:

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = -\frac{a}{x^2}.$$

Таким образом, искомая производная

$$y' = -\frac{a}{x^2}$$

(для всех значений $x$, кроме $x = 0$).

На основании разобранных примеров мы можем установить общее правило нахождения производной:

1) в данную функцию ($y$) вместо $x$ подставляем $x + \Delta x$ и получаем новое значение функции $y + \Delta y$;

2) из нового значения функции ($y + \Delta y$) вычитаем прежнее ($y$) и находим приращение функции $\Delta y$;

3) полученное приращение функции ($\Delta y$) делим на приращение независимого переменного $\Delta x$;

4) находим предел полученного отношения при условии, что $\Delta x$ будет безгранично малым. Этот предел и представляет подъем функции для данного значения $x$ и вместе с тем (при переменном $x$) и искомую производную.

Нахождение производной иначе называется *дифференцированием* функции. Мы видели, что производная получается из отношения приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ как его предел, а каждое из этих приращений $\Delta y$ и $\Delta x$ есть, собственно говоря, разность двух значений переменного количества ($\Delta x$ — разность между двумя значениями независимого переменного — начальным и конечным, а $\Delta y$ — разность между двумя соответствующими значениями функции). Разность называется на латинском языке differentia, отсюда и самое отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ называется иначе дифференциальным отношением (или частным), а вычисление производных — дифференцированием функции. Раздел высшей математики, в котором изучаются правила вычисления производных, называется дифференциальным исчислением.

В предыдущих примерах мы имели дело с такими функциями, для которых производная $\left(\text{т. е. предел дифференциального отношения } \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ существует, кроме, может быть, некоторых отдельных значений $x$ $\left(\text{например, значение } x = 0 \text{ для функции } y = \frac{a}{x}\right)$. В дальнейшем мы и будем иметь в виду при наших рассуждениях именно такие функции, так как они имеют наиболее важное значение в приложениях. Вообще же в математике известны функции, которые не имеют производной, но мы не будем здесь заниматься их изучением.

## § 53. Простейшие приемы дифференцирования

Общее правило, выведенное нами в предыдущем параграфе, дает возможность найти производную от любой функции, но во многих случаях вычисление производных может быть значительно упрощено, если пользоваться особыми приемами и формулами дифференцирования. Мы установим сейчас важнейшие из них, при помощи которых можно найти производную от любой алгебраической функции.

1. **Производная суммы (алгебраической).** Пусть имеем функцию, которая представляет алгебраическую сумму нескольких слагаемых:

$$y = u + v - t,$$

причем отдельные слагаемые этой суммы будут функциями того же независимого переменного ($x$).

Найдем производную от $y$ по общему правилу. Пусть переменное $x$ получает приращение $\Delta x$, тогда функции $u$, $v$, $t$ получат соответственно приращения $\Delta u$, $\Delta v$, $\Delta t$, а вся функция $y$ — приращение $\Delta y$, и новое значение функции будет

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (t + \Delta t).$$

Вычитая отсюда

$$y = u + v - t,$$

находим:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta t,$$

а разделив это равенство на $\Delta x$, будем иметь:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Возьмем теперь пределы левой и правой части равенства; поскольку мы имеем в виду такие функции от $x$, для которых пределы дифференциального частного существуют (кроме, может быть, некоторых отдельных значений $x$), то получим:

$$y' = u' + v' - t',$$

т. е. **производная суммы (алгебраической) равна сумме производных от каждого слагаемого.**

При нахождении производной от суммы нескольких слагаемых мы можем встретиться со случаем, когда одно из слагаемых — постоянное количество. Поэтому нам надо установить, чему равняется производная от постоянного количества. Для этого рассуждаем так. Пусть имеем функцию

$$y = C,$$

которая для всех значений независимого переменного $x$ сохраняет постоянное значение $C$[1], тогда, заменяя $x$ через $x + \Delta x$, мы найдем, что и новое значение функции

$$y + \Delta y = C,$$

следовательно, $\Delta y = 0$ и $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, а потому и производная $y' = 0$.

Таким образом, **производная от постоянного количества равна 0.**

Подобным же образом может случиться, что одно из слагаемых данной суммы равно самому независимому переменному $x$. Чтобы найти его производную, возьмем функцию

$$y = x.$$

Дифференцируя ее по общему правилу, находим

$$y + \Delta y = x + \Delta x,$$

$$\Delta y = \Delta x, \; \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

и, наконец,

$$y' = 1,$$

т. е. **производная от самого независимого переменного равна 1.**

2. **Производная от произведения.** Возьмем функцию, представляющую произведение двух других:

$$y = uv,$$

причем сомножители $u$ и $v$ — суть функции того же независимого переменного $x$.

Дадим переменному $x$ приращение $\Delta x$, тогда функции $u$ и $v$ получат соответственно приращение $\Delta u$ и $\Delta v$, а функция $y$ — приращение $\Delta y$, и новое значение функции $y$ будет:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

[1] Такой может быть, например, функция $y = 4x^2 - (2x + 3) \times \times (2x - 3)$, которая для всех значений переменного $x$ имеет постоянное значение $y = 9$.

или

$$y + \Delta y = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Вычитая отсюда $y = uv$, имеем:

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v,$$

а разделив все равенство на $\Delta x$, получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Возьмем теперь предел левой и правой части равенства. Поскольку мы имеем в виду такие функции от $x$, для которых предел дифференциального частного существует (за исключением, может быть, некоторых отдельных значений $x$), то найдем:

$$y' = vu' + uv'$$[1].

Следует и здесь обратить внимание на частный случай, когда один из сомножителей есть постоянное количество. Пусть $u = c$, тогда

$$y = Cv; \quad y' = vC' + Cv'.$$

Но производная от постоянного количества ($C'$) есть нуль, следовательно,

$$y' = Cv',$$

т. е. **производная от произведения постоянного количества на переменное равна этому постоянному, умноженному на производную от переменного.**

3. **Производная от степени.** Пусть нам дана функция

$$y = x^n,$$

где показатель $n$ — постоянное целое положительное число.

Если $x$ получит приращение $\Delta x$, а $y$ — приращение $\Delta y$, то новое значение функции будет:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n,$$

откуда

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n,$$

---

[1] Здесь последний член предыдущего равенства $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$ имеет своим пределом 0, так как при безгранично малом $\Delta x$ и приращение $\Delta u$ должно быть безгранично малым: если бы $\Delta u$ было величиной конечной или безгранично большой, то отношение $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ было бы безгранично большим и функция $u$ не имела бы производной, что противоречит условию.

а разделив все равенство на $\Delta x$, получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

Обозначим для краткости $x + \Delta x$ через $x_1$, тогда $\Delta x = x_1 - x$, и мы будем иметь:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}.$$

В правой части равенства выполняем деление $x_1^n - x^n$ на $x_1 - x$ и получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + x_1^{n-3}x^2 + \cdots + x_1x^{n-2} + x^{n-1}.$$

Если теперь $\Delta x$ будет безгранично малым, то переменное $x_1 = x + \Delta x$ имеет своим пределом $x$, и мы получим:

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Итак, окончательно имеем:

$$y' = nx^{n-1},$$

т. е. **производная от степени равна показателю степени, умноженному на независимое переменное, показатель которого на единицу меньше.**

Так, например, на основании найденной формулы мы нашли бы:

$$\begin{array}{lll} \text{если:} & y = x^2, \quad \text{то} & y' = 2x; \\ & y = x^3, & y' = 3x^2; \\ & y = x^4, & y' = 4x^3; \\ & y = x^5, & y' = 5x^4 \text{ и т. д.} \end{array}$$

Выведенная нами формула имеет очень важное значение, так как она вместе с формулой дифференцирования суммы дает возможность находить производную от всякого целого алгебраического многочлена. Например, найдем производную от функции $y = 5x^3 - 3x^2 + 20x - 4$. Мы должны здесь найти производные от каждого члена в отдельности, а затем их сложить. Но производная от $5x^3$ равна произведению 5 на производную от $x^3$, т. е. на $3x^2$, следовательно, она равна $15x^2$; таким же образом производная от второго члена $-3x^2$ равна произведению $-3$ на производную от $x^2$, т. е. на $2x$, значит, она равна $-6x$; производная от третьего члена $20x$

равна $20 \cdot 1$, или 20, а последний член — 4 — постоянное количество, его производная — 0. Итак, окончательно имеем:

$$y' = 15x^2 - 6x + 20.$$

**4. Производная от частного (или дроби).** Пусть имеем функцию

$$y = \frac{u}{v},$$

где $u$ и $v$ — функции независимого переменного $x$.

Пусть $x$ получает приращение $\Delta x$, тогда функции $u$ и $v$ получат соответственно приращения $\Delta u$ и $\Delta v$, а функция $y$ — приращение $\Delta y$, и мы будем иметь:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

следовательно:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Переходя теперь к пределу, имеем:

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Например, если нам дана функция $y = \frac{4x - 3}{5 - x}$, то имеем:

$$u = 4x - 3,\ v = 5 - x,\ u' = 4,\ v' = -1,$$

и, следовательно,

$$y' = \frac{(5 - x) \cdot 4 - (4x - 3)(-1)}{(5 - x)^2} = \frac{20 - 4x + 4x - 3}{(5 - x)^2} = \frac{17}{(5 - x)^2}.$$

И здесь заслуживает внимания случай, когда числитель дроби есть постоянное количество ($u = C$), тогда наша функция имеет вид:

$$y = \frac{C}{v},$$

а ее производная

$$y' = \frac{vC' - Cv'}{v^2},$$

или

$$y' = -\frac{Cv'}{v^2}$$

(так как $C'$ — производная от постоянного — есть нуль).

Например, найдем производную от функции $y = \frac{1}{1-x}$. Здесь $C = 1$, $v = 1 - x$, $v' = -1$, следовательно,

$$y' = -\frac{1 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

При помощи формулы производной от частного мы можем дифференцировать всякую дробную алгебраическую функцию, а также показать, что формула дифференцирования степени остается в силе и для отрицательного (целого) показателя.

В самом деле, пусть имеем функцию

$$y = x^{-n},$$

где $n$ — постоянное целое отрицательное число.

Как известно, эта функция равносильна такой дробной функции:

$$y = \frac{1}{x^n}.$$

Дифференцируя эту функцию по только что выведенному правилу, имеем:

$$y' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}},$$

или окончательно:

$$y' = -nx^{-n-1},$$

откуда ясно, что эта производная составлена по прежнему правилу дифференцирования степени (показатель $-n$ умножен на $x$, степень которого на единицу меньше). Последняя формула позволяет во многих случаях упрощать нахождение производной от дробной функции. Пусть, например, нам дана функция

$$y = \frac{5}{x^2}.$$

Представим ее в виде целой функции с отрицательным показателем

$$y = 5x^{-2}$$

и найдем производную по правилу дифференцирования степени:

$$y' = 5 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -10x^{-3}.$$

или

$$y' = -\frac{10}{x^3}.$$

5. **Производная от сложной функции.** Пусть имеем функцию

$$y = \frac{3}{u^2},$$

где

$$u = 1 - 2x.$$

Ясно, что количество $y$ есть функция от $u$, но в то же время мы можем рассматривать его и как функцию от $x$, потому что, подставляя вместо $u$ его величину $1 - 2x$, получаем:

$$y = \frac{3}{(1-2x)^2}.$$

Таким образом, количество $y$ зависит от $x$ не непосредственно, а через посредство функции $u$; такие функции мы будем называть *сложными*.

Пусть теперь вообще $y$ есть функция от $u$, а количество $u$ — функция от $x$; постараемся найти производную от $y$ как функции $x$.

Дадим $x$ приращение $\Delta x$; в таком случае функция $u$ получит приращение $\Delta u$, а функция $y$ — приращение $\Delta y$, которые мы можем определить[1]. Составим теперь дифференциальные отношения $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ и $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и перемножим их; получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Найдем предел $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, полагая $\Delta x$ безгранично малым. Так как предел произведения равен произведению пределов множителей, то

$$\text{пред}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \text{пред}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \cdot \text{пред}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

Но предел $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ есть производная от $y$ как функции $x$, или, как короче говорят, производная от $y$ по $x$; обозначим ее через $y'_x$. В свою очередь предел $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ есть производная от $y$

[1] Например, в предыдущем частном случае мы имели бы $y = \frac{3}{u^2}$, $u = 1 - 2x$, следовательно, $u + \Delta u = 1 - 2(x + \Delta x)$ и $y + \Delta y = \frac{3}{(u + \Delta u)^2}$, откуда определяются приращения $\Delta u$ и $\Delta y$.

как функции $u$, или иначе — производная от $y$ по $u$, обозначим ее через $y'_u$. Предел же $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ есть производная от $u$ (по $x$), т. е. $u'_x$; следовательно, окончательно имеем:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x,$$

т. е. **производная от сложной функции равна производной от данной функции по промежуточному переменному, умноженной на производную от этого переменного (по независимому переменному).** Например, для указанной выше функции $y = \frac{3}{(1-2x)^2}$ мы имеем:

$$u = 1 - 2x, \quad y = \frac{3}{u^2} = 3u^{-2},$$

следовательно,

$$y'_u = 3 \cdot (-2)\, u^{-3} = -\frac{6}{u^3}, \quad u'_x = -2,$$

а поэтому

$$y'_x = -\frac{6}{u^3} \cdot (-2) = \frac{12}{u^3} = \frac{12}{(1-2x)^3}.$$

Разумеется, при выводе нашей формулы мы имели в виду такие функции, для которых пределы отношений $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ и $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ существуют; если же какой-либо из этих пределов не существует, то и формула неприложима к данному случаю.

Применим теперь только что выведенное правило к дифференцированию степени с дробным показателем $y = x^{\frac{p}{q}}$.

Возводя обе части этого равенства в степень $q$, имеем:

$$y^q = x^p.$$

Возьмем теперь производные от обеих частей равенства (они должны быть равны, потому что дифференциальные отношения обеих частей равны, а равные переменные количества имеют и равные пределы). Заметим прежде всего, что величина $y^q$ есть функция от $y$, а $y$ — функция от $x$, т. е. $y^q$ есть сложная функция от $x$ (через посредство $y$). Поэтому ее производная равна производной от $y^q$ по $y$, умноженной на производную от $y$ (по $x$), т. е. она будет:

$$qy^{q-1} \cdot y'.$$

Производная от $x^p$ будет:

$$px^{p-1}.$$

Таким образом, имеем равенство:

$$qy^{q-1} \cdot y' = px^{p-1},$$

откуда

$$y' = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}.$$

Умножим теперь числитель и знаменатель последней дроби на $y$; получим:

$$y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot y}{y^q}$$

или, заменяя $y$ через $x^{\frac{p}{q}}$, а $y^q$ через $x^p$:

$$y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot x^{\frac{p}{q}}}{x^p},$$

или, наконец,

$$y' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Отсюда ясно, что данная производная равна показателю степени $\frac{p}{q}$, умноженному на $x$ в степени, уменьшенной на единицу, т. е. **правило дифференцирования степени, составленное нами раньше для целого показателя, остается в силе и для дробного.**

Зная это, мы можем теперь продифференцировать и всякую алгебраическую функцию, не только рациональную, но и иррациональную.

Пусть, например, надо найти производную от функции

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Представив ее в виде дробной степени, имеем:

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь можем рассматривать $y$ как сложную функцию от $x$ $\left(\text{если считать } 1 - x^2 = u, \text{ то } y = u^{\frac{1}{2}}\right)$; применяя правило дифференцирования степени, имеем:

$$y' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot u'_x,$$

или

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

**6. Производные тригонометрических функций.** Чтобы найти производную от $\sin x$, мы должны предварительно знать, чему равняется предел выражения

$$\frac{\sin x}{x},$$

когда $x$ (а вместе с тем и $\sin x$) стремится к нулю[1]. Докажем, что предел этот равен 1. С этой целью рассмотрим разность

$$1-\frac{\sin x}{x}=\frac{x-\sin x}{x}.$$

Из тригонометрии известно, что разность $x-\sin x<\frac{1}{4}x^3$, следовательно,

$$1-\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{4}x^2$$

и если $x$ стремится к нулю, то $\frac{1}{4}x^2$ тем более будет безгранично малым. Если же разность между 1 и $\frac{\sin x}{x}$ безгранично мала, то

$$\underset{x\to 0}{\text{пред}}\frac{\sin x}{x}=1^{2}.$$

Возьмем теперь функцию

$$y=\sin x$$

---

[1] Здесь и далее предполагается, что угол $x$ выражен не в градусной, а в радиальной мере, т. е. $x$ обозначает отношение дуги угла к радиусу.

[2] Можно вывести ту же формулу и иначе. Из тригонометрии известно, что для острого угла $x$ существует отношение

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x.$$

Если мы теперь разделим $\sin x$ поочередно на все члены этого неравенства, то получим:

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

откуда

$$1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

Но когда $x$ стремится к нулю, то $\cos x$ имеет пределом 1 (см. § 35) и разность $1-\cos x$ безгранично мала; следовательно, и разность $1-\frac{\sin x}{x}$, которая меньше предыдущей, также безгранично мала, или

$$\underset{x\to 0}{\text{пред}}\frac{\sin x}{x}=1.$$

и будем вычислять ее производную по общему правилу. Заменяя $x$ через $x + \Delta x$, имеем:

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),$$

а следовательно,

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Преобразуем теперь разность синусов по известной из тригонометрии формуле (разность синусов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы данных углов на синус полуразности их) и получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Найдем теперь предел этого выражения при безгранично малом $\Delta x$. Он будет равен произведению пределов указанных сомножителей:

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) \underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)$$

Но предел выражения

$$\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

равен $\cos x$, так как разность этих количеств

$$\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{4}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{4}$$

безгранично мала; предел же выражения

$$\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

по доказанному, равен 1, следовательно:

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x,$$

или

$$(\sin x)' = \cos x,$$

т. е. **производная от синуса есть косинус.**

Теперь нетрудно будет найти производные и от остальных тригонометрических функций.

Возьмем функцию $y = \cos x$.

Заменяя косинус синусом дополнительного угла, имеем:

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Теперь можем найти производную от $y$, считая $y$ за сложную функцию от $x$ $\left(\text{через посредство величины } \frac{\pi}{2} - x\right)$. Обозначая $\frac{\pi}{2} - x$ через $z$, имеем:

$$z = \frac{\pi}{2} - x, \quad y = \sin z,$$

следовательно,

$$z' = -1, \quad y' = \cos z \cdot z' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = \sin x \cdot (-1),$$

или окончательно

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

т. е. **производная от косинуса есть минус синус.**

Возьмем теперь функцию $y = \operatorname{tg} x$. Заменяем $\operatorname{tg} x$ отношением $\frac{\sin x}{\cos x}$ и будем дифференцировать функцию $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ как частное двух функций; получим:

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

или

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е. **производная от тангенса есть единица, деленная на квадрат косинуса.**

Наконец, если имеем функцию $y = \operatorname{ctg} x$, то также заменяем $\operatorname{ctg} x$-отношением $\frac{\cos x}{\sin x}$ и дифференцируем функцию

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

По формуле производной от частного имеем:

$$y' = \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

или

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

т. е. производная котангенса есть минус единица, деленная на квадрат синуса.

## § 54. Приложение производной функции к геометрии и физике

Умея находить производную от данной функции, мы можем решать задачи о разыскании касательной к данной кривой, а также и задачи о вычислении скорости и ускорения движущейся точки.

В самом деле, возьмем какую-либо кривую, заданную ее уравнением, например: $y = x^3$ (рис. 81). Пусть нам нужно провести касательную к этой кривой в точке $A$ ($x = 1$, $y = 1$).

Рассуждаем так: мы сможем провести эту касательную, если будем знать ее подъем (угловой коэффициент), а для того, чтобы вычислить этот подъем, нам достаточно взять производную функцию от данной:

$$y' = 3x^2$$

и определить ее значение при $x = 1$. Получаем: $y' = 3$, следовательно, искомая касательная пересекает ось $x$ под углом, тангенс которого равен 3[1].

Если мы пожелаем иметь касательную в точке $O$ ($x = 0$; $y = 0$), то, подставляя в формулу производной значение $x = 0$, получаем:

$$y' = 0.$$

Значит, угол касательной с осью $x$ равен 0, т. е. касательной служит сама ось $x$.

Возьмем еще синусоиду, определяемую уравнением

$$y = \sin x.$$

Пусть нужно провести к ней касательную в точке $O$, где $x = 0$

---

[1] Само построение проще всего выполнить так: опускаем из точки $A$ перпендикуляр $AB$ на ось $x$ и откладываем от точки $B$ влево отрезок $CB$, равный $\frac{1}{3} AB$, затем проводим прямую через точки $A$ и $C$, тогда $\operatorname{tg} \angle ABC = 3$.

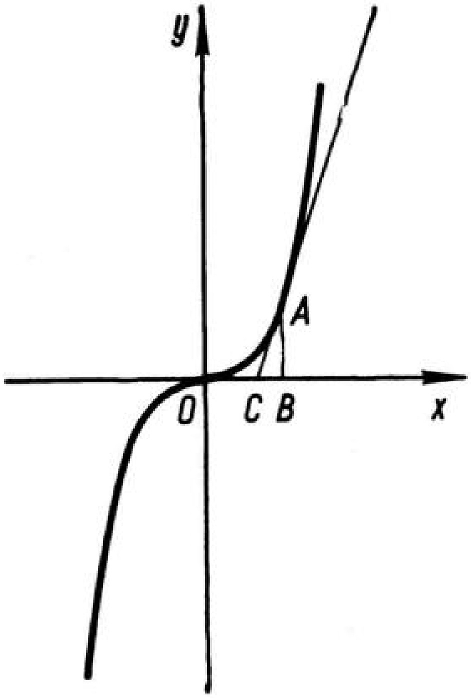


Рис. 81

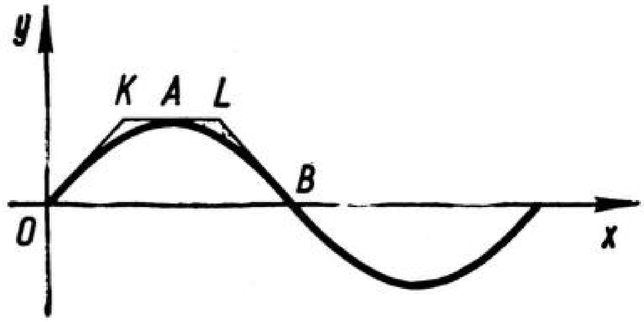


Рис. 82

(рис. 82), причем угол $x$ взят здесь в радианной мере, так что углу $90^\circ$ соответствует абсцисса $\frac{\pi}{2}$, углу $180^\circ$ — абсцисса $\pi$ и т. д.).

Определяем производную:

$$y' = \cos x.$$

При $x = 0$ имеем:

$$y' = 1.$$

Это значение производной дает нам угловой коэффициент, или тангенс угла касательной с осью $x$; если этот тангенс равен 1, то касательная ($OK$) наклонена к оси $x$ под углом $45^\circ$, как видно на рисунке 82.

Подобным же образом в точке $A$, где $x = \frac{\pi}{2}$, имеем: $y' = 0$, т. е. касательная $KL$ параллельна оси $x$; в точке $B$, где $x = \pi$, получаем:

$$y' = -1,$$

т. е. касательная ($LB$) наклонена к оси $x$ под углом $135^\circ$, и т. д.

Таким образом, видим, что вычисление производной позволяет нам в любой точке кривой, выраженной уравнением, определить положение касательной и вместе с тем направление кривой, потому что подъем касательной является вместе с тем и подъемом самой кривой.

Возьмем теперь задачу на определение скорости и ускорения движущегося тела. Пусть, например, пуля вылетела из ружья вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 245$ м/с; пройденное ею расстояние определяется формулой

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

где $g$ — ускорение силы тяжести (9,8 м/с).

Пусть нам нужно определить скорость пули по истечении 10 с. Эта скорость ($v$) есть предел отношения между пройденным после данного момента расстоянием ($\Delta s$) и соответствующим временем ($\Delta t$), при условии, что этот промежуток времени безгранично мал:

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{\text{пред}} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Но этот предел представляет в то же время подъем, или производную от функции $s$ для данного значения $t$; следовательно, мы должны найти эту производную:

$$s' = v_0 - gt = 245 - 9{,}8\, t\ .$$

и подставить в нее значение $t = 10$; получаем искомую скорость:

$$v = s' = 245 - 98 = 147 \text{ (м/с)}.$$

Рассуждение наше не изменится, если мы будем вычислять скорость пули по истечении какого-либо другого числа секунд. Мы заключаем, что скорость движения для любого момента есть производная от пройденного расстояния:

$$v = s' = \underset{\Delta t \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right).$$

Определим теперь и ускорение нашей пули. Рассуждаем так: ускорение ($u$) есть предел отношения между приращением скорости после данного момента ($\Delta v$) и соответствующим временем ($\Delta t$) при условии, что этот промежуток времени безгранично мал:

$$u = \underset{\Delta t \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right).$$

Но этот предел есть в то же время подъем, или производная от функции $v$ для данного значения $t$; определяем эту производную $v' = -g$, таким образом, искомое ускорение $u = v' = -9{,}8$ м/с. Мы видим теперь, что ускорение движения для любого момента есть производная от скорости:

$$u = v' = \underset{\Delta t \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right).$$

Очевидно, также, что для нахождения ускорения приходится определять производную дважды; сначала вычислять производную от пройденного расстояния, а затем от этой производной ($s'$) брать еще раз производную. Выражая это, мы будем говорить, что *ускорение есть вторая производная от пройденного расстояния*: $u = s''$, причем запись $s''$ обозначает вторую производную от $s$.

Применим теперь последние выводы к вычислению скорости и ускорения маятника, совершающего колебательные движения около своей точки равновесия. Как известно из физики, расстояние маятника от этой точки определяется формулой

$$s = a \sin \frac{2\pi t}{T},$$

где $a$ — наибольшее удаление маятника от точки равновесия, $t$ — время движения, $T$ — время полного колебания маятника (от выхода его из точки равновесия до возвращения в ту же точку с противоположной стороны).

Скорость маятника в любой момент равна производной от $s$:

$$v = s' = \frac{2\pi a}{T} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T},$$

а ускорение — производной от $v$ или второй производной от $s$, т. е.

$$u = s'' = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a \sin \frac{2\pi t}{T} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot s.$$

Эти формулы указывают нам все особенности данного движения, а именно:

1) При $t = 0,\ \frac{1}{2}T,\ T,\ \frac{3}{2}T,\ 2T$ и т. д. маятник проходит через точку равновесия ($s = 0$), а скорость его в эти моменты достигает наибольшей величины $\left(v = \pm \frac{2\pi a}{T}\right)$ в прямом или в обратном направлении, ускорение же обращается в нуль.

2) При $t = \frac{1}{4}T,\ \frac{3}{4}T,\ \frac{5}{4}T$ и т. д. маятник находится в наибольшем удалении от точки равновесия ($s = \pm a$), а скорость его обращается в нуль, ускорение же достигает наибольшей величины $\left(u = \mp \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a\right)$ и направлено всегда в сторону точки равновесия.

## § 55. Приложение производной функции к исследованию свойств первообразной. Максимум и минимум функций

Пусть нам дана некоторая функция от $x$ (алгебраическая или тригонометрическая), имеющая, как мы видели, производную для всякого значения $x$ (кроме, может быть, некоторых отдельных значений); обозначим ее так:

$$y = f(x)^1.$$

Рисунок 83 представляет график этой функции. Выберем какое-либо значение $x$ и соответствующее ему значение функции $y$; отметим на графике точку $K$ с координатами $(x; y)$ и найдем для данного значения $x$ производную

$$y' = f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right).$$

Как мы знаем, эта производная выражает тангенс угла между касательной к даной кривой и положительным направлением оси $x$. Рассмотрим теперь, нельзя ли по знаку производной вывести какие-либо заключения о свойствах ее первообразной функции.

Так как производная $f'(x)$ есть предел переменного отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то разность между ними должна быть безгранично мала; обозначив ее через $h$, получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + h.$$

---

[1] Читается так: «$y$ равен $f$ от $x$» или «$y$ есть функция от $x$». Знак $f$ обозначает, таким образом, определенную функциональную зависимость между $y$ и $x$, так что, например, если $f(x) = 3x^2 - 2x - 8$, то $f(a) = 3a^2 - 2a - 8$; $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8$, $f(5) = 3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 - 8 = 57$ и т. д.

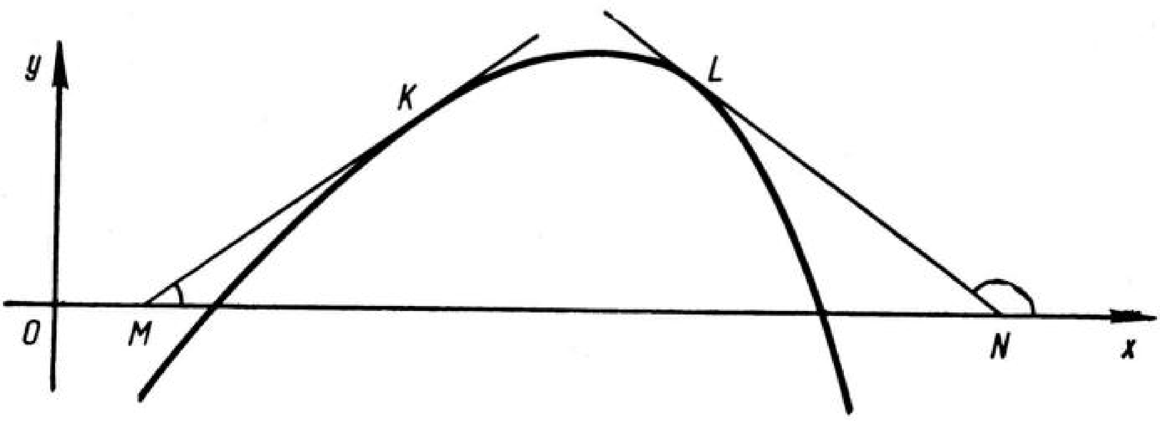


Рис. 83

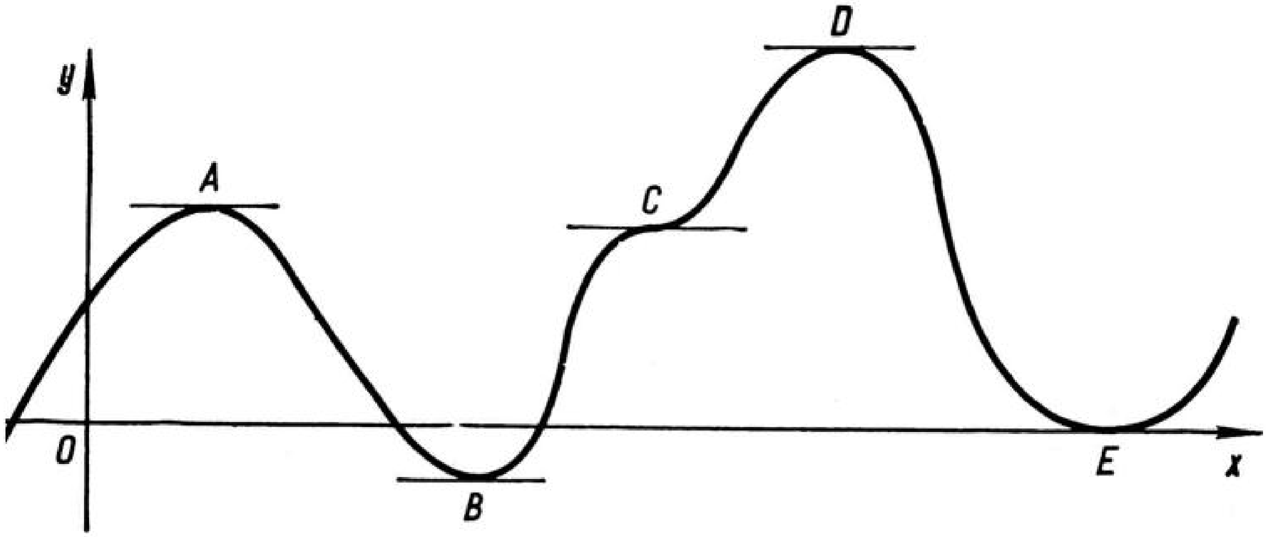


Рис. 84

Пусть производная $f'(x)$ положительна (иначе говоря, касательная к кривой составляет острый угол с осью $x$, как в точке $K$ на рисунке 83). Ясно, что абсолютная величина безгранично малого $h$ может стать и оставаться меньше постоянного количества $f'(x)$; значит, при изменении $h$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, равное сумме $f'(x)+h$, раньше или позже станет и останется положительным. Если же $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$, то и $\Delta y>0$ (так как $\Delta x$ всегда считается положительным), и функция в данном случае возрастает, а график ее в данной точке поднимается.

Пусть теперь, наоборот, производная $f'(x)$ отрицательна (т. е. касательная к кривой составляет тупой угол с осью $x$, как в точке $L$). Так как абсолютная величина $h$ может сделаться и оставаться меньше абсолютной величины $f'(x)$, то с изменением $h$ сумма $f'(x)+h$, или отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, раньше или позже сделается и останется отрицательным. Если же $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$, то и $\Delta y<0$, т. е. функция убывает (а график ее в данном месте падает).

Наконец, производная $f'(x)$ может равняться нулю; в этом случае угол касательной с осью $x$ также равен нулю, т. е. касательная параллельна оси $x$ или же совпадает с нею (рис. 84; точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$). Рассмотрим подробнее этот вопрос.

Здесь возможны такие случаи:

1) Производная до обращения в нуль положительна, а после перехода через нуль становится отрицательной. В этом случае, как и в предыдущем, первообразная функция от возрастания переходит к убыванию (как в точке $A$ или $D$, кривая

поднимается, а затем начинает падать); следовательно, в данной точке она получает, по сравнению с соседними, наибольшее значение (максимум).

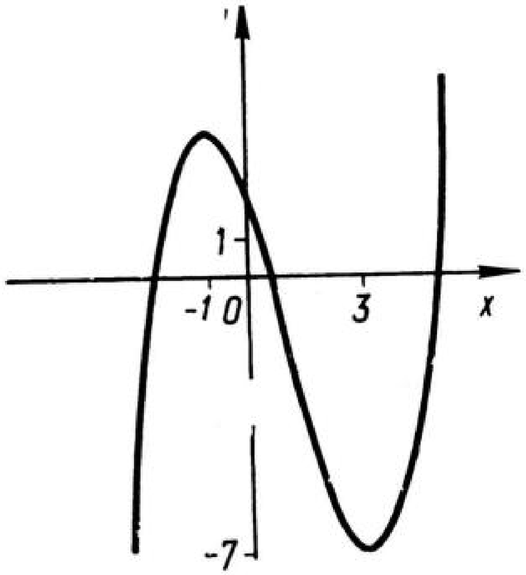

Рис. 85

2) Производная до обращения в нуль отрицательна, а после положительна. Первообразная в этом случае от убывания переходит к возрастанию (как в точке $B$ или $E$, кривая падает, а потом начинает подниматься); следовательно, в данной точке она имеет наименьшее значение (минимум).

3) Производная не меняет знака при переходе через нуль. В этом случае первообразная все время либо возрастает, либо убывает (как в точке $C$), и касательная пересекает кривую в данной точке.

Приложим теперь наши выводы к исследованию изменений какой-нибудь определенной функции, например такой:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2.$$

Найдем ее производную:

$$y' = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3).$$

Видим, что эта производная обращается в нуль при $x = -1$ и $x = 3$; она будет положительной, когда оба множителя $x + 1$ и $x - 3$ имеют одинаковые знаки, т. е. при $x < -1$ или $x > 3$ (иначе говоря, когда $x$ лежит вне корней данного трехчлена); она будет отрицательной, если множители $x + 1$ и $x - 3$ имеют разные знаки, т. е. когда $x$ лежит между значениями $-1$ и $3$ ($-1 < x < 3$). Отсюда заключаем, что график нашей функции должен подниматься при $x < -1$, затем падать между значениями $x = -1$ и $x = 3$ и снова подниматься при $x > 3$ (рис. 85). При значении $x = -1$ имеем: $y = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 3\frac{2}{3}$, и это значение представляет максимум (так как функция от возрастания переходит здесь к убыванию); при $x = 3$ имеем:

$$y = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = -7,$$

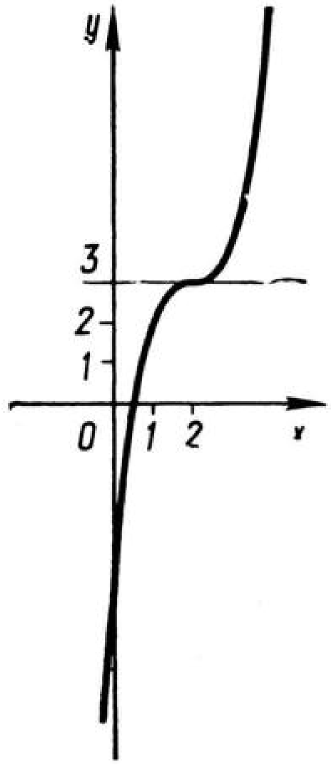


Рис. 86

и это значение есть минимум (так как функция от убывания переходит к возрастанию).

Пусть еще имеем функцию:

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5.$$

Ее производная

$$y' = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2.$$

Эта производная обращается в нуль при $x = 2$, при всяких же других значениях $x$ она положительна. Значит, наша функция все время возрастает, и график ее должен постоянно подниматься (рис. 86), значение же $x = 2$, при котором $y = 3$, представляет в данном случае не максимум и не минимум (так как функция до этого значения возрастает и после него продолжает возрастать), а точку, в которой касательная к графику в то же время пересекает его. Такая точка называется *точкой перегиба*.

В рассмотренных примерах мы непосредственно обследовали, как изменяется производная при переходе через нуль: переходит ли она от положительных значений к отрицательным или наоборот. Но можно установить это и другим способом.

В самом деле, пусть имеем функцию:

$$y = f(x),$$

о которой шла речь в начале этого параграфа; пусть мы нашли ее производную

$$y' = f'(x)$$

и определили те значения $x$, при которых эта производная обращается в нуль ($x_1$, $x_2$, $x_3$ и т. д.). Если при одном из этих значений (например, $x_1$) наша производная, обращаясь в нуль, переходит от положительных значений к отрицательным, то, значит, она при этом убывает; если же она переходит от отрицательных значений к положительным, то она возрастает. Таким образом, вопрос сводится к тому, как изменяется производная $y' = f(x)$ вблизи данного значения, в частности убывает она или возрастает.

Чтобы судить об этом, составим производную от нашей производной $y'$; она называется второй производной от данной функции и обозначается через $y''$:

$$y'' = f''(x).$$

Предположим теперь, что при данном значении $x = x_1$ (обращающем в нуль первую производную $y'$) вторая производная $y''$ отрицательна:

$$y'' = f''(x_1) < 0.$$

Это значит, что первая производная $f'(x)$ в данном месте убывает, т. е. переходит от положительных значений через нуль к отрицательным, а следовательно, данная функция $f(x)$ переходит от возрастания к убыванию, т. е. имеет максимум.

Предположим далее, что при данном значении $x = x_1$ вторая производная $y''$ положительная;

$$y'' = f''(x_1) > 0.$$

В таком случае первая производная $f'(x)$ в данном месте возрастает, т. е. переходит от отрицательных значений через нуль к положительным, а следовательно, данная функция $f(x)$ переходит от убывания к возрастанию, т. е. имеет минимум.

Наконец, возможен случай, что при данном значении $x = x_1$ и вторая производная обращается в нуль:

$$y'' = f''(x_1) = 0.$$

В этом случае мы еще не можем сказать ничего определенного об изменении первой производной и самой функции, и вопрос должен быть решен дополнительным исследованием (например, по предыдущему способу).

Из всего сказанного вытекает такой прием исследования функции на максимум и минимум:

1) Находим первую производную $y = f'(x)$ и приравниваем ее нулю.

2) Решаем уравнение $f'(x) = 0$ и определяем его корни; это будут те значения $x$, при которых данная функция может иметь максимум или минимум.

3) Чтобы определить, какие значения соответствуют максимуму или минимуму, находим вторую производную $f''(x)$; если она при данном значении $x$ положительна, то мы имеем минимум; если же она отрицательна, то имеем максимум, а если она равна нулю, то вопрос требует дополнительного непосредственного исследования.

Возьмем, например, функцию:

$$y = -x^3 + 3x + 2.$$

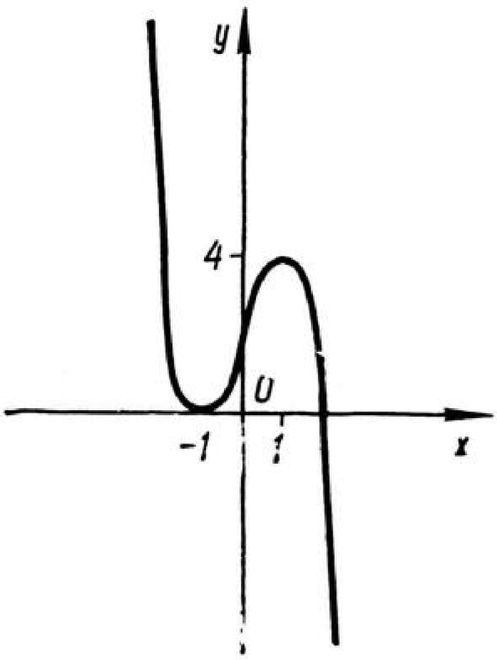


Рис. 87

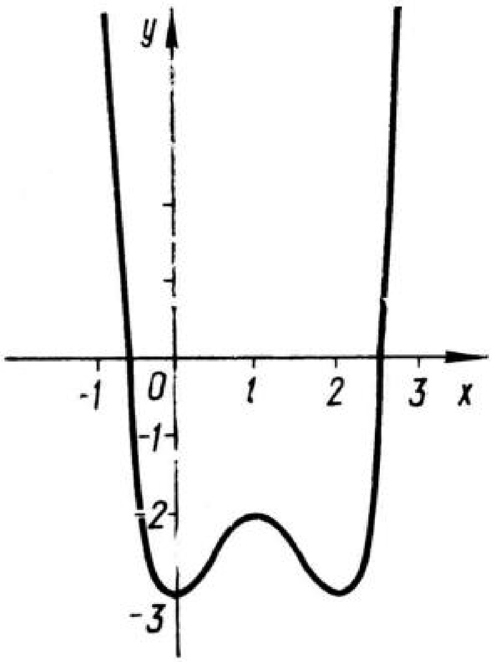


Рис. 88

Ее производная

$$y' = -3x^2 + 3 = -3\,(x^2 - 1).$$

Ясно, что эта производная обращается в нуль при $x = 1$ или $x = -1$; теперь находим вторую производную

$$y'' = -6x.$$

При $x = 1$ имеем $y'' = -6$, следовательно, это значение даст м а к с и м у м функции ($y = 4$); при $x = -1$ получаем $y'' = 6$, следовательно, здесь мы имеем м и н и м у м функции ($y = 0$). График функции, изображенный на рисунке 87, дает возможность воспринять это наглядно.

Возьмем еще функцию:

$$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 3.$$

Находим ее первую производную:

$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x\,(x^2 - 3x + 2).$$

Приравняв ее к нулю, получаем уравнение:

$$4x\,(x^2 - 3x + 2) = 0,$$

корни которого будут $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

Чтобы узнать, какой из них дает максимум или минимум функции, составляем вторую производную:

$$y'' = 12x^2 - 24x + 8.$$

При $x = 0$ имеем $y'' = 8$, следовательно, при этом значении наша функция имеет минимум ($y = -3$).

При $x = 1$ получаем $y'' = -4$, следовательно, это значение дает максимум функции ($y = -2$).

Наконец, при $x = 2$ имеем $y'' = 8$, следовательно, здесь снова имеем минимум ($y = -3$).

График функции на рисунке 88 изображает все эти выводы наглядно.

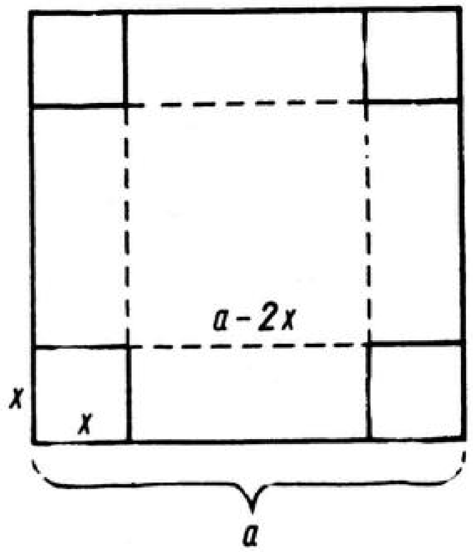


Рис. 89

## § 56. Практические задачи на вычисление максимума и минимума

Нахождение максимальных и минимальных значений функции часто применяется при решении практических и технических вопросов, как увидим сейчас.

Задача 1. *Из квадратного листа жести, сторона которого $a$ (см), нужно сделать коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам его равные квадраты. Какова должна быть длина (и ширина) этих вырезок?*

Пусть сторона каждого из вырезанных квадратов и одновременно глубина коробки будет $x$ см, тогда дно ящика будет тоже квадратным со стороной $a - 2x$ (рис. 89), а объем коробки

$$V = (a - 2x)^2 \cdot x = a^2x - 4ax^2 + 4x^3.$$

Таким образом, объем коробки $V$ есть функция от $x$ — длины вырезок; чтобы отыскать максимум и минимум этой функции, найдем ее производную:

$$V' = a^2 - 8ax + 12x^2$$

и затем приравняем ее к нулю:

$$a^2 - 8ax + 12x^2 = 0.$$

Решив это уравнение, находим:

$$x = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{12} = \frac{4a \pm 2a}{12},$$

т. е.

$$x_1 = \frac{a}{2}, \quad x_2 = \frac{a}{6}.$$

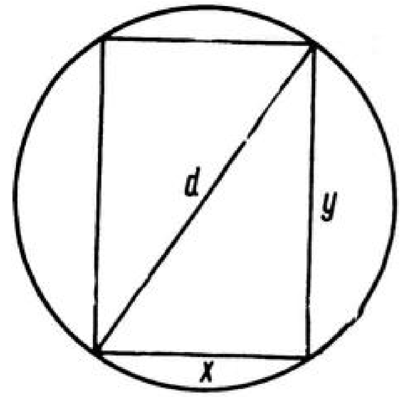


Рис. 90

Значение $x_1 = \frac{a}{2}$ соответствует $V=0$, и это будет минимум сбъема (вся жесть уходит на вырезки). Естественно предположить теперь, что значению $x_2 = \frac{a}{6}$ будет соответствовать максимум объема $\left(v = \frac{2a^3}{27}\right)$. Чтобы проверить это, находим вторую производную

$$V'' = -8a + 24x$$

и, подставляя в нее значение $x_2 = \frac{a}{6}$, находим $V'' = -4a$, следовательно, наше предположение верно (при значении же $x_1 = \frac{a}{2}$ имели бы $V'' = 4a$, что соответствует минимуму).

Задача 2. *Из круглого бревна, диаметр которого $d$* (см), *нужно выпилить прямоугольную балку наибольшей прочности. Определить размеры этой балки, если известно, что крепость ее пропорциональна ширине и квадрату толщины.*

Пусть ширина балки (рис. 90) будет $x$ (см), толщина $y$ (см). Если крепость балки обозначить через $z$, а коэффициент пропорциональности через $k$, то по условию

$$z = kxy^2,$$

или же, так как $y^2 = d^2 - x^2$,

$$z = kx(d^2 - x^2) = k(d^2x - x^3).$$

Находим теперь первую производную:

$$z' = k\,(d^2 - 3x^2).$$

Приравнивая ее нулю, решаем уравнение:

$$k\,(d^2 - 3x^2) = 0,$$

откуда

$$x^2 = \frac{d^2}{3}, \quad x = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

(так как $x$ по условию задачи может быть только положительным).

Это значение и должно давать максимум; для проверки составим вторую производную:

$$z'' = k\,(-6x) = -6kx.$$

При $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ эта производная обращается в $-\frac{6kd}{\sqrt{3}}$, т. е. отрицательна, а потому наше предположение верно.

Итак, искомая ширина балки $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$; толщина ее $y$ определится из уравнения $y^2=d^2-x^2$, следовательно, $y^2=\frac{2d^2}{3}$, или $y=\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (отсюда видно, что отношение между шириной и толщиной балки есть $1:\sqrt{2}$, т. е. равно отношению стороны квадрата к его диагонали).

Задача 3. Ядро в момент выстрела из орудия имеет начальную скорость $v_0$ и вылетает под углом $x$ к горизонту. Определить, при каком угле дальность полета будет наибольшей.

Дальность полета, как известно из физики, определяется (если пренебречь сопротивлением воздуха) формулой:

$$l=\frac{v_0^2\cdot\sin 2x}{g},$$

где $g$ — ускорение силы тяжести.

Чтобы найти искомое максимальное значение $l$, определяем производную:

$$l'=\frac{v_0^2}{g}\cdot 2\cos 2x.$$

Это выражение обратится в нуль при $2x=90°$, т. е. при $x=45°$, и соответствующая дальность полета

$$l=\frac{v_0^2}{g}$$

будет действительно наибольшей, потому что вторая производная

$$l''=\frac{v_0^2}{g}\cdot(-4\sin 2x)$$

при $x=45°$ отрицательна.

Задача 4. *Два источника тепла силой соответственно в $a$ и $b$ единиц находятся друг от друга на расстоянии $d$* (м). *Найти на прямой, их соединяющей, место наименьшего нагревания.*

Из физики известно, что сила тепла, излучаемого каким-либо нагретым телом, обратно пропорциональна квадрату расстояния; следовательно, если искомая точка $M$

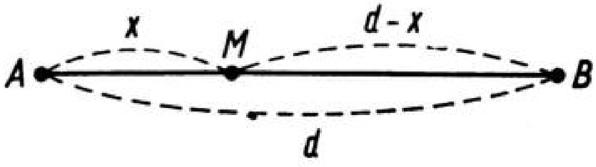


Рис. 91

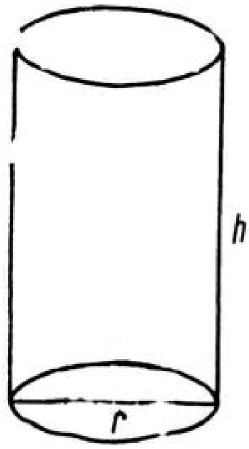


Рис. 92

будет находиться на расстоянии $x$ метров от первого источника тепла $A$ (рис. 91), то она будет нагреваться им с силой $\frac{a}{x^2}$, а другим источником тепла $B$ — с силой $\frac{b}{(d-x)^2}$, полное же нагревание в точке $M$ будет иметь величину

$$y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(d-x)^2}.$$

Чтобы найти наименьшее значение $y$, определяем его производную (для этого удобнее всего представить данную функцию в виде выражения с отрицательными показателями):

$$y = ax^{-2} + b(d-x)^{-2},$$

$$y' = -2ax^{-3} - 2b(d-x)^{-3} \cdot (-1) = -\frac{2a}{x^3} + \frac{2b}{(d-x)^3}.$$

Приравняв эту производную к нулю, имеем уравнение:

$$-\frac{2a}{x^3} + \frac{2b}{(d-x)^3} = 0,$$

откуда

$$\frac{2b}{(d-x)^3} = \frac{2a}{x^3},$$

или

$$\frac{x^3}{(d-x)^3} = \frac{a}{b},$$

т. е.

$$\frac{x}{d-x} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}},$$

и, наконец,

$$x = \frac{d\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}.$$

Чтобы проверить, соответствует ли этому значению минимум функции $y$, находим вторую производную:

$$y'' = 6ax^{-4} - 6b(d-x)^{-4} \cdot (-1) = \frac{6a}{x^4} + \frac{6b}{(d-x)^4}.$$

Эта производная при всяком $x$ положительна, следовательно, найденное значение действительно дает минимум.

З а д а ч а 5. *Паровой котел имеет форму цилиндра. При каких условиях он будет иметь наиболее экономичные размеры (т. е. наименьшую поверхность при данном объеме)?*

Если $r$ будет радиус основания котла и $h$ его высота (рис. 92), то объем котла $V = \pi r^2 h$, а полная его поверхность $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$. По условию $V$ есть данное постоянное количество; представим теперь $S$ как функцию от $r$.

Для этого из уравнения $V = \pi r^2 h$ определяем $h = \frac{V}{\pi r^2}$ и, подставляя это выражение в формулу $S$, имеем:

$$S = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

Теперь находим производную:

$$S' = \frac{2V}{r^2} + 4\pi r.$$

Приравнивая ее нулю, получаем уравнение:

$$-\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0,$$

откуда

$$V = 2\pi r^3,\ r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Подставляя теперь найденный результат ($V = 2\pi r^3$) в формулу $h = \frac{V}{\pi r^2}$, имеем:

$$h = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},$$

т. е. высота котла должна быть равна диаметру его основания.

Что поверхность $S$ будет при этом наименьшая, ясно из формулы второй производной

$$S'' = \frac{4V}{r^3} + 4\pi,$$

которая положительна.

З а д а ч а 6. *Над центром круглой грядки, радиус которой $r$, нужно повесить дуговой электрический фонарь так, чтобы он освещал дорожку, вокруг грядки с наибольшей силой. Какова должна быть высота фонаря над землей?*

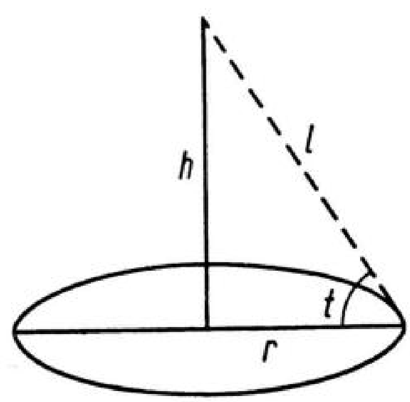

Рис. 93

Из физики известно, что сила освещения прямо пропорциональна синусу угла, под которым падает луч на освещаемую поверхность, и обратно пропорциональна квадрату расстояния. Пусть сила фонаря $a$ свечей, искомая высота фонаря $h$, расстояние от фонаря до края грядки $l$, а угол между лучом и поверхностью грядки $t$ (рис. 93), тогда сила освещения, падающего на дорожку возле краев грядки, будет:

$$y = \frac{a \cdot \sin t}{l^2}.$$

Выразим теперь $y$ в виде функции угла $t$. Так как

$$\cos t = \frac{r}{l},$$

то отсюда

$$l = \frac{r}{\cos t},$$

а следовательно,

$$y = \frac{a \cdot \sin t \cdot \cos^2 t}{r^2} = \frac{a}{r^2} \cdot \sin t (1 - \sin^2 t),$$

или

$$y = \frac{a}{r^2} (\sin t - \sin^3 t).$$

Находим производную:

$$y' = \frac{a}{r^2} (\cos t - 3 \sin^2 t \cdot \cos t) = \frac{a}{r^2} \cos t \, (1 - 3 \sin^2 t).$$

Теперь видим, что $y'$ может обратиться в нуль в двух случаях:

при $\cos t = 0$, откуда $t = 90°$,

при $1 - 3 \sin^2 t = 0$, откуда $\sin^2 t = \frac{1}{3}$, $\sin t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Первый случай в данной задаче невозможен, потому что угол $t$ должен быть острым; второй же дает возможность вычислить искомую высоту $h$, если мы примем во внимание, что

$$\sin t = \frac{h}{l}.$$

Подставляя эту величину в уравнение $\sin^2 t = \frac{1}{3}$, мы имеем:

$$\frac{h^2}{l^2} = \frac{1}{3},$$

откуда

$$3h^2 = l^2,$$

или

$$3h^2 = h^2 + r^2,$$

или

$$2h^2 = r^2$$

и окончательно:

$$h = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Чтобы проверить, будет ли это значение максимум функции $y$, мы должны найти вторую производную. Для этого дифференцируем формулу $y'$, применяя к выражению в скобках правило дифференцирования суммы и произведения, получаем:

$$y'' = \frac{a}{r^2} \cdot (-\sin t - 6 \sin t \cdot \cos^2 t + 3 \sin^3 t) =$$

$$= \frac{a}{r^2} [-\sin t - 6 \sin t (1 - \sin^2 t) + 3 \sin^3 t] = \frac{a}{r^2} (9 \sin^3 t - 7 \sin t).$$

Подставив сюда значение $\sin t = \frac{1}{\sqrt{3}}$, получаем в скобках отрицательное число $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$, следовательно, вторая производная $y''$ отрицательна, и функция $y$ имеет максимум $\left(y = \frac{a}{l^2 \sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{9r^2}\right)$.

Можно решить ту же задачу и иначе. В самом деле, выразив силу освещения, падающего на дорожку возле краев грядки, мы получим формулу:

$$y = \frac{a \cdot \sin t}{l^2}.$$

Заменяя здесь $\sin t$ через $\frac{h}{l}$, мы будем иметь $y = \frac{ah}{l^3}$. Теперь найдем производную от $y$, принимая во внимание, что $l^2 = h^2 + r^2$, и, следовательно, $y$ есть функция от $h$ через посредство $l$:

$$y' = \frac{l^3 \cdot a - ah \cdot 3l^2 \cdot l'}{l^6} = \frac{al - 3ahl'}{l^4}.$$

Чтобы определить $l'$, возьмем производную от формулы $l^2 = h^2 + r^2$, считая $l$ за функцию от $h$, будем иметь $2ll' = 2h$, или $l' = \frac{h}{l}$.

Подставляя это значение $l'$ в формулу для $y'$, получаем

$$y' = \frac{al - 3ah \cdot \frac{h}{l}}{l^4}$$

или

$$y' = \frac{a(l^2 - 3h^2)}{l^5}.$$

Производная $y'$ будет равна нулю тогда, когда числитель этой дроби обратится в нуль, т. е. при $l^2 = 3h^2$, откуда $h^2 + r^2 = 3h^2$, или $r^2 = 2h^2$, т. е. искомая высота $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$, как мы нашли и выше.

## § 57. Понятие об интеграле

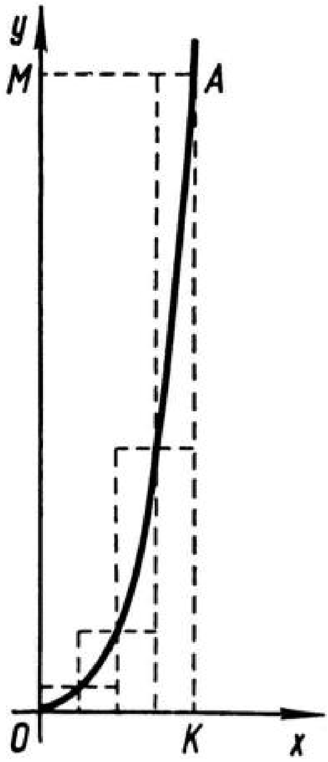

Рис. 94

В § 48 мы видели, как при помощи учения о пределах можно вычислить площадь, ограниченную дугой параболы $y = x^2$. Посмотрим, нельзя ли при помощи подобных рассуждений определять площади и других криволинейных фигур, например площадь, ограниченную дугой $OA$ кубической параболы $y = x^3$, осью абсцисс $Ox$ и ординатой $AK$ (рис. 94).

Разделим, как и раньше, абсциссу $OK = a$ на $n$ равных частей и через все точки деления проведем ординаты до пересечения с дугой параболы, через все точки пересечения проведем прямые, параллельные оси абсцисс, вправо до пересечения с ближайшими ординатами; мы получим ряд входящих прямоугольников, числом $n - 1$, которые образуют внутреннюю «лестницу». Подобным же образом строим и внешнюю «лестницу» из $n$ выходящих прямоугольников. Очевидно, что искомая площадь фигуры $(S)$ больше суммы площадей входящих прямоугольников $(S_1)$, но меньше суммы выходящих $(S_2)$:

$$S_1 < S < S_2.$$

Будем теперь безгранично увеличивать число $n$ (число делений абсциссы $OK$); тогда величины $S_1$ и $S_2$ будут переменными, но неравенство $S_1 < S < S_2$ будет оставаться в силе. Рассмотрим разность $S_2 - S_1$ и докажем, что при данных условиях она безгранично мала.

В самом деле, каждому входящему прямоугольнику соответствует равный ему по величине выходящий, но среди выходящих имеется один лишний — последний прямоугольник с высотой $AK = h$. Основание его равно $\frac{a}{n}$; следовательно, площадь его равна $\frac{a}{n} \cdot h$, и ясно, что при безграничном возрастании $n$ это количество будет безгранично малым, и разность $S_2 - S_1$ безгранично мала.

Отсюда следует, что площадь $S$ есть общий предел суммы площадей входящих, а также и выходящих прямоугольников:

$$S = \text{пред } S_1 = \text{пред } S_2.$$

Вычислим теперь сумму площадей выходящих прямоугольников. Все они имеют одно и то же основание $\frac{a}{n}$, а высоты можно вычислить, зная, что каждая из них есть ордината данной параболы $y = x^3$, и потому равна кубу своей абсциссы. Таким образом, высоты этих прямоугольников будут соответственно:

$$\left(\frac{a}{n}\right)^3, \left(\frac{2a}{n}\right)^3, \left(\frac{3a}{n}\right)^3, \ldots, \left[\frac{(n-1)a}{n}\right]^3, a^3,$$

а площади их:

$$\frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^3; \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{2a}{n}\right)^3; \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{3a}{n}\right)^3; \ldots; \frac{a}{n}\left[\frac{(n-1)a}{n}\right]^3; \frac{a}{n} \cdot a^3.$$

Складывая эти величины и выводя за скобку общий сомножитель $\frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^3$, получаем:

$$S_2 = \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^3 \cdot [1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3].$$

Теперь видим, что для вычисления этого выражения нам надо знать, чему равняется сумма кубов чисел натурального ряда:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3.$$

Эту сумму мы можем вычислить, рассуждая подобно тому, как при вычислении суммы квадратов чисел натурального ряда (см. § 47). Мы исходили тогда из формулы разности кубов двух последовательных чисел:

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1,$$

теперь возьмем разность четвертых степеней $n^4$ и $(n-1)^4$; так как

$$(n-1)^4 = [(n-1)^2]^2 = (n^2 - 2n + 1]^2 =$$
$$= n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1,$$

то имеем:

$$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1.$$

Как и в предыдущем случае, подставляем в эту формулу последовательно числа 1, 2, 3 ... $n$; получим:

$$1^4 - 0^4 = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1$$
$$2^4 - 1^4 = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 1$$
$$4^4 - 3^4 = 4 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n^4 - (n-1)^4 = 4 \cdot n^3 - 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n - 1$$

Складывая же все эти равенства почленно, имеем:

$$n^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) -$$
$$- 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) +$$
$$+ 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - n.$$

Здесь в первых скобках — искомая сумма кубов, которую обозначим через $S_3$, во вторых скобках — сумма квадратов, которую мы уже вычисляли в § 45 $\left(\text{она равна } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$, а в третьих скобках — сумма членов натурального ряда, равная $\frac{n(n+1)}{2}$. Подставляя все эти величины в предыдущее равенство, мы имеем:

$$n^4 = 4S_3 - 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} - n,$$

откуда

$$4S_3 = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n.$$

Теперь выведем в правой части за скобки $n$ и $n+1$ (сначала из первого и последнего члена, а потом из двух средних); получим:

$$4S_3 = n(n+1)[n^2 - n + 1 + 2n + 1 - 2],$$

или окончательно

$$4S_3 = [n(n+1)]^2,$$

откуда

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Теперь можем вернуться к вычислению суммы площадей прямоугольников

$$S_2 = \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^3 \cdot [1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3].$$

Подставляя вместо суммы кубов только что найденную величину, имеем:

$$S_2 = \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^3 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{a^4}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Так как при безграничном возрастании $n$ дробь $\frac{1}{n}$ безгранично мала, то имеем:

$$S = \text{пред}\, S_2 = \frac{a^4}{4} = \frac{1}{4}a^4.$$

Этот результат можно представить еще в таком виде:

$$S = \frac{1}{4} a \cdot a^3 = \frac{1}{4} OK \cdot AK,$$

т. е. площадь криволинейного треугольника $OAK$ равна $\frac{1}{4}$ площади прямоугольника, построенного на координатах конца дуги.

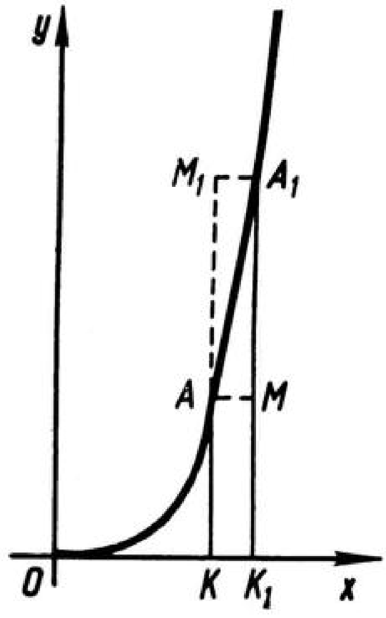

Рис. 95

Подобным образом мы можем поступить и в случае параболы четвертого порядка

$$y = x^4;$$

мы получим тогда в формуле $S_2$ четвертые степени вместо третьих:

$$S_2 = \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^4 \cdot [1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4],$$

и нам придется вычислять уже сумму четвертых степеней чисел натурального ряда. Ее мы также можем вычислить по предыдущему способу: составляя формулу

$$n^5 - (n-1)^5$$

и подставляя в нее числа 1, 2, 3, ..., $n$, в конце концов получим искомую площадь. Таким же образом можем рассуждать и для парабол высшего порядка $y = x^5$, $y = x^6$ и т. д. Но вычисления, как видно, всякий раз довольно сложны и утомительны, и возникает вопрос: нельзя ли найти тот же результат как-нибудь проще?

Возьмем поэтому случай параболы четвертого порядка

$$y = x^4$$

(рис. 95) и будем рассуждать следующим образом.

Площадь фигуры $OAK = S$ при изменении абсциссы $OK = x$ есть, конечно, величина переменная, и будет, таким образом, функцией от $x$; обозначим функциональную зависимость между ними так:

$$S = F(x).$$

Будем теперь считать независимое переменное $x$, т. е. абсциссу, постоянной, и дадим ей приращение $\Delta x = KK_1$, тогда ордината $y = AK$ заменится ординатой $y_1 = A_1K_1$, т. е. получит приращение $\Delta y = A_1M$, а площадь $OAK = S$ получит приращение в виде фигуры $AA_1K_1K$ (ограниченной дугой нашей кривой $AA_1$, двумя ординатами и осью абсцисс); площадь этой фигуры мы обозначим через $\Delta S$. Эта фигура, как видно, больше прямоугольника $AKK_1M$, имеющего площадь $y \cdot \Delta x$, и меньше прямоугольника $M_1KK_1A_1$, площадь которого $(y + \Delta y) \cdot \Delta x$, т. е. имеем неравенство:

$$y \cdot \Delta x < \Delta S < (y + \Delta y) \cdot \Delta x,$$

а отсюда, разделив все члены неравенства на $\Delta x$, получаем:

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Сделаем теперь приращение $\Delta x$ переменным и притом безгранично малым; тогда и $\Delta y$ будет также безгранично малым[1] и отношение $\frac{\Delta S}{\Delta x}$, которое всегда заключено между $y$ и $y + \Delta y$, будет иметь своим пределом $y$:

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right) = y.$$

Но предел указанного отношения $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ есть подъем (производная) функции $S$ для данного значения $x$, т. е.

$$S' = y = x^4.$$

Это соотношение остается в силе для всякого значения $x$, следовательно, искомая площадь $S$ есть такая функция от $x$, от которой производной является данная нам функция ($y = x^4$).

Постараемся теперь найти ту (первообразную) функцию, от которой данная $y = x^4$ являлась бы производной. Известно, что при переходе от первообразной к производной степень $x$ уменьшается на единицу, значит, в первообразной степень $x$ должна быть больше на единицу, т. е. она должна содержать $x^5$. Но если бы мы просто взяли функцию $x^5$ и нашли от нее производную, то она была бы равна $5x^4$, тогда как мы имеем $x^4$; значит, искомая первообразная должна содержать еще такой

---

[1] В самом деле, в данном случае $\Delta y = y_1 - y = (x + \Delta x)^4 - x^4 = \Delta x\, [(x + \Delta x)^3 + (x + \Delta x)^2 \cdot x + (x + \Delta x)x^2 + x^3)$ и раз $\Delta x$ безгранично мало, то и его произведение на конечный сомножитель, стоящий в скобках, будет также безгранично малым.

коэффициент, который после умножения на 5 давал бы единицу, т. е. $\frac{1}{5}$. Таким образом, получаем функцию

$$S = \frac{1}{5} x^5.$$

Действительно, ее производная равна $x^4$, но заметим, что, кроме члена $\frac{1}{5} x^5$, наша первообразная может содержать любое постоянное слагаемое $\left(S = \frac{1}{5} x^5 + 2, \quad S = \frac{1}{5} x^5 - 10 \text{ и т. д.}\right)$, так как это постоянное количество при дифференцировании исчезает и не влияет на вид производной. Поэтому заключаем, что первообразная должна иметь вид

$$S = \frac{1}{5} x^5 + C,$$

где $C$ обозначает произвольное постоянное количество

Произвольное постоянное $C$ мы можем определить, рассуждая так. Очевидно, что когда $x = 0$, то и площадь $S$ также равна 0, следовательно, имеем равенство:

$$0 = 0 + C,$$

откуда $C = 0$.

Окончательно имеем:

$$S = \frac{1}{5} x^5 = \frac{1}{5} x \cdot y,$$

т. е. площадь параболы 4-го порядка равна $\frac{1}{5}$ прямоугольника, построенного на координатах конца дуги.

Подобным же образом мы могли бы найти, что для параболы 5-го порядка соответствующая площадь $S = \frac{1}{6} x^6$, для параболы 6-го порядка $S = \frac{1}{7} x^7$, вообще для параболы $n$-го порядка

$$y = x^n,$$

соответствующая площадь

$$S = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Заметим, что по этой формуле парабола 3-го порядка $y = x^3$ должна иметь площадь $S = \frac{1}{4} x^4$, а обыкновенная парабола 2-го порядка $(y = x^2)$ — площадь $S = \frac{1}{3} x^3$, как мы нашли и раньше.

Возьмем еще такую задачу из физики.

*Тело, бывшее в покое, начинает двигаться с постоянным ускорением* $a$ (м/с), *т. е. так, что его скорость по истечении одной секунды есть* $a$, *по истечении двух секунд* $2a$, *трех секунд* $3a$ *и т. п. Какое расстояние пройдет тело при этих условиях за* $t$ *секунд?*

Рассуждаем так. Разобьем каждую секунду на $n$ равных частей и предположим сначала, что скорость возрастает не непрерывно, а скачками, так что в конце каждой $\frac{1}{n}$ доли секунды предыдущая величина скорости возрастает на $\frac{a}{n}$, а затем в течение следующей $\frac{1}{n}$ доли секунды тело движется уже равномерно. Всех $n$-х долей секунды будет, таким образом, $nt$, и мы можем вычислить последовательно и скорости тела в каждую $n$-ю долю секунды, и пройденные им расстояния.

Скорость тела в первую, вторую, третью, ..., $nt$-ю доли секунды будет соответственно:

$$0,\ \frac{a}{n},\ \frac{2a}{n},\ \ldots,\ \frac{(nt-1)\,a}{n}\ (\text{м/с}),$$

а пройденные телом расстояния будут:

$$0;\ \frac{1}{n}\cdot\frac{a}{n};\ \frac{1}{n}\cdot\frac{2a}{n};\ \ldots,\ \frac{1}{n}\cdot\frac{(nt-1)\,a}{n}\ (\text{м}).$$

Обозначим теперь $S_1$ сумму всех этих расстояний, тогда

$$S_1=\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{n}[1+2+3+\cdots+(nt-1)]=$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{n}\,\frac{(nt-1)\cdot nt}{2}=\frac{1}{2}\,at\cdot\left(t-\frac{1}{n}\right).$$

Это расстояние, пройденное телом за все время, меньше истинного расстояния $S$, так как на самом деле приращение скорости идет непрерывно, а не только в конце каждого промежутка в $\frac{1}{n}$ секунды. Предположим теперь, что скорость тела изменяется такими же скачками, как указано, но что в начале первой секунды скорость была $\frac{a}{n}$, а не 0. Тогда скорости тела в последовательные $n$-е доли секунды будут уже таковы:

$$\frac{a}{n},\ \frac{2a}{n},\ \frac{3a}{n},\ \ldots,\ \frac{nt\cdot a}{n}\ (\text{м/с}),$$

а расстояния, пройденные телом:

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{n};\ \frac{1}{n}\cdot\frac{2a}{n};\ \frac{1}{n}\cdot\frac{3a}{n};\ \ldots;\ \frac{1}{n}\cdot\frac{nt\cdot a}{n}\,(\text{м}).$$

Общее же расстояние, пройденное телом за все время, будет:

$$S_2=\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{n}(1+2+3+\cdots+nt)=$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{n}\cdot\frac{nt\,(nt+1)}{2}=\frac{1}{2}\,at\left(t+\frac{1}{n}\right).$$

Очевидно, что истинное расстояние $S$, пройденное телом, заключается между $S_1$ и $S_2$, т. е.

$$S_1 < S < S_2.$$

Это неравенство остается в силе и тогда, когда число $n$ будет безгранично возрастать, но тогда разность

$$S_2-S_1=\frac{1}{2}\,at\cdot\frac{2}{n}$$

безгранично мала, и

$$S=\text{пред}\,S_1=\text{пред}\,S_2.$$

Вычисляя теперь предел $S_2$ и замечая, что дробь $\frac{1}{n}$ при безграничном увеличении $n$ безгранично мала, получим:

$$S=\frac{1}{2}\,at^2.$$

Посмотрим теперь, нельзя ли решить и этот вопрос другим способом.

По условию задачи скорость тела $v$ пропорциональна времени, т. е.

$$v=at.$$

Но мы знаем из предыдущего, что скорость есть производная от пройденного пути (§ 54), следовательно, если искомое расстояние $S$ есть функция времени, то ее производная

$$S'=at,$$

т. е. $S$ есть такая функция, от которой производная равна данной ($at$). Такую функцию нетрудно найти. Так как $a$ есть постоянный коэффициент, то он должен входить и в искомую первообразную; независимое переменное $t$ должно быть уже не в первой, а во второй степени, поэтому получаем $at^2$. Но если бы искомая функция равнялась $at^2$, то ее производная была бы $2\,at$; значит, при ней должен быть еще коэффициент, уничтожающий этот множитель 2, т. е. $\frac{1}{2}$. Итак, искомая функция

$$S = \frac{1}{2}at^2.$$

Конечно, при этой первообразной может быть еще постоянное слагаемое $C$ ($S = \frac{1}{2}at^2 + C$), но так как при $t = 0$ и пройденное расстояние $S$ должно равняться нулю, то поэтому $C = 0$ и функция должна иметь вид, указанный выше.

Мы рассмотрели здесь различные задачи — на вычисление площадей криволинейных фигур и на определение пройденного телом расстояния по его скорости, и убедились, что подобные задачи мы можем решать двояким путем. Во-первых, мы можем вычислять искомую величину как предел суммы безгранично большого числа безгранично малых слагаемых; во-вторых, мы можем поступить более просто — представить искомую величину, как такую функцию, от которой данная является производной; найдя затем эту функцию по ее производной, мы решаем тем самым и данную задачу.

Такая функция, от которой данная является производной, называется *первообразной*, или *интегралом*[1].

Разыскание первообразной функции по данной производной называется интегрированием, а тот раздел высшей математики, который объясняет правила интегрирования, носит название *интегрального исчисления*.

В математической литературе обычно употребляется запись интеграла с обозначением не только функции, от которой находим интеграл, но и ее независимого переменного:

$$\int y dx.$$

Это обозначает: «интеграл от $y$ по $x$».

Запись

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

обозначает: «интеграл (или первообразная) от функции $x^2$ равен $\frac{1}{3}x^3$ плюс произвольное постоянное $C$».

---

[1] Интеграл (от латинского integer — целый, составленный из своих отдельных частей). Площадь или другая величина, которую мы разыскиваем путем интегрирования, представляет сумму (точнее предел суммы) безгранично большого числа безгранично малых слагаемых.

## § 58. Простейшие правила интегрирования

Мы видели выше, что интеграл, или первообразную функцию, можно найти, припоминая соответствующие формулы дифференцирования и рассуждая, какова должна быть первообразная функция, чтобы она могла иметь данную производную. Но во многих случаях такое вычисление можно упростить, если пользоваться определенными приемами интегрирования, как сейчас увидим.

1. **Интегрирование суммы.**

Пусть имеем функцию, которая представляет алгебраическую сумму нескольких слагаемых:

$$y = u + v - t,$$

причем отдельные слагаемые этой суммы будут функциями того же независимого переменного $x$.

Пусть мы нашли такие функции $U$, $V$ и $T$, от которых данные $u$, $v$ и $t$ будут производными:

$$u = U'$$
$$v = V',$$
$$t = T'.$$

Составим теперь функцию

$$Y = U + V - T$$

и найдем от нее производную; по правилам дифференцирования мы будем иметь:

$$Y' = U' + V' - T',$$

или же

$$Y' = u + v - t = y,$$

т. е. функция $Y$ такова, что ее производная ($Y'$) равна данной функции $y$; иными словами, функция

$$Y = U + V - T$$

есть интеграл от $y = u + v - t$, т. е. **интеграл (алгебраической) суммы равен сумме интегралов слагаемых.**

Заметим, что к данной функции $Y$ мы могли бы, как и в предыдущих случаях, прибавить произвольное постоянное $C$, и производная от функции $Y + C$ была бы по-прежнему $Y'$ или $y$; но мы не будем этого писать, так как, в сущности, в каждом из слагаемых $U$, $V$ и $T$ должно уже подразумеваться произвольное постоянное. Так мы будем поступать и в дальнейшем, имея, однако, в виду, что если мы нашли каким-либо путем интеграл данной функции, то для получения общей его формулы к найденной функции нужно прибавить произвольное постоянное слагаемое или же подразумевать такое слагаемое.

2. **Интегрирование произведения постоянного на переменное.** Пусть имеем функцию

$$y = Cv,$$

где $C$ — постоянное, $y$ и $v$ — функции от $x$.

Пусть мы нашли такую функцию $V$, от которой $v$ будет производной, т. е.

$$v = V'.$$

Составим функцию

$$Y = CV$$

и найдем от нее производную, получаем:

$$Y' = CV' = Cv,$$

или

$$Y' = y,$$

т. е. функция $Y$ такова, что ее производная $Y'$ равна данной функции $y$; иначе говоря, функция $Y = CV$ есть интеграл от $y = Cv$, или же: **интеграл произведения постоянного на переменное равен этому постоянному, умноженному на интеграл от переменного.**

3. **Интегрирование степени.** Пусть имеем функцию

$$y = x^n,$$

где $n$ — постоянный показатель.

Найти интеграл (или первообразную) от данной функции — значит разыскать такую функцию, от которой данная была бы производной. Но при нахождении производной степень $x$ понижается на единицу, следовательно, в первообразной степень $x$ должна быть на единицу больше, т. е. она должна содержать $x^{n+1}$. Но если мы продифференцируем $x^{n+1}$, то получим $(n+1)\,x^n$; следовательно, в искомой первообразной должен быть еще такой постоянный множитель, который уничтожил бы данный коэффициент $n+1$, т. е. $\frac{1}{n+1}$.

Таким образом, получаем выражение:

$$\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

но, кроме того, искомая первообразная (или интеграл) может содержать произвольное постоянное слагаемое $C$, так что она должна иметь вид:

$$Y = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

т. е. **интеграл степени равен независимому переменному с показателем, на единицу большим, деленному на этот (увеличенный) показатель (плюс произвольное постоянное).**

Например:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C,$$
$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,$$
$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

Так как формула дифференцирования степенной функции $y = x^n$ выведена нами для любого показателя $n$ (целого, дробного, положительного и отрицательного), то и полученная нами формула интегрирования справедлива для всех рациональных значений показателя, за исключением, однако, значения $n = -1$, которое обращает в нуль знаменатель $n + 1$.

Полученная нами формула, с учетом предыдущих правил, дает возможность интегрировать всякую целую алгебраическую функцию.

Пусть, например, нам дана функция

$$y = x^3 - 5x^2 + 4x - 2.$$

Так как интеграл суммы равен сумме интегралов слагаемых, то мы должны интегрировать поочередно каждый член данной функции и полученные выражения сложить. Вычисляем, как в предыдущем случае:

интеграл от $x^3$ есть $\frac{x^4}{4}$;

интеграл от $-5x^2$ равен коэффициенту $-5$, умноженному на интеграл от $x^2$, т. е. на $\frac{x^3}{3}$; следовательно, он равен $-\frac{5}{3}x^2$;

интеграл от $4x$ равен коэффициенту 4, умноженному на интеграл от $x$, т. е. на $\frac{x^2}{3}$; следовательно, он равен $\frac{4x^2}{2}$, или $2x^2$;

наконец, интеграл от $-2$ равен $-2x$ (потому что производная от $-2x$ есть $-2$).

Складывая все эти результаты и прибавляя к сумме произвольное постоянное $C$, находим:

$$\int (x^3 - 5x^2 + 4x - 2)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 2x^2 - 2x + C.$$

Формулу интегрирования степени мы можем применить и к простейшим дробным функциям. Например, найдем интеграл от функции

$$y = \frac{8}{x^3}.$$

Представим ее в виде функции с отрицательным показателем:

$$y = 8x^{-3}.$$

Теперь замечаем, что интеграл от этой функции должен быть равен коэффициенту 8, умноженному на интеграл от $x^{-3}$, т. е. на $\frac{x^{-2}}{-2}$. Произведя умножение, имеем: $-4x^{-2}$, или $-\frac{4}{x^2}$. Кроме того, в состав интеграла должно войти произвольное постоянное слагаемое $C$, т. е.

$$\int \frac{8}{x^3}\,dx = -\frac{4}{x^2} + C.$$

Подобным же образом мы можем рассуждать и в случае иррациональной функции, которую можно свести к дробной степени $x$.

Например, проинтегрируем функцию

$$y = 3\sqrt{x}.$$

Представив ее в виде

$$y = 3x^{\frac{1}{2}},$$

мы будем иметь:

$$\int 3x^{\frac{1}{2}}\,dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C,$$

или после упрощений:

$$\int 3\sqrt{x}\,dx = 2x\sqrt{x} + C.$$

4. **Интегрирование тригонометрических функций.** Пусть нам нужно проинтегрировать функцию $y = \sin x$. Мы знаем, что выражение $-\sin x$ является производной от $\cos x$ (см. § 53, п. 6); следовательно, $\sin x$ есть производная от $-\cos x$;

кроме того, в искомой первообразной функции может быть произвольное постоянное слагаемое $C$. Поэтому имеем:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

Подобным же образом мы можем проинтегрировать функцию

$$y = \cos x.$$

Мы знаем, что $\cos x$ есть производная от $\sin x$ (см. § 53), кроме того, первообразная может содержать еще постоянное слагаемое $C$, т. е.

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

Так, например, найдем интеграл от функции

$$y = \cos^2 x.$$

Из тригонометрии известно, что

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

следовательно:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

а потому

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx.$$

Теперь находим интеграл суммы $1 + \cos 2x$. Интеграл от 1 есть $x$, а интеграл от $\cos 2x$ есть $\sin 2x$, разделенный на 2 (потому что производная от $\sin 2x$ есть $2\cos 2x$). Окончательно получаем:

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Примем теперь во внимание еще две формулы производных, которые мы вывели в свое время для тригонометрических функций, а именно:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

и

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Из первой формулы непосредственно следует, что $\frac{1}{\cos^2 x}$ есть производная от $\operatorname{tg} x$, а потому

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C.$$

Из второй же формулы мы получаем, что $-\frac{1}{\sin^2 x}$ есть производная от $\operatorname{ctg} x$ или же $\frac{1}{\sin^2 x}$ есть производная от $-\operatorname{ctg} x$, а потому

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

5. **Интегрирование с помощью замены переменного.** Пусть, например, имеем функцию

$$y = 3\sin^2 x \cos x.$$

Если $\sin x = u$, то $\cos x = u'_x$, и функция будет иметь вид

$$y = 3u^2 \cdot u'_x.$$

Мы представили $y$ в виде сложной функции от $x$ (через посредство $u$). Решим теперь, от какой функции от $u$ надо взять производную (по $x$), чтобы получить $3u^2 \cdot u'_x$. Выражение $3u^2$ представляет производную от той же функции по $u$; значит, искомая первообразная функция будет $u^3$, а присоединив к ней произвольный постоянный член $C$, имеем:

$$\int 3u^2 \cdot u'_x \, dx = u^3 + C.$$

Подставляя же теперь $\sin x$ вместо $u$, получаем:

$$\int 3\sin^2 x \cos x \, dx = \sin^3 x + C.$$

Пусть еще нам дана для интегрирования функция

$$y = \frac{8}{25 - 20x + 4x^2}.$$

Замечая, что знаменатель ее есть полный квадрат выражения $5 - 2x$, мы можем переписать ее так:

$$y = \frac{8}{(5 - 2x)^2}.$$

Примем теперь $5 - 2x = u$, тогда $u'_x = -2$, и мы можем изобразить нашу функцию в таком виде:

$$y = \frac{(-4)\cdot(-2)}{(5-2x)^2} = \frac{-4u'_x}{u^2} = 4\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)\cdot u'_x.$$

Мы, таким образом, и здесь представили $y$ в виде сложной функции от $x$ (через $u$); будем теперь искать ту функцию от $u$, от которой данная является производной (по $x$). Так как $-\frac{1}{u^2}$ есть производная от $\frac{1}{u}$, а постоянный множитель 4 при интегрировании сохраняется, то первообразная функция, которую мы ищем, будет $\frac{4}{u}$; кроме того, при ней может быть произвольное постоянное слагаемое $C$, т. е.

$$\int\left(\frac{-4u'_x}{u^2}\right)dx=\frac{4}{u}+C.$$

Подставляя теперь $5-2x$ вместо $u$, имеем:

$$\int\frac{8}{(5-2x)^2}\,dx=\frac{4}{5-2x}+C.$$

6. **Интегрирование по частям.** Нахождение интеграла, или первообразной функции, как видно из предыдущих примеров, требует иногда большой находчивости и искусства, и вообще для разыскания интеграла не существует общего правила, которое во всех случаях вело бы прямо к цели. Поэтому следует иметь в виду различные частные приемы, которые могут облегчить разыскание интеграла; одним из них является так называемое *интегрирование по частям*. Оно основано вот на каких соображениях.

Мы видели, что производная от произведения

$$y=uv$$

выражается формулой

$$(uv)'=vu'+uv'.$$

Отсюда имеем:

$$vu'_x=(uv)'_x-uv'_x.$$

Найдем теперь интеграл от $vu'_x$. Он получится, если мы возьмем интеграл от $(uv)'_x$ и вычтем из него интеграл от $uv'_x$, но интеграл от $(uv)'_x$ равен, конечно, $uv$; следовательно, получим:

$$\int vu'_x\,dx=uv-\int uv'_x\,dx.$$

Эта формула позволяет заменить разыскание данного интеграла от $vu'_x$ вычислением другого интеграла от функции $uv'_x$, которое может оказаться проще и доступнее.

Вот как применяется эта формула. Пусть, например, нам нужно проинтегрировать функцию $y=x\cos x$. Считаем эту функцию соответствующей функции $vu'_x$ в нашей формуле и полагаем, что

$$v=x,\quad u'_x=\cos x.$$

Тогда

$$v'_x=1,\quad u=\sin x,$$

и, подставляя значения $u$, $v$, $u'_x$, $v'_x$ в нашу формулу, имеем:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx,$$

или окончательно:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Пусть теперь нужно проинтегрировать функцию

$$y = 3\sin^3 x.$$

Принимая эту функцию за произведение $vu'_x$, полагаем, что

$$v = 3\sin^2 x,\quad u'_x = \sin x,$$

тогда

$$v'_x = 6\sin x\cos x,\quad u = -\cos x,$$

а следовательно,

$$\int 3\sin^3 x\,dx = -3\sin^2 x\cos x + \int 6\sin x\cos^2 x\,dx.$$

Этот последний интеграл мы также не можем найти непосредственно, но если мы заменим в нем $\cos^2 x$ через $1 - \sin^2 x$, то получим:

$$\int 6\sin x\cos^2 x\,dx = \int 6\sin x(1 - \sin^2 x)\,dx =$$
$$= \int (6\sin x - 6\sin^3 x)\,dx = -6\cos x - 2\int 3\sin^3 x\,dx,$$

а подставляя это выражение в предыдущую формулу, получаем:

$$\int 3\sin^3 x\,dx = -3\sin^2 x\cdot\cos x - 6\cos x - 2\int 3\sin^3 x\,dx.$$

Мы видим, что в правой части получился снова искомый интеграл; перенося его в левую часть, имеем:

$$3\int 3\sin^3 x\,dx = -3\sin^2 x\cos x - 6\cos x,$$

откуда

$$\int 3\sin^3 x\,dx = -\sin^2 x\cos x - 2\cos x.$$

К этой функции остается прибавить произвольное постоянное слагаемое $C$, и мы получаем:

$$\int 3\sin^3 x\,dx = -\sin^2 x\cos x - 2\cos x + C.$$

Можно еще несколько упростить полученную функцию, заменяя в ней $\sin^2 x$ через $1 - \cos^2 x$, будем иметь:

$$\int 3\sin^3 x\,dx = \cos^3 x - 3\cos x + C.$$

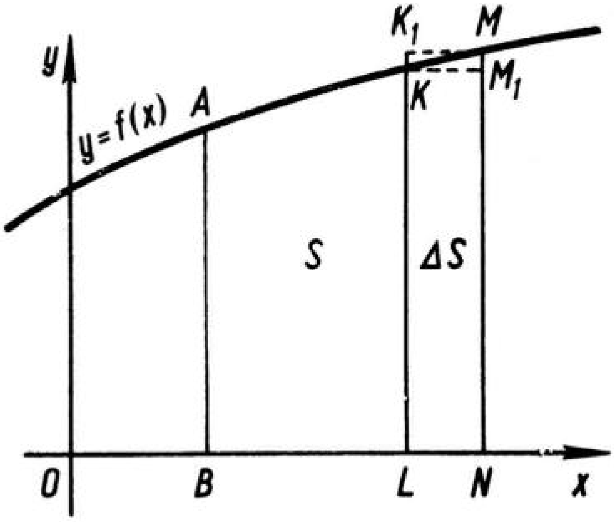

Рис. 96

Заметим в заключение, что интегрирование функций далеко не всегда является задачей возможной, т. е. бывают случаи, когда искомая первообразная функция никак не может быть выражена при помощи известных нам до сих пор функций. В таких случаях приходится ограничиваться приближенным вычислением искомого интеграла применительно к условиям данной задачи; способы таких вычислений излагаются в более подробных курсах высшей математики.

## § 59. Применение интегрирования к вычислению площадей и объемов

Пусть имеем (рис. 96) кривую линию, определяемую уравнением

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ — одна из функций, наподобие рассмотренных нами выше (алгебраических или тригонометрических), имеющая для каждого значения $x$ одно определенное (конечное) значение $y$ и для каждого значения $x$ одну определенную производную.

Вычислим площадь, ограниченную дугой данной кривой $AK$, осью абсцисс $Ox$ и двумя ординатами $AB = y_0$ и $KL = y$, соответствующими данным значениям абсцисс $OB = x_0$ и $OL = x$, причем положим еще, что в данном участке функция $y = f(x)$ все время возрастает.

Очевидно, что искомая площадь $S$ изменяется с изменением абсциссы $x$, т. е. будет функцией от $x$. Дадим $x$ некоторое приращение $\Delta x = LN$; тогда ордината $y$ получит приращение $\Delta y = MM_1$, а площадь $S$ получит приращение $\Delta S$, изображаемое фигурой $KLMN$. В таком случае площадь $\Delta S = KLMN$ должна заключаться, как это видно и на рисунке, между площадями прямоугольников $KLM_1N = y \cdot \Delta x$ и $K_1LMN = (y + \Delta y)\,\Delta x$, т. е. $y \cdot \Delta x < \Delta S < (y + \Delta y) \cdot \Delta x$.

Разделив каждый член этого неравенства на $\Delta x$, мы получим:

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Допустим теперь, что $\Delta x$ — безгранично малое; тогда и $\Delta y$ должно быть безгранично малым (иначе функция $y = f(x)$ не имела бы производной в данной точке), и отношение $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ будет иметь своим пределом $y$:

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right) = y.$$

Но предел отношения $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ есть производная от $S$, следовательно:

$$S' = y,$$

т. е. $S$ — такая функция, от которой производная есть $y$, другими словами, $S$ есть интеграл (первообразная функция) от $y$:

$$S = \int y dx = \int f(x)\, dx.$$

Предположим, что мы нашли этот интеграл и что он выражается формулой

$$F(x) + C,$$

где $F(x)$ — некоторая функция от $x$, а $C$ — произвольное постоянное количество, пока неопределенное.

Это произвольное постоянное мы можем сейчас определить. Очевидно, что при $x = x_0$ площадь $S$ обращается в нуль, следовательно, подставляя в последнюю формулу $x_0$ вместо $x$, получим:

$$F(x_0) + C = 0,$$

откуда

$$C = -F(x_0),$$

окончательно имеем:

$$S = F(x) - F(x_0).$$

Итак, **искомая площадь есть разность между значениями интеграла от $y = f(x)$, соответствующими конечному и начальному значениям $x$, или, как говорят иначе, равна интегралу от $y = f(x)$, взятому между прcделами $x_0$ и $x$,** причем это обозначается так:

$$S = \int_{x_0}^{x} y\, dx = F(x) - F(x_0).$$

Наше рассуждение останется в силе и тогда, когда функция не возрастает, а убывает (изменится только знак основного неравенства: $y > \frac{\Delta S}{\Delta x} > y + \Delta y$). Можно распространить его и на случай, когда функция сначала возрастает, а потом, пройдя через максимум, начинает убывать (или наоборот). В самом деле, если функция сначала возрастает при изменении $x$ от $x_0$ до $x_1$, а потом убывает от $x_1$ до $x_2$, то площадь, соответствующая первому участку кривой (рис. 97), будет:

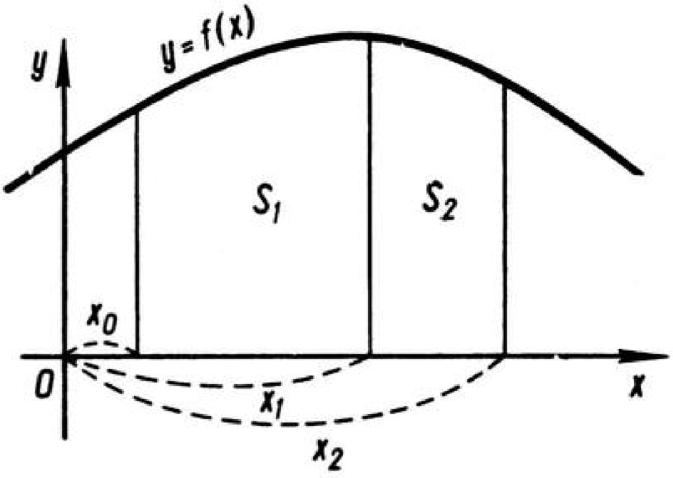

Рис. 97

$$S_1 = F(x_1) - F(x_0),$$

второму

$$S_2 = F(x_2) - F(x_1),$$

а следовательно, общая площадь будет:

$$S = S_1 + S_2 = F(x_2) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_2} y\,dx.$$

Применим теперь сделанные выводы к вычислению площади, ограниченной параболой

$$y = x^2 - 4x + 7,$$

осями координат и одною из ординат этой кривой (рис. 98).

Находим сначала интеграл от данной функции:

$$F(x) = \int (x^2 - 4x + 7)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 7x,$$

(причем, как и в предыдущем случае, произвольного постоянного сюда уже добавлять не нужно). Теперь, как мы знаем, искомая площадь $S$ равна разности между значениями этого интеграла при данном (конечном) значении $x$ и начальном значении $x_0$:

$$S = F(x) - F(x_0).$$

Пусть, например, мы желаем определить площадь фигуры $OKNB$ (рис. 98), для которой начальная абсцисса $x_0 = 0$, а конечная $x = 3$. Подставляя эти значения в формулу $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 7x$, имеем:

$$F(x) = \frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 = 12,$$

$$F(x_0) = 0.$$

Следовательно, искомая площадь

$$S = F(x) - F(x_0) = 12.$$

Подобным же образом, определяя площадь фигуры $OKAM$, видим, что $x_0 = 0$, $x = 2$, а искомая площадь $S = F(2) - F(0) = 8\frac{2}{3}$. Наконец, если мы захотим иметь общую формулу для площади, ограниченной данной кривой, осями координат и одной из ординат, то в этом случае начальная абсцисса $x_0 = 0$, $F(x_0) = 0$, а искомая площадь выразится формулой:

$$S = F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 7x.$$

Вычислим еще площадь, ограниченную дугой синусоиды

$$y = \sin x,$$

осью $Ox$ и одной из ординат, например $ML$ (рис. 99).

Здесь начальное значение абсциссы будет $x_0 = 0$, а конечное $x$; находим интеграл данной функции:

$$F(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x,$$

а искомая площадь равна разности его значений при конечном значении $x$ и начальном $x_0 = 0$, т. е.

$$S = F(x) - F(x_0) =$$
$$= -\cos x + \cos 0 = -\cos x + 1,$$

или окончательно:

$$S = 1 - \cos x.$$

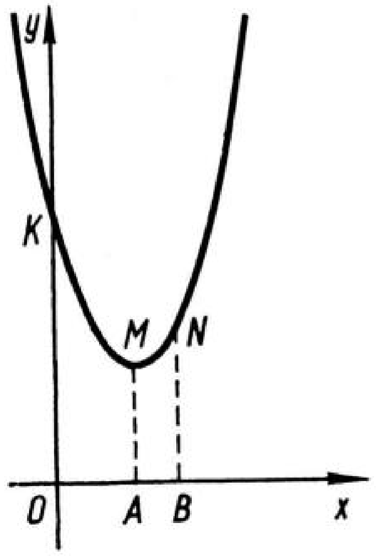


Рис. 98

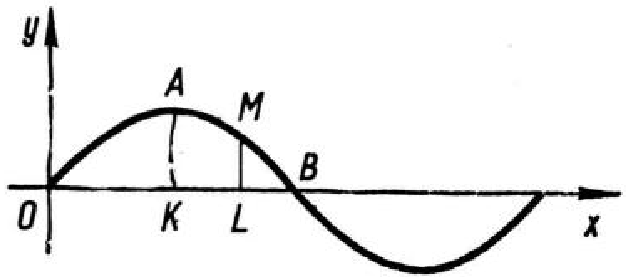


Рис. 99

Если теперь мы хотим получить площадь целой волны синусоиды, то должны принять в этой формуле $x = \pi$, т. е. 180°. Так как $\cos \pi = -1$, то получим:

$$S = 1 - (-1) = 2.$$

Площадь полуволны получим, если положим $x = \frac{\pi}{2}$. Так как $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, то будем иметь:

$$S = 1.$$

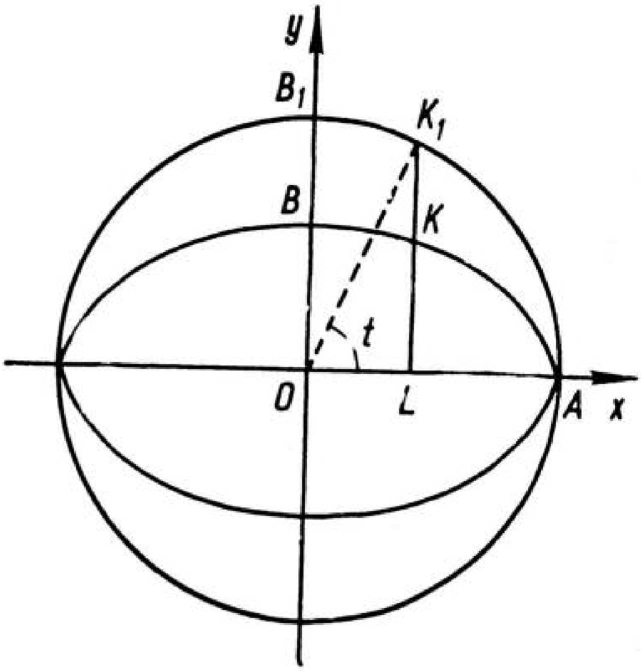

Рис. 100

Рассмотрим еще, как можно вычислить площадь эллипса, уравнение которого

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Обозначим площадь части эллипса $OBKL$ (рис. 100), ограниченную дугой эллипса $BK$, ординатой $KL$ и осями $Ox$ и $Oy$, через $S$, по предыдущему $S$ есть такая функция от $x$, производная от которой равна $y$, т. е.

$$S'_x = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

или же

$$S = \int \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Этот интеграл можно вычислить и непосредственно, но для этого нужно пользоваться такими тригонометрическими функциями, которых мы здесь не рассматривали (обратными круговыми функциями), а потому мы воспользуемся для его вычисления искусственным приемом, сводящимся к замене переменного.

Опишем из центра $O$ круг радиусом, равным большой полуоси эллипса $OA = a$, и продолжим ординату $KL$ до встречи с окружностью его в точке $K_1$. Соединим точку $K_1$ с центром $O$; очевидно, $OK_1 = a$; пусть угол $K_1OL = t$, тогда имеем:

$$OL = x = a\cos t,$$

$$KL = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t} = b\sqrt{1 - \cos^2 t} = b\sin t.$$

Теперь видим, что $y$ есть функция от $t$ ($y = b\sin t$), а $t$ есть функция от $x$ $\left(\text{если } x = a\cos t, \text{ то } t \text{ есть угол, косинус которого равен } \frac{x}{a}\right)$.

Возьмем теперь основное уравнение

$$y = S'_x$$

и выразим обе части его через новое переменное $t$.

По формуле производной от сложной функции мы имеем:

$$y = S'_x = S'_t \cdot t'_x,$$

где $t'_x$ можно найти из уравнения $x = a\cos t$; если взять производную от обеих частей по $x$, будем иметь:

$$1 = -a\sin t \cdot t'_x,$$

откуда

$$t'_x = -\frac{1}{a\sin t}.$$

Подставляя теперь в предыдущее равенство

$$y = S'_t \cdot t'_x$$

вместо $t'_x$ его величину $-\frac{1}{a\sin t}$ и заменяя $y$ через $b\sin t$, получаем:

$$b\sin t = S'_t \cdot \left(-\frac{1}{a\sin t}\right),$$

откуда

$$S'_t = -ab\sin^2 t,$$

а следовательно,

$$S = \int(-ab\sin^2 t)\,dt = -ab\int\sin^2 t\,dt.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, заменяем $\sin^2 t$ через $\frac{1-\cos 2t}{2}$ и получаем:

$$S = -ab\int\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = -\frac{ab}{2}\int(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= -\frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = -\frac{abt}{2} + \frac{ab}{4}\sin 2t + C.$$

Чтобы определить произвольное постоянное $C$, замечаем, что площадь $S$ обращается в нуль при $x = 0$; соответствующее же значение $t$ определяется из уравнения

$$x = a \cos t = 0,$$

откуда

$$\cos t = 0, \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя в формулу для $S$ эти значения, имеем:

$$0 = -\frac{\pi ab}{4} + C,$$

откуда

$$C = \frac{\pi ab}{4}.$$

Итак, имеем окончательно:

$$S = \frac{\pi ab}{4} - \frac{abt}{2} + \frac{ab}{4} \sin 2t.$$

Чтобы вычислить площадь целой четверти эллипса $AOB$, мы должны принять $x = a$, т. е. $\cos t = 1$ и $t = 0$; подставляя это значение в последнюю формулу, получаем:

$$S = \frac{\pi ab}{4},$$

а площадь всего эллипса будет $S = \pi ab$.

В частном случае, когда $a = b$, мы получаем вместо эллипса круг, и его площадь будет $S = \pi a^2$.

Рассмотрим теперь, как можно вычислить с помощью интегрирования объем тела вращения.

Пусть кривая $y = f(x)$, которую мы рассматривали выше (рис. 96), вращается вокруг оси $x$. От вращения фигуры $BAKL$ получается тело, ограниченное поверхностью вращения и двумя кругами

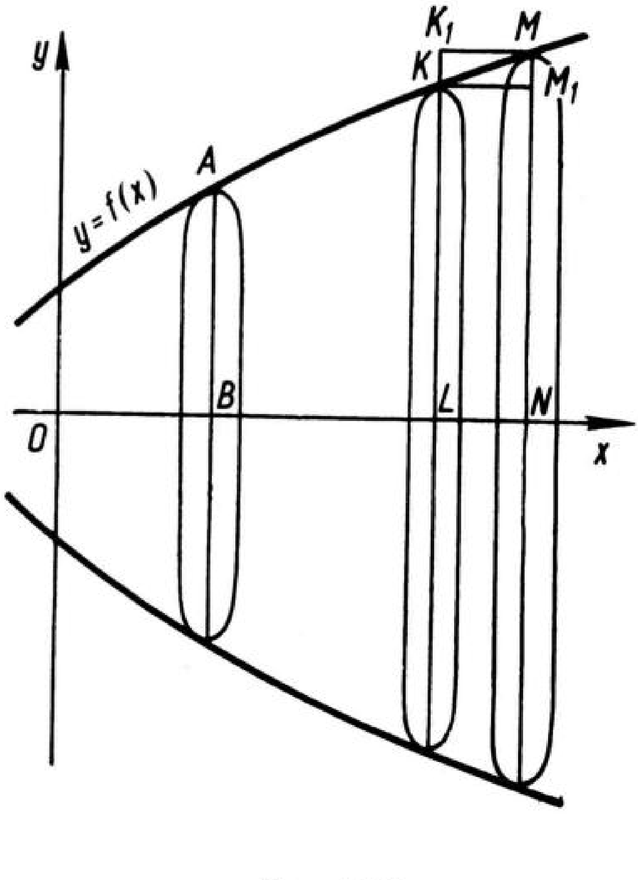


Рис. 101

(рис. 101), радиусы которых $AB = y_0$ и $KL = y$ соответствуют абсциссам $OB = x_0$ и $OL = x$.

Пусть объем этого тела будет $V$; очевидно, что $V$ изменяется с изменением абсциссы $x$, т. е. будет функцией от $x$.

Дадим $x$ некоторое приращение $\Delta x = LN$, тогда ордината $y$ получит приращение $\Delta y = MM_1$, а объем $V$ — приращение $\Delta V$, которое будет больше объема цилиндра, образованного вращением прямоугольника $KLM_1N$, но меньше объема цилиндра, образованного вращением прямоугольника $K_1LMN$. Объем первого цилиндра равен произведению площади его основания $\pi y^2$ на высоту $\Delta x$, а второго — произведению площади его основания $\pi(y + \Delta y)^2$ на ту же высоту $\Delta x$, следовательно, имеем:

$$\pi y^2 \cdot \Delta x < \Delta V < \pi (y + \Delta y)^2 \cdot \Delta x,$$

или после разделения всего неравенства на $\Delta x$:

$$\pi y^2 < \frac{\Delta V}{\Delta x} < \pi (y + \Delta y)^2.$$

Если теперь $\Delta x$ будет безгранично малым, то и $\Delta y$ безгранично мало, и разность $\pi (y + \Delta y)^2 - \pi y^2$, равная $\pi (2y + \Delta y) \cdot \Delta y$, также безгранично мала, а потому отношение $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ имеет своим пределом величину $\pi y^2$:

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{пред}} \left(\frac{\Delta V}{\Delta x}\right) = \pi y^2.$$

Но вместе с тем предел отношения $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ есть подъем (производная) от $V$, т. е. имеем:

$$V' = \pi y^2.$$

Итак, искомый объем $V$ есть такая функция, от которой производная равна $\pi y^2$; иными словами, $V$ есть интеграл (первообразная) от $\pi y^2$:

$$V = \int \pi y^2 \, dx = \int \pi \, [f(x)]^2 \, dx.$$

Предположим, что мы нашли этот интеграл, и что он выражается формулой

$$F(x) + C,$$

где $F(x)$ некоторая функция от $x$, а $C$ — произвольное постоянное.

Это произвольное постоянное мы можем определить так же, как и раньше. Очевидно, что при $x = x_0$ объем $V$ обращается в нуль, следовательно, подставляя в последнюю формулу $x_0$ вместо $x$, мы должны получить:

$$F(x_0)+C=0,$$

откуда

$$C=-F(x_0),$$

или окончательно:

$$V=F(x)-F(x_0).$$

Итак, **искомый объем тела вращения равен разности между значениями интеграла от функции $\pi y^2$, соответствующими конечному и начальному значениям $x$, или равен интегралу от $\pi y^2$, взятому между пределами $x_0$ и $x$:**

$$V=\int_{x_0}^{x}\pi y^2\,dx=F(x)-F(x_0).$$

Очевидно, что этот вывод остается в силе и тогда, когда наша функция $y$ не возрастает, а убывает, а также и тогда, когда она от возрастания переходит к убыванию или наоборот.

Применим теперь полученные выводы к вычислению объема шара. Пусть имеем четветь круга $AOB$, которая вращается вокруг горизонтального радиуса $OA$ и образует полушар (рис. 102). Уравнение дуги круга будет

$$y=\sqrt{r^2-x^2},$$

где $r$ — радиус круга.

Пусть объем целого шара будет $V$, тогда объем полушара есть $\frac{1}{2}V$, и, как мы уже знаем, он равен интегралу от функции $\pi y^2$, взятому между пределами $x_0$ и $x$ (т. е. разности значений этого интеграла при конечном и начальном значениях абсциссы $x$):

$$\frac{1}{2}V=\int_{x_0}^{x}\pi y^2\,dx=F(x)-F(x_0).$$

Так как начальное значение абсциссы $x_0=0$, а конечное $x=r$, то мы можем записать результат так:

$$\frac{1}{2}V=\int_{0}^{r}\pi y^2\,dx=F(r)-F(0).$$

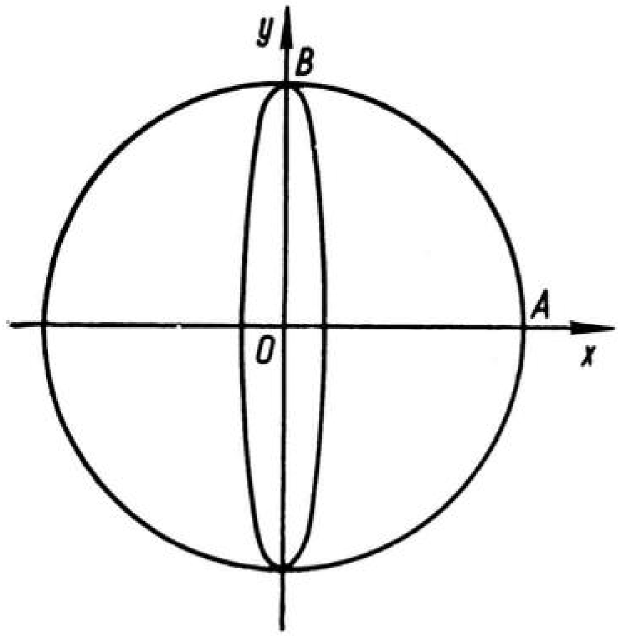


Рис. 102

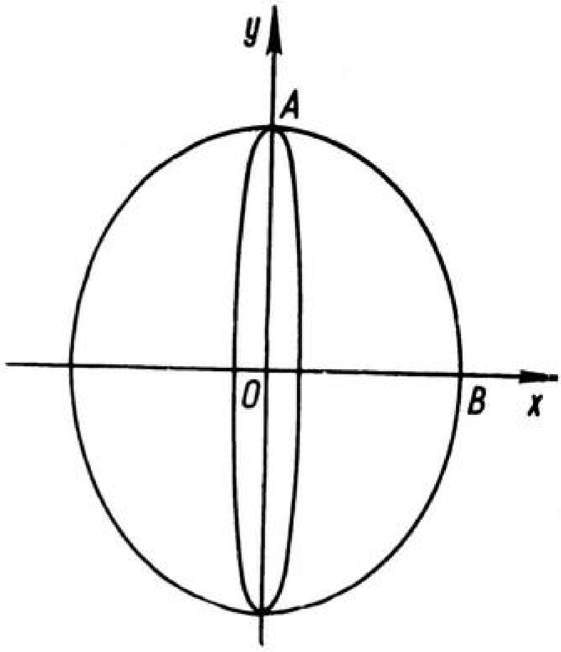


Рис. 103

Найдем теперь нашу функцию $F(x)$, или интеграл $\pi y^2$:

$$F(x) = \int \pi y^2\,dx = \int \pi (r^2 - x^2)\,dx = \pi \int (r^2 - x^2)\,dx =$$
$$= \pi \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right).$$

Подставляя в эту формулу сначала $x = r$, а потом $x = 0$, получаем:

$$F(r) = \frac{2}{3}\pi r^3, \quad F(0) = 0,$$

а следовательно,

$$\frac{1}{2}V = \int_0^r \pi y^2\,dx = \frac{2}{3}\pi r^3,$$

а объем целого шара будет: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Таким же образом можно вычислить и объем эллипсоида вращения вокруг малой оси (приблизительно эту форму имеет Земля, да и другие планеты Солнечной системы).

Пусть имеем четверть эллипса $AOB$, которая вращается около своей малой полуоси $OB = b$ и образует половину эллипсоида (рис. 103). Пусть большая полуось эллипса $OA$ равна $a$, тогда уравнение дуги эллипса будет:

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}.$$

Обозначим объем целого эллипсоида через $V$, тогда объем полуэллипсоида будет $\frac{1}{2}V$. Он равен интегралу от $\pi y^2$, взятому между пределами $x_0 = 0$ и $x = b$:

$$\frac{1}{2}V = \int\limits_{x_0}^{x} \pi y^2\,dx = F(x) - F(x_0),$$

или

$$\frac{1}{2}V = \int\limits_{0}^{b} \pi y^2\,dx = F(b) - F(0).$$

Вычисляем функцию $F(x)$, или интеграл от $\pi y^2$:

$$F(x) = \int \pi y^2 dx = \int \pi \cdot \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)\,dx = \frac{\pi a^2}{b^2} \cdot \int (b^2 - x^2)\,dx =$$
$$= \frac{\pi a^2}{b^2}\left(b^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Подставляя $x = b$ и $x = 0$, получаем:

$$F(b) = \frac{2}{3}\pi a^2 b, \quad F(0) = 0,$$

следовательно:

$$\frac{1}{2}V = \int\limits_{0}^{b} \pi y^2\,dx = \frac{2}{3}\pi a^2 b,$$

а объем всего эллипсоида будет:

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Очевидно, при $a = b$ эллипсоид обращается в шар; мы получим прежнюю формулу:

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Определим еще объем тела, полученного от вращения параболы

$$y = x^2$$

вокруг оси $x$ (рис. 104).

Пусть $KL = y$ есть одна из ординат параболы, соответствующая абсциссе $OL = x$; пусть объем тела, полученного от вращения фигуры $OKL$ вокруг оси $x$, есть $V$, тогда:

$$V = \int\limits_{x_0}^{x} \pi y^2\,dx,$$

причем начальная абсцисса $x_0 = 0$.

Находим интеграл от $\pi y^2$:

$$F(x) = \int \pi y^2\, dx = \int \pi x^4\, dx = \frac{1}{5}\pi x^5,$$

и так как $F(x_0) = 0$, то имеем окончательно:

$$V = \frac{1}{5}\pi x^5.$$

Если возьмем параболу

$$y = \sqrt{x},$$

то объем тела, полученного вращением соответствующей фигуры $OKL$ вокруг оси $x$, будет также (рис. 105):

$$V = \int_{x_0}^{x} \pi y^2\, dx,$$

причем $x_0 = 0$.

Вычисляем, как и раньше:

$$F(x) = \int \pi y^2\, dx = \int \pi x\, dx = \frac{1}{2}\pi x^2,$$

и так как и здесь $F(x_0) = 0$, то получаем: $V = \frac{1}{2}\pi x^2$.

Вычислим еще объем синусоидального тела вращения, полученного от вращения одной волны синусоиды $OKM$ (рис. 106) вокруг оси $x$. Уравнение синусоиды: $y = \sin x$.

Объем данного тела

$$V = \int_{x_0}^{x} \pi y^2\, dx,$$

причем $x_0 = 0$, $x = \pi$.

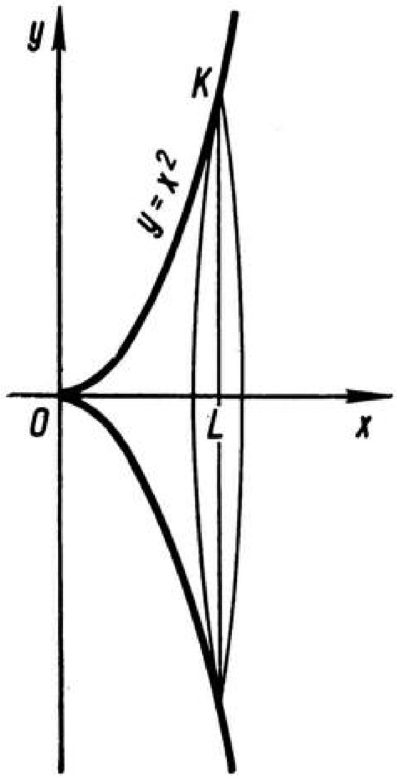


Рис. 104

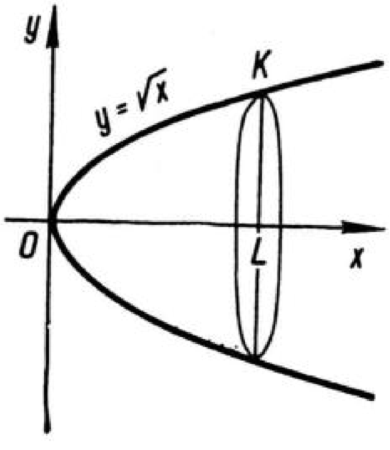


Рис. 105

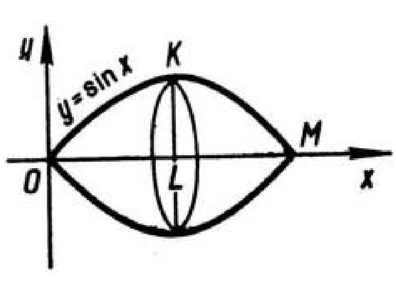


Рис. 106

Вычисляем интеграл от $\pi y^2$:

$$F(x) = \int \pi y^2\,dx = \int \pi \sin^2 x\,dx = \pi \int \sin^2 x\,dx.$$

Так как

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

то имеем:

$$F(x) = \pi \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\pi \int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\pi\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right).$$

Подставляя сюда значения $x = \pi$ и $x_0 = 0$, получаем:

$$F(\pi) = \frac{1}{2}\pi^2, \quad F(0) = 0,$$

следовательно, находим окончательно:

$$V = F(\pi) - F(0) = \frac{1}{2}\pi^2.$$

## § 60. Применение интегрирования к решению задач из физики

Мы видели выше (§ 54), что скорость движущегося тела есть производная от пути (по времени), а ускорение — производная от скорости, поэтому ясно, что задачи на нахождение пути по скорости или скорости по ускорению придется решать интегрированием.

Вычислим, например, какой путь проходит тело, движущееся с постоянным ускорением $a$. Обозначим скорость тела через $v$, так как ускорение есть производная от скорости по времени, то мы должны иметь:

$$v' = a,$$

т. е. $v$ есть функция, производная от которой равна $a$, или $v$ есть интеграл (первообразная) от $a$:

$$v = \int a\,dt = at + b,$$

где $b$ обозначает произвольное постоянное.

Смысл этого произвольного постоянного определяется из условия, что при $t = 0$ (т. е. в начальный момент) скорость $v$ имеет некоторую величину $v_0$; отсюда

$$v_0 = b$$

и

$$v = at + v_0.$$

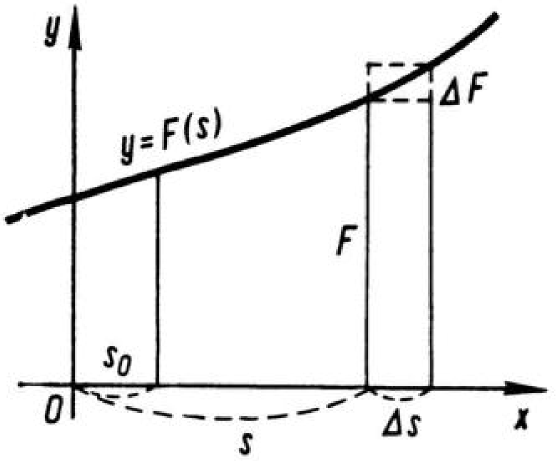


Рис. 107

Пусть теперь расстояние, пройденное телом за $t$ секунд, есть $s$; так как скорость есть производная от расстояния по времени, то мы будем иметь:

$$s' = at + v_0,$$

откуда

$$s = \int (at + v_0)\,dt = $$
$$= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C,$$

где $C$ — произвольное постоянное.

Смысл этого произвольного постоянного определяется из условия, что в начальный момент (т. е. при $t = 0$) пройденное телом расстояние имеет некоторую величину $s_0$, тогда $s_0 = C$, и окончательно имеем:

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0.$$

Это и есть, как известно, общая формула равноускоренного движения.

Покажем теперь, что интегрирование может применяться к решению и других физических задач. Пусть, например, нам нужно определить работу силы $F$, переместившей некоторое тело на расстояние $s$ в направлении своего действия, причем сила $F$ изменяется с изменением этого расстояния (и выражается какой-либо функцией, вроде рассмотренных выше). Очевидно, что и работа силы ($l$) будет также функцией от $s$; чтобы найти связь между обеими функциями, рассуждаем так. Пусть пройденное расстояние $s$ получает некоторое приращение $\Delta s$, тогда сила $F$ получит соответствующее приращение $\Delta F$, а работа силы — приращение $\Delta l$ (это изображено наглядно на рисунке 107, где абсциссы соответствуют расстояниям, а ординаты — величине силы, и ход изменения силы $F$ представлен графиком функции $y = F(s)$. Если бы сила при этом не менялась, а имела все время величину $F$, то ее работа при перемещении тела на расстояние $\Delta s$ равнялась бы $F \cdot \Delta s$; если бы сила была все время равна $F + \Delta F$, то соответствующая работа была бы $(F + \Delta F) \cdot \Delta s$; истинное же приращение работы $\Delta l$ должно заключаться между этими величинами, т. е.

$$F \cdot \Delta s < \Delta l < (F + \Delta F) \cdot \Delta s^{1},$$

[1] Или наоборот: $F \cdot \Delta s > \Delta l > (F + \Delta F) \cdot \Delta s$. Первый случай соответствует возрастанию силы $F$, второй — убыванию; рассуждение же остается одинаковым.

так как сила не остается постоянной, а меняется между $F$ и $F+\Delta F$.

Отсюда имеем:

$$F < \frac{\Delta l}{\Delta s} < F + \Delta F.$$

Если теперь примем, что $\Delta s$ есть количество безгранично малое, то и $\Delta F$ будет безгранично малым, и мы будем иметь:

$$F = \underset{\Delta s \to 0}{\text{пред}} \frac{\Delta l}{\Delta s} = l',$$

т. е. $l$ есть такая функция от $s$, производная от которой равна $F$; иначе говоря, $l$ есть интеграл от функции $F$ (по $s$):

$$l = \int F ds.$$

На рисунке этот интеграл выражает площадь, ограниченную осью абсцисс, двумя ординатами, соответствующими абсциссам $s_0$ и $s$, и дугой кривой $y = F(s)$; эта площадь называется диаграммой работы. Например, если $F = \frac{k}{s^2}$, т. е. если сила обратно пропорциональна квадрату расстояния, то имеем:

$$l = \int \frac{k}{s^2} ds = -\frac{k}{s} + C,$$

Постоянное $C$ определяется из условия, что при $s = s_0$ работа равна 0, значит:

$$0 = -\frac{k}{s_0} + C.$$

откуда

$$C = \frac{k}{s_0}.$$

Следовательно, получаем:

$$l = \frac{k}{s_0} - \frac{k}{s}.$$

Мы видим, таким образом, что дифференцирование и интегрирование дает нам возможность сравнительно просто решать самые разнообразные задачи по геометрии и физике. При помощи дифференцирования решаются задачи, в которых по данному уравнению какого-либо физического процесса (или вообще изменения) нужно найти его скорость, интегрирование же применяется к решению тех задач, где по данной скорости какого-нибудь процесса нужно отыскать его общий закон, т. е. уравнение, его определяющее. Как это делается в различных случаях, об этом можно прочесть в более подробных курсах высшей математики[1].

[1] Основные методы высшей математики — дифференцирование и интегрирование — были открыты И. Ньютоном и Г.-В. Лейбницем во второй половине XVII века.

# КОНСТАНТИН ФЕОФАНОВИЧ ЛЕБЕДИНЦЕВ

Константин Феофанович Лебединцев родился 13(25) октября 1878 г. в г. Радоме (ныне ПНР). Его отец, Феофан Гаврилович, работал в Киеве преподавателем словесности и латинского языка до 1864 г. В конце этого года он был назначен начальником учебной дирекции г. Холма, а затем переведен на ту же должность в г. Радом. После выхода на пенсию, в 1880 г., Ф. Г. Лебединцев возвратился с семьей в Киев. В марте 1888 г. он умер. Осенью того же года Константин Лебединцев поступил во 2-ю Киевскую гимназию. Это было время жестокой реакции, когда царское правительство, обеспокоенное развитием революционного движения, стремилось превратить всю систему образования в орудие борьбы с распространением материалистического мировоззрения. Учащаяся молодежь отвечала на это созданием кружков самообразования. Такой кружок возник в начале 90-х годов во 2-й Киевской гимназии[1]. В его состав входил и К. Ф. Лебединцев. А. В. Луначарский, учившийся в эти годы в 1-й Киевской гимназии, вспоминая этот период, писал: «Очень скоро у нас окрепла организация, охватившая все гимназии, реальные училища и часть женских учебных заведений»[2].

Окончив в 1896 г. гимназию, К. Ф. Лебединцев поступил на физико-математический факультет Киевского университета.

В студенческие годы он основательно изучает марксистскую литературу, влияние которой можно проследить в его статьях по литературно-критическим и общепедагогическим вопросам, а также в рукописях его лекций.

В 1900 г. К. Ф. Лебединцев окончил физико-математический факультет Киевского университета с дипломом первой степени и был рекомендован для подготовки к профессорскому званию. Однако руководство университета отказалось утвердить его кандидатуру, мотивируя это активным его участием в конфликте студентов с одним из профессоров-реакционеров.

С 1 сентября 1900 г. К. Ф. Лебединцев начал свою педагогическую работу как внештатный преподаватель математики во 2-й Киевской гимназии. В 1902 г. он перешел на должность штатного преподавателя математики в 1-е Киевское коммерческое училище.

Как известно, в начале XX в. во многих странах возникло движение за реформу преподавания математики в средней школе. Вопросам реформы большое внимание уделяло Киевское физико-математическое общество при университете, членом которого К. Ф. Лебединцев стал

---

[1] Константинов Н. А. Очерки по истории средней школы. М., 1947, с. 41.

[2] Луначарский А. В. Воспоминания и впечатления. М., 1968, с. 17.

с 1902 г. В связи с этим работа в коммерческом училище имела для К. Ф. Лебединцева особое значение. Училище находилось в ведении министерства финансов. А в подчиненных этому министерству учебных заведениях не было ни утвержденных обязательных программ, ни предписанных методов обучения. Это давало возможность молодому педагогу проверять на практике свои взгляды относительно изучения в средней школе понятия функции, а также разрабатывать новый метод обучения математике, который он впоследствии назвал конкретно-индуктивным.

К. Ф. Лебединцева глубоко волновали общие проблемы воспитания подрастающего поколения. Поэтому его первые печатные работы посвящены литературно-критическим и общепедагогическим вопросам. В 1904 г. в киевском журнале «Педагогическая мысль» была опубликована статья К. Ф. Лебединцева «Как поддержать дисциплину в средней школе?» Анализируя итоги работы школы, автор утверждал: «Последствия целого ряда принципиальных ошибок, допущенных нашей средней школою, были неисчислимы. Вышло понижение умственных интересов у целого поколения, мысль которого в течение долгих лет школьной жизни работала не над познанием окружающей среды, а над чисто словесным и весьма часто механическим запоминанием таких объектов, которые этой среде были совершенно чужды. Вышла атрофия воли у целых слоев общества, не привыкших с малолетства к активной работе, вышло подавление общественного чувства и понижение нравственных интересов»[1]. Автор считал необходимым изменить как метод, так и цель воспитания. Согласно его мнению, воспитание должно развивать привычку к систематическому труду, общественные чувства и самостоятельность. Конечная цель воспитания — формирование личности, способной не только существовать при данном порядке жизни, но и изменять его «в интересах человека и человечества».

Правление Киевского педагогического общества, в которое входил и К. Ф. Лебединцев, решило устроить обсуждение этой статьи. 14 октября 1905 г. на заседании Киевского педагогического общества К. Ф. Лебединцев выступил с рефератом по теме своей статьи. После дебатов он предложил принять постановление против применения репрессивных мер к ученикам, принимавшим участие в политических забастовках. Постановление было единогласно принято.

10 января 1906 г. в черносотенной газете «Киевлянин» появилась заметка, автор которой призывал к судебному преследованию членов Киевского педагогического общества, в частности К. Ф. Лебединцева, за постановления, принятые в октябре 1905 г. на собраниях общества. В результате общество было закрыто, а К. Ф. Лебединцев был вынужден уйти из коммерческого училища.

[1] Пед. мысль. Киев, 1904, вып. 1, с. 79—80.

После закрытия Киевского педагогического общества его правление решило организовать в Киеве издание журнала «Педагогическая неделя». Редакторами журнала были И. И. Гливенко и К. Ф. Лебединцев. В первом номере журнала, в редакционной статье «Задача настоящего момента» резко критиковалась тогдашняя школа: «Наша ныне действующая школа есть порождение ярых идеологов полицейско-бюрократического режима, мечтавшего таким путем создать целые поколения покорных этому строю благонамеренных обывателей...»[1].

В апреле 1906 г. журнал «Педагогическая неделя» закрыли, а в конце года его редакторы И. И. Гливенко и К. Ф. Лебединцев были отданы под суд. Они обвинялись в публикации материалов, призывавших к неповиновению и противодействию распоряжениям реакционной администрации «путем бойкотов и забастовок».

Опасаясь выступлений студентов и учащейся молодежи, среди которой К. Ф. Лебединцев был очень популярен благодаря своим публичным лекциям, царский суд был вынужден оправдать обвиняемых.

После судебного процесса К. Ф. Лебединцев не мог устроиться на штатную должность преподавателя математики даже в частных учебных заведениях Киева.

В 1909 г. К. Ф. Лебединцев переезжает в Москву. Царская охранка пыталась и здесь помешать ему устроиться на педагогическую работу. Однако прогрессивные московские педагоги помогли К. Ф. Лебединцеву поступить преподавателем математики в частную гимназию Е. А. Кирпичниковой. Это была единственная гимназия в Москве, в которой проводилось совместное обучение мальчиков и девочек во всех классах. Обучение велось по программе мужских гимназий. Здесь К. Ф. Лебединцев работал с 1909 по 1916 год, причем последние полтора года он заведовал этой гимназией.

В этот период ученый написал ряд статей в защиту совместного обучения, а также стал известен как талантливый составитель учебников алгебры.

В 1909 г. вышел новый по содержанию, системе и методу изложения его учебник «Курс алгебры для средних учебных заведений», основанный на параллельном развитии двух основных идей — понятия о числе и понятия о функциональной зависимости. В предисловии говорилось: «Автор придерживается убеждения, что основные положения так называемой высшей математики должны быть существенной и неотъемлемой частью общего образования, приобретаемого в школе. Для него представляется несомненным, что понятие о функции и идея функциональной зависимости, в связи с графическим способом изображения функции, является могущественным орудием познания, без которого не может теперь обходиться химик или физиолог и которое оказывает существенную пользу также и психологу, и экономисту».

В этом учебнике впервые был развит новый метод изложения курса алгебры — конкретно-индуктивный (К. Ф. Лебединцев тогда еще не пользовался этим термином).

В 1910 г. вышел «Систематический сборник задач и других упражнений по курсу алгебры», составленный К. Ф. Лебединцевым, а в 1911 г. был издан его учебник для неполной средней школы «Основы алгебры».

В 1910 г. К. Ф. Лебединцев вступил в Московский математический кружок, который возглавлял профессор Московского университета Б. К. Млодзеевский. Сделанные в этом кружке и вскоре опубликованные доклады К. Ф. Лебединцева —«Программа и метод преподавания алгебры в средней школе», «Элементарный способ вычисления прибли-

[1] Пед. неделя. Киев, 1906, № 1, с. 3.

женных логарифмов, пригодный для педагогической практики», «Опыт изложения учения о простейших функциях и их графиках в средней школе», «Вопрос о дробях в курсе арифметики»—внесли значительный вклад в методику преподавания математики.

В первом из докладов К. Ф. Лебединцев изложил свою точку зрения на цель и смысл преподавания математики в средней школе: «Я полагаю, что роль математики, как общеобразовательного предмета, основывается на том значении, которое имела и имеет эта наука в культурной жизни человечества. Математика была и является средством наиболее просто, ясно и точно выражать наши познания о мире при помощи особых символов и приобретать новые познания о тех его предметах и явлениях, свойства которых могут быть выражены при помощи этих символов...

Само собой разумеется, что высказанный мною взгляд на математику отнюдь не требует низведения ее на степень собрания сведений, полезных для решения практических вопросов; в результате школьного изучения она должна предстать перед учащимися и как орудие миропознания, и как научная система; как этого достигнуть — это вопрос программы и метода»[1].

Исходя из этой точки зрения, К. Ф. Лебединцев пришел к выводу, что программа по алгебре должна состоять из разделов, которые либо непосредственно могут быть прилагаемы к решению различных вопросов науки и практики, либо необходимы для теоретического обоснования таких разделов и приведения их в систему.

Проанализировав недостатки абстрактно-дедуктивного метода преподавания алгебры, ученый на ряде конкретных примеров показал, как избежать этих недостатков, применяя конкретно-индуктивный метод. В заключение им сформулированы основные положения конкретно-индуктивного метода. Этот доклад К. Ф. Лебединцева был опубликован в журнале «Педагогический сборник» (Петербург, 1910).

К. Ф. Лебединцев принимал деятельное участие в работе первого и второго Всероссийских съездов преподавателей математики. На первом съезде он сделал ряд докладов по актуальным вопросам методики преподавания математики. Особое внимание привлек его доклад «Метод обучения математике в старой и новой школе». В нем К. Ф. Лебединцев дал научно обоснованную критику абстрактно-дедуктивного метода обучения математике, который был широко распространен в русской школе, особенно в средней, начиная с 60-х годов XIX в. В докладе констатировалось, что этот метод является главным тормозом при изучении математики, так как способность к логическому мышлению учащихся младшего и даже среднего возраста не развита еще в такой мере, чтобы они могли осилить предлагаемую им систему отвлеченных истин. Отмечалось, в частности, что согласования научных и педагогических требований можно достичь, изменяя методы обучения соответственно возрасту учащихся, применяя конкретно-индуктивный метод на ранних ступенях обучения и постепенно вводя дедукцию на дальнейших ступенях в соответствии с развитием у учащихся способностей к логическому мышлению. «Конкретно-индуктивный метод,— писал К. Ф. Лебединцев,— играет существенную роль на всех ступенях обучения математике; но само собой разумеется, что он не только не исключает дедукции, но должен быть с нею неразрывно связан, в особенности на высших ступенях курса. По мере того, как развиваются логические способности учащихся и возникает у них потребность в прочном обосновании изу-

---

[1] Лебединцев К. Ф. Метод обучения математике в старой и новой школе. М., 1914, с. 63—64.

чаемых истин, должен иметь место переход от чисто индуктивных восприятий к более или менее сложным рассуждениям, от констатирования отдельных математических истин к установлению логической связи между этими истинами»[1].

В докладе указывалось, что, согласно данным психологии и наблюдений в ходе педагогического процесса, приблизительно на 14-м году жизни учащиеся могут сознательно пользоваться рядом умозаключений. В связи с этим предлагалось разделить курс математики на три концентра, в каждом из которых метод преподавания изменялся бы сообразно степени умственного развития учащихся. Для каждого из концентров указывались возрастные границы и метод изучения материала.

Работы К. Ф. Лебединцева «Программа и метод преподавания алгебры в средней школе» и «Метод обучения математике в старой и новой школе» представляли важный вклад в отечественную методику математики.

На втором Всероссийском съезде преподавателей математики К. Ф. Лебединцев выступил с докладом «Теория пределов в курсе геометрии».

В 1914 г. методические работы К. Ф. Лебединцева были изданы отдельной книгой «Метод обучения математике в старой и новой школе».

В 1913—1916 гг. был издан учебник К. Ф. Лебединцева «Концентрическое руководство алгебры», где материал, связанный с изучением понятия функции, как не входящий в обязательную программу, выделен в дополнительную часть «Учение о функциях, их графиках и теория пределов».

Состояние системы начального и среднего образования в России было крайне неудовлетворительно. В 1915 г. Министерство просвещения предприняло попытку провести реформу образования. В мае 1915 г. К. Ф. Лебединцев был приглашен принять участие в работе предметной комиссии по математике, которую возглавлял профессор К. А. Поссе.

В конце 1916 г. К. Ф. Лебединцев был назначен на должность окружного инспектора Петроградского учебного округа, где продолжал работу по составлению программ для реформируемой средней школы.

Влиятельные реакционные круги выступили против реформы школы; в результате их действий работа по ее подготовке была прекращена.

С первых дней после победы Великого Октября К. Ф. Лебединцев, возвратившийся в Москву, принял активное участие в строительстве новой советской школы. После переезда Народного комиссариата просвещения в Москву К. Ф. Лебединцев был членом комиссии по разработке программы по математике для трудовой школы, а в 1919 г. работал консультантом при отделе реформы школы Наркомпроса РСФСР.

В 1918 г. вышла его книга «Математика в народной школе (I ступень)», где рассматривались цели, программа и метод обучения математике в трудовой школе.

В 1918—1919 гг. литературно-издательский отдел Наркомпроса издал новый учебник К. Ф. Лебединцева «Руководство алгебры», в 2-х частях, в котором учение о функции впервые вошло в курс алгебры как органическая составная часть. «Руководство алгебры» было с одобрением встречено педагогической общественностью. Оно переиздавалось 12 раз и использовалось до 1929 г. включительно. Эта книга

[1] Лебединцев К. Ф. Метод обучения математике в старой и новой школе. М., 1914, с. 19.

была переведена на языки народов СССР, а в 1924 г. издана Госиздатом УССР на польском и немецком языках.

В предисловии к этому учебнику автор писал: «Алгебра в трудовой школе значительно отличается по своему содержанию и методу изложения от той алгебры, которая преподавалась в школах дореволюционной поры. Формальные преобразования алгебраических выражений, составляющие значительную часть традиционной программы, получают служебное, вспомогательное значение; на первом плане — знакомство с функциональной зависимостью конкретных величин, с которыми мы встречаемся в обыденной жизни, в вопросах арифметики, геометрии, природоведения и т. д.; буквенное выражение как обозначение этой функциональной зависимости и способ общего решения однородных вопросов; уравнение как метод решения конкретных задач арифметики, геометрии, физики и т. д., в связи с исследованием соответствующих функций, и наряду с этим — последовательное расширение понятия о числе. Что касается метода изложения, то он должен быть конкретно-индуктивным: всякая математическая истина, всякое новое понятие выясняется сначала на конкретных примерах, взятых из областей, знакомых учащимся, и лишь после этого и на основе рассмотренного материала устанавливаются те или иные общие положения»[1].

В мае 1919 г. К. Ф. Лебединцев был командирован в Киев для помощи Наркомпросу УССР. Здесь он работал консультантом при отделе трудовой школы Наркомпроса УССР.

В 1920 г. К. Ф. Лебединцев был назначен заместителем председателя коллегии экспертов Киевского губнаробраза. Работая в этой коллегии, он в 1921 г. составил первый учебный план для семилетней трудовой школы УССР и первую программу по математике для этой школы с обширной объяснительной запиской.

В этот период внимание К. Ф. Лебединцева привлекают вопросы содержания и методики начального обучения математике. Он пишет учебник «Счет и мера», содержащий, в отличие от традиционных учебников для начального обучения, кроме арифметики, начальные сведения по геометрии. Этот учебник был издан в 1921—1922 гг. Госиздатом УССР на украинском языке, а затем напечатан на русском языке Госиздатом РСФСР и переведен на некоторые языки народов СССР.

Принимая активное участие в многочисленных комиссиях, связанных с реформой школы на Украине, К. Ф. Лебединцев вел также большую общественную работу. Один из первых профработников-педагогов Киева еще с дореволюционного времени, он пользовался у киевского учительства большим уважением, авторитетом и любовью. В 1919—1920 гг. К. Ф. Лебединцев избирался председателем союза работников школы и культурно-просветительских учреждений, а в 1920—1921 гг. был членом правления этого профсоюза.

Для практического осуществления реформы школы требовалось срочно расширить подготовку учителей. В 1921 г. на базе Киевского университета и Высших женских курсов был создан Высший институт народного образования. К. Ф. Лебединцев вошел в комиссию по организации этого института, а весной 1921 г. начал в нем лекторскую работу. С этого времени до последних дней своей жизни он был неизменно членом правления института: его проректором, деканом факультета социального воспитания и деканом факультета профессионального образования. Этот последний факультет готовил учителей для трудовой

---

[1] Лебединцев К. Ф. Руководство алгебры. М.: Госиздат, 1924, ч. I, с. 2.

школы второй ступени, которая в УССР была отделена от школы первой ступени и называлась профшколой.

В 1923 г. К. Ф. Лебединцеву было присвоено звание профессора. В этом же году вышло в свет его экспериментальное исследование «Развитие числовых представлений у ребенка в раннем детстве».

В 1925 г. была издана книга К. Ф. Лебединцева «Введение в современную методику математики». Большое внимание в этой книге уделено теоретическому обоснованию общего метода обучения математике, названного К. Ф. Лебединцевым конкретно-индуктивным. Этот метод был разработан К. Ф. Лебединцевым одновременно с С. И. Шохор-Троцким, называвшим его «методом целесообразных задач».

В предисловии к этой книге говорилось: «Было время, когда за методикой математики почти не признавалось права на существование. Тогда многие верили в то, что достаточно изучить математику в объеме университетского курса, чтобы тем самым стать подготовленным для обучения арифметике, алгебре и геометрии детей и юношей — от порога средней школы до дверей высшей. Только для начального обучения вероятность подобного вывода ставилась под сомнение, и признавались необходимыми как методика начальной арифметики, так и ознакомление с нею будущих учителей. Эти времена прошли и назад не вернутся, и теперь все признают, что обладание знанием — это одно, а уменье передавать это знание, в особенности детям и юношам,— совершенно другое, что знать свою науку будущему учителю, конечно, необходимо, но, кроме этого, нужно еще владеть ключом к разуму и сердцу своих воспитанников, и кто не владеет этим даром от природы, тот должен его искать в современной педагогике и методике»[1].

Далее К. Ф. Лебединцев писал, что в настоящем «Введении» (и в имеющих последовать за ним «Основах современной методики математики») развивается мысль, что в деле обучения математике центральной осью и неотъемлемым условием успешной педагогической работы является конкретно-индуктивный метод, основанный на данных современной психологии и экспериментальной дидактики.

В книге дана также характеристика методов обучения математике, применявшихся в русской школе с 1703 г., когда появился первый русский печатный учебник по математике — «Арифметика» Л. Ф. Магницкого. Здесь проведен обстоятельный сравнительный анализ конкретно-индуктивного и абстрактно-дедуктивного методов обучения математике. Характеризуя первый из них, автор пишет: «... Конкретно-индуктивный метод, построенный на переходе от реальных, непосредственно наблюдаемых учащимися вещей к умозаключениям и выводам, влечет за собой необходимость все обучение математике построить на неразрывной связи между знанием и жизнью и видеть в математике прежде всего не гимнастику ума, а орудие для познания окружающего мира, для изучения функциональной зависимости величин, нами в этом мире наблюдаемых. Математика на основе конкретно-индуктивного метода — это символический язык, на котором мы можем наиболее просто, сжато и точно выражать законы природы — функциональные соотношения воспринимаемых нами вещей, а обладая этим познанием, мы прилагаем затем эти законы к решению самых разнообразных вопросов науки и практики. Математика, таким образом, перестает быть самодовлеющей цепью логических умозаключений; изучение ее неизбежно завершается рядом приложений к естествознанию, физике, технике, географии, обществоведению, и знакомство с этими приложе-

---

[1] Лебединцев К. Ф. Введение в современную методику математики. К.: Госиздат Украины, 1925, с. 3.

ниями помогает учащимся оценить ту огромную роль, которую играла и играет математика в культурной жизни человечества, то место, которое она занимает в современной технике и в борьбе человека с природой»[1].

К. Ф. Лебединцеву не удалось закончить задуманную работу «Основы современной методики математики», он успел написать только три главы, в том числе главу «Основные положения методики учения о функциях и элементов анализа в школах второй ступени». В этой его работе говорится: «Параллельно с изучением ряда разнообразных функций учащиеся должны постепенно знакомиться с учением о пределе и производной функции, чтобы тем самым приобрести новый могущественный метод для исследования функций и решения многих вопросов геометрии и естествознания, иначе не поддающихся точной математической обработке.

С этой целью одновременно с изучением алгебраических функций $\left(y=\frac{a}{x},\ y=\sqrt{a^2-x^2} \text{ и т. д.}\right)$ учащиеся приступают к вопросам об арифметической и геометрической прогрессии, а отсюда переходят к понятию о безгранично больших и безгранично малых величинах и к учению о пределе, с его приложениями в геометрии и физике. С понятием о безгранично больших и безгранично малых величинах следует знакомиться на подходящих конкретных случаях, чтобы учащиеся могли и лучше уяснить себе сущность этих понятий, и обнаружить свое творчество в подыскании соответствующих примеров, для этого обильный материал могут дать прогрессии, а равно и подходящие процессы изменений из области геометрии и физики (напр., безграничное убывание стороны правильного вписанного многоугольника при безграничном увеличении числа его сторон, безграничное убывание синуса и тангенса при таком же убывании угла, безграничное убывание пройденного пути при соответственном уменьшении времени движения и т. д.). И необходимые для дальнейшего свойства безгранично малых величин, например теоремы о сумме безгранично малых, о произведении безгранично малой на безгранично малую или на постоянную величину и т. п., учащиеся лучше всего уясняют себе, разбирая и составляя предварительно подходящие конкретные числовые примеры и лишь затем переходя к общему выводу.

Понятие о пределе по существу не является трудным, но для надлежащего и обстоятельного с ним ознакомления требует разработки и иллюстрации на многочисленных конкретных примерах из арифметики, геометрии и физики; подходящими иллюстрациями являются, например, вопросы: о пределе угла правильного многоугольника при безграничном возрастании числа его сторон, о пределе апофемы правильного вписанного многоугольника при том же условии, о пределе косинуса или секанса при безграничном убывании угла, о пределе суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, наконец, вопросы о пределе углового коэффициента секущей линии к параболе при безграничном приближении второй точки пересечения к первой и о пределе средней скорости равноускоренного движения при безграничном убывании времени движения... При этом для дальнейших приложений учащиеся должны ознакомиться и с некоторыми основными теоремами о пределах (например, о единственности предела, о пределе суммы и произведения, о постоянной величине, заключенной между двумя

---

[1] Лебединцев К. Ф. Введение в современную методику математики, с. 38.

безгранично близкими переменными); это даст им возможность разрешать целый ряд вопросов и геометрии, и физики — о длине окружности и площади круга, о круглых телах, об объеме пирамиды, о величине пути, проходимого телом при равноускоренном движении, и т. д.

Вместе с тем у учащихся будет налицо достаточный запас знаний и представлений для того, чтобы углубиться в вопрос о производной функции и начать ознакомление с основами дифференциального и интегрального исчисления... Здесь же учащиеся уяснят себе должным образом и понятие о непрерывности функции, с которым раньше у них связывалось лишь наглядное геометрическое представление о непрерывности (или разрыве) соответствующей кривой; они установят, что геометрическому факту непрерывности графика соответствует определенный аналитический признак, именно наличность безграничного убывания приращения функции при безграничном убывании приращения переменного, и этим именно признаком определят самое понятие о непрерывности функции».

Последней работой К. Ф. Лебединцева стала предлагаемая вниманию читателей книга, в которой он осуществил свой давний замысел: конкретно-индуктивным методом изложить систематический курс алгебры и начал анализа.

25 сентября 1925 г. после непродолжительной, но тяжелой болезни К. Ф. Лебединцев умер.

В деятельности К. Ф. Лебединцева объединялись глубокая эрудиция научного работника и энтузиазм педагога-новатора, умело применявшего достижения науки к решению педагогических вопросов.

В 1978 г. по предложению УССР 100-летняя годовщина со дня рождения К. Ф. Лебединцева была отмечена в календаре ЮНЕСКО «Празднование годовщин великих людей и событий».

*Е. К. Лебединцева*

## СОДЕРЖАНИЕ

*Константин Феофанович Лебединцев*

**Преподавание алгебры и начал анализа**

Пособие для учителей

Зав. редакцией математики *О. П. Бондаренко.* Редактор *О. П. Бондаренко.* Литредактор *Г. В. Брезницкая.* Художеств. редактор *П. В. Кузь.* Обложка художника *А. В. Пермякова.* Технич. редактор *А. Г. Фридман.* Корректоры *А. П. Наказнюк, И. Н. Ситниченко.*

Информ. бланк № 4118

Сдано в набор 18.10.83. Подписано к печати 29.03.84. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага №3 типогр. Гарнитура литерат. Способ печати высокий. Условн. лист. 13,02. Усл. кр.-отт. 13,02. Уч.-изд. лист. 12,25. Тираж 25 000 экз. Изд. № 28494. Зак. № 3-425. Цена 65 к.

Издательство «Радянська школа», 252053, Киев, Ю. Коцюбинского, 5.

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе, 310057. Харьков, Донец-Захаржевского, 6/8.