БИБЛІОТЕКА НОВАГО ВОСПИТАНІЯ И ОБРАЗОВАНІЯ.
Подъ редакціей И. Горбунова-Посадова.
Выпускъ XCIX.

К. Ѳ. Лебединцевъ.

МЕТОДЪ ОБУЧЕНІЯ МАТЕМАТИКѢ

ВЪ СТАРОЙ И НОВОЙ ШКОЛѢ.

СОБРАНІЕ СТАТЕЙ
ПО ВОПРОСАМЪ ПРЕПОДАВАНІЯ МАТЕМАТИКИ.

Типо-литографія Т-ва И. Н. КУШНЕРЕВЪ и К°. Пименовская ул., соб. д.
МОСКВА — 1914.

БИБЛІОТЕКА НОВАГО ВОСПИТАНІЯ И ОБРАЗОВАНІЯ.
Подъ редакціей ***И. Горбунова-Посадова.***
Выпускъ XCIX.

К. Ѳ. Лебединцевъ.

МЕТОДЪ ОБУЧЕНІЯ МАТЕМАТИКѢ
ВЪ СТАРОЙ и НОВОЙ ШКОЛѢ.

СОБРАНІЕ СТАТЕЙ
ПО ВОПРОСАМЪ ПРЕПОДАВАНІЯ МАТЕМАТИКИ.

Тиnо-литографія Т-ва И. Н. КУШНЕРЕВЪ и Кº. Пименовская ул., соб. д.
Москва—1914.

ОТЪ АВТОРА.

Матеріаломъ для настоящаго сборника послужили доклады, читанные авторомъ въ Московскомъ Математическомъ Кружкѣ и на 1-мъ и 2-мъ всероссійскихъ съѣздахъ преподавателей математики, а отчасти и лекціи, читанныя на лѣтнихъ учительскихъ курсахъ въ Саратовѣ; эти доклады и лекціи печатались въ 1910—13 гг. въ видѣ отдѣльныхъ статей въ журналахъ «Математическое Образованіе», «Народный Учитель», «Для Народнаго Учителя», «Педагогическое Обозрѣніе» и «Педагогическій Сборникъ, изд. при Главн. Упр. военно-учебн. завед.», за исключеніемъ послѣдней статьи, которая появляется въ печати впервые. Остальныя статьи подверглись теперь небольшимъ редакціоннымъ измѣненіямъ и дополненіямъ.

К. Лебединцевъ.

Методъ обученія математикѣ въ старой и новой школѣ.

Мы въ свое время много смѣялись надъ практикой классической школы, вмѣнявшей въ обязанность учащимся переводить съ русскаго на греческій языкъ такія, напр., фразы: „плоды масличныхъ деревъ были благородны“; „души ростовщиковъ были потрясены силою пассатныхъ вѣтровъ“, или даже: „лѣнивые люди похожи на мореплавателей, ибо и тѣ и другіе, хотя и постоянно плаваютъ, но проплытое оставляютъ ничѣмъ не удобнѣе непроплытаго“.

Но и въ практикѣ современнаго намъ преподаванія математики можно указать такіе же перлы. Вотъ, напр., условіе задачи 370-й изъ сборника Ипатова [1]), появившагося въ свѣтъ въ 1910 г. и черезъ годъ выпущеннаго вторымъ изданіемъ:

„Нанятъ слуга съ условіемъ платить ему за каждый слѣдующій мѣсяцъ больше предыдущаго на 80 копеекъ; когда истекъ тотъ мѣсяцъ, за который онъ получилъ 16 руб. 50 к., то онъ разсчиталъ, что тѣ же деньги за все прослуженное время онъ могъ бы заработать раньше на число мѣсяцевъ, логариѳмъ котораго при основаніи $2^{0,6}$ равенъ 1,(6), если бы ему каждый мѣсяцъ платили столько рублей, сколько единицъ въ членѣ разложенія бинома,

$$\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+\sqrt[7]{x^5}\right)^{10},$$

---

[1]) В. М. Ипатовъ. Сборникъ алгебраическихъ задачъ (повторительный курсъ средн. уч. заведеній).

содержащемъ первую степень x, при $x = 0,1$. Когда слуга сдѣлалъ этотъ расчетъ?"

А вотъ еще задача 3053-я изъ задачника Тихомирова [1]), вышедшаго въ 1909 г. седьмымъ изданіемъ:

„Въ тотъ моментъ, когда поѣздъ поднялся на вершину длиннаго подъема, послѣдній вагонъ оторвался и началъ спускаться назадъ, пробѣгая въ первую секунду 5 арш., во вторую 15 арш., въ третью 25 арш. и т. д. Въ концѣ 12-й минуты вагонъ достигъ нижней точки подъема и разбился. Какова была скорость (его) въ послѣднюю секунду?"

Соль этой задачи не сразу даетъ себя почувствовать. Но если произвести вычисленіе согласно условію, то выходитъ во 1-хъ, что въ послѣднюю секунду вагонъ долженъ былъ пролетѣть разстояніе около 5 верстъ (7195 аршинъ; это число дано и въ спискѣ отвѣтовъ, что исключаетъ возможность предполагать опечатку въ условіи); во 2-хъ, что весь подъемъ, съ котораго скатился этотъ вагонъ въ теченіе 12 минутъ, имѣлъ въ длину 1728 верстъ, т.-е. былъ немногимъ короче, чѣмъ разстояніе отъ Петербурга до Одессы; въ 3-хъ, что подъемъ этотъ, если считать его за наклонную плоскость, представлялъ крутую гору съ уклономъ не менѣе 46 градусовъ, а въ вышину долженъ былъ превосходить самыя высокія горы, имѣющіяся на земной поверхности, приблизительно въ полтораста разъ. Остается вообразить себѣ, насколько солиднымъ должно быть то препятствіе, о которое въ концѣ концовъ разбился данный вагонъ, мчавшійся съ такой головокружительной быстротой!

Конечно, такого рода задачи, выходящія изъ ряда вонъ по своей несообразности, являются исключеніями. Но эти исключенія хорошо характеризуютъ ту систему, на почвѣ которой онѣ выросли. Если пересмотрѣть сборники задачъ по всѣмъ отдѣламъ математики, наиболѣе употребительные въ нашей средней школѣ, то можно удивиться изобилію чисто формальныхъ упражненій и задачъ отвлеченнаго характера, а въ задачахъ, взятыхъ

---

[1]) Е. Н. Тихомировъ. Примѣры и задачи по начальной алгебрѣ. Систематическое пособіе для среднихъ учебн. заведеній.

какъ будто изъ жизни, найти немало примѣровъ рѣзкаго расхожденія съ дѣйствительностью. Если же взять какой-либо изъ сборниковъ, служащихъ для подготовки къ выпускнымъ экзаменамъ, или одно изъ собраній задачъ, предлагавшихся на этихъ экзаменахъ въ послѣднія 10—15 лѣтъ, то можно убѣдиться, что входящія въ нихъ задачи носятъ сплошь отвлеченный характеръ, и по большей части (какъ и приведенная задача изъ сборника Ипатова), состоятъ изъ ряда отдѣльныхъ вопросовъ, чисто механически связанныхъ въ одно нестройное и неудобопроизносимое цѣлое. И вообще матеріалъ для практическихъ упражненій по математикѣ въ нашей средней школѣ (да и не только въ средней), какъ показываютъ примѣняемые въ ней задачники, страдаетъ двумя недостатками: абстрактностью содержанія и отсутствіемъ связи съ жизнью.

Подобнымъ же образомъ обстоитъ дѣло и съ теоретическимъ курсомъ математики. Какъ извѣстно, въ руководствахъ, составленныхъ примѣнительно къ традиціонному методу обученія, дается обыкновенно такъ называемое систематическое изложеніе того или иного отдѣла математики въ видѣ логической цѣпи истинъ, опирающихся въ концѣ концовъ на возможно меньшее число аксіомъ и соглашеній. Такой способъ изложенія принято называть научнымъ. Правильнѣе было бы назвать его наукообразнымъ, такъ какъ, разумѣется, ни въ одномъ самомъ строго систематическомъ учебникѣ для средней школы не излагаются основанія ариѳметики въ такомъ видѣ, какъ они формулированы, напр., у Дедекинда или основанія геометріи по Гильберту, а всегда допускается большее или меньшее число различныхъ „нестрогостей". Кто знакомъ съ наиболѣе употребительными учебниками, составленными въ традиціонномъ духѣ, тотъ знаетъ, что подчасъ эти „нестрогости" появляются даже тамъ, гдѣ безъ нихъ отлично можно обойтись, и что существуютъ такіе злополучные отдѣлы въ курсѣ элементарной математики, традиціонное изложеніе которыхъ представляетъ одну сплошную „нестрогость": напр., ученіе о „кажущейся неопредѣленности" въ алгебрѣ или въ геометріи ученіе объ отношеніяхъ несоизмѣримыхъ отрѣзковъ, о длинѣ окружности и площади круга, о поверхностяхъ и объемахъ круглыхъ тѣлъ. Но это обстоятельство, т.-е. наличность чисто-научныхъ промаховъ во многихъ традиціонныхъ учебникахъ, не является еще самымъ серьезнымъ ихъ недостаткомъ; болѣе существенно то, что всѣ они, въ томъ числѣ и безупречные съ научной точки зрѣнія, изложены съ явнымъ и подавляющимъ преобладаніемъ абстракціи надъ конкретнымъ матеріаломъ и логики надъ интуиціей: сначала предлагаются, въ чисто отвлеченной формѣ, общія опредѣленія и положенія, и лишь затѣмъ они поясняются на частныхъ примѣрахъ, зачастую тоже носящихъ отвлеченный характеръ; доказываются при помощи логическихъ умозаключеній подчасъ даже и такія истины, несомнѣнность которыхъ кажется учащимся совершенно очевидной. Вотъ этотъ-то абстрактно-дедуктивный методъ изложенія и является главнымъ тормозомъ при изученіи математики въ средней школѣ, такъ какъ способность къ логическому мышленію у учащихся младшаго и даже средняго возраста не развита еще въ такой мѣрѣ, чтобы они могли осилить предлагаемую имъ систему отвлеченныхъ истинъ. Правда, практика преподаванія не всегда слѣдуетъ за традиціоннымъ учебникомъ и допускаетъ, въ особенности въ младшихъ классахъ, довольно существенныя отступленія въ сторону наглядности и удобопонятности изложенія, но тамъ, гдѣ традиціонный методъ проводится во всей его неприкосновенности—тамъ математика становится для учащихся скучнымъ, сухимъ и необычайно тяжелымъ предметомъ, такимъ самымъ жупеломъ, какимъ являлись въ былыя времена древніе языки съ ихъ грамматикой и экстемпораліями.

Справедливость вышеизложеннаго признаютъ обыкновенно и сами сторонники традиціоннаго метода преподаванія. Они соглашаются, что наша школьная математика, излагаемая въ видѣ системы отвлеченныхъ истинъ, усваивается учащимися съ большимъ трудомъ и по окончаніи курса быстро исчезаетъ изъ памяти послѣднихъ. Но они считаютъ, что эти соображенія все же не колеблютъ основъ традиціонной системы. Они полагаютъ, что учащіеся, изучая математику въ ея систематическомъ изложеніи, получаютъ значительное формальное развитіе умственныхъ способностей, совершенно независимо отъ того, приложимы ли къ чему-нибудь изучаемыя ими истины и удерживаются ли онѣ въ памяти послѣ окончанія школы. И въ этомъ именно формальномъ умственномъ развитіи они видятъ цѣль и смыслъ изученія математики въ школѣ.

Вотъ эта вѣра въ безусловное развивающее вліяніе математики и представляетъ собою тотъ базисъ, на которомъ держится традиціонная система преподаванія математики уже столько лѣтъ. Намъ и предстоитъ разобрать, насколько эта вѣра обоснована.

Прежде всего нужно выяснить точно и опредѣленно, что собственно подразумѣвается здѣсь подъ формальнымъ умственнымъ развитіемъ. Когда утверждаютъ, что изученіе математики способствуетъ формальному умственному развитію учащихся, то этимъ обыкновенно хотятъ сказать, что лицо, изучавшее математику, сравнительно съ лицомъ, не изучавшимъ таковой, окажется при прочихъ равныхъ условіяхъ болѣе способнымъ составлять правильныя сужденія, умозаключенія и выводы не только въ области математики и ея приложеній, но и въ другихъ областяхъ науки и жизни.

Это утвержденіе должно бы быть обосновано или на результатахъ опыта, или на данныхъ психологическаго анализа. Но, какъ извѣстно, прямыхъ опытовъ, подтверждающихъ такую роль математики въ дѣлѣ умственнаго развитія, мы не имѣемъ: экспериментальная психологія и педагогика трудятся пока еще надъ разрѣшеніемъ болѣе простыхъ проблемъ, и если мы можемъ разсчитывать въ будущемъ на освѣщеніе интересующаго насъ вопроса экспериментальными данными, то все же въ настоящемъ такихъ данныхъ у насъ еще нѣтъ. Данныя же простого наблюденія говорятъ, что учащіеся, съ успѣхомъ занимающіеся математикой, не всегда оказываются способными къ изученію другихъ наукъ, и что подчасъ даже выдающіеся математики обнаруживаютъ весьма невысокій умственный уровень, когда имъ приходится составлять сужденія въ какой-либо области знаній за предѣлами своей спеціальности. Конечно, выдающіеся успѣхи въ математикѣ иной разъ совмѣщаются съ широкимъ умственнымъ развитіемъ и въ другихъ областяхъ, но уже одна наличность вышеупомянутыхъ фактовъ односторонняго умственнаго развитія въ области математики заставляетъ заключать, что традиціонное мнѣніе о безусловномъ развивающемъ вліяніи математики не вполнѣ согласуется съ дѣйствительностью.

Обратимся теперь къ даннымъ психологическаго анализа. Какъ извѣстно, въ современной психологіи имѣются нѣкоторыя основанія утверждать, что упражненіе какого-либо частнаго вида данной психической функціи сопровождается развитіемъ не только этого вида функціи, но и другихъ ея категорій, или, какъ иначе говорятъ, сопровождается сопутствующимъ упражненіемъ соотвѣтственной общей функціи. Такъ, напр., Мейманъ, производя эксперименты надъ памятью, нашелъ, что упражненіе въ заучиваніи безсмысленныхъ слоговъ сопровождается усиленіемъ памяти не только на безсмысленные слоги, но также и нѣкоторымъ усиленіемъ всѣхъ другихъ видовъ памяти, при чемъ это „сопутствующее упражненіе“ болѣе всего сказывалось на видахъ памяти, родственныхъ съ даннымъ, напр., памяти на отдѣльныя буквы, числа, вообще при усвоеніи матеріала, запоминаемаго болѣе или менѣе механически; на остальныхъ же видахъ памяти „сопутствующее упражненіе“ сказывалось въ меньшей и меньшей мѣрѣ [1]). При этомъ Мейманъ прибавляетъ, что это явленіе—сопутствующее упражненіе родственныхъ видовъ дѣятельности—„есть, вѣроятно, общее психофизическое явленіе, такъ какъ мы наблюдаемъ его во всѣхъ психическихъ и физическихъ функціяхъ [2]).

Взгляды Меймана раздѣляются не всѣми психологами, но допустимъ, что они безспорны, и посмотримъ, возможно ли на нихъ обосновать традиціонную точку зрѣнія. Въ самомъ дѣлѣ, исходя изъ вышесказаннаго, мы можемъ признать вѣроятнымъ, что изученіе математики сопровождается развитіемъ не только математическаго мышленія, но и другихъ видовъ мышленія, болѣе или менѣе родственныхъ послѣднему. Вся суть теперь въ томъ, какіе же виды мышленія мы можемъ считать родственными съ математическимъ. Такъ какъ въ математикѣ мы имѣемъ дѣло преимущественно съ дедукціей, то мы въ правѣ ожидать, что изученіе математики скажется въ развитіи дедуктивныхъ видовъ мышленія, возможность же сопутствующаго упражненія и въ области индук-

---

[1]) *Мейманъ*. Лекціи по экспериментальной педагогикѣ (перев. подъ редакц. Виноградова), ч. II, стр. 237—240.

[2]) Тамъ же, стр. 241.

тивнаго мышленія будетъ весьма ограничена, такъ какъ въ математикѣ индукція требуетъ сравнительно небольшого числа простыхъ наблюденій, въ другихъ же наукахъ она совершается при посредствѣ многочисленныхъ и сложныхъ наблюденій и опытовъ.

А кромѣ того и самый процессъ дедуктивнаго мышленія не можетъ считаться вполнѣ тождественнымъ во всѣхъ областяхъ знанія, такъ какъ составленіе меньшей посылки силлогизма требуетъ всегда констатированія нѣкотораго факта, а для этого необходимо предварительное наблюденіе или самонаблюденіе, т.-е. процессъ, который въ различныхъ случаяхъ требуетъ дѣятельности весьма различныхъ сторонъ человѣческаго организма и психики. Пояснимъ это примѣромъ.

Пусть математикъ вычисляетъ произведеніе 53.47 и строитъ такой силлогизмъ: „произведеніе суммы какихъ-либо двухъ чиселъ на ихъ разность равно разности квадратовъ этихъ чиселъ; въ данномъ случаѣ множимое 53 представляетъ сумму двухъ чиселъ $(50+3)$, а множитель 47 — разность тѣхъ же чиселъ: слѣдовательно, искомое произведеніе должно быть равно $50^2 - 3^2$“. Чтобы такой силлогизмъ могъ сложиться въ умѣ этого математика, необходима наличность двухъ условій: во 1-хъ, онъ долженъ констатировать фактъ, что первое изъ данныхъ чиселъ является суммою двухъ чиселъ, а второе—ихъ разностью; во 2-хъ, въ его психикѣ должна существовать ассоціація между представленіемъ объ этомъ фактѣ и о тождествѣ искомаго произведенія и разности квадратовъ указанныхъ чиселъ.

Съ этимъ силлогизмомъ сравнимъ другой. Пусть присяжный засѣдатель при разборѣ дѣла объ убійствѣ приходитъ къ заключенію, что убійство имѣло мѣсто въ состояніи необходимой обороны, и разсуждаетъ такъ: „если кто-либо совершитъ убійство въ состояніи необходимой обороны, то въ дѣяніи его нѣтъ состава преступленія; доказано, что подсудимый Сидоровъ убилъ Петрова въ состояніи необходимой обороны; слѣдовательно, въ его дѣйствіи нѣтъ состава преступленія“. Такой силлогизмъ возможенъ въ умѣ даннаго присяжнаго засѣдателя опять же при наличности двухъ условій: во 1-хъ, онъ долженъ констатировать фактъ, что убійство совершенно въ состояніи необходимой обороны; во 2-хъ, въ его умѣ должна быть прочная ассоціація между представленіями объ этомъ фактѣ и объ отсутствіи состава преступленія.

Нетрудно видѣть, что тѣ психологическія предпосылки, которыя въ обоихъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ обусловливаютъ возможность дѣйствительнаго возникновенія данныхъ силлогизмовъ, не могутъ считаться тождественными: и констатированіе факта требуетъ совершенно разнородныхъ наблюденій, и необходимыя ассоціаціи исходятъ изъ различныхъ областей. Поэтому мы въ правѣ сказать, что не всѣ виды дедуктивнаго мышленія могутъ считаться одинаково родственными другъ другу, а слѣдовательно, не всѣ виды дедуктивнаго мышленія могутъ въ равной мѣрѣ подвергаться вліянію сопутствующаго упражненія отъ изученія математики. Можно, напр., ожидать, что изученіе математики разовьетъ способность къ правильному мышленію въ области теоретической механики или астрономіи, вообще такихъ наукъ, положенія которыхъ находятся въ тѣсной ассоціативной связи съ математическими или которыя сходны съ математикой по способу установленія фактовъ; но сопутствующеее умственное развитіе въ другихъ областяхъ знанія можетъ сказываться въ меньшей и меньшей мѣрѣ или вовсе не будетъ имѣть мѣста; напр., изученіе математики врядъ ли окажется подготовкой къ усвоенію сравнительнаго языкознанія, и для послѣдней цѣли, несомнѣнно, гораздо важнѣе предварительное изученіе отдѣльныхъ языковъ. Такимъ образомъ, развитое математическое мышленіе, съ точки зрѣнія педагогики, есть хотя и весьма важный, но спеціальный навыкъ, обладаніе которымъ еще не гарантируетъ общаго умственнаго развитія; послѣднее пріобрѣтается только болѣе или менѣе равномѣрной работой въ различныхъ областяхъ знанія.

Изъ установленныхъ нами положеній мы можемъ теперь сдѣлать одинъ выводъ, крайне важный для педагогической практики. Именно, мы можемъ заключить, что, упражняя учащихся въ передѣлкѣ громоздкихъ отвлеченныхъ примѣровъ и въ рѣшеніи вычурныхъ, неестественныхъ задачъ въ родѣ тѣхъ, которыя были цитированы во вступленіи, мы, пожалуй, совершенствуемъ ихъ мысль въ дѣлѣ расшифровки математическихъ и иныхъ ребусовъ и головоломокъ, но отнюдь не дѣлаемъ ихъ болѣе способными къ правильному мышленію въ какой-либо области, имѣющей отношеніе къ жизни или наукѣ. Иначе говоря, мы приходимъ къ одному изъ кардинальныхъ положеній современной методики математики, именно: если мы желаемъ, чтобы учащіеся получили благодаря изученію математики возможно болѣе широкое умственное развитіе, то мы должны упражнять ихъ математическое мышленіе на такомъ матеріалѣ, который имѣлъ бы прямую связь съ областью другихъ наукъ и съ явленіями жизни въ самомъ обширномъ смыслѣ этого слова.

Этимъ положеніемъ опредѣляется желательный для новой школы характеръ практическихъ упражненій по математикѣ. На ряду съ этимъ необходимо установить соотвѣтственную точку зрѣнія и на преподаваніе теоретическаго курса ея.

Какъ было уже упомянуто, традиціонный абстрактно-дедуктивный методъ преподаванія математики на практикѣ сталкивается съ весьма серьезными препятствіями: съ одной стороны, дедуктивныя доказательства многихъ важныхъ истинъ очень сложны и непосильны для учащихся (напр., доказательство неизмѣняемости произведенія отъ перемѣны порядка сомножителей въ курсѣ ариѳметики цѣлыхъ чиселъ); съ другой стороны, учащіеся никакъ не могутъ взять въ толкъ, зачѣмъ доказываются при помощи разсужденій такія истины, справедливость которыхъ имъ и безъ того очевидна (напр., теорема о томъ, что на данную прямую изъ точки, лежащей внѣ ея, можно опустить только одинъ перпендикуляръ). Поэтому естественно поставить вопросъ: должны ли мы при преподаваніи математики излагать ее учащимся въ систематической формѣ, возможно болѣе приближающейся къ ея научному изложенію, или необходимы, изъ педагогическихъ соображеній, отступленія отъ этой формы, и если да, то въ какой мѣрѣ?

Необходимость считаться съ психологіей обучающихся математикѣ дѣтей и юношей сдѣлалась въ настоящее время настолько очевидной, что врядъ ли кто станетъ стоять за абстрактно-дедуктивный методъ на протяженіи всего курса средней школы; но какъ именно сочетать въ этомъ курсѣ научныя и педагогическія точки зрѣнія,— этотъ вопросъ является въ настоящее время самымъ жгучимъ. Находятся и такіе сторонники реформы, которые предлагаютъ не считаться вовсе съ научными данными и считаютъ допустимыми въ преподаваніи неточныя и даже завѣдомо невѣрныя объясненія, лишь бы только эти объясненія казались понятными для учащихся; а равно допускаютъ и догматическое сообщеніе тѣхъ истинъ, объясненіе которыхъ слишкомъ затруднительно [1]). Разумѣется, эти предложенія, какими бы заманчивыми и на видъ прогрессивными доводами они ни мотивировались, должны быть рѣшительно отвергнуты. Догматизмъ въ преподаваніи всегда оставляетъ нѣкоторую неудовлетворенность въ сознаніи учащихся и ни къ чему, кромѣ механическаго запоминанія, привести не можетъ; а если школа вступитъ на дорогу завѣдомо неточныхъ и невѣрныхъ объясненій, то она рискуетъ совершенно утратить въ глазахъ учащихся свой авторитетъ: рано или поздно учащійся узнаетъ, что *нѣкоторыя* сообщенныя ему свѣдѣнія ошибочны, и невольно заподозритъ достовѣрность *всего* того, чему онъ научился въ школѣ.

Напротивъ, необходимо установить категорически и безъ всякихъ исключеній, что въ учебномъ предметѣ мы не можемъ ни утверждать чего-либо противорѣчащаго тому, что утверждается въ наукѣ, ни пользоваться такими способами объясненій, которые содержатъ логическій дефектъ и потому не могутъ считаться пріемлемыми съ научной точки зрѣнія. Въ этомъ, т.-е. въ отсутствіи противорѣчій между наукой и учебнымъ предметомъ, и заключается необходимая научность курсовъ, предлагаемыхъ въ средней школѣ. Но мы можемъ и должны въ подходящихъ случаяхъ вмѣсто дедуктивнаго доказательства той или иной математической истины заставлять учащихся убѣдиться въ справедливости ея индуктивнымъ путемъ на рядѣ цѣлесообразно подобранныхъ конкретныхъ примѣровъ. Вмѣсто того, чтобы доказывать учащимся перваго класса при помощи логическихъ умозаключеній перемѣстительный законъ умноженія, достаточно дать имъ продѣлать нѣкоторое число примѣровъ на умноженіе одинаковыхъ

---

[1]) См., напр., „Труды перваго всероссійскаго съѣзда учителей городскихъ по Положенію 1872 года училищъ“, т. II, ч. 2, стр. 12, рѣчь проф. химіи Алексѣева.

сомножителей въ разномъ порядкѣ и убѣдиться въ неизмѣняемости произведенія во всѣхъ этихъ случаяхъ. Вмѣсто того, чтобы доказывать, что на прямую изъ внѣшней точки можно опустить только одинъ перпендикуляръ, достаточно заставить учащихся продѣлать соотвѣтственное построеніе помощью линейки и наугольника и попробовать построить черезъ ту же точку второй перпендикуляръ.

Такой конкретно-индуктивный методъ обученія дѣлаетъ излишними всякій догматизмъ и логическія натяжки. Зачѣмъ, напр., заставлять ученика принимать на вѣру, что всѣ прямые углы равны между собой, если при помощи сгибанія и наложенія соотвѣтствующихъ вырѣзокъ изъ бумаги, легко изготовляемыхъ имъ по указаніямъ учителя, онъ можетъ пріобрѣсти достаточно прочную увѣренность въ равенствѣ прямыхъ угловъ? Зачѣмъ нагромождать цѣлый рядъ небезупречныхъ логическихъ ухищреній, какъ это дѣлается при обычномъ вычисленіи отношенія окружности къ діаметру, если при помощи непосредственныхъ измѣреній круглыхъ предметовъ учащіеся могутъ безъ особеннаго труда опредѣлить это отношеніе, хотя бы и съ небольшой степенью точности?

Кромѣ того, конкретно-индуктивный методъ обученія даетъ наибольшій возможный просторъ самодѣятельности учащихся. Не пассивное воспріятіе разсужденій со словъ учителя ставится при немъ въ основу преподаванія, а самостоятельная работа учащихся и самостоятельные ихъ выводы и заключенія подъ руководствомъ учителя.

При этомъ подъ самостоятельной работой учащихся мы подразумѣваемъ не одно только наблюденіе свойствъ чиселъ, формулъ и чертежей, а вообще изученіе всѣхъ предметовъ и явленій внѣшняго міра, могущихъ служить матеріаломъ для ознакомленія съ математическими истинами.

Особенно ясно сказывается эта сторона конкретно-индуктивнаго метода при первоначальномъ обученіи геометріи: изученіе свойствъ геометрическихъ тѣлъ по окружающимъ предметамъ, вырѣзываніе, склеиваніе и вылѣпливаніе моделей и послѣдующее ихъ изученіе и измѣреніе, изготовленіе чертежей, производство измѣреній на мѣстности—вотъ тѣ пути, помощью которыхъ знакомятся учащіеся новыхъ школъ съ основными геометрическими истинами.

Самая важная черта конкретно-индуктивнаго метода состоитъ въ томъ, что онъ даетъ учащимся наивысшую степень субъективной увѣренности въ достовѣрности изучаемыхъ истинъ. Какъ извѣстно, и мы взрослые не всегда удовлетворяемся умозрительнымъ доказательствомъ той или иной теоріи, того или иного положенія; даже тогда, когда мы не сомнѣваемся въ правильности нашихъ выводовъ, мы стремимся провѣрить, согласуются ли они съ показаніями нашихъ чувствъ. Тѣмъ болѣе это справедливо относительно дѣтей и подростковъ, изучающихъ школьную математику и не владѣющихъ еще въ полной мѣрѣ аппаратомъ логическаго мышленія.

Въ виду вышеизложеннаго, даже въ тѣхъ случаяхъ, когда дедуктивное доказательство какой-либо математической истины доступно для учащихся, бываетъ небезполезно предпосылать ему нѣкоторую индуктивную подготовку. Такъ, напр., при изученіи свойствъ ариѳметической прогрессіи, прежде чѣмъ доказывать въ общемъ видѣ, что сумма членовъ, равноотстоящихъ отъ крайнихъ, будетъ равна суммѣ крайнихъ, цѣлесообразнѣе всего сперва заставить учащихся открыть эту истину на частныхъ примѣрахъ и лишь затѣмъ познакомить ихъ съ общимъ доказательствомъ.

Наконецъ, конкретно-индуктивный методъ представляетъ единственно правильный съ педагогической точки зрѣнія путь при усвоеніи опредѣленій и условій, вводимыхъ въ математику. Тотъ порядокъ, котораго держалась при изложеніи опредѣленій старая школа—сперва дать опредѣленіе догматически, а затѣмъ пояснить его на частныхъ примѣрахъ—страдаетъ существенными недостатками. Если, напр., учитель сообщаетъ учащимся опредѣленіе: „логариѳмомъ даннаго числа называется показатель степени, въ которую надо возвысить нѣкоторое постоянное число, называемое основаніемъ, чтобы получить въ результатѣ данное число",—то лишь тѣ учащіеся, которые способны одновременно вообразить подходящій конкретный примѣръ, воспримутъ данное опредѣленіе сознательно; остальные же не будутъ представлять себѣ ничего, кромѣ словъ, и если преподаватель тутъ же не иллюстрируетъ своего опредѣленія конкретными примѣрами, то все дальнѣйшее изложеніе будетъ построено на пескѣ. Но не проще ли въ такомъ случаѣ и начать съ этихъ конкретныхъ примѣровъ? Пусть преподаватель заставитъ учащихся вычислить рядъ степеней въ родѣ слѣдующаго: $5^2 = 25, 5^3 = 125, 5^4 = 625, 5^5 = 3125\ldots\ldots$, и укажетъ, что показателей принято называть логариѳмами полученныхъ чиселъ при данномъ основаніи 5; пусть онъ предложитъ учащимся написать нѣсколько подобныхъ рядовъ съ другими основаніями, и послѣ этого они смогутъ точно и сознательно формулировать отвѣтъ на вопросъ, что такое логариѳмъ даннаго числа при данномъ основаніи.

Такой пріемъ находится въ соотвѣтствіи съ данными современной психологіи. Можно считать безспорнымъ, что процессъ отвлеченія совершается у насъ только въ рамкахъ конкретнаго; если мы думаемъ, напр., о шарѣ вообще, мы представляемъ себѣ шаръ вполнѣ опредѣленныхъ размѣровъ въ опредѣленномъ положеніи, но направляемъ наше вниманіе лишь на существенныя свойства даннаго шара, и по этой именно причинѣ представленіе объ одномъ опредѣленномъ шарѣ играетъ для насъ роль родового образа. Другими словами, „мы имѣемъ типическія индивидуальныя представленія и общія представленія только въ томъ смыслѣ, что мы можемъ выбрать примѣры или замѣстителей цѣлой группы воспріятій и въ состояніи сосредоточить вниманіе на извѣстныхъ опредѣленныхъ частяхъ или свойствахъ, которыя (въ болѣе или менѣе измѣненномъ видѣ) можно снова встрѣтить во всѣхъ сходныхъ воспріятіяхъ... Искусство отвлеченія основывается преимущественно на способности сосредоточивать вниманіе указаннымъ образомъ“ [1]). А потому задача учителя при составленіи новыхъ понятій въ курсѣ математики въ томъ и состоитъ, чтобы дать учащимся такіе типичные конкретные примѣры, въ которыхъ на первый планъ выступили бы важные, существенные признаки даннаго понятія, и привлечь вниманіе учащихся именно къ этимъ признакамъ; словесная формулировка понятія, такимъ образомъ пріобрѣтеннаго, будетъ уже не трудна, и учащіеся смогутъ дать ее вполнѣ самостоятельно или съ помощью наводящихъ вопросовъ.

---

[1]) Гефдингъ. Очерки психологіи, основанной на опытѣ. Перев. подъ ред. Колубовскаго, стр. 167.

Подобнымъ образомъ слѣдуетъ поступать и при расширеніи какихъ-либо понятій, напр., понятія о числѣ и о дѣйствіяхъ. Въ этомъ вопросѣ грѣшатъ абстрактностью и догматизмомъ не только традиціонные способы объясненій, но и пріемы, выдвигаемые нѣкоторыми сторонниками реформы. Напр., правило знаковъ при умноженіи отрицательныхъ чиселъ въ нѣкоторыхъ руководствахъ, какъ стараго, такъ и новаго типа [1]), излагается просто въ видѣ условія, сообщаемаго догматически: условимся называть произведеніемъ двухъ положительныхъ или отрицательныхъ чиселъ то положительное число, абсолютная величина котораго равна произведенію абсолютныхъ величинъ данныхъ чиселъ, а произведеніемъ отрицательнаго числа на положительное или наоборотъ— то отрицательное число, абсолютная величина котораго равна произведенію абсолютныхъ величинъ данныхъ чиселъ. Такой пріемъ находится въ соотвѣтствіи съ научными взглядами: такъ называемое „правило знаковъ" есть, въ сущности говоря, опредѣленіе произведенія; но съ педагогической точки зрѣнія такой пріемъ никакъ не можетъ быть оправданъ, такъ какъ учащіеся, естественно, спросятъ, съ какой же цѣлью принимается подобное условіе, и этотъ ихъ совершенно законный вопросъ останется безъ всякаго отвѣта. Поэтому необходимо, здѣсь и въ другихъ аналогичныхъ случаяхъ, исходить изъ условія подходящей совершенно конкретной задачи. Для даннаго случая пригодна, напр., такая задача: „Со станціи желѣзной дороги отходитъ, направляясь вправо, поѣздъ, проходящій по a верстъ въ каждый часъ; гдѣ онъ будетъ спустя t часовъ?" Полагая сперва данныя числа a и t положительными (напр., $a = 40$, $t = 3$), учащіеся найдутъ, что задача рѣшается умноженіемъ (искомое разстояніе $x = at$); тогда можно предложить имъ придать одному или обоимъ даннымъ числамъ не только положительныя, но и отрицательныя значенія, рѣшать каждый разъ получаемую задачу по соображенію и во всѣхъ случаяхъ считать найденный отвѣтъ произведеніемъ дан-

[1]) Билибинъ. Учебникъ алгебры.
Левитусъ. Курсъ элементарной алгебры.
Чихановъ. Учебникъ алгебры.

ныхъ чиселъ. Такъ, для случая отрицательныхъ значенiй обоихъ данныхъ чиселъ, напр., $a = -40$, $t = -3$, задача приметъ видъ: „Со станцiи выходитъ *влѣво* поѣздъ, проходящiй по 40 верстъ въ каждый часъ; гдѣ онъ *былъ 3 часа тому назадъ* (если предположить, что движенiе его совершалось съ той же скоростью и въ томъ же направленiи)?“ Такъ какъ очевидно, что поѣздъ долженъ былъ при этихъ условiяхъ придти на станцiю съ правой стороны, и 3 часа тому назадъ находился въ 120 верстахъ вправо отъ нея, то отвѣтъ задачи выражается положительнымъ числомъ 120, и мы получаемъ $(-40).(-3) = +120$. Разобравъ подобнымъ образомъ всѣ возможные случаи сочетанiя знаковъ, учащiеся подъ руководствомъ вопросовъ преподавателя могутъ сами формулировать извѣстное правило.

Какъ видно изъ вышеизложеннаго, конкретно-индуктивный методъ играетъ существенную роль на всѣхъ ступеняхъ обученiя математикѣ; но само собою разумѣется, что онъ не только не исключаетъ дедукцiи, но долженъ быть съ нею неразрывно связанъ, въ особенности на высшихъ ступеняхъ курса. По мѣрѣ того, какъ развиваются логическiя способности учащихся и возникаетъ у нихъ потребность въ прочномъ обоснованiи изучаемыхъ истинъ, долженъ имѣть мѣсто переходъ отъ чисто индуктивныхъ воспрiятiй къ болѣе или менѣе сложнымъ разсужденiямъ, отъ констатированiя отдѣльныхъ математическихъ истинъ къ установленiю логической связи между этими истинами. Когда именно долженъ начаться такой переходъ,—этого мы не можемъ установить вполнѣ опредѣленно, такъ какъ законы развитiя отвлеченнаго мышленiя у ребенка еще не изучены; но согласно изслѣдованiямъ Меймана, совпадающимъ съ данными простого наблюденiя, можно думать, что приблизительно лишь на 14-мъ году жизни учащiеся дѣлаются способными сознательно пользоваться рядомъ умозаключенiй, „оказываются въ состоянiи видѣть связь между выполняемыми умозаключенiями и понимать ихъ“ [1]). Въ связи съ этимъ обстоятельствомъ можно предложить раздѣленiе курса нынѣшней средней школы на концентры, въ каждомъ изъ которыхъ методъ

[1]) Мейманъ. Лекцiи по экспериментальной педагогикѣ, т. I, стр. 228—229.

преподаванія видоизмѣнялся бы сообразно степени умственнаго развитія учащихся.

Первый концентръ, соотвѣтствующій отроческому возрасту учащихся отъ 10 до 13 лѣтъ, включаетъ обученіе ариѳметикѣ, геометріи и начальнымъ свѣдѣніямъ по алгебрѣ. На этой ступени усвоеніе новыхъ понятій и истинъ должно идти исключительно конкретно-индуктивнымъ путемъ, съ широкимъ примѣненіемъ такъ называемыхъ лабораторныхъ пріемовъ: со свойствами геометрическихъ тѣлъ и фигуръ учащіеся будутъ знакомиться путемъ изученія предметовъ окружающей обстановки и моделей, ими самими изготовляемыхъ изъ бумаги, картона, глины, деревянныхъ дощечекъ и палочекъ и т. д., наконецъ, путемъ простѣйшихъ геодезическихъ измѣреній; дѣйствія надъ числами будутъ изучаться при посредствѣ цѣлесообразныхъ задачъ, съ содержаніемъ, близкимъ къ жизни, а основные законы дѣйствій и принципы алгебры будутъ устанавливаться на основаніи конкретныхъ примѣровъ, надлежащимъ образомъ подобранныхъ.

Второй концентръ, соотвѣтствующій переходному возрасту отъ 13 до 16 лѣтъ, обнимаетъ основной курсъ алгебры (уравненія и функціи 1-й и 2-й степени въ связи съ необходимыми алгебраическими преобразованіями, ученіе о прогрессіяхъ и логариѳмахъ), и сверхъ того такъ называемый систематическій курсъ геометріи со включеніемъ началъ тригонометріи. Въ этомъ именно концентрѣ учащіеся должны быть мало-по-малу пріучаемы къ дедуктивному мышленію. Съ этой цѣлью преподаватель можетъ предварительно на конкретныхъ примѣрахъ выяснить учащимся, что бываютъ такіе случаи, когда эмпирическое установленіе какой-либо истины затруднительно вслѣдствіе погрѣшностей въ измѣреніяхъ [1]), и затѣмъ помощью наводящихъ вопросовъ онъ будетъ въ состояніи заставить учащихся обосновать эту истину на какихъ-либо другихъ, болѣе для нихъ очевидныхъ. Выяснивъ себѣ такимъ образомъ сущность и значеніе дедуктивныхъ пріемовъ разсужденія, учащіеся смогутъ установить логическую связь между многими

---

[1]) Весьма подходящимъ примѣромъ является вопросъ о суммѣ угловъ треугольника.

положеніями, изучавшимися раньше чисто эмпирически и независимо другъ отъ друга, и такимъ образомъ приведутъ свои познанія въ нѣкоторую систему, различая тѣ истины, которыя установлены ими на основаніи опыта, отъ тѣхъ, которыя доказываются на основаніи предыдущихъ. Такого рода умственная работа можетъ быть проведена главнымъ образомъ въ геометріи, вслѣдствіе чего ея курсъ и названъ здѣсь систематическимъ курсомъ; но, конечно, невозможно, да и не нужно превращать всѣ прежнія „аксіомы" въ „теоремы", и не можетъ быть рѣчи о построеніи такого систематическаго курса геометріи, который содержалъ бы наименьшее возможное число недоказуемыхъ истинъ; всѣ совершенно очевидныя истины, а также и тѣ, дедуктивное доказательство которыхъ непосильно для учащихся, должны попрежнему оставаться на положеніи „аксіомъ", устанавливаемыхъ на основаніи опыта. Что касается опредѣленій, соглашеній и правилъ, то они, разумѣется, попрежнему должны разрабатываться конкретно-индуктивнымъ путемъ; равнымъ образомъ найдутъ примѣненіе, въ подходящихъ случаяхъ, лабораторные пріемы, включая сюда и принципъ графическаго изображенія.

Наконецъ, третій и послѣдній концентръ, соотвѣтствующій юношескому возрасту отъ 16 до 18 лѣтъ, долженъ быть посвященъ ознакомленію съ элементами аналитической геометріи, дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія, а также систематизирующему повторенію основъ всего пройденнаго курса математики, въ связи съ сообщеніемъ необходимыхъ философскихъ и историческихъ свѣдѣній. И на этой ступени конкретно-индуктивный методъ сохраняетъ свою силу при усвоеніи новыхъ понятій, опредѣленій и правилъ, но зато здѣсь доказываются дедуктивно и такія истины, которыя на предыдущихъ ступеняхъ были усвоены чисто эмпирически (напр., всѣ почти основные законы дѣйствій надъ числами), и такимъ образомъ заканчивается необходимая систематизація всѣхъ отдѣловъ математики; конечно, и здѣсь нѣтъ надобности стремиться къ минимуму недоказуемыхъ основныхъ истинъ; важно, чтобы учащіеся восприняли и усвоили себѣ не только содержаніе математики, какъ орудія міропознанія, но и ея научный строй.

Нечего добавлять, что на всѣхъ ступеняхъ обученія должно быть обращено вниманіе на установленіе тѣсной связи различныхъ отдѣловъ математики между собой и съ другими науками, а характеръ практическихъ упражненій долженъ быть близокъ къ окружающей насъ дѣйствительности.

Таковы основы метода обученія математикѣ, соотвѣтствующаго духу новой школы. Сущность этого метода можетъ быть выражена въ немногихъ словахъ: самостоятельное установленіе математическихъ законовъ при помощи изученія конкретныхъ фактовъ, и приложеніе этихъ законовъ къ рѣшенію разныхъ вопросовъ, которые ставитъ человѣку жизнь. И только при этихъ условіяхъ изученіе математики является драгоцѣннымъ вкладомъ въ общее образованіе.

Экспериментальныя изслѣдованія въ области методики начальной ариѳметики.

До послѣдняго времени методика ариѳметики, не только у насъ, но и въ другихъ странахъ, шла впередъ и развивалась чисто эмпирическимъ путемъ: отдѣльные талантливые педагоги, скорѣе чутьемъ, чѣмъ на основаніи положительныхъ данныхъ, находили удачные пріемы для разъясненія учащимся тѣхъ или иныхъ понятій, для сообщенія имъ тѣхъ или другихъ навыковъ; эти пріемы связывались въ болѣе или менѣе стройную систему, сообразно общимъ педагогическимъ воззрѣніямъ ихъ изобрѣтателя, и подвергались провѣркѣ въ его личной учебной практикѣ: другіе же педагоги либо воспринимали эти пріемы на вѣру, поддаваясь авторитету творца данной системы, либо оцѣнивали достоинство примѣняемыхъ пріемовъ на основаніи общихъ результатовъ своей учебной дѣятельности. Такой путь развитія методики ариѳметики имѣлъ, конечно, свои цѣнныя стороны, потому что пріемы обученія создавались не безъ связи со школьной практикой и до извѣстной степени провѣрялись въ школьной жизни; но онъ былъ сопряженъ и съ существенными недостатками, такъ какъ по общимъ результатамъ обученія нельзя еще было судить, насколько цѣлесообразенъ тотъ или иной отдѣльный пріемъ, то или иное расположеніе учебнаго матеріала или наглядное пособіе; и личный опытъ одного учителя не могъ служить достаточнымъ контролемъ для личнаго опыта другихъ, даже не могъ быть сравниваемъ съ личнымъ опытомъ другихъ педагоговъ. Поэтому за послѣднее время все болѣе и болѣе распространяется убѣжденіе, что и методика ариѳметики, подобно другимъ отраслямъ педагогической науки, должна исходить изъ данныхъ, добытыхъ точнымъ наблюденіемъ и опытомъ, доступнымъ всестороннему контролю и провѣркѣ; иначе говоря, въ помощь и на смѣну чисто эмпирическому способу установленія истинъ методики ариѳметики долженъ придти способъ экспериментальный. Вотъ почему небезполезно будетъ выяснить, какія были произведены важнѣйшія экспериментальныя изслѣдованія въ области методики начальной ариѳметики и какое вліяніе они могутъ оказать на школьную практику.

Я остановлюсь прежде всего на изслѣдованіяхъ нѣмецкаго педагога Лая, изложенныхъ въ его трудѣ „Руководство къ первоначальному обученію ариѳметикѣ, основанное на результатахъ дидактическихъ опытовъ“ (это сочиненіе вышло въ свѣтъ въ Германіи въ 1898 г. [1]), а переведено на русскій языкъ въ 1909 г.). Лай однимъ изъ первыхъ пришелъ къ мысли, что наличность множества нерѣшенныхъ вопросовъ въ современной методикѣ ариѳметики и противорѣчій между отдѣльными методистами объясняется отсутствіемъ твердой почвы для сравненія изслѣдованій отдѣльныхъ педагоговъ, и задался цѣлью разрѣшить нѣкоторые вопросы изъ области первоначальнаго обученія ариѳметикѣ съ помощью планомѣрныхъ опытовъ надъ отдѣльными дѣтьми и надъ цѣлыми классами, притомъ опытовъ такого рода, которые могли бы въ точности воспроизводиться и другими изслѣдователями и результаты которыхъ можно было бы точно записывать и сравнивать между собой. Вопросы, которые онъ себѣ поставилъ, были слѣдующіе: при какихъ условіяхъ въ умѣ ребенка возникаютъ наиболѣе ясныя и отчетливыя числовыя представленія—при воспріятіи ли группы однородныхъ предметовъ, расположенныхъ въ пространствѣ, или же при воспріятіи ряда однородныхъ явленій, слѣдующихъ другъ за другомъ во времени? до какого предѣла простирается область чиселъ, доступныхъ непосредственному воспріятію? зависитъ ли

---

[1]) Русскій переводъ выполненъ (подъ редакціей Д. Л. Волковскаго) по 2-му нѣмецкому изданію, появившемуся въ 1907 г.

этотъ предѣлъ отъ различнаго расположенія однородныхъ предметовъ, при помощи которыхъ изображено число, и если да, то какое расположеніе предметовъ въ пространствѣ является наиболѣе благопріятнымъ для непосредственнаго воспріятія числа? какое значеніе, въ смыслѣ наилучшаго воспріятія числа, имѣютъ величина, форма и окраска воспринимаемыхъ зрѣніемъ предметовъ? могутъ ли отчетливыя числовыя представленія возникать только при посредствѣ чувства зрѣнія или же и другія чувства, напр., осязаніе, также способствуютъ возникновенію этихъ представленій, и т. д.

Изслѣдованія Лая коснулись сперва вопроса о томъ, какія воспріятія болѣе благопріятны для образованія отчетливыхъ представленій числа—воспріятіе ли группы однородныхъ предметовъ или воспріятіе послѣдовательныхъ однородныхъ явленій. Уже одно то обстоятельство, что всѣ употребительныя наглядныя пособія для обученія счисленію построены именно на воспріятіи группъ однородныхъ предметовъ, заставляетъ предполагать, что пространственныя воспріятія играютъ въ данномъ случаѣ болѣе важную роль; но г. Лай желалъ получить по этому вопросу болѣе точныя данныя и произвелъ рядъ опытовъ надъ отдѣльными дѣтьми 4—6-лѣтняго возраста. Съ одной стороны, онъ заставлялъ ихъ воспринимать рядъ послѣдовательныхъ стуковъ по столу или по доскѣ (отъ 2 до 4 стуковъ въ секунду), при чемъ стукъ производился такъ, что дѣти не видѣли стучащаго предмета, а только слышали звуки; съ другой стороны, онъ показывалъ имъ однородные предметы (тоже отъ 2 до 4), расположенные въ рядъ, при чемъ время, въ теченіе котораго они могли видѣть эти предметы, было еще болѣе короткимъ, чѣмъ въ первомъ случаѣ, и возможность пересчитать предметы одинъ за другимъ была тѣмъ самымъ исключена. Количество ошибокъ, сдѣланныхъ дѣтьми при томъ и другомъ способѣ воспріятія числа, замѣчалось и сравнивалось: въ результатѣ обнаружилось, что при обозрѣніи однородныхъ предметовъ дѣти дѣлали значительно меньше ошибокъ, чѣмъ при воспріятіи стуковъ, и тѣмъ самымъ была подтверждена мысль, что воспріятіе однородныхъ предметовъ болѣе способствуетъ образованію ясныхъ и отчетливыхъ числовыхъ представленій, чѣмъ воспріятіе явленій, послѣдовательныхъ во времени.

Послѣ того Лай перешелъ къ наиболѣе важной части своихъ опытовъ, именно къ изслѣдованію вопроса о томъ, какое расположеніе однородныхъ предметовъ въ пространствѣ можетъ вызывать наиболѣе ясныя и отчетливыя представленія числа. Эти опыты онъ производилъ въ болѣе широкомъ масштабѣ, въ классахъ, а не надъ отдѣльными дѣтьми, и изъ всѣхъ возможныхъ расположеній предметовъ выбиралъ именно тѣ, которыя примѣнялись въ наиболѣе употребительныхъ наглядныхъ пособіяхъ; такъ, напр., онъ задался цѣлью сравнить: какъ выгоднѣе располагать кружки или шарики, въ одинъ ли горизонтальный рядъ, какъ расположены шарики русскихъ счетовъ, или въ два горизонтальныхъ ряда, съ промежутками послѣ каждаго кружка или шарика.

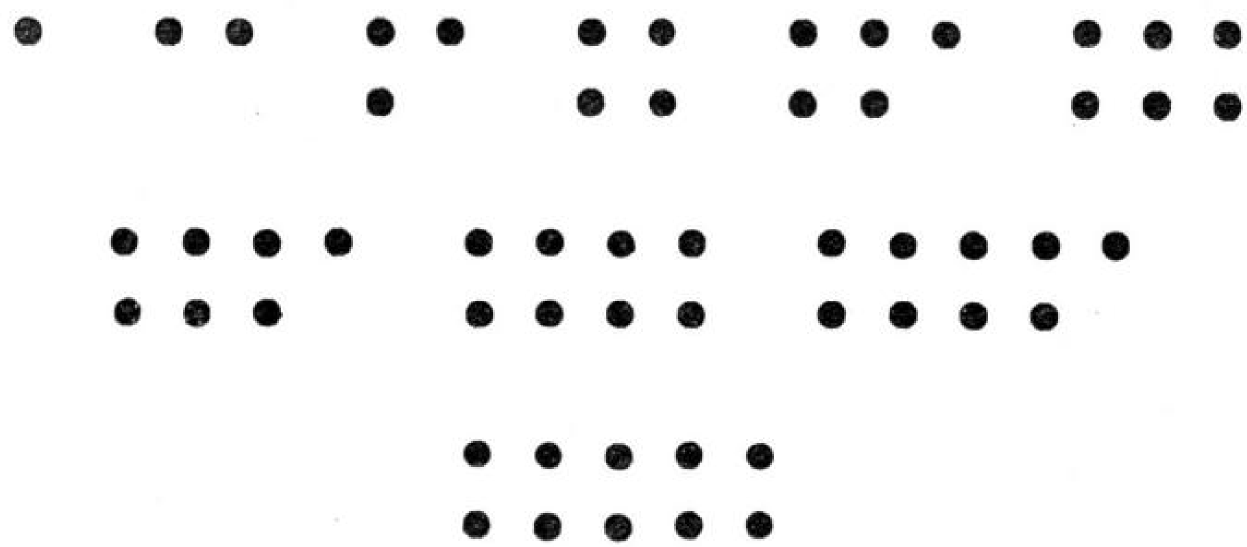

Рис. 1. Борновскія числовыя фигуры.

Опыты эти располагались слѣдующимъ образомъ. Были изготовлены таблицы изъ бѣлой бумаги, на которыхъ числа перваго десятка были изображены черными кружками, расположенными то въ одинъ рядъ, то въ два ряда въ видѣ такъ называемыхъ Борновскихъ числовыхъ фигуръ [1]). (См. рисунокъ).

Какая-либо изъ этихъ таблицъ прикрѣплялась къ классной доскѣ, при чемъ до времени опыта она была закрыта отъ глазъ

[1]) Борновскія числовыя фигуры, названныя такъ по имени ихъ изобрѣтателя, нѣмецкаго педагога Борна, представляютъ изображенія чиселъ перваго десятка помощью кружковъ, расположенныхъ въ два горизонтальныхъ ряда, съ одинаковыми промежутками послѣ каждаго кружка (были введены въ употребленіе еще въ 60-хъ годахъ).

учащихся ширмой; передъ началомъ опыта пускался въ ходъ метрономъ, дѣлавшій отъ 60 до 140 качаній въ минуту; экспериментаторъ предупреждалъ учащихся, чтобы они смотрѣли внимательно на доску, снималъ ширму въ тактъ метронома, а за слѣдующимъ ударомъ маятника ставилъ ее снова на мѣсто, такъ что учащіеся могли наблюдать таблицу съ кружками въ теченіе одного качанія маятника (1—$^3/_7$ сек.). Затѣмъ они должны были сейчасъ же изобразить на бумагѣ точками ту числовую фигуру, которую только-что видѣли. Подобнымъ образомъ имъ показывали попеременно числовыя фигуры то одного, то другого изъ сравниваемыхъ типовъ; затѣмъ отбирали листки съ сдѣланными изображеніями фигуръ, подсчитывали количество ошибокъ, сдѣланныхъ въ той и другой группѣ изображеній, и сравнивали, какому расположенію кружковъ соотвѣтствуетъ меньшее число ошибокъ. Такіе опыты Лай производилъ, съ одной стороны, надъ учащимися перваго года обученія, съ другой стороны, надъ учащимися учительской семинаріи; для сравненія двухъ расположеній кружковъ—въ одинъ рядъ и въ два ряда въ видѣ Борновскихъ числовыхъ фигуръ—было разсмотрѣно въ общемъ около тысячи отдѣльныхъ записей учащихся, при чемъ расположеніе кружковъ въ два ряда въ видѣ Борновскихъ числовыхъ фигуръ оказалось значительно болѣе благопріятнымъ: оно дало лишь 17,7% ошибочныхъ записей противъ 42% ошибокъ при расположеніи кружковъ въ одинъ горизонтальный рядъ.

Подобнымъ же образомъ были сравниваемы другъ съ другомъ и иныя расположенія однородныхъ предметовъ въ пространствѣ. Въ результатѣ своихъ опытовъ Лай нашелъ, что изображеніе чиселъ помощью черточекъ прямоугольной формы, а также изображеніе чиселъ на пальцахъ даетъ гораздо менѣе удовлетворительные результаты, чѣмъ примѣненіе указанныхъ выше Борновскихъ числовыхъ фигуръ; сверхъ того, оказалось, что есть одно расположеніе кружковъ, нѣсколько болѣе благопріятное, чѣмъ Борновскія числовыя фигуры; именно, если въ Борновскихъ числовыхъ фигурахъ увеличить промежутокъ послѣ каждой группы изъ четырехъ кружковъ, образующей квадратъ, то составленныя такимъ образомъ числовыя фигуры (получившія названіе *квадратныхъ*), будучи сравниваемы съ Борновскими фигурами, дали въ результатѣ еще меньшій процессъ ошибочныхъ записей.

Далѣе Лай нашелъ, что наиболѣе благопріятные результаты получаются въ томъ случаѣ, когда отдѣльные кружки квадратныхъ числовыхъ фигуръ удалены другъ отъ друга на разстояніе, равное діаметру кружка, а каждая квадратная группа изъ четырехъ кружковъ отстоитъ отъ предыдущаго квадрата на разстояніе, равное $1^1/_2$ діаметрамъ кружка; что наиболѣе подходящими по формѣ предметами для составленія числовыхъ фигуръ являются именно кружки или шарики, а наиболѣе благопріятное сочетаніе красокъ даютъ бѣлые или красные предметы на черномъ фонѣ.

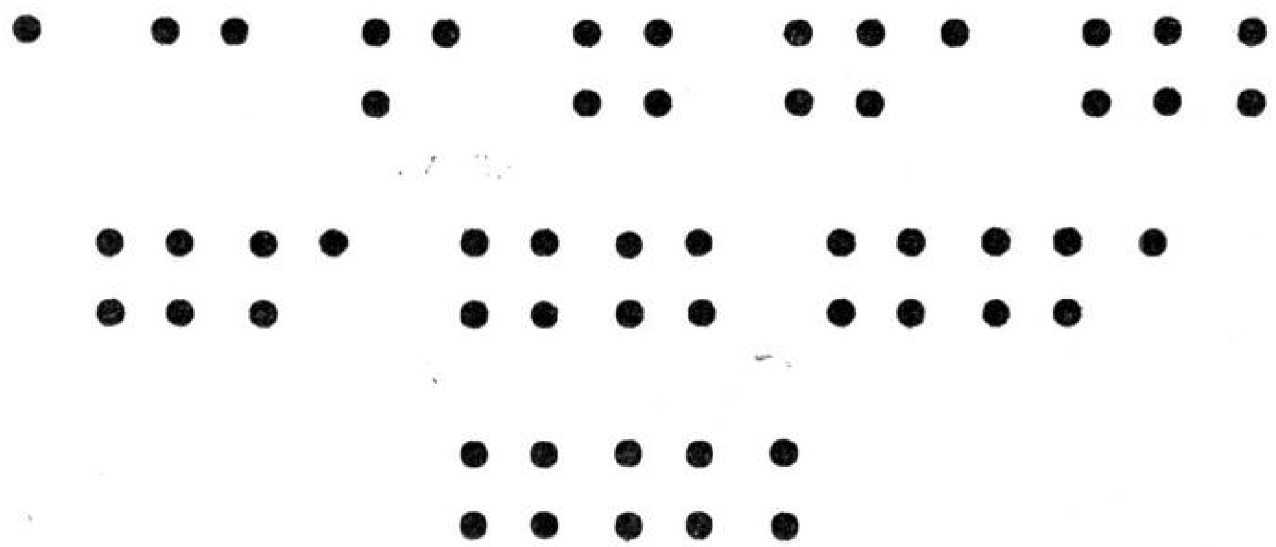

Рис. 2. Квадртныя числовыя фигуры Лая.

Наконецъ, послѣдняя серія опытовъ Лая выяснила, что чувство осязанія можетъ способствовать возникновенію въ умѣ учащихся столь же ясныхъ и живыхъ представленій числа, какъ и чувство зрѣнія.

Аналогичные опыты были произведены и другими педагогами и психологами, главнымъ образомъ въ Германіи; наиболѣе обстоятельныя изслѣдованія были произведены Вальземанномъ, который изложилъ свои выводы въ сочиненіи „Anschauungslehre der Rechenkunst“ (ученіе о наглядности въ преподаваніи счисленія), вышедшемъ въ свѣтъ въ 1907 г. Въ общемъ, результаты этихъ изслѣдованій подтвердили заключенія Лая, и разногласіе обнаружилось лишь по одному вопросу, имѣющему, въ сущности говоря, второстепенное значеніе: именно, какъ было раньше указано, Лай нашелъ, что наиболѣе благопріятными, въ смыслѣ отчетливаго и точнаго воспріятія числа, являются созданныя имъ квадратныя числовыя фигуры, а Борновскія числовыя фигуры немного уступаютъ имъ по степени благопріятности, хотя и являются лучшими изъ всѣхъ остальныхъ числовыхъ фигуръ; Вальземаннъ же на основаніи своихъ опытовъ пришелъ къ обратному заключенію,— онъ нашелъ, что Борновскія, или, какъ онъ ихъ называетъ, нормальныя числовыя фигуры имѣютъ нѣкоторое преимущество передъ квадратными. Конечно, окончательное разрѣшеніе этого вопроса могли бы дать только новыя, болѣе обширныя экспериментальныя изслѣдованія; но важно отмѣтить то обстоятельство, что оба вида числовыхъ фигуръ, по изслѣдованіямъ какъ Лая, такъ и Вальземанна, даютъ возможность непосредственнаго воспріятія всѣхъ чиселъ перваго десятка и въ этомъ смыслѣ оказываются значительно болѣе благопріятными, чѣмъ всѣ другія группировки воспринимаемыхъ предметовъ.

Въ предыдущемъ изложеніи я касался, главнымъ образомъ, психологической стороны экспериментовъ Лая и Вальземанна; теперь необходимо уяснить ихъ дидактическое значеніе. Во время этихъ экспериментовъ учащимся показывали ту или иную числовую фигуру, а затѣмъ они должны были по памяти воспроизвести ее на бумагѣ, или обозначить цифрою соотвѣтствующее ей число, или даже указать, изъ какихъ двухъ слагаемыхъ составлено данное число (въ этомъ послѣднемъ случаѣ части числовой фигуры, изображавшія отдѣльныя слагаемыя, различались между собой по окраскѣ кружковъ). При всѣхъ опытахъ время воспріятія фигуры было настолько малымъ (не болѣе $1^1/_3$ сек.), что совершенно исключалась возможность пересчитыванія кружковъ; тѣмъ не менѣе подвергавшіеся опытамъ учащіеся могли правильно воспроизводить или оцѣнивать числомъ всѣ числовыя фигуры перваго десятка и опредѣлять по числовымъ фигурамъ сумму двухъ однозначныхъ чиселъ. Такимъ образомъ было достовѣрно обнаружено, что возможно непосредственное опредѣленіе, въ предѣлахъ перваго десятка, численности группы объектовъ безъ сосчитыванія, а равно и выполненіе дѣйствій въ указанномъ предѣлѣ также безъ пользованія процессомъ счета. Эти факты, разумѣется, крайне важны для педагогической практики, такъ какъ возможность обходиться безъ сосчитыванія при опредѣленіи численности предметовъ и при дѣйствіяхъ надъ однозначными числами должна вести за собой существенную экономію времени при начальномъ обученіи, не говоря уже о томъ, что отчетливыя числовыя представленія въ области перваго десятка или двухъ десятковъ даютъ прочное основаніе для всѣхъ дальнѣйшихъ свѣдѣній по ариѳметикѣ.

Въ этомъ смыслѣ поучительны тѣ наблюденія, которыя произвелъ Лай при занятіяхъ по своему методу съ дѣтьми, еще не начинавшими учиться до того времени; онъ разсказываетъ, напр., о мальчикѣ 5 лѣтъ, умѣвшемъ считать только до 4-хъ, съ которымъ онъ занимался въ общей сложности 6 часовъ, обучая его счисленію въ предѣлахъ отъ 1 до 8. Въ концѣ этого срока,—пишетъ Лай,—онъ могъ лишь медленно произнести послѣдовательный рядъ числительныхъ отъ 1 до 8; между тѣмъ могъ рѣшать задачи въ

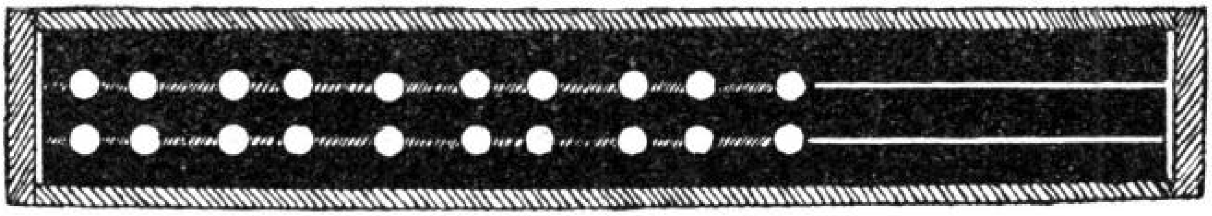

Рис. 3. Классные счеты Лая о 20 шарикахъ.

родѣ слѣдующей: на нашей улицѣ было 8 деревьевъ; 3 изъ нихъ срубили; сколько осталось? Съ другимъ мальчикомъ того же возраста, послѣ занятій, продолжавшихся въ общей сложности 10 часовъ, былъ достигнутъ подобный же результатъ для чиселъ въ предѣлахъ 1—10. (См. Führer durch den Rechenunterricht der Unterstufe, изд. 2-е, 1907 г., стр. 95—96).

На основаніи принципа числовыхъ фигуръ были построены какъ Лаемъ, такъ и Вальземанномъ наглядныя пособія для класснаго и индивидуальнаго обученія. Я вкратцѣ опишу здѣсь наглядныя пособія Лая. Для класснаго употребленія имъ построены счеты о 20 и о 100 шарикахъ; первые состоятъ изъ черной доски съ двумя горизонтальными проволоками, на которыхъ надѣты десять бѣлыхъ шариковъ, расположенныхъ въ видѣ соотвѣтствующей числовой фигуры, и затѣмъ десять красныхъ шариковъ въ видѣ такой же фигуры. (См. рис. 3).

Чтобы можно было передвигать по проволокамъ часть фигуры, не нарушая взаимнаго расположенія шариковъ, между послѣдними вставлены черные металлическіе цилиндрики. Подобнымъ образомъ устроены и большіе счеты о 100 шарикахъ. Для пользованія учащихся построены счетная линейка и счетный ящичекъ; линейка

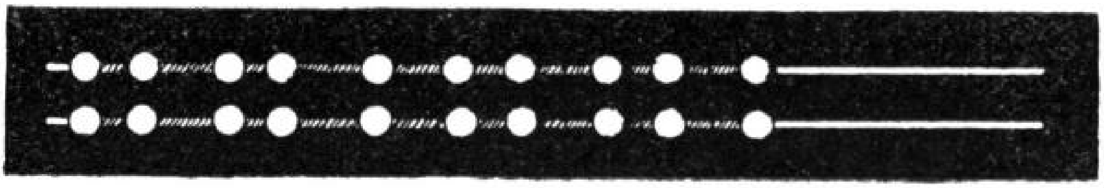

Рис. 4. Счетная линейка Лая.

чернаго цвѣта (рис. 4) представляетъ въ уменьшенномъ размѣрѣ точную копію классныхъ счетовъ о 20 шарикахъ.

Ящичекъ же (рис. 5) представляетъ обыкновенный пеналъ, въ которомъ на внутренней сторонѣ крышки вырѣзаны 20 круглыхъ углубленій, расположенныхъ такъ же, какъ и шарики на счетахъ; въ эти углубленія вставляются, по мѣрѣ надобности, бѣлыя и красныя костяныя пуговицы.

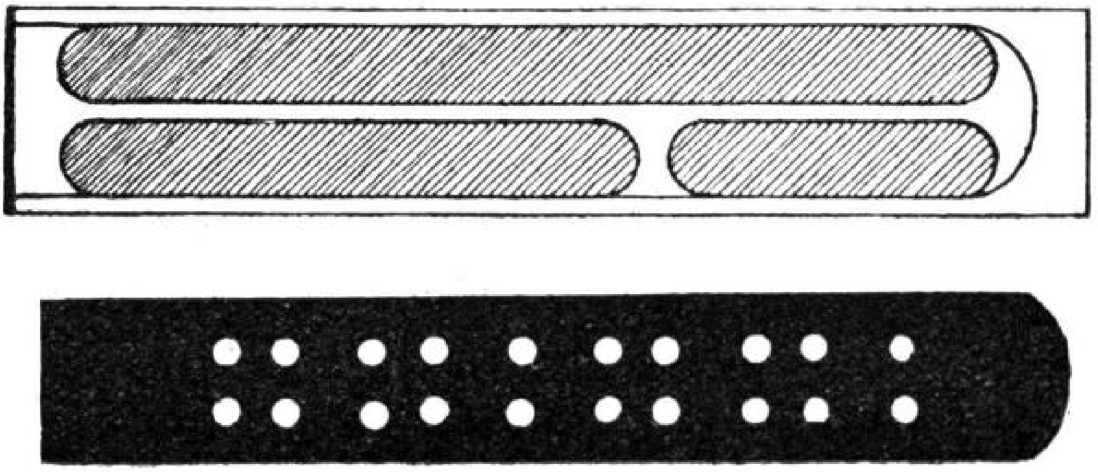

Рис. 5. Счетный ящичекъ (пеналъ) Лая.

Теперь необходимо выяснить, какъ примѣняются пособія Лая при классномъ обученіи; замѣчу, что расположеніе учебнаго матеріала у Лая и порядокъ его прохожденія отличается отъ практики нашихъ школъ, что и не удивительно, такъ какъ въ нѣмецкихъ начальныхъ школахъ обученіе начинается съ 6-лѣтняго возраста. При усвоеніи чиселъ перваго десятка Лай изучаетъ каждое число въ отдѣльности, по порядку, при чемъ при изученіи чиселъ 1—5 проходится только сложеніе и вычитаніе, а начина с числа 6 изучается также умноженіе и дѣленіе по содержанію, затѣмъ дѣленіе на части; съ цифрами учащіеся знакомятся так только съ того времени, какъ дойдутъ до числа 6. Числовыя фигуры при этомъ примѣняются прежде всего при ознакомленіи съ новымъ числомъ; ихъ составляетъ учитель на классныхъ счетахъ, а учащіеся—на находящихся въ ихъ рукахъ линейкахъ и пеналахъ; кромѣ того, учащіеся рисуютъ нужныя числовыя фигуры въ своихъ тетрадяхъ. Далѣе числовыя фигуры играютъ существенную роль при изученіи соотношеній между даннымъ числомъ и другими, раньше изученными; эти соотношенія изучаются путемъ разложенія соотвѣтствующихъ числовыхъ фигуръ на части, напр., числовая фигура 6-ти даетъ возможность усвоить, что $1 + 5 = 6$, $2 + 4 = 6$ и т. д.; $6 - 1 = 5$, $6 - 2 = 4$ и т. д.; $3 \times 2 = 6$, $2 \times 3 = 6$, $6 : 2 = 3$, $6 : 3 = 2$ и т. д. Кромѣ того, числовыя фигуры до введенія цифръ служатъ записью числа, и самое введеніе цифръ облегчается благодаря этому способу записи.

При изученіи второго десятка существенную роль играетъ различіе шариковъ по окраскѣ, такъ какъ всякое число между 10 и 20 включительно можетъ быть весьма легко и наглядно представлено помощью совокупности десятка бѣлыхъ шариковъ и нѣсколькихъ красныхъ; безъ труда также могутъ быть иллюстрированы дѣйствія надъ однозначными числами, особенно сложеніе и вычитаніе. Начиная съ этого концентра, т.-е. со второго десятка, порядокъ прохожденія учебнаго матеріала у Лая приближается къ тому, который принятъ у насъ, именно отъ изученія чиселъ и ихъ соотношеній дѣлается переходъ къ систематическому изученію дѣйствій.

При ознакомленіи съ числами, превышающими 20, нагляднымъ пособіемъ служатъ уже счеты изъ 100 шариковъ. При помощи ихъ можно иллюстрировать составъ чиселъ первой сотни изъ десятковъ и единицъ, а также четыре дѣйствія надъ числами первой сотни, однако съ меньшей степенью наглядности, чѣмъ въ предѣлахъ первыхъ двухъ десятковъ.

Я изложилъ здѣсь въ общихъ чертахъ, на чемъ обоснованъ принципъ числовыхъ фигуръ, и какъ онъ примѣняется при обученіи по методу Лая. Теперь постараюсь подвергнуть все вышеизложенное критической оцѣнкѣ.

Какъ было указано выше, примѣненіе числовыхъ фигуръ даетъ возможность опредѣлять численность группы предметовъ безъ сосчитыванія и совершать дѣйствія, напр., сложеніе однозначныхъ чиселъ, также безъ посредства счета. По поводу этого возникаютъ важные вопросы: доказано ли вмѣстѣ съ тѣмъ, что счетъ не играетъ никакой роли при первоначальномъ возникновеніи числовыхъ понятій, и если доказано, то можетъ ли быть счетъ въ виду этого совершенно устраненъ изъ педагогической практики?

Отвѣтъ на первый вопросъ мы можемъ почерпнуть изъ соотвѣтствующихъ наблюденій надъ дѣтьми дошкольнаго возраста, въ связи съ данными этнографіи о состояніи числовыхъ понятій у первобытныхъ народовъ и дикарей. На основаніи собственныхъ наблюденій я знаю, что ребенокъ въ возрастѣ двухъ лѣтъ можетъ уже правильно употреблять слова „два“ и „много“ (послѣднее въ примѣненіи ко всякому числу предметовъ, большему двухъ), раньше, чѣмъ научится примѣнять слово „одинъ“; а въ возрастѣ 3 лѣтъ можетъ имѣть представленіе о числѣ 4 (въ формѣ двухъ паръ), не ознакомившись еще вполнѣ твердо съ числомъ 3 и во всякомъ случаѣ не умѣя считать до четырехъ. Въ силу подобныхъ обстоятельствъ можно заключить, что первыя числовыя представленія возникаютъ у ребенка главнымъ образомъ благодаря воспріятію небольшихъ группъ однородныхъ предметовъ, имѣющихся въ окружающей средѣ (глаза, руки, ноги, ножки стола и т. д.). Это подтверждаютъ и данныя филологіи и этнографіи, приводимыя въ книгѣ Лая (стр. 9); изъ нихъ слѣдуетъ, что первоначальное значеніе числительныхъ именъ у многихъ народовъ связано съ группами конкретныхъ предметовъ, напр., слово „одинъ“ обозначаетъ также луну, „два“—глаза, крылья, руки, „три“—ногу страуса, „четыре“—ногу птицы о четырехъ пальцахъ, „пять“—руку человѣка о пяти пальцахъ и т. д. Конечно, мы еще не можемъ утверждать, что процессъ счета не играетъ никакой роли при образованіи первыхъ числовыхъ понятій; въ книгѣ Прейера „Душа ребенка“ (Die Seele des Kindes) приводится наблюденіе надъ ребенкомъ около $2^1/_2$ лѣтъ, который, не зная еще ни одного числа, попытался впервые сосчитать свои десять кубиковъ въ формѣ: одинъ, еще одинъ, еще одинъ и т. д.; но, сопоставляя все вышесказанное, можемъ прійти къ выводу, что одновременное воспріятіе небольшихъ группъ однородныхъ предметовъ имѣетъ въ данномъ вопросѣ гораздо большее значеніе, чѣмъ счетъ.

Роль счета, какъ орудія пріобрѣтенія числовыхъ представленій, начинается лишь тогда, когда нѣсколько первыхъ числовыхъ понятій уже болѣе или менѣе прочно выработались въ умѣ ребенка независимо отъ счета; наблюдая за развитіемъ числовыхъ представленій у моей дочери, я замѣтилъ, что въ возрастѣ отъ $1^1/_2$ до $3^1/_2$ лѣтъ она постепенно пріобрѣла представленія о первыхъ пяти числахъ, не умѣя еще считать до 5, и могла опредѣлить въ этихъ границахъ число какихъ-либо предметовъ, находившихся передъ ея глазами, если они составляли удобообозримую для нея группу; въ возрастѣ же послѣ $3^1/_2$ лѣтъ она научилась правильно считать отъ 1 до 5, а вскорѣ и до 8 (научилась она этому, по всей вѣроятности, путемъ подражанія, наблюдая, какъ въ необходимыхъ случаяхъ считали бѣлье, ложки, стаканы и т. п. предметы), и послѣ этого могла пересчитывать любое число предметовъ, не превышающее 8, какъ бы они ни были расположены, а равно и отобрать нужное ей число предметовъ изъ группы.

Но какую бы незначительную роль мы ни приписывали счету въ дѣлѣ образованія первыхъ числовыхъ понятій, все же было бы неправильно думать, что въ силу этого счетъ можетъ быть исключенъ изъ педагогической практики. Дѣло въ томъ, что умѣнье считать, т.-е. называть имена числительныя въ порядкѣ натуральнаго ряда и въ соотвѣтствіи съ рядомъ объектовъ, послѣдовательно воспринимаемыхъ, необходимо намъ для повседневной практики. При пересчитываніи предметовъ мы еще можемъ иногда соединять ихъ въ небольшія группы и не нуждаемся тогда въ послѣдовательномъ называніи каждаго числа (напр., считая тетради въ кипѣ, говоримъ: три, шесть, девять, двѣнадцать и т. д.); но при пересчитываніи явленій, послѣдовательныхъ во времени, мы часто не имѣемъ другого способа, кромѣ обыкновеннаго счета: одинъ, два, три, четыре и т. д.; такъ, напр., приходится считать при измѣреніи длины какой-нибудь мѣрой, при наливаніи жидкости стаканами, ложками или каплями, при сосчитываніи ударовъ пульса или качаній маятника и т. д.; счетъ упрощается, если послѣдовательность явленій образуетъ ритмъ (получаются своего рода числовыя фигуры во времени), но такіе случаи сравнительно рѣдки, и если педагогическая практика оставитъ бѣглый послѣдовательный счетъ совершенно въ сторонѣ, то этимъ затормозится выработка одного изъ умѣній, необходимымъ для жизни. А что такія послѣдствія возможны, доказываютъ тѣ самыя изслѣдованія Лая, о которыхъ говорилось раньше: тотъ мальчикъ, который съ помощью числовыхъ фигуръ научился уже рѣшать задачи, требующія вычитать 3 изъ 8, не могъ еще выполнять бѣглый послѣдовательный счетъ отъ 1 до 8. Поэтому нельзя не согласиться съ мнѣніемъ Меймана, который въ своихъ „Лекціяхъ по экспериментальной педагогикѣ" указываетъ, что методъ, опирающійся только на примѣненіе числовыхъ фигуръ, представляетъ такую же односторонность, какъ и обученіе, основанное исключительно на счетѣ; въ первомъ случаѣ дѣти будутъ представлять себѣ число, главнымъ образомъ, какъ группу однородныхъ предметовъ и будутъ затрудняться, когда имъ придется приложить извѣстныя имъ числовыя отношенія къ послѣдовательности явленій во времени; во второмъ случаѣ число будетъ воспринято только какъ результатъ счета, а при такихъ условіяхъ у дѣтей не могутъ возникнуть отчетливыя и живыя представленія чиселъ перваго десятка. „Только при правильномъ соединеніи обоихъ методовъ, — говоритъ Мейманъ,—возможно исчерпывающимъ образомъ уяснить ребенку сущность представленія о числѣ и сущность ариѳметическихъ дѣйствій" (т. III, стр. 174). Такое комбинированіе обоихъ методовъ тѣмъ болѣе необходимо, что среди учащихся попадаются дѣти слухового типа, слѣдовательно, болѣе предрасположенныя къ воспріятію явленій, послѣдовательныхъ во времени; и эти дѣти при обученіи по методу, основанному только на примѣненіи числовыхъ фигуръ, будутъ въ столь же невыгодномъ положеніи, въ какомъ находятся дѣти зрительнаго типа при господствующемъ теперь „счетномъ" методѣ.

Теперь я выскажусь относительно наглядныхъ пособій, построенныхъ Лаемъ, и примѣнимости ихъ въ нашей школѣ. Весьма цѣлесообразнымъ пособіемъ являются, по-моему, малые счеты Лая (о 20 шарикахъ) и соотвѣтствующіе ручные приборы для учащихся—счетная линейка и пеналъ. Эти пособія очень пригодны при первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ въ предѣлахъ первыхъ двухъ десятковъ; возможность производить дѣйствія надъ однозначными числами безъ помощи присчитыванія и отсчитыванія значительно облегчаетъ усвоеніе таблицъ сложенія и вычитанія, а также начатковъ умноженія и дѣленія; вмѣстѣ съ тѣмъ наличность ручного прибора у учащихся даетъ имъ возможность активно воспринимать каждый дальнѣйшій шагъ въ обученіи. Что касается большихъ счетовъ (изъ ста шариковъ), то они не представляютъ такихъ удобствъ, такъ какъ наглядность при иллюстраціи чиселъ и дѣйствій далеко не всегда достигается съ ихъ помощью.

Въ нашей начальной школѣ наглядныя пособія Лая и методъ числовыхъ фигуръ могли бы быть примѣняемы, конечно, лишь въ соотвѣтствіи съ условіями нашей школьной обстановки. Какъ было указано выше, въ нѣмецкой начальной школѣ обученіе начинается съ 6 лѣтъ, когда дѣти обладаютъ очень небольшимъ запасомъ числовыхъ представленій; поэтому неудивительно, что Лай, какъ и многіе другіе нѣмецкіе педагоги, при обученіи счисленію въ первомъ десяткѣ переходитъ въ послѣдовательномъ порядкѣ отъ числа къ числу, медленно и понемногу расширяя кругъ чиселъ, знакомыхъ дѣтямъ, и изучая подробно всевозможныя соотношенія между даннымъ числомъ и предыдущими. Въ нашей же школѣ начальное обученіе начинается съ 8 лѣтъ, и запасъ числовыхъ представленій, приносимыхъ дѣтьми изъ домашней обстановки, болѣе обширенъ, въ особенности въ городскихъ школахъ, гдѣ поступающія дѣти часто знаютъ уже всѣ числа перваго десятка. Поэтому у насъ учителю, который пожелалъ бы пользоваться на практикѣ пособіями Лая, пришлось бы сообразоваться въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ со степенью ариѳметической подготовки своихъ учащихся; тамъ, гдѣ приступающія къ ученію дѣти не знаютъ еще всѣхъ чиселъ перваго десятка, небезполезно было бы, выяснивъ предѣлъ чиселъ, имъ хорошо знакомыхъ, придерживаться, въ области перваго десятка, послѣдовательнаго изученія чиселъ и ихъ соотношеній; опасаться, что такимъ образомъ мы воспроизводимъ давно забракованный методъ Грубе, нѣтъ рѣшительно никакихъ основаній, такъ какъ числа перваго десятка съ помощью числовыхъ фигуръ становятся дѣйствительно доступны для непосредственнаго воспріятія, а во второмъ десяткѣ мы переходимъ къ послѣдовательному изученію дѣйствій. Въ тѣхъ же школахъ, гдѣ дѣти при началѣ обученія обнаруживаютъ уже знакомство со всѣми числами перваго десятка, нѣтъ надобности даже и въ этомъ отступленіи отъ принятаго у насъ расположенія первоначальныхъ упражненій. Слѣдуетъ еще имѣть въ виду, что не всякая изъ нашихъ школъ могла бы пользоваться пособіями Лая по чисто матеріальнымъ причинамъ; но при недостаткѣ средствъ можно было бы ограничиваться классными счетами о 20 шарикахъ, а ручные приборы предоставить сдѣлать самимъ учащимся изъ деревянной дощечки или кусочка картона и обыкновенныхъ круглыхъ пуговицъ, горошинъ и т. п. предметовъ; также необходимо было бы примѣнять и рисованіе числовыхъ фигуръ въ тетрадяхъ.

Изъ другихъ экспериментальныхъ изслѣдованій въ области методики ариѳметики заслуживаютъ еще вниманіе опыты Вальземанна, произведенные въ 1906 г. по вопросу о наиболѣе цѣлесообразныхъ наглядныхъ пособіяхъ для первоначальнаго ознакомленія съ дробями. Вальземаннъ задался цѣлью сравнить три способа нагляднаго изображенія долей и дробей, наиболѣе употребительные въ школьной практикѣ, именно, изображеніе дробей посредствомъ частей прямолинейнаго отрѣзка, посредствомъ круга, раздѣленнаго на секторы, и, наконецъ, посредствомъ квадрата, раздѣленнаго на прямоугольники (см. рис. 6).

Съ этой цѣлью онъ показывалъ учащимся картонныя таблицы, на которыхъ были изображены различныя доли (пятыя, шестыя, восьмыя, девятыя, двѣнадцатыя, пятнадцатыя) однимъ изъ трехъ указанныхъ способовъ. Испытаніямъ подвергались ученицы учительской семинаріи (въ Шлезвигѣ) и начальной школы при ней, при чемъ въ первой группѣ опытовъ онѣ должны были только указывать, какія доли изображены на данной таблицѣ, а во второй группѣ опытовъ — какія и сколько долей. Время воспріятія каждой таблицы не превышало $1^{1}/_{5}$ сек.; всего было изслѣдовано болѣе тысячи отдѣльныхъ отвѣтовъ для каждаго вида таблицъ, и въ результатѣ оказалось, что изображеніе дробей посредствомъ частей прямой линіи дало въ первой группѣ опытовъ 40%, а во второй 66,3% невѣрныхъ отвѣтовъ; изображеніе посредствомъ частей круга—33,7% и 50% невѣрныхъ отвѣтовъ, а изображеніе дробей съ помощью квадрата, раздѣленнаго на прямоугольники,—только 11,4% и 12,3% ошибокъ. Эти изслѣдованія имѣютъ боль-

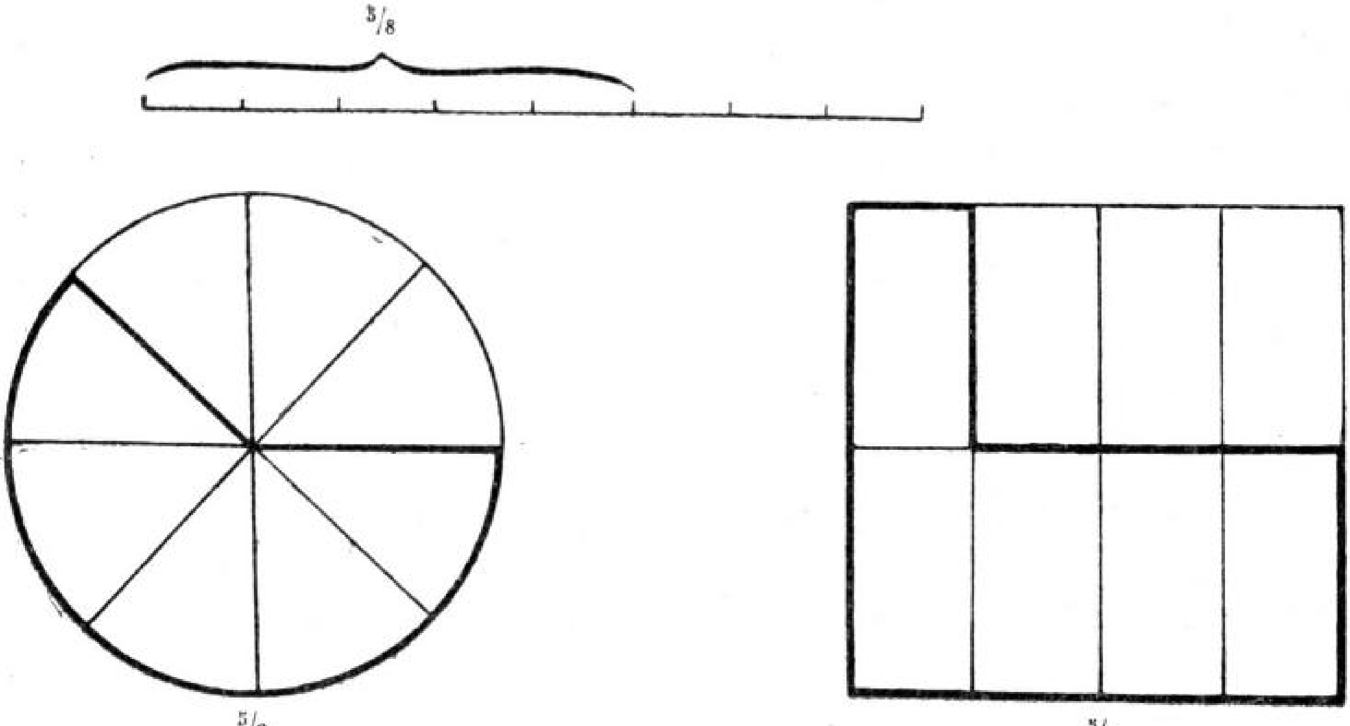

Рис. 6. Различные способы нагляднаго изображенія дроби $^{5}/_{8}$ [1]).

шую важность для педагогической практики, такъ какъ они указываютъ, что распространенная въ нашей школѣ прямая линія, собственно говоря, не можетъ считаться сколько-нибудь удовлетворительнымъ нагляднымъ пособіемъ при ознакомленіи съ простѣйшими дробями (интересно, что тѣ опыты Вальземанна, которые были проведены надъ дѣтьми начальной школы дали для прямой линіи 58,3% и 72% ошибокъ); и даже кругъ, раздѣленный на секторы, который начинаетъ за послѣдніе годы входить у насъ въ моду, какъ „новое" наглядное пособіе въ курсѣ дробей, оказывается, по

[1]) При опытахъ Вальземанна соотвѣтствующія данной дроби части фигуръ были заштрихованы синимъ карандашомъ.

числу возможныхъ при немъ ошибокъ, въ 3—4 раза менѣе цѣлесообразнымъ, чѣмъ квадратъ, раздѣленный на прямоугольныя доли.

Я постарался изложить сущность современныхъ экспериментальныхъ изслѣдованій въ области методики начальной ариѳметики и тѣ практическіе выводы, которые можно сдѣлать на основаніи этихъ изслѣдованій. Изложенное позволяетъ отвѣтить на вопросъ, ставшій у насъ въ послѣднее время предметомъ усиленнаго вниманія, именно, на вопросъ о томъ, можно ли въ настоящее время построить методику ариѳметики на основаніи точныхъ экспериментальныхъ данныхъ, и на мѣсто нашихъ приблизительныхъ обобщеній создать строго обоснованную систему методическихъ указаній и пріемовъ.

Безспорно, прошло уже то время, когда методика ариѳметики, какъ и прочія отрасли педагогическаго дѣла, развивалась грубо эмпирическимъ путемъ, когда сторонники совершенно противоположныхъ взглядовъ въ подтвержденіе ихъ ссылались каждый на свои личныя наблюденія, и эти наблюденія велись въ такой формѣ, что не могли быть ни провѣряемы, ни сравниваемы между собой. Несомнѣнно, спорные вопросы методики ариѳметики могутъ быть успѣшно разрѣшены только тогда, когда изслѣдующіе ихъ педагоги будутъ исходить въ своихъ заключеніяхъ изъ фактовъ, добытыхъ объективными, планомѣрными наблюденіями, доступными контролю и провѣркѣ, иначе говоря, вполнѣ обоснованная система методики ариѳметики можетъ быть построена только на экспериментальныхъ данныхъ. И въ настоящее время, какъ я старался показать, дѣлаются уже попытки пойти по этому новому пути къ разрѣшенію методическихъ вопросовъ, и добыты цѣнныя данныя, которыми можетъ воспользоваться педагогическая практика. Но, въ общемъ, это лишь первыя попытки, и отсюда еще далеко до возможности построить цѣлую систему методики ариѳметики на основѣ научно-педагогическаго эксперимента. Небезполезно привести по этому вопросу мнѣніе такого выдающагося сторонника экспериментальнаго направленія, какъ Мейманъ; въ своихъ „Лекціяхъ по экспериментальной педагогикѣ“ (т. III, стр. 174—175) онъ говоритъ слѣдующее: „Чтобы достигнуть психологическаго обоснованія преподаванія ариѳметики, намъ надо было бы выяснить, главнымъ образомъ, три пункта что, несмотря на все якобы экспериментальное обоснованіе дидактики, еще совершенно не сдѣлано: 1) необходимо чисто опытное изслѣдованіе вопроса о томъ, какъ фактически развиваются у ребенка первыя числовыя представленія; 2) необходимо опредѣленный, выведенный изъ опыта, а не изъ отвлеченныхъ умозрѣній, взглядъ относительно того, въ чемъ состоитъ сущность числа и дѣйствій надъ числами, и каковы въ этомъ отношеніи различія между ребенкомъ и взрослымъ человѣкомъ; 3) необходимо экспериментальнымъ путемъ выяснить относительную цѣнность различныхъ ариѳметическихъ методовъ и наиболѣе цѣлесообразный способъ совмѣстнаго ихъ примѣненія". Съ тѣхъ поръ, какъ были написаны эти слова, положеніе вопроса, въ общемъ, измѣнилось мало; и потому, выражая твердую увѣренность, что экспериментальныя изслѣдованія методическихъ вопросовъ представляютъ наиболѣе надежный путь къ ихъ разрѣшенію и что на этотъ путь и наша методика ариѳметики должна непремѣнно вступить, мы должны ясно сознавать, что въ этомъ направленіи сдѣланы пока лишь первые шаги; только при этомъ условіи мы можемъ предохранить себя отъ слѣпого увлеченія методами иностранной педагогики, подобнаго тому, которое имѣло мѣсто въ 60-е годы по отношенію къ методу Грубе, и заимствовать изъ практики нашихъ культурныхъ сосѣдей только тѣ сѣмена, которыя могутъ успѣшно прорасти и на нашей педагогической нивѣ и принести на ней обильные плоды.

Вопросъ о дробяхъ въ курсѣ ариѳметики.

(Основныя положенія методики курса дробей.)

Ученіе о дробяхъ принадлежитъ, какъ извѣстно, къ числу больныхъ мѣстъ традиціонной системы преподаванія ариѳметики. Болѣе сложные отдѣлы курса, какъ, напр., умноженіе и дѣленіе на дробь, обычно съ трудомъ усваиваются учащимися, а такой сравнительно легкій отдѣлъ, какъ дѣйствія надъ десятичными дробями, служитъ постояннымъ источникомъ ошибокъ въ вычисленіяхъ, порою даже въ старшихъ классахъ. Причины этого явленія общеизвѣстны. Съ одной стороны, традиціонный курсъ дробей вообще излагается въ слишкомъ отвлеченной формѣ; съ другой стороны, при прохожденіи его обыкновенно слишкомъ много вниманія удѣляется второстепеннымъ вопросамъ, лишь косвенно связаннымъ съ ученіемъ о дробяхъ и не имѣющимъ серьезнаго практическаго значенія,—напр., вопросу о дѣлимости чиселъ или о періодическихъ дробяхъ,—а на пріобрѣтеніе прочныхъ навыковъ въ дѣйствіяхъ надъ дробями, встрѣчающимися въ ариѳметической практикѣ, остается недостаточно мѣста и времени; объ устномъ же счетѣ надъ простѣйшими дробями или о примѣненіи въ частныхъ случаяхъ болѣе удобныхъ и изящныхъ пріемовъ вычисленія—школа обыкновенно и не помышляетъ.

Очевидная ненормальность такого положенія заставляетъ поставить вопросъ о томъ, каково же должно быть содержаніе ученія о дробяхъ въ курсѣ ариѳметики и какъ должны разрабатываться съ учащимися важнѣйшіе пункты этого ученія. Я и имѣю въ виду дать посильный отвѣтъ на этотъ вопросъ.

Съ этой цѣлью я остановлюсь прежде всего на самомъ спорномъ въ настоящее время пунктѣ методики ученія о дробяхъ—на вопросѣ объ относительномъ порядкѣ изученія дробей, простыхъ и десятичныхъ. Должны ли десятичныя дроби изучаться, какъ частный случай обыкновенныхъ, или предшествовать имъ, подъ псевдонимомъ „десятичныхъ чиселъ“ или подъ своимъ настоящимъ именемъ?

Старая школа, какъ извѣстно, рѣшала этотъ вопросъ весьма просто: сперва должны изучаться общія положенія и общіе законы, а затѣмъ тѣ формы, въ которыя они облекаются въ частныхъ случаяхъ; поэтому десятичныя дроби должны идти вслѣдъ за обыкновенными. Нельзя сказать при этомъ, чтобы въ традиціонной практикѣ строго выдерживалась система—разсматривать десятичную дробь, какъ частный случай простой; напр., какъ извѣстно, правило умноженія десятичныхъ дробей чаще всего выводилось при помощи отбрасыванія запятыхъ у сомножителей и примѣненія законовъ объ измѣненіи произведенія, а не какъ частный случай правила умноженія простыхъ дробей. Но, въ общемъ, указанное распредѣленіе курса вполнѣ отвѣчало абстрактно-дедуктивному методу обученія математикѣ, принятому въ старой школѣ.

Въ сочиненіяхъ сторонниковъ реформы [1]), да и въ практикѣ школъ новаго типа замѣчается опредѣленная тенденція предпосылать изученіе десятичныхъ дробей простымъ и ставить десятичныя дроби въ соотвѣтствіе скорѣе съ цѣлыми числами, чѣмъ съ обыкновенными дробями. Вмѣстѣ съ тѣмъ наблюдается также стремленіе ограничить изученіе простыхъ дробей, даже раздаются голоса, требующіе изъятія курса простыхъ дробей изъ школы.

Въ пользу предварительнаго изученія десятичныхъ дробей приводится обыкновенно то соображеніе, что дѣйствія надъ десятичными дробями проще соотвѣтственныхъ дѣйствій надъ простыми дробями и что предварительное ознакомленіе съ ними отвѣчаетъ требованіямъ индуктивнаго метода въ обученіи. Кромѣ того, го-

---

1) Al. Höfler. Didaktik des mathematischen Unterrichts.
В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ. Педагогика математики, т. I.
Ивановъ (Дубравинъ). Курсъ ариѳметики, вып. I.

ворятъ, что правила дѣйствій надъ десятичными дробями аналогичны таковымъ же правиламъ для цѣлыхъ чиселъ, что сами по себѣ десятичныя дроби представляютъ естественное развитіе нумераціи вправо, а потому и цѣлесообразно сопоставлять ихъ именно съ цѣлыми числами, а не съ дробями вообще. Наконецъ, указываютъ, что десятичныя дроби имѣютъ гораздо большее практическое значеніе, чѣмъ простыя, что послѣднія мало или вовсе не встрѣчаются въ практическихъ вычисленіяхъ и что поэтому школа и должна пораньше знакомить учащихся съ десятичными дробями и главное свое вниманіе удѣлять изученію точныхъ и приближенныхъ вычисленій съ ними, а простымъ дробямъ посвящать время лишь постольку, поскольку въ частныхъ случаяхъ онѣ могутъ способствовать сокращенію вычисленій.

При этомъ сторонники предварительнаго изученія десятичныхъ дробей обыкновенно предлагаютъ при прохожденіи дѣйствій надъ ними, въ частности—умноженія и дѣленія на десятичную дробь, не касаться вопроса о сущности этихъ дѣйствій и ссылаться при отбрасываніи запятой въ множителѣ и дѣлителѣ на законы измѣненія произведенія и частнаго, установленные для цѣлыхъ чиселъ. Не отрицая логическихъ дефектовъ, допускаемыхъ при такомъ способѣ объясненія [1]), они готовы мириться съ этими дефектами въ виду незамѣтности послѣднихъ для учащихся и ради тѣхъ внѣшнихъ удобствъ, которыя проистекаютъ изъ принятаго ими расположенія курса. Однимъ словомъ, какъ имъ кажется, они отдаютъ предпочтеніе дидактическимъ и педагогическимъ соображеніямъ передъ чисто-логическими.

Я полагаю, однако, что отрицательныя стороны такой постановки вопроса болѣе серьезны, чѣмъ это кажется на первый взглядъ. Уже то обстоятельство, что учащіеся будутъ употреблять хорошо знакомый имъ терминъ „умножить“ въ приложеніи къ такимъ случаямъ, когда этотъ терминъ будетъ имѣть уже нѣсколько иной смыслъ, и при томъ этотъ новый смыслъ не будетъ имъ выясненъ,—уже это одно обстоятельство нужно считать непріемлемымъ съ педагогической точки зрѣнія. А сверхъ того, если мы,

[1]) См., напр., вышеупомянутое сочиненіе Höfler'а, стр. 82.

умножая какое-либо число хотя бы на 0,3, говоримъ, что при отбрасываніи запятой во множителѣ искомое произведеніе увеличивается въ 10 разъ, то мы, не имѣя логическаго права распространять на сферу дробныхъ чиселъ тотъ законъ, который установленъ нами пока лишь для цѣлыхъ чиселъ, вводимъ въ скрытомъ видѣ опредѣленіе смысла умноженія на 0,3, то самое опредѣленіе, котораго хотѣли избѣжать. Мы, въ сущности, говоримъ: „подъ произведеніемъ даннаго множимаго на 0,3 мы будемъ разумѣть такое число, которое въ 10 разъ меньше произведенія того же множимаго на 3“, только этому новому опредѣленію мы придаемъ такую форму, которая имѣетъ внѣшній видъ логическаго доказательства. А такой пріемъ, какъ извѣстно, стоитъ въ коренномъ противорѣчіи съ требованіями современной дидактики. А если еще принять въ соображеніе, что чисто внѣшнее изученіе правилъ умноженія и дѣленія на десятичную дробь не можетъ обезпечить должной увѣренности при производствѣ учащимися этихъ дѣйствій въ задачахъ, то придется въ концѣ концовъ признать, что ни логическія, ни педагогическія соображенія не оправдываютъ такого способа прохожденія курса „десятичныхъ чиселъ“, который обыкновенно предлагается.

Можно было бы признать непротиворѣчащимъ дидактическимъ требованіямъ только такое предварительное прохожденіе курса десятичныхъ дробей, при которомъ смыслъ дѣйствій надъ ними не замалчивался бы, и умноженіе на дробь опредѣлялось бы хотя бы, какъ повтореніе слагаемымъ нѣкоторой десятичной доли множимаго. Было бы даже вполнѣ возможно установить подобное опредѣленіе на подходящихъ задачахъ и вообще провести разработку его съ учащимися въ духѣ конкретно-индуктивнаго метода. Подобнымъ же образомъ можно было бы поступить и при изученіи дѣленія на десятичную дробь. Такое построеніе курса было бы, съ моей точки зрѣнія, допустимо; но оно вызвало бы возраженія уже со стороны цѣлесообразности. Въ самомъ дѣлѣ, этотъ распорядокъ только переноситъ въ курсъ десятичныхъ дробей всѣ трудности ознакомленія съ понятіемъ объ умноженіи и дѣленіи на дробь; а съ другой стороны, при немъ не вполнѣ выдерживается переходъ отъ болѣе простого къ болѣе сложному, такъ какъ въ курсѣ обыкновенныхъ дробей, оставляемомъ напослѣдокъ, безспорно есть вопросы, дидактически болѣе простые, чѣмъ умноженіе и дѣленіе на десятичную дробь. При этомъ надо замѣтить, что и всѣ остальныя соображенія, которыя обычно приводятся въ пользу изученія курса десятичныхъ дробей передъ простыми, еще не обусловливаютъ собою именно такого порядка изученія: если знакомство съ десятичными дробями крайне важно для практики, то отсюда вытекаетъ, что ихъ нужно хорошо изучать въ школѣ, но еще тѣмъ самымъ не доказано, что ихъ нужно изучать передъ простыми дробями.

Слѣдуетъ ли изъ всего предыдущаго, что я высказываюсь за традиціонный порядокъ изученія курса: сперва простыя дроби, а затѣмъ десятичныя, какъ ихъ частный случай? Нисколько. Я полагаю, что наиболѣе цѣлесообразно будетъ распредѣлить весь курсъ дробей, простыхъ и десятичныхъ, на циклы, въ каждый изъ которыхъ входили бы вопросы приблизительно одинаковой дидактической трудности; подобная идея практиковалась и до сихъ поръ въ формѣ такъ называемаго пропедевтическаго курса дробей, но исключительно по отношенію къ простымъ дробямъ; я предложилъ бы распространить ту же точку зрѣнія и на десятичныя дроби.

Первый изъ этихъ цикловъ долженъ быть посвященъ конкретному ознакомленію съ простѣйшими, наиболѣе употребительными долями и дробями, выполняемому при помощи дѣйствительныхъ измѣреній и дѣленія предметовъ на части. Здѣсь слѣдуетъ имѣть въ виду экспериментальныя изслѣдованія Вальземанна [1]), который, между прочимъ, занимался вопросомъ о наиболѣе цѣлесообразныхъ наглядныхъ пособіяхъ при первоначальномъ ознакомленіи съ дробями. Онъ нашелъ, что наиболѣе ясныя и отчетливыя представленія о доляхъ и дробяхъ получаются при употребленіи квадратныхъ таблицъ, разграфленныхъ на прямоугольныя или квадратныя клѣтки, а не при помощи круга, раздѣленнаго на секторы, или прямой, раздѣленной на равные отрѣзки (см. въ этой книгѣ статью вторую).

---

[1]) Dr. Hermann Walsemann, Anschauungslehre der Rechenkunst, Schleswig 1907.

Цѣлью изученія этого перваго цикла являются твердое знаніе кратныхъ соотношеній между простѣйшими долями и умѣніе выполнять надъ ними счетъ и дѣйствія, преимущественно устно. Какія доли считать простѣйшими и важнѣйшими—это вопросъ довольно спорный, но я полагаю, что здѣсь нельзя ограничиваться 2-ми, 3-ми, ... 10-ми долями, а необходимо разсматривать и разныя доли со знаменателями въ предѣлахъ первой сотни, находящіяся въ несложныхъ кратныхъ соотношеніяхъ съ вышеуказанными. Дѣло въ томъ, что основательное знакомство съ этими долями и составляемыми изъ нихъ дробями не безполезно для практическихъ вычисленій и отнюдь не можетъ быть замѣнено изученіемъ десятичныхъ дробей, какъ это иногда предлагаютъ.

Само собой разумѣется, что въ этомъ циклѣ всѣ дѣйствія совершаются по соображенію и учащимся не сообщаются какія-либо правила и опредѣленія; достаточно ограничиться объясненіемъ смысла важнѣйшихъ терминовъ (числитель, знаменатель, дробь правильная и неправильная и т. д.). Но задачи, которыя рѣшаются въ этомъ отдѣлѣ, должны быть по возможности разнообразнѣе и могутъ касаться любого дѣйствія надъ дробями, если только послѣднія разсматриваются, какъ собранія конкретныхъ долей цѣлаго; такъ что, напр., вопросъ о томъ, сколько разъ $\frac{1}{12}$ доля содержится въ $\frac{2}{3}$, можетъ быть съ успѣхомъ разбираемъ на этой ступени.

Въ общемъ, первый циклъ можетъ обнимать собою слѣдующіе вопросы: первоначальное понятіе о дроби, какъ совокупности конкретныхъ долей цѣлаго; изображеніе и чтеніе дробныхъ чиселъ; смыслъ числителя и знаменателя; понятіе о правильной и неправильной дроби; обращеніе неправильной дроби въ смѣшанное число и наоборотъ; раздробленіе болѣе крупныхъ долей въ болѣе мелкія и обратный вопросъ; сложеніе и вычитаніе дробей съ одинаковыми, а затѣмъ и съ разными знаменателями; умноженіе и дѣленіе дроби на цѣлое число помощью соотвѣтственныхъ дѣйствій надъ числителемъ; опредѣленіе кратныхъ соотношеній между дробными числами въ тѣхъ случаяхъ, когда искомое частное—цѣлое; нахожденіе данной части отъ цѣлаго числа; нахожденіе нѣкотораго числа по данной его части въ томъ случаѣ, когда эта часть искомаго выражена цѣлымъ числомъ (при чемъ каждый изъ послѣднихъ двухъ вопросовъ рѣшается двумя дѣйствіями съ помощью умноженія и дѣленія на цѣлое число).

Какъ видно, этотъ первый циклъ по содержанію сходенъ съ практикующимся у насъ пропедевтическимъ курсомъ дробей, но въ отличіе отъ традиціонной практики я подчеркиваю необходимость возможно большей конкретности при его прохожденіи. Только при этомъ условіи можно добиться того, чтобы учащіеся освоились со счетомъ простѣйшихъ дробныхъ чиселъ хотя бы въ такой мѣрѣ, въ какой они усваиваютъ дѣйствія надъ цѣлыми числами въ предѣлахъ первой сотни.

Изученіе перваго цикла дробей можетъ найти себѣ мѣсто, какъ и теперь, въ концѣ курса перваго класса средней школы (т.-е на 11-мъ году жизни учащихся). Возможно, конечно, выдѣлить изъ него еще болѣе узкій концентръ, именно знакомство съ дробями, знаменатели которыхъ не превышаютъ 10 или 12, и изучать этотъ концентръ въ еще болѣе раннюю пору обученія (въ приготовительномъ классѣ средней школы); но представляетъ ли такой распорядокъ значительныя преимущества—этотъ вопросъ можетъ рѣшить только практическій опытъ.

Второй циклъ (съ котораго, по моему мнѣнію, можетъ начинаться курсъ второго класса) долженъ быть посвященъ ознакомленію съ десятичными дробями (преимущественно десятыя, сотыя, тысячныя доли) и рѣшенію при помощи ихъ всѣхъ подходящихъ вопросовъ, но безъ введенія понятія объ умноженіи и дѣленіи на дробь. Первоначальное знакомство съ десятичными дробями должно, конечно, сопровождаться конкретными иллюстраціями, для чего хорошій матеріалъ даютъ метрическая система и подраздѣленія рубля. Затѣмъ (сохраняя все время представленіе о дроби, какъ собраніи конкретныхъ долей цѣлаго) можно послѣдовательно изучить соотношенія между десятичными долями различныхъ разрядовъ, выяснить тѣсную связь ихъ съ нумераціей цѣлыхъ чиселъ и научить учащихся быстрому обращенію болѣе крупныхъ разрядныхъ единицъ въ болѣе мелкія, и наоборотъ. Послѣ этого учащіеся легко пріобрѣтутъ привычку смотрѣть на десятичную дробь, какъ на совокупность долей различныхъ разрядовъ, расподоженныхъ по десятичной системѣ, и безъ труда смогутъ изучить и прилагать въ задачахъ сложеніе и вычитаніе десятичныхъ дробей и умноженіе десятичной дроби на цѣлое число. Что же касается дѣленія, то, разумѣется, сперва слѣдуетъ задавать только такія задачи, въ которыхъ частное отъ дѣленія десятичной дроби на цѣлое число выражалось бы конечной десятичной дробью, а также такія, въ которыхъ приходилось бы рѣшать, сколько разъ данная десятичная дробь содержится въ другой или въ цѣломъ числѣ, при чемъ искомое частное было бы цѣлымъ. Затѣмъ, конечно, можно разбирать и случаи приближеннаго дѣленія десятичной дроби на цѣлое число (аналогично дѣленію съ остаткомъ въ курсѣ цѣлыхъ чиселъ); въ связи съ этимъ слѣдуетъ разобрать, на несложныхъ примѣрахъ, и вопросъ относительно обращенія простой дроби въ десятичную путемъ дѣленія числителя на знаменателя; но, разумѣется, относительно случаевъ необратимости простой дроби въ конечную десятичную достаточно ограничиться констатированіемъ, на примѣрахъ, факта безконечнаго дѣленія и не слѣдуетъ даже подымать вопроса о періодическихъ дробяхъ.

Въ этомъ же циклѣ слѣдуетъ рѣшать и вопросы, касающіеся нахожденія той или иной десятичной части отъ цѣлаго числа и наоборотъ, но безъ введенія понятія объ умноженіи и дѣленіи на дробь двумя дѣйствіями, совершаемыми при цѣломъ множителѣ или дѣлителѣ.

Необходимо добавить, что сюда же должно войти и ученіе о процентѣ, какъ сотой долѣ даннаго числа, и должны рѣшаться разнаго рода задачи на процентныя вычисленія, не требующія производства умноженія или дѣленія на дробь.

Наконецъ, третій циклъ (приходящійся также на курсъ второго класса) посвящается такъ называемому систематическому курсу дробей, простыхъ и десятичныхъ, изучаемыхъ параллельно, при чемъ десятичныя дроби разсматриваются уже какъ частный случай простыхъ. Я называю этотъ курсъ систематическимъ не потому, чтобы въ немъ могла изучаться какая-либо формальная теорія дробей, а потому, что въ немъ должны быть приведены въ систему тѣ свѣдѣнія о дробяхъ, съ которыми учащіеся доселѣ познакомились. Въ этомъ курсѣ прежде всего придется остановиться на измѣненіи величины дроби при измѣненіи ея числителя и знаменателя, на неизмѣняемости этой величины при увеличеніи или уменьшеніи числителя и знаменателя въ одинаковое число разъ и на преобразованіяхъ, основанныхъ на этомъ послѣднемъ законѣ— на сокращеніи дробей и приведеніи ихъ къ одному знаменателю. Такъ какъ само собою разумѣется, что въ задачи на этотъ курсъ должны входить дроби съ не особенно большими знаменателями, то можно предложить сдѣлать въ немъ довольно значительныя сокращенія сравнительно съ традиціонной программой, именно можно безусловно упразднить ученіе объ отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя, такъ какъ сокращеніе дробей, дѣйствительно употребляемыхъ на практикѣ, всегда выполняется путемъ отысканія „на-глазъ“ общихъ множителей числителя и знаменателя. Что же касается отысканія наименьшаго кратнаго, выполняемаго для приведенія дробей къ одному знаменателю, то оно производится на практикѣ почти всегда на основаніи сохраненныхъ памятью учащихся важнѣйшихъ кратныхъ соотношеній между числами первой сотни, а не путемъ примѣненія общихъ правилъ; поэтому я считаю вѣроятнымъ, что въ курсѣ младшихъ классовъ, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь, можно обойтись и безъ ученія о наименьшемъ кратномъ, а въ связи съ вышеизложеннымъ опустить и вообще ученіе о дѣлимости чиселъ, за исключеніемъ самыхъ терминовъ: „общій дѣлитель“, „общее кратное“, „общее наименьшее кратное“ и т. д., которые полезны для сокращенія рѣчи и потому должны быть пояснены и употребляемы. Изученіе же теоріи дѣлимости чиселъ, общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго слѣдовало бы отнести къ курсу теоретической ариѳметики, которому мѣсто въ послѣднемъ классѣ средней школы.

Изученіе или, вѣрнѣе, повтореніе сложенія и вычитанія дробныхъ чиселъ не представитъ никакихъ затрудненій. Не мѣшаетъ обратить вниманіе учащихся на то, что при сложеніи и вычитаніи обыкновенныхъ дробей приведеніе къ одному знаменателю обязательно, а при соотвѣтствующихъ дѣйствіяхъ надъ десятичными дробями—не обязательно.

Наконецъ, мы должны будемъ подойти къ кульминаціонному пункту всего курса—къ ученію объ умноженіи и дѣленіи на дробь.

Старая школа, какъ извѣстно, выводила правило умноженія на дробь при помощи общаго опредѣленія этого дѣйствія: „умножить—значитъ составить изъ множимаго новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы“. Опредѣленіе это сообщалось обыкновенно догматически, съ разъясненіемъ на частномъ примѣрѣ того обстоятельства, что оно охватываетъ собою и случай умноженія на цѣлое число, а затѣмъ предлагалось разсужденіе въ родѣ слѣдующаго: „умножить 5 на $\frac{3}{4}$ значитъ, согласно опредѣленію, составить изъ 5 новое число такъ, какъ множитель сосоставленъ изъ единицы; но множитель $\frac{3}{4}$ составленъ изъ единицы такъ: взята единица, раздѣлена на 4 равныхъ части, и такихъ частей взято 3; поэтому для полученія искомаго произведенія мы должны раздѣлить число 5 на 4 равныхъ части и полученное число $\frac{5}{4}$ взять (слагаемымъ) 3 раза; будемъ имѣть $\frac{15}{4}$“. Послѣ этого путемъ сравненія полученнаго числа съ данными выводилось и самое правило умноженія на дробь.

Общеизвѣстны и тѣ серьезные дефекты, которыми страдаетъ этотъ традиціонный пріемъ объясненія вопроса.

Во-первыхъ, онъ не вполнѣ удовлетворителенъ съ логической стороны, такъ какъ способъ составленія числа изъ единицы, подразумѣваемый въ немъ, является не единственнымъ, и мы можемъ, нисколько не нарушая буквы опредѣленія, разсуждать слѣдующимъ образомъ: „число $\frac{3}{4}$ составлено изъ единицы такъ: взята единица 3 раза слагаемымъ, затѣмъ 4 раза слагаемымъ, и первое изъ полученныхъ чиселъ сдѣлано числителемъ дроби, второе—ея знаменателемъ“; составляя же по этому „способу“ новое число изъ множимаго 5, мы получимъ дробь $\frac{15}{20}$, а не $\frac{15}{4}$, какъ слѣдовало бы. Чтобы избѣжать этого парадокса, пришлось бы здѣсь (и въ другихъ аналогичныхъ случаяхъ) предварительно строго оговаривать, о какомъ именно способѣ составленія числа изъ единицы идетъ рѣчь; а благодаря этому, все объясненіе становится искусственнымъ и теряетъ свою убѣдительность. Во-вторыхъ, съ дидактической точки зрѣнія данное объясненіе страдаетъ излишней общностью, такъ какъ на этой ступени курса требуется выяснить только смыслъ умноженія на дробь, а не умноженія вообще Въ-третьихъ, съ педагогической стороны надо считать догматическое сообщеніе опредѣленій въ такой же мѣрѣ недопустимымъ, какъ и догматическое заучиваніе правилъ.

Неудовлетворительность традиціоннаго пріема заставляетъ искать новыхъ путей, и мы видимъ, что въ настоящее время предлагаются двѣ точки зрѣнія. Одни [1]) воскрешаютъ старинный пріемъ вывода правила умноженія на дробь при помощи законовъ измѣненія произведенія, установленныхъ для цѣлыхъ чиселъ, и предлагаютъ разсуждать примѣрно такъ: „вмѣсто умноженія 5 на $\frac{3}{4}$ будемъ множить 5 на 3; получимъ 15. Но, отбросивъ знаменателя во множителѣ, мы увеличимъ его въ 4 раза; слѣдовательно и произведеніе увеличилось въ 4 раза противъ истиннаго; чтобы его исправить, уменьшаемъ найденное число 15 въ 4 раза и получаемъ $\frac{15}{4}$“. Этотъ пріемъ дѣйствительно легче традиціоннаго для запоминанія, но по существу онъ непріемлемъ по тѣмъ же причинамъ, какъ и разсмотрѣнное выше объясненіе умноженія на десятичную дробь: смыслъ умноженія на дробь остается невыясненнымъ для учащихся, а приведенное разсужденіе содержитъ замаскированное опредѣленіе дѣйствія, такъ какъ мы не имѣемъ логическаго права ссылаться здѣсь на законы измѣненія произведенія, установленные пока лишь для цѣлыхъ чиселъ, и, въ сущности говоря, вводимъ условіе считать произведеніемъ 5 на $\frac{3}{4}$ такое число, которое было бы въ 4 раза меньше произведенія 5 на 3. Поэтому, какъ было выяснено выше, данный пріемъ стоитъ въ коренномъ противорѣчіи съ однимъ изъ существенныхъ требованій современной дидактики: не пытаться симулировать доказательствъ тамъ, гдѣ нужно вводить новыя опредѣленія или условія.

---

[1]) А. Б. Сахаровъ. Ариѳметика. Опытъ методическаго изложенія предмета. Спб. 1910 г.

Другіе авторы [1]) и педагоги предлагаютъ вмѣсто традиціоннаго объясненія просто вводить условія въ родѣ слѣдующаго: „подъ произведеніемъ двухъ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ мы будемъ разумѣть дробь $\frac{ac}{bd}$" (числителемъ которой является произведеніе числителей данныхъ дробей, а знаменателемъ—произведеніе знаменателей),—и сопровождать эти условія подходящей графической иллюстраціей. Такой пріемъ не грѣшитъ уже противъ логики, такъ какъ опредѣленіе произведенія вводится въ правильной и явной формѣ; но съ педагогической точки зрѣнія онъ столь же неудовлетворителенъ, какъ и прежніе, такъ какъ цѣль установленія указанныхъ здѣсь условій остается совершенно неясной для учащихся. Взрослый человѣкъ, который изучаетъ ариѳметику въ научномъ изложеніи, можетъ сознавать, что подобныя условія вводятся ради сохраненія основныхъ законовъ ариѳметическихъ дѣйствій при расширеніи понятія о числѣ, но учащемуся младшаго возраста такая точка зрѣнія совершенно недоступна, и онъ восприметъ сообщенное ему условіе просто, какъ правило, которое надо выучить, хотя, быть-можетъ, въ глубинѣ души будетъ сознавать, что его законный вопросъ—зачѣмъ введено это условіе—оставленъ безъ отвѣта. Что же касается графической иллюстраціи, то она можетъ пояснить только содержаніе принимаемаго условія, но не цѣль, ради которой оно принято.

Если, напр., учащійся беретъ $\frac{4}{5}$ нѣкотораго разграфленнаго на клѣтки прямоугольника, составляющаго въ свою очередь $\frac{2}{3}$ другого бóльшаго прямоугольника [2]), и при этомъ убѣждается, что получаемая въ результатѣ фигура составляетъ $\frac{8}{15}$ большаго прямоугольника, то онъ выноситъ наглядное подтвержденіе той мысли, что $\frac{4}{5}$ отъ $\frac{2}{3}$ равны $\frac{8}{15}$, но не видитъ никакихъ мотивовъ,

---

[1]) См. В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ. Педагогика математики, томъ I. Страница 252.

[2]) См. тамъ же.

въ силу которыхъ отвѣтъ на данный вопросъ записывается въ формѣ $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ и самому дѣйствію приписывается названіе умноженія.

Чтобы выйти изъ всѣхъ этихъ затрудненій, необходимо соблюсти основное требованіе конкретно-индуктивнаго метода, именно—исходить при установленіи понятія объ умноженіи на дробь изъ условія типичной конкретной задачи, которая рѣшалась бы съ помощью этого дѣйствія. Пусть, напр., будетъ взята хотя бы такая задача: „пѣшеходъ проходитъ 5 верстъ въ каждый часъ; сколько верстъ пройдетъ онъ за $\frac{3}{4}$ часа (двигаясь равномѣрно съ той же скоростью)?“ Такую задачу учащіеся умѣютъ рѣшать, но двумя дѣйствіями: сперва они узнаютъ, сколько верстъ пройдетъ пѣшеходъ за одну четверть часа ($5 : 4 = \frac{5}{4}$), а затѣмъ найдутъ, сколько верстъ пройдетъ онъ за 3 четверти часа $\left(\frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{15}{4}\right)$. Послѣ того, какъ эта задача рѣшена и рѣшеніе ея записано въ двухъ строкахъ, необходимо выяснить учащимся, путемъ наводящихъ вопросовъ, смыслъ произведенныхъ ими дѣйствій (мы нашли четвертую долю отъ 5 и затѣмъ взяли ее 3 раза слагаемымъ),— а затѣмъ указать, что вмѣсто этого принято говорить короче: „мы умножили число 5 на $\frac{3}{4}$“, и записывать рѣшеніе задачи вмѣсто двухъ строчекъ въ одной: $5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$. Тогда учащимся нетрудно будетъ уже сообразить, что, напр., умножить 10 на $\frac{5}{8}$ значитъ найти восьмую долю отъ 10 и взять ее слагаемымъ 5 разъ, и вообще установить, что умножить на дробь значитъ взять такую долю множимаго, изъ какихъ состоитъ множитель, и повторить ее слагаемымъ столько разъ, сколько долей во множителѣ. Нетрудно будетъ также сравнить полученный результатъ съ данными числами и установить правило умноженія на дробь, напр., въ такой формѣ: „чтобы умножить на дробь, нужно умножить данное число на числителя и полученный результатъ раздѣлить на знаменателя“. Здѣсь, конечно, необходимо выяснить съ помощью конкретныхъ примѣровъ, что порядокъ указанныхъ дѣйствій—умноженія на числителя и дѣленія на знаменателя—можетъ быть измѣненъ безъ измѣненія получаемаго произведенія.

Предложенный здѣсь пріемъ объясненія умноженія на дробь, разумѣется, не представляетъ чего-либо существенно новаго. Онъ является видоизмѣненіемъ давно извѣстнаго пріема—разсматривать умноженіе на дробь, какъ нахожденіе данной части отъ цѣлаго. Но при такомъ способѣ объясненія учащіеся будутъ понимать смыслъ самаго процесса умноженія на дробь, притомъ въ наиболѣе конкретной формѣ и въ согласіи съ любой научной теоріей дробей. Кромѣ того, для нихъ будетъ сразу ясна одна изъ цѣлей, ради которой вводится предлагаемое условіе; цѣль эта—сокращеніе рѣчи и записи. Слѣдуетъ выяснить тутъ же и другую цѣль, ради которой повтореніе нѣкоторой доли даннаго числа носитъ названіе умноженія на дробь; именно, если замѣнить въ условіи разобранной задачи дробное число $\frac{3}{4}$ цѣлымъ, напр., 3-мя, то учащіеся увидятъ, что однородная съ данной задача на цѣлыя числа (пѣшеходъ проходитъ по 5 верстъ въ часъ; сколько верстъ пройдетъ онъ за 3 часа)—рѣшается умноженіемъ на цѣлое число. Всю силу этого мотива они оцѣнятъ, однако, уже тогда, когда будутъ учиться составлять буквенныя формулы рѣшенія задачъ: тогда имъ станетъ ясно, что для упрощенія языка формулъ однородныя по смыслу задачи должны рѣшаться одинаковыми дѣйствіями.

До сихъ поръ здѣсь шла рѣчь объ умноженіи цѣлаго числа на дробь, такъ какъ на подобномъ примѣрѣ легче всего выяснить смыслъ умноженія на дробь; когда же этотъ смыслъ усвоенъ учащимися, нетрудно примѣнить установленную точку зрѣнія и къ случаю умноженія дроби на дробь. Такъ, напр., умноженіе $\frac{4}{5}$ на $\frac{2}{3}$ мы будемъ разсматривать, какъ взятіе одной третьей доли отъ $\frac{4}{5}$ $\left(\frac{4}{5}:3=\frac{4}{15}\right)$ и повтореніе полученнаго числа $\frac{4}{15}$ два раза слагаемымъ $\left(\frac{4}{15}.2=\frac{8}{15}\right)$; сравнивъ затѣмъ окончательный результатъ

$\frac{8}{15}$ съ данными числами, мы легко заставимъ учащихся вывести извѣстное правило перемноженія двухъ дробей.

Какъ только усвоено понятіе объ умноженіи на дробь, необходимо распространить его и на случай десятичныхъ дробей; извѣстное правило умноженія на десятичную дробь получается тогда, какъ частный случай правила, установленнаго вообще для дробей. Опытъ показываетъ, что умноженіе на десятичную дробь воспринимается учащимися съ этой точки зрѣнія болѣе сознательно, такъ какъ они уясняютъ себѣ, что перемноженіе данныхъ чиселъ съ отброшенными запятыми есть, собственно говоря, перемноженіе числителей данныхъ дробей, а постановкою запятой на должномъ мѣстѣ произведенія мы уменьшаемъ полученное число во столько разъ, какъ велико произведеніе знаменателей данныхъ дробей.

Дѣленіе на дробь можетъ быть изъяснено пріемомъ, вполнѣ аналогичнымъ тому, который былъ указанъ при разсмотрѣніи умноженія. Возьмемъ, напр., задачу: „Гребецъ проѣхалъ въ лодкѣ 5 верстъ въ теченіе $\frac{3}{4}$ часа; сколько верстъ могъ бы онъ проѣхать въ часъ, двигаясь съ той же скоростью?“ Подобную задачу учащіеся рѣшаютъ двумя дѣйствіями: сперва они узнаютъ, сколько верстъ проѣхалъ бы гребецъ въ одну четверть часа $\left(5:3=\frac{5}{3}\right)$, а затѣмъ опредѣлятъ, сколько верстъ онъ могъ бы проѣхать въ часъ $\left(\frac{5}{3}\cdot 4=\frac{20}{3} \text{ или } 6\frac{2}{3}\right)$. Затѣмъ нужно предложить учащимся сдѣлать повѣрку задачи; очевидно, для этой цѣли придется рѣшить обратный вопросъ: зная, что гребецъ проплыветъ въ лодкѣ $6\frac{2}{3}$ версты въ часъ, найти, сколько верстъ проплыветъ онъ за $\frac{3}{4}$ часа. Этотъ вопросъ рѣшается умноженіемъ на дробь $\left(6\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)$ и мы получаемъ въ результатѣ 5. Теперь ясно, что въ первоначальной задачѣ мы нашли такое число, которое, будучи умножено на $\frac{3}{4}$, дастъ въ результатѣ 5; условимся, какъ и въ ученіи о цѣлыхъ числахъ, называть отысканіе такого числа дѣленіемъ, и запишемъ рѣшеніе нашей задачи такъ: $5 : \frac{3}{4} = \frac{20}{3}$, т.-е. въ одной строчкѣ вмѣсто двухъ. Сравнивая полученный результатъ съ данными числами, мы установимъ съ учащимися и правило дѣленія на дробь, хотя бы въ такой формулировкѣ: „чтобы раздѣлить на дробь, нужно раздѣлить данное число на числителя дроби и полученный результатъ умножить на ея знаменателя“; при этомъ необходимо выяснить, на данномъ и другихъ конкретныхъ примѣрахъ, что относительный порядокъ этихъ дѣйствій—дѣленія на числителя и умноженія на знаменателя—не вліяетъ на окончательный результатъ.

Затѣмъ необходимо показать, что сдѣланные выводы могутъ быть распространены и на тѣ случаи, когда приходится рѣшать вопросы, сколько разъ одно дробное число содержится въ другомъ, или какую часть одного числа составляетъ другое. Для этой цѣли пригодна, напр., такая задача: фунтъ кофе стоитъ $\frac{3}{4}$ рубля; сколько фунтовъ этого кофе можно купить на 5 рублей? Рѣшая эту задачу непосредственно, учащіеся найдутъ сперва, сколько четвертей рубля заключается въ 5 рубляхъ ($4 . 5 = 20$), а затѣмъ— сколько разъ 3 четверти рубля содержится въ 20 четвертяхъ рубля ($20 : 3 = 6\frac{2}{3}$), или могутъ разсуждать такъ: если бы фунтъ кофе стоилъ 1 четверть рубля, то на рубль можно было бы купить 4 ф. кофе, а на 5 рублей $4 . 5 = 20$ фунтовъ; но такъ какъ цѣна фунта кофе—не $\frac{1}{4}$ рубля, а въ 3 раза больше ($\frac{3}{4}$ р.), то на тѣ же деньги можно купить кофе въ 3 раза меньше, т.-е. $20 : 3$, или $6\frac{2}{3}$ фунта. Затѣмъ дѣлается провѣрка задачи, и оказывается, что искомое въ ней число, будучи умножено на $\frac{3}{4}$, даетъ въ результатѣ 5; слѣд. можно условиться называть его частнымъ данныхъ чиселъ и писать по предыдущему: $5 : \frac{3}{4} = \frac{20}{3}$ или $6\frac{2}{3}$.

Какъ и при разборѣ умноженія, слѣдуетъ показать учащимся, что однородныя съ данными задачи на цѣлыя числа рѣшаются дѣленіемъ на цѣлое число; а затѣмъ необходимо распространить установленныя условія и на случай дѣленія дроби на дробь. Такъ, напр., дѣленіе $\frac{4}{5}$ на $\frac{3}{8}$ мы будемъ понимать, какъ отысканіе такого числа, которое, будучи помножено на $\frac{3}{8}$, даетъ въ результатѣ $\frac{4}{5}$. Въ силу этого опредѣленія $\frac{3}{8}$ искомаго числа должны быть равны $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{8}$ искомаго числа должна быть въ 3 раза меньше $\frac{4}{5}$, т.-е. $\frac{4}{15}$; а все искомое число должно быть въ 8 разъ больше полученной дроби, т.-е. равно $\frac{32}{15}$. Сравнивая этотъ результатъ съ данными числами, учащіеся могутъ установить извѣстное правило дѣленія дроби на дробь.

Далѣе, всѣ сдѣланные выводы должны быть распространены на случай дѣленія на десятичную дробь. Дѣленіе на десятичную дробь лучше всего разсматривать, какъ частный случай дѣленія на дробь вообще: напр., при дѣленіи 2 на 0,3 мы должны умножить 2 на знаменателя данной дроби, т.-е. на 10, и полученное число 20 раздѣлить на числителя 3; слѣд., $2:0,3 = 20:3 = 6\frac{2}{3}$; при дѣленіи 0,002 на 0,03 мы должны умножить 0,002 на знаменателя дѣлителя, т.-е. на 100, и результатъ 0,2 раздѣлить на числителя 3; найдемъ частное 0,0666... Такимъ образомъ мы легко выяснимъ учащимся, что дѣленіе на десятичную дробь можетъ быть приведено къ дѣленію на цѣлое число.

Изложеннымъ исчерпываются, собственно говоря, всѣ основные вопросы методики курса дробей, проходимаго въ младшихъ классахъ нашей средней школы и соотвѣтствующихъ классахъ другихъ учебныхъ заведеній. Какъ извѣстно, традиціонная практика, кромѣ упомянутыхъ здѣсь вопросовъ, удѣляетъ довольно много времени и вниманія ученію о безконечныхъ десятичныхъ періодическихъ дробяхъ и объ обращеніи ихъ въ обыкновенныя. Но въ настоящее время уже никто не оспариваетъ той истины, что этому ученію совсѣмъ не должно быть мѣста въ курсѣ дробей, изучаемомъ въ младшемъ возрастѣ, тѣмъ болѣе, что оно не можетъ быть изложено на данной ступени безъ крупныхъ логическихъ натяжекъ.

Вопросъ о періодическихъ дробяхъ долженъ быть отнесенъ къ курсу теоретической ариѳметики, гдѣ онъ, въ связи съ понятіемъ о безконечной непеpіодической десятичной дроби, играетъ нѣкоторую роль при изложеніи ученія о несоизмѣримомъ числѣ; въ младшемъ же возрастѣ ученіе о періодическихъ дробяхъ, ихъ видахъ и правилахъ ихъ обращенія въ простыя является тяжелымъ и совершенно безполезнымъ балластомъ, отъ котораго давно пора освободить нашу программу ариѳметики и наши подрастающія поколѣнія.

Программа и методъ преподаванія алгебры въ средней школѣ.

Когда одному изъ учащихся въ нашей школѣ пришлось формулировать то представленіе объ алгебрѣ, которое сложилось у него подъ вліяніемъ школьнаго преподаванія, то онъ выразилъ его такъ: „алгебра—это рядъ какихъ-то странныхъ логическихъ фокусовъ".

Такъ разсказываетъ объ этомъ фактѣ, относящемся къ не особенно далекому прошлому, А. Шапошниковъ въ своей статьѣ „Кризисъ современнаго преподаванія алгебры" [1]).

По этому поводу невольно вспоминается саркастическій афоризмъ Писарева о преподаваніи математики въ современной ему гимназіи. „У насъ", писалъ онъ, „математика есть не что иное, какъ собраніе сочиненій Боско и Пинетти; это рядъ удивительныхъ фокусовъ, придуманныхъ Богъ знаетъ зачѣмъ и Богъ знаетъ какой эквилибристикой человѣческаго мышленія" [2]).

Если бы эти мнѣнія принадлежали лицамъ, плохо справлявшимся съ гимназической премудростью, то ихъ можно было бы счесть за насмѣшку, но тотъ юноша, о которомъ идетъ рѣчь въ статьѣ Шапошникова, былъ вдумчивымъ и развитымъ ученикомъ, а Писаревъ, какъ извѣстно, кончилъ гимназію съ медалью, да и впослѣдствіи до конца своей жизни приписывалъ математикѣ огромное образовательное и даже воспитательное значеніе.

---

[1]) „Педагогическій Сборникъ" 1908 г., мартъ.

[2]) Соч. Писарева, т. 3, статья „Наша университетская наука".

Сходство обоихъ отзывовъ, раздѣленныхъ солиднымъ промежуткомъ времени, само бросается въ глаза; можно было бы принять его за случайное совпаденіе, если бы подобные факты были единичными; но всякій преподаватель средней школы, порывшись въ своихъ педагогическихъ воспоминаніяхъ, можетъ привести не одинъ примѣръ, когда школьная математика, и въ частности алгебра, представлялась даровитымъ и развитымъ юношамъ какой-то странной дѣятельностью ума, внушающей уваженіе своей безспорной логичностью, но въ то же время порождающей недоумѣніе своей явной безцѣльностью и безполезностью.

Приходится, поэтому, предположить, что всѣ эти факты вызываются какой-то общей причиной, присущей постановкѣ школьнаго преподаванія математики вотъ ужъ въ теченіе длиннаго ряда лѣтъ. Чтобы выяснить себѣ эту причину, разсмотримъ вкратцѣ, какими цѣлями задается это преподаваніе и какими средствами оно предполагаетъ ихъ достигать.

Если вы спросите любого образованнаго человѣка, зачѣмъ изучается математика въ средней школѣ, то въ большинствѣ случаевъ вы получите отвѣтъ: „конечно, въ цѣляхъ общаго умственнаго развитія учащихся". А если вы затѣмъ зададите вопросъ, какимъ образомъ изученіе математики можетъ содѣйствовать умственному развитію занимающихся ею, то вамъ скажутъ: вѣдь математика есть наука точная и отвлеченная, а потому изученіе ея вырабатываетъ привычку къ правильному мышленію; въ этомъ и состоитъ ея значеніе, какъ общеобразовательнаго предмета".

Эти положенія кажутся безспорными. Ихъ придерживались и придерживаются многіе педагоги; и, безъ сомнѣнія, эти взгляды наложили свою печать и на школьное преподаваніе. Исходя изъ этихъ положеній, ихъ сторонники при прохожденіи курса выдвигаютъ на первое мѣсто изученіе общей теоріи, придавая задачамъ лишь второстепенный и служебный характеръ. Далѣе они считаютъ всѣ отдѣлы программы равноцѣнными по своему общеобразовательному значенію, независимо отъ того, имѣютъ ли эти отдѣлы практическое приложеніе или нѣтъ. Наконецъ, для нихъ не существуетъ вопроса о методѣ преподаванія: строгая систематичность и послѣдовательность въ изложеніи общей теоріи, съ примѣненіемъ конкретныхъ примѣровъ лишь для иллюстраціи теоретическихъ истинъ — вотъ единственный методъ, признаваемый сторонниками вышеуказанныхъ воззрѣній.

Программа по алгебрѣ, дѣйствующая нынѣ въ гимназіяхъ и дѣйствовавшая до самыхъ послѣднихъ дней (до 1906—7 учебнаго года) и въ реальныхъ училищахъ, а также и наиболѣе распространенныя руководства носятъ явные слѣды такихъ взглядовъ. Мы видимъ, напр., въ программѣ цѣлую группу отдѣловъ, почти не имѣющихъ практическихъ приложеній и внутренней связи между собою и съ остальнымъ курсомъ — таковы теорія соединеній, теорія непрерывныхъ дробей, вопросъ о неопредѣленныхъ уравненіяхъ. Чѣмъ можно объяснить наличность въ курсѣ алгебры этихъ вопросовъ, какъ не увѣренностью въ томъ, что они, при всей своей обособленности и практической безполезности, представляютъ удобный матеріалъ для развитія отвлеченнаго мышленія? Далѣе, мы видимъ руководства по алгебрѣ, излагающія предметъ въ строгой системѣ, но въ то же время въ самой общей и отвлеченной формѣ, и потому мало доступныя для пониманія учащимися. Чѣмъ можно объяснить выборъ такого способа изложенія, какъ не убѣжденіемъ въ томъ, что развитіе отвлеченнаго мышленія достигается лишь усвоеніемъ отвлеченной системы, и что введеніе конкретности въ методъ изложенія только затормозило бы этотъ процессъ развитія?

Это отсутствіе внутренней связи въ самомъ курсѣ алгебры, эта разобщенность между областью алгебраическихъ истинъ и другими науками, а также явленіями дѣйствительной жизни, наконецъ этотъ абстрактно дедуктивный методъ изложенія предмета въ руководствахъ и при классномъ преподаваніи, — безспорно и явились причиною, почему алгебра для лучшихъ учащихся могла представляться сѣтью логическихъ фокусовъ, а для менѣе развитыхъ была просто собраніемъ формулъ и правилъ, которыя нужно было осилить памятью, подобно правиламъ латинской грамматики и синтаксиса. Конечно, я далекъ отъ мысли утверждать, что плоды школьнаго изученія алгебры были такими повсемѣстно; конечно, педагогическое чутье и талантъ отдѣльныхъ преподавателей во многихъ случаяхъ исправляли недостатки системы и заставляли уклоняться отъ нея, но тамъ, гдѣ эта система проводилась прямолинейно, результаты не могли быть удовлетворительными, такъ какъ система исходила изъ апріорныхъ соображеній и не принимала въ расчетъ психологіи ребенка и юноши.

Въ настоящее время, когда въ области преподаванія математики происходитъ переоцѣнка всѣхъ цѣнностей, мнѣ представляется крайне необходимымъ разобрать вопросъ о томъ, въ какомъ духѣ нужно преобразовать программу курса алгебры въ средней школѣ и каковы должны быть основы метода преподаванія этой науки и изложенія ея въ руководствахъ. А передъ этимъ, конечно, надо установить свою точку зрѣнія на цѣль и смыслъ преподаванія математики и въ частности алгебры въ средней школѣ.

Какъ мнѣ уже приходилось говорить въ этой книгѣ (статья первая), я считаю, что вліяніе на умственное развитіе учащихся, приписываемое математикѣ традиціоннымъ воззрѣніемъ, никогда и никѣмъ не было доказано, и несомнѣнно преувеличено. И данныя опыта, и данныя элементарнаго психологическаго анализа, на которыя мнѣ приходилось ссылаться въ указанномъ мѣстѣ, свидѣтельствуютъ, что занятія математикой не могутъ служить орудіемъ всесторонняго умственнаго развитія; изученіе математики можетъ содѣйствовать составленію правильныхъ сужденій въ такой области знанія, которая имѣетъ сходство съ мамематикой по способу установленія фактовъ и истины которой по существу своему находятся въ тѣсной ассоціативной связи съ математическими; такова, напримѣръ, теоретическая механика; но изученіе той же математики нимало не способствуетъ усвоенію и открытію новыхъ истинъ сравнительнаго языкознанія или государственнаго права, вообще такихъ наукъ, которыя требуютъ совершенно иныхъ пріемовъ наблюденія и въ которыхъ указанная связь съ математическими истинами вовсе или почти не имѣетъ мѣста.

Такимъ образомъ, развивающее вліяніе математики оказывается не такимъ всестороннимъ и не такимъ значительнымъ, какъ это принято думать. Значитъ ли это, что я хотѣлъ бы умалить значеніе математики, какъ предмета изученія въ средней школѣ? Отнюдь нѣтъ.

Я полагаю, что роль математики, какъ общеобразовательнаго предмета, основывается на томъ значеніи, которое имѣла и имѣетъ эта наука въ культурной жизни человѣчества. Математика была и является средствомъ наиболѣе просто, ясно и точно выражать наши познанія о мірѣ при помощи особыхъ символовъ и пріобрѣтать новыя познанія о тѣхъ его предметахъ и явленіяхъ, свойства которыхъ могутъ быть выражены при помощи этихъ символовъ. И если школьное преподаваніе будетъ такъ поставлено, что сможетъ раскрыть передъ учащимися именно эту сторону математики, то послѣдняя перестанетъ быть въ ихъ глазахъ собраніемъ логическихъ фокусовъ, а явится для нихъ могущественнымъ орудіемъ познанія, вносящимъ свѣтъ и ясность въ огромное число вопросовъ науки и жизни. Вмѣстѣ съ тѣмъ она, какъ было только-что указано, дастъ имъ возможность кратчайшимъ путемъ дѣлать правильные выводы въ тѣхъ областяхъ знанія, къ которымъ ея истины могутъ быть приложены, т.-е. она послужитъ для нихъ и средствомъ умственнаго развитія, хотя и не всеобщаго, но довольно многосторонняго, такъ какъ область примѣненія математическихъ истинъ весьма обширна. Само собою разумѣется, что высказываемый мною взглядъ на математику отнюдь не требуетъ низведенія ея на степень собранія свѣдѣній, полезныхъ для рѣшенія практическихъ вопросовъ; въ результатѣ школьнаго изученія она должна предстать передъ учащимися и какъ орудіе міропознанія, и какъ научная система; какъ этого достигнуть—это вопросъ программы и метода, и я постараюсь въ дальнѣйшемъ дать на него посильный отвѣтъ, имѣя въ виду главнымъ образомъ алгебру.

Если мы теперь въ вышеупомянутой точки зрѣнія будемъ разсматривать вопросъ о постановкѣ преподаванія алгебры въ средней школѣ, то для насъ станетъ ясно, въ какомъ духѣ должна быть преобразована ея программа, чтобы достигались намѣченныя выше цѣли. Она должна вообще состоять изъ такихъ отдѣловъ, которые либо непосредственно могутъ быть прилагаемы къ рѣшенію разнообразныхъ вопросовъ науки и жизни, либо необходимы для теоретическаго обоснованія, подтвержденія и приведенія въ систему отдѣловъ предыдущей категоріи. Все же не удовлетворяющее этимъ требованіямъ должно быть исключено безъ всякихъ оговорокъ, какъ не соотвѣтствующее той цѣли, ради которой изучается въ средней школѣ математика. Такъ, напримѣръ, изученіе алгебраическихъ преобразованій можетъ быть сведено до минимума, который необходимъ для рѣшенія уравненій и изученія другихъ отдѣловъ курса: умноженіе и дѣленіе многочленовъ, разложеніе ихъ на множителей, дѣйствія надъ дробями и радикалами слѣдуетъ ограничить наиболѣе простыми случаями, подобными тѣмъ, которые дѣйствительно встрѣчаются въ алгебраической практикѣ. Сверхъ того, могутъ быть упразднены отдѣлы, составляющіе значительную часть курса нынѣшняго 6-го и 7-го классовъ гимназій: рѣшеніе возвратныхъ, двучленныхъ и трехчленныхъ уравненій, рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій, теорія непрерывныхъ дробей, теорія соединеній и ея приложеніе къ выводу формулы бинома Ньютона. Такимъ образомъ, можно было бы сберечь не мало времени и явилась бы возможность безъ увеличенія объема курса выполнить то, чего такъ настойчиво добивается современная педагогическая мысль въ области преподаванія математики—мы говоримъ о введеніи въ курсъ средней школы элементовъ высшаго анализа, главнымъ образомъ понятія о функціи и функціональной зависимости въ связи со способомъ графическаго изображенія измѣненій функціи при помощи декартовыхъ координатъ, а также краткаго ученія о производной и объ интегралѣ, съ приложеніемъ этихъ понятій къ рѣшенію различныхъ вопросовъ математики и другихъ наукъ.

Нѣтъ надобности указывать, насколько важно ознакомленіе съ понятіемъ о функціи и съ методами ея графическаго изображенія для тѣхъ учащихся средней школы, которые впослѣдствіи займутся изученіемъ естествознанія, психологіи, статистики, политической экономіи, даже соціологіи: нѣтъ надобности подчеркивать, какую существенную пользу окажетъ изученіе элементовъ высшаго анализа для тѣхъ, кто и въ высшей школѣ будетъ продолжать занятія математическими науками: не нужно напоминать, что безъ теоріи предѣловъ немыслимо сколько-нибудь удовлетворительное изложеніе вопросовъ объ измѣреніи длины окружности и площади круга, поверхностей и объемовъ круглыхъ тѣлъ, что безъ понятія о производной не можетъ быть составлено надлежащее представленіе о скорости и ускореніи неравномѣрнаго движенія, и т. д.; не нужно, наконецъ, настаивать и на томъ, что элементы высшаго анализа, въ надлежащемъ изложеніи, не представляютъ ничего неодолимаго для пониманія учащихся въ средней школѣ и не являются непосильнымъ бременемъ для ихъ мыслительныхъ способностей. Всѣ эти положенія достаточно уже разработаны и подтверждены въ педагогической литературѣ, и проникли уже въ жизнь средней школы, сперва на Западѣ, а въ послѣдніе годы и у насъ, такъ какъ въ 1906 году въ курсѣ 7-го класса реальныхъ училищъ введено ознакомленіе съ элементами аналитической геометріи, дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія. Поэтому я буду здѣсь говорить не о необходимости введенія этихъ отдѣловъ въ курсъ средней школы,—это вопросъ, о которомъ не можетъ быть двухъ мнѣній, а о наилучшемъ распредѣленіи ихъ въ программѣ.

Нельзя считать цѣлесообразнымъ, чтобы элементы высшаго анализа изучались въ видѣ совершенно обособленнаго отдѣла, хотя бы и завершающаго собою курсъ математики въ средней школѣ. При такомъ условіи та пропасть, которая теперь существуетъ между содержаніемъ и методомъ такъ называемой элементарной математики и высшаго анализа, не исчезаетъ, а только переносится внутрь курса средней школы, и самыя идеи высшаго анализа не могутъ принести надлежащей пользы. Я не говорю уже о томъ, что при такихъ условіяхъ учащимся придется изучать нѣкоторые важные вопросы,—напримѣръ, вышеупомянутый вопросъ объ измѣреніи долины окружности и площади круга, по два раза: сперва въ такъ называемомъ элементарномъ изложеніи, неудовлетворительномъ съ логической стороны, а затѣмъ ужъ въ правильномъ освѣщеніи. Необходимо поэтому такъ перестроить программу, чтобы элементы высшаго анализа вошли въ нее не какъ механическая пристройка, а какъ органическая составная часть, и чтобы между ними и другими частями курса математики существовала тѣсная связь и простой и естественный переходъ.

Первоначальныя понятія о функціи и о функціональной зависимости можно дать учащимся въ связи съ изученіемъ уравненій

1-й степени. Здѣсь слѣдуетъ познакомить ихъ съ системой прямоугольныхъ координатъ двухъ измѣреній и изложить вопросъ объ опредѣлении положенія прямой на плоскости при помощи уравненія 1-й степени; затѣмъ дать понятіе о функціи и функціональной зависимости, остановиться на свойствахъ функціи перваго порядка вида $y=ax+b$ и дать ея графическое изображеніе. На основаніи изученнаго матеріала и сдѣланныхъ выводовъ можно будетъ наглядно иллюстрировать рѣшеніе и изслѣдованіе уравненій 1-й степени съ однимъ и двумя неизвѣстными и указать графическій способъ рѣшенія этихъ уравненій; также можетъ быть дано понятіе о графикахъ желѣзнодорожнаго движенія, графикахъ температуры и т. д.

Дальнѣйшее развитіе понятія о функціи найдетъ себѣ мѣсто въ связи съ изученіемъ квадратныхъ уравненій и неравенствъ. Именно, здѣсь будетъ вполнѣ умѣстно разсматривать квадратный трехчленъ, какъ функцію второго порядка вида $y=ax^2+bx+c$, и изученіе его свойствъ иллюстрировать графическимъ изображеніемъ этой функціи; одновременно можетъ быть указанъ и графическій способъ рѣшенія квадратныхъ уравненій съ однимъ неизвѣстнымъ, а въ частныхъ случаяхъ и съ двумя неизвѣстными.

Приблизительно въ то же время придется пройти и теорію предѣловъ. Понятіе о безгранично маломъ можетъ быть дано еще и раньше, въ связи съ ученіемъ о несоизмѣримыхъ числахъ, но понятіе о предѣлѣ и теорію предѣловъ удобнѣе всего излагать уже тогда, когда ученіе о несоизмѣримыхъ числахъ усвоено учащимися. Принято иногда давать понятіе о предѣлѣ въ связи съ этимъ послѣднимъ ученіемъ; но это мнѣ кажется нецѣлесообразнымъ, такъ какъ ученіе о предѣлѣ не можетъ быть тогда иллюстрировано достаточными приложеніями, да и теорія несоизмѣримыхъ чиселъ достаточно трудна сама по себѣ, чтобы можно было осложнять изученіе ея знакомствомъ съ новымъ и важнымъ понятіемъ о предѣлѣ. Опредѣлять же самое несоизмѣримое число, какъ предѣлъ нѣкотораго ряда соизмѣримыхъ чиселъ, значитъ впадать въ логическій кругъ; въ самомъ дѣлѣ, если мы опредѣляемъ несоизмѣримое число x, какъ предѣлъ перемѣннаго соизмѣримаго числа a, то мы тѣмъ самымъ, въ силу понятія о предѣлѣ, утверждаемъ, что разность $x-a$ безгранично мала; другими словами, мы пытаемся истолковать незнакомое еще для насъ понятіе о несоизмѣримомъ числѣ x при помощи тѣмъ болѣе не выясненнаго понятія о разности между этимъ самымъ неизвѣстнымъ x и извѣстнымъ соизмѣримымъ числомъ a. Въ силу этихъ соображеній ясно, что несоизмѣримому числу необходимо давать опредѣленіе, независимое отъ понятія о предѣлѣ; а излагая теорію предѣловъ уже тогда, когда учащіеся знакомы съ ученіемъ о несоизмѣримыхъ числахъ, мы получаемъ возможность приложить ее къ важнымъ вопросамъ объ измѣреніи длины окружности и площади круга. Замѣтимъ, что теорію предѣловъ необходимо проходить въ настолько полномъ объемѣ, чтобы ея приложенія къ указаннымъ вопросамъ могли быть вполнѣ обоснованы; въ настоящемъ же жалкомъ и урѣзанномъ ея видѣ она является для учащихся только источникомъ недоумѣній и ошибокъ и воспринимается вмѣстѣ съ приложеніями въ значительной части своей на вѣру; напр., положенія о томъ, что при безграничномъ увеличеніи числа сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника длина его стороны безгранично мала, длина апоѳемы имѣетъ предѣломъ радіусъ, а для периметра существуетъ предѣлъ, притомъ независимый отъ закона увеличенія числа сторонъ,—всѣ эти положенія остаются недоказанными.

Знакомство съ теоріей предѣловъ даетъ возможность въ дальнѣйшемъ курсѣ (послѣ изученія вопросовъ о прогрессіяхъ и логариѳмахъ) обосновать понятіе о производной функціи. Нечего добавлять, что это понятіе, будучи достаточно усвоено аналитически и истолковано геометрически, позволяетъ внести полную ясность и въ разные вопросы физики, какъ, напримѣръ, установить понятіе о скорости и ускореніи неравномѣрнаго движенія и изучить зависимость между этими послѣдними величинами и разстояніемъ, проходимымъ движущимся тѣломъ.

Чтобы придать курсу алгебры и анализа большую законченность и вполнѣ ознакомить учащихся съ аналитическими методами, желательно (по крайней мѣрѣ въ тѣхъ школахъ, которыя приближаются къ типу реальныхъ училищъ) изложить имъ краткое ученіе о производныхъ, а также ознакомить ихъ съ понятіемъ объ интегралѣ и со способомъ опредѣленія простѣйшихъ поверхностей и объемовъ при помощи элементарныхъ истинъ интегральнаго исчисленія. Изученію этихъ вопросовъ, въ большемъ или меньшемъ объемѣ, и слѣдовало бы отвести время и мѣсто въ послѣдніе два года пребыванія учащихся въ средней школѣ, разумѣется, въ связи съ дополненіемъ пріобрѣтенныхъ свѣдѣній изъ аналитической геометріи, съ повтореніемъ въ послѣднемъ классѣ основныхъ истинъ всего курса и съ расширеніемъ понятія о числѣ и о дѣйствіяхъ. Кстати, основы ученія о мнимыхъ и комплексныхъ числахъ слѣдовало бы совсѣмъ изъять изъ курса среднихъ классовъ, гдѣ ученіе это не имѣетъ существеннаго значенія,—и отнести именно къ повторительному курсу; тогда явится возможность сильнѣе подчеркнуть обобщающее значеніе этихъ чиселъ; конечно, при этомъ весьма желательно геометрическое ихъ истолкованіе.

Разумѣется, выполненіе предлагаемой здѣсь программы потребуетъ нѣсколько иного распредѣленія курса геометріи, сравнительно съ нынѣ дѣйствующимъ. Не вдаваясь въ подробности, скажу, что мнѣ представляется наиболѣе цѣлесообразнымъ такое изученіе этого предмета, при которомъ въ младшихъ классахъ (1—3) проходится краткій курсъ наглядной геометріи, а систематическій курсъ распредѣляется не на планиметрію и стереометрію, а по методамъ доказательствъ (сперва изучаются теоремы, справедливость которыхъ обнаруживается способомъ наложенія, затѣмъ теоремы, къ доказательству которыхъ примѣняется способъ пропорцій и вообще алгебраическія вычисленія, и наконецъ теоремы, доказываемыя по способу предѣловъ).

Можно, повидимому, опасаться, что изученіе предлагаемыхъ новыхъ отдѣловъ окажется невыполнимымъ при томъ числѣ уроковъ, которое нынѣ отводится на математику, и потребуетъ значительнаго увеличенія учебнаго времени. Но не слѣдуетъ забывать, что предлагаемый планъ, на ряду съ введеніемъ новыхъ отдѣловъ, проектируетъ и значительныя сокращенія въ учебномъ матеріалѣ, указанныя нами выше. Желательно даже расширить эти сокращенія, а именно, съ одной стороны, опустить нѣкоторыя главы элементарной геометріи, не имѣющія самостоятельнаго значенія (какъ, напр., вопросъ объ относительномъ положеніи окружностей); съ другой стороны, упразднить ученіе о періодическихъ дробяхъ въ ариѳметикѣ и почти весь нынѣшній курсъ ариѳметики 3 класса—ученіе о пропорціяхъ и рѣшеніе задачъ на такъ называемыя „правила". По первому вопросу, какъ уже признано теперь въ педагогической литературѣ, совершенно достаточно ограничиться изученіемъ признака, указывающаго, обратится ли данная дробь въ конечную десятичную или нѣтъ; большинство же задачъ на спеціальныя „правила" представляютъ изъ себя совершенно излишній балластъ, а простѣйшія, дѣйствительно необходимыя задачи на проценты и пропорціональное дѣленіе могутъ быть рѣшаемы безъ всякихъ „правилъ". На мѣсто этого упраздняемаго курса слѣдуетъ, конечно, ввести изученіе приближенныхъ вычисленій; а остатокъ свободнаго времени будетъ такимъ образомъ выигранъ для изученія геометріи и алгебры.

При наличности всѣхъ указанныхъ сокращеній я полагаю, что намѣчаемый курсъ математики окажется, въ основныхъ своихъ частяхъ, выполнимымъ при 32—33 урокахъ въ теченіе восьмилѣтняго курса [1]) средней школы (приготовительные классы здѣсь не принимаются въ расчетъ), при условіи, конечно, если методъ преподаванія будетъ сообразоваться съ требованіями психологіи и педагогики.

Вопросъ о методѣ преподаванія алгебры и анализа имѣетъ, по моему мнѣнію, еще бóльшую важность, чѣмъ вопросъ объ измѣненіи программы. Въ самомъ дѣлѣ, методика алгебры, въ противоположность методикѣ ариѳметики, остается до настоящаго времени почти совсѣмъ не разработанной, и не установлены даже основныя ея положенія. Сторонники строго-систематическаго изученія алгебры считаютъ методику ея даже излишней, и единственная уступка возрасту и психологіи учащихся, допустимая по ихъ мнѣнію, состоитъ въ томъ, чтобы предлагать догматически тѣ положенія, доказательство которыхъ оказывается для учащихся не-

[1]) Сравн., напр., программу, выработанную Кіевскимъ физико-математическимъ обществомъ (напечатанную въ книгѣ К. М. Щербины: „Математика въ русской средней школѣ". Кіевъ 1908 г.).

посильнымъ, а впослѣдствіи, при повтореніи курса, доказывать и эти истины. Съ такимъ пріемомъ, разумѣется, нельзя согласиться, такъ какъ догматическое изложеніе математики лишено всякой убѣдительности и подрываетъ достовѣрность математическихъ истинъ въ глазахъ учащихся; но абстрактно-дедуктивный методъ изложенія имѣетъ еще и другія, болѣе уязвимыя стороны, къ разсмотрѣнію которыхъ мы сейчасъ и переходимъ.

Во 1-хъ, при немъ опредѣленія тѣхъ или иныхъ понятій даются сразу въ законченномъ видѣ, и лишь затѣмъ иногда разъясняются на примѣрахъ. Между тѣмъ, такой способъ изложенія отнюдь не способствуетъ сознательному и отчетливому усвоенію опредѣляемыхъ понятій учащимися.

Пусть, напримѣръ, преподаватель начинаетъ излагать ученіе о предѣлахъ и говоритъ: „предѣломъ даннаго перемѣннаго количества называется постоянное, обладающее тѣмъ свойствомъ, что разность между нимъ и даннымъ перемѣннымъ безгранично мала". Нетрудно видѣть, что въ психикѣ учащихся, которые выслушаютъ это опредѣленіе, можетъ при этомъ происходить двоякій процессъ. Либо они представятъ себѣ какое-либо вполнѣ опредѣленное перемѣнное количество и другое постоянное, обладающее указаннымъ свойствомъ, напримѣръ, припомнятъ величину угла правильнаго многоугольника, опредѣляемую по формулѣ

$$x = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

и сравнятъ ее съ постояннымъ числомъ 180°, при условіи, что число сторонъ многоугольника (n) безгранично возрастаетъ, либо они не смогутъ подобрать подобнаго примѣра изъ предыдущей практики, и будутъ представлять себѣ только слова, передъ этимъ произнесенныя преподавателемъ, не вкладывая въ нихъ никакого опредѣленнаго содержанія. Безъ сомнѣнія, чаще всего будетъ имѣть мѣсто именно этотъ послѣдній случай, такъ какъ новыя опредѣленія даются при абстрактно-дедуктивномъ методѣ изложенія какъ разъ тогда, когда учащіеся только приступаютъ къ изученію даннаго вопроса и, естественно, не могутъ самостоятельно подыскать подходящихъ примѣровъ. Если при этомъ преподаватель не найдетъ нужнымъ указать такой примѣръ, то все его дальнѣйшее изложеніе можно считать потеряннымъ для учащихся: не имѣя отчетливаго представленія о предѣлѣ, они, конечно, не въ состояніи будутъ сознательно усвоить ни одного положенія, касающагося свойствъ предѣловъ, и въ лучшемъ случаѣ заучатъ механически опредѣленія и доказательства, но такое знаніе въ глазахъ педагога не можетъ имѣть никакой цѣны. Но даже въ томъ случаѣ, когда преподаватель, формулировавъ основное опредѣленіе, постарается сейчасъ же привести учащимся подходящій примѣръ,—даже и въ этомъ случаѣ нельзя считать продуктивно использованнымъ того времени, которое ушло на предварительное изложеніе опредѣленія преподавателемъ: все равно представленіе о предѣлѣ могло сложиться у значительнаго большинства учащихся только послѣ разбора этого примѣра.

Совершенно иная картина получится въ томъ случаѣ, если преподаватель сперва заставитъ учащихся припомнить или опредѣлить величину угла правильнаго многоугольника объ n сторонахъ, выражаемую вышеупомянутой формулой; если онъ затѣмъ предложитъ имъ выразить разность между постояннымъ количествомъ 180° и найденной величиной угла многоугольника; если послѣ этого онъ заставитъ ихъ убѣдиться, что эта разность, равная $\frac{360^\circ}{n}$, при безграничномъ увеличеніи числа сторонъ многоугольника (n), уменьшается и можетъ сдѣлаться и оставаться менѣе любого постояннаго положительнаго числа h°; если наконецъ онъ скажетъ, что въ силу послѣдняго обстоятельства мы будемъ называть постоянное количество 180° предѣломъ даннаго перемѣннаго x, то въ сознаніи учащихся будутъ налицо всѣ элементы, необходимые для составленія новаго понятія, и преподаватель можетъ безъ труда заставить ихъ самихъ формулировать общее опредѣленіе, съ которымъ будетъ теперь связано опредѣленное и отчетливое представленіе. Рядъ новыхъ примѣровъ, указанныхъ преподавателемъ и самими учениками, укрѣпитъ затѣмъ въ ихъ памяти ассоціативную связь между отдѣльными элементами новаго понятія и позволитъ строить дальнѣйшіе выводы на прочномъ основаніи.

Очевидно, что подобный методъ изложенія можетъ быть съ успѣхомъ приложенъ не только къ установленію новыхъ опредѣленій, но и вообще для предварительнаго усвоенія новыхъ алгебраическихъ истинъ, если нужно достигнуть того, чтобы новая истина запечатлѣлась въ сознаніи учащихся возможно болѣе ярко и отчетливо. Такъ, напримѣръ, если учащіеся должны усвоить теорему: „десятичный логариѳмъ числа, изображаемаго единицей съ нулями, равенъ столькимъ единицамъ, сколько нулей въ изображеніи этого числа“, то цѣлесообразнѣе всего предварительно заставить ихъ отыскать $lg10$, $lg100$, $lg1000...$ до $lg1000000$ включительно, затѣмъ предоставить имъ самимъ формулировать эту теорему въ общемъ видѣ и уже послѣ этого изложить имъ общее доказательство.

Въ тѣхъ же случаяхъ, когда дедуктивное доказательство какой-либо истины оказывается вовсе непосильнымъ для учащихся, указанный конкретно-индуктивный методъ изложенія представляетъ единственное средство обнаруженія достовѣрности этой истины и единственный способъ сознательнаго ея усвоенія.

Такимъ именно способомъ учащіеся могутъ усвоить, при первоначальномъ изученіи алгебры, основные законы алгебраическихъ дѣйствій; этимъ устраняется необходимость прибѣгать въ подобныхъ случаяхъ къ догматическому изложенію. Впослѣдствіи же, при систематизаціи курса алгебры въ послѣднемъ классѣ, учащимся должно быть предложено и дедуктивное доказательство вышеупомянутыхъ законовъ и истинъ, въ тѣхъ случаяхъ, разумѣется, когда данная истина не носитъ характера аксіомы.

Во 2-хъ, при абстрактно дедуктивномъ методѣ изложенія различныя условія, вводимыя въ алгебру, сообщаются обыкновенно безъ должной мотивировки. Между тѣмъ, учащіеся только тогда могутъ сознательно освоиться съ этими условіями, когда будутъ въ состояніи ясно представить себѣ тѣ цѣли, ради которыхъ эти условія вводятся. Въ особенности это обстоятельство сказывается въ самомъ началѣ изученія алгебры, когда учащіеся должны постигнуть смыслъ и цѣль употребленія буквенныхъ обозначеній. Начать преподаваніе алгебры указаніемъ на то, что въ алгебрѣ числа принято выражать не цифрами, а буквами, и затѣмъ перейти къ выясненію понятій объ алгебраическомъ выраженіи, формулахъ, знакахъ дѣйствій и т. д.,—значитъ навѣрняка отбить у учащихся охоту къ дальнѣйшимъ занятіямъ такимъ неинтереснымъ и непонятнымъ предметомъ. Даже если послѣ такого вступленія преподаватель и укажетъ учащимся пригодность буквенныхъ обозначеній къ обобщенію задачъ и нахожденію ихъ рѣшеній, нельзя быть увѣреннымъ въ томъ, что это запоздалое объясненіе вернетъ потерянный интересъ къ дѣлу и внесетъ должную ясность въ первоначальный курсъ алгебры. Между тѣмъ, есть полная возможность такъ поставить дѣло, чтобы условіе относительно употребленія буквъ въ алгебрѣ представлялось для учащихся совершенно естественнымъ и даже необходимымъ. Пусть преподаватель предложитъ учащимся рѣшить какую-нибудь несложную ариѳметическую задачу, напримѣръ, такую: „два поѣзда вышли одновременно навстрѣчу другъ другу изъ двухъ городовъ, разстояніе между которыми 480 верстъ. Первый поѣздъ проходитъ въ каждый часъ 36 верстъ, второй 24. Черезъ сколько часовъ они встрѣтятся?“ Пусть затѣмъ учащіеся выразятъ ходъ рѣшенія этой задачи при помощи ариѳметической формулы; пусть далѣе преподаватель дастъ имъ для рѣшенія вторую задачу съ такимъ же условіемъ, но съ другими числами, и пусть для нея будетъ также составлена соотвѣтственная ариѳметическая формула. Послѣ этого преподавателю нетрудно будетъ добиться отъ учащихся, чтобы они выразили словами общій способъ рѣшенія подобныхъ задачъ, хотя бы такъ: „чтобы найти искомое число часовъ, нужно раздѣлить разстояніе между городами на скорость 1-го поѣзда въ часъ, сложенную со скоростью 2-го поѣзда въ часъ“, а затѣмъ записали бы все это болѣе кратко:

$$\text{„искомое число часовъ} = \frac{\text{разстоянію между городами}}{\text{скор. 1-го п. въ часъ} + \text{скор. 2-го п. въ часъ}}\text{“}.$$

Если наконецъ преподаватель укажетъ, что подобная запись все же весьма громоздка и длинна, и предложитъ ученикамъ обозначить каждую изъ входящихъ въ задачу величинъ одной буквой, напр., искомое число часовъ — буквою x, разстояніе между городами — d, скорость поѣздовъ — буквами a и b, то для учащихся сразу станетъ ясно преимущество получаемой краткой записи

$$x=\frac{d}{a+b}$$

передъ прежней; нетрудно будетъ выяснить имъ, что эта новая запись даетъ возможность рѣшать всякую новую задачу съ подобнымъ же условіемъ при помощи простой подстановки чиселъ, безъ повторенія тѣхъ разсужденій, которыя были нужны для рѣшенія первой задачи. Смыслъ и цѣль употребленія буквъ въ алгебрѣ станутъ такимъ образомъ для нихъ совершенно ясными.

Въ 3-хъ, абстрактно-дедуктивный методъ при расширеніи понятія о числѣ обращаетъ вниманіе учащихся только на одну цѣль введенія новыхъ чиселъ—на обобщеніе формулъ, а другое обстоятельство—существованіе цѣлаго ряда величинъ, значенія которыхъ могутъ быть съ удобствомъ выражаемы при помощи этихъ новыхъ чиселъ—игнорируется и остается въ тѣни. Напримѣръ, если преподаватель ведетъ по такому методу ознакомленіе съ понятіемъ объ отрицательномъ числѣ, то суть его объясненій сводится къ слѣдующему: „условимся разность между меньшимъ и большимъ числомъ считать равной избытку бо́льшаго надъ меньшимъ, взятому со знакомъ минусъ впереди, напримѣръ, $7-10=-3$, и условимся подобныя числа называть отрицательными; тогда можно будетъ вычислять значеніе разности $a-b$ при любыхъ значеніяхъ a и b“. Какъ извѣстно, усвоеніе вопроса объ отрицательныхъ числахъ при такомъ формальномъ ихъ опредѣленіи представляетъ для учащихся огромныя, почти непреодолимыя трудности. Главное затрудненіе состоитъ даже не въ томъ, что они должны представлять себѣ возможнымъ то, что до сихъ поръ привыкли видѣть невозможнымъ; это затрудненіе можно обойти указаніемъ на то, что и дѣйствіе дѣленія не всегда было возможно въ ариѳметикѣ цѣлыхъ чиселъ, и только введеніе новыхъ чиселъ—дробныхъ—сдѣлало возможнымъ выражать частное при любыхъ цѣлыхъ значеніяхъ дѣлимаго и дѣлителя. Основное затрудненіе заключается въ томъ, что учащіеся привыкли представлять себѣ число, какъ символъ, которому можетъ соотвѣтствовать значеніе какой-либо величины, вообще нѣкоторая реальность; для нихъ понятенъ смыслъ числа 10, такъ какъ съ этимъ числомъ можетъ быть связано представленіе о 10 пальцахъ, 10 яблокахъ и т. д.; также понятнымъ является и число $\frac{3}{4}$, такъ какъ съ нимъ связывается представленіе о $\frac{3}{4}$ листа бумаги, $\frac{3}{4}$ часа и т. д.; но какъ могутъ они усвоить себѣ смыслъ числа -3, если ему не соотвѣтствуетъ никакого предмета или явленія, свойства котораго могли бы быть при помощи этого числа выражены? При такихъ условіяхъ теорія отрицательныхъ чиселъ является въ ихъ глазахъ попыткой истолкованія и замѣны чего-то невозможнаго чѣмъ-то непонятнымъ, и закладываются первыя зерна того сомнѣнія, которое впослѣдствіи разрастается въ формулу: „алгебра—это рядъ какихъ-то странныхъ логическихъ фокусовъ“.

Попробуемъ подойти къ вопросу иначе. Пусть преподаватель предложитъ учащимся какую-нибудь цѣлесообразно подобранную задачу, напримѣръ, такую: „Гребецъ отъѣхалъ въ лодкѣ въ правую сторону отъ пристани, противъ теченія рѣки, и проплылъ a саж., затѣмъ пересталъ грести, и теченіе снесло его назадъ на b саж. На какомъ разстояніи и по какую сторону отъ пристани находится онъ теперь?“ Пусть затѣмъ преподаватель заставитъ учащихся изобразить условіе задачи наглядно, при помощи схематическаго чертежа (полагая сперва, конечно, что $a > b$), и составить формулу рѣшенія задачи $x = a - b$ (гдѣ x, понятно, обозначаетъ искомое разстояніе). Пусть далѣе учащіеся опредѣлятъ числовое значеніе отвѣта при какихъ-либо частныхъ значеніяхъ a и b, удовлетворяющихъ принятому условію (напримѣръ, при $a = 45$, $b = 20$). Пусть затѣмъ преподаватель дастъ числамъ a и b такія частныя значенія, чтобы a было менѣе b (напримѣръ, $a = 30$, $b = 38$), и предложитъ ученикамъ попробовать рѣшить задачу по той же формулѣ. Когда они убѣдятся, что составленная формула приводитъ къ вычитанію бо́льшаго изъ меньшаго ($x = 30 - 38$), пусть преподаватель задастъ имъ вопросъ: становится ли самая задача при данныхъ значеніяхъ a и b невозможной или нѣтъ? Конечно, учащіеся безъ труда сообразятъ, что задача своего смысла не теряетъ и даетъ вполнѣ опредѣленный отвѣтъ: „Гребецъ находится въ 8 саж. влѣво отъ пристани". Послѣ одного-двухъ такихъ частныхъ примѣровъ имъ нетрудно будетъ составить и общую формулу $x=b-a$, пригодную для рѣшенія задачи при $a<b$. Тогда преподаватель можетъ обратить ихъ вниманіе на неудобство рѣшать задачу въ различныхъ случаяхъ по двумъ различнымъ формуламъ и притомъ указывать каждый разъ направленіе, въ которомъ должно отсчитываться найденное число саженъ отъ пристани; вмѣстѣ съ тѣмъ онъ укажетъ, что для устраненія этого неудобства вводятся нѣкоторыя условія, а именно: во 1-хъ, направленіе разстояній „вправо" и „влѣво" выражать знаками $+$ и $-$, поставленными передъ числомъ; во 2-хъ, въ тѣхъ случаяхъ, когда изъ меньшаго числа приходится вычитать большее, производить вычитаніе наоборотъ, писать полученное число со знакомъ минусъ впереди и называть этотъ результатъ разностью данныхъ чиселъ. Само собою разумѣется, что условія эти излагаются сперва на частныхъ примѣрахъ, а затѣмъ уже формулируются такъ, какъ сейчасъ указано. Когда учащіеся освоятся съ этими условіями, они легко замѣтятъ, что эти условія даютъ возможность рѣшать задачу по одной и той же формулѣ $x=a-b$ какъ въ случаѣ $a>b$, такъ и при $a<b$.

Разборъ еще двухъ-трехъ подобныхъ общихъ задачъ разъясняетъ учащимся, что отрицательное число выражаетъ значеніе величины, противоположной той, которая выражается въ томъ же вопросѣ числами положительными, и что введеніе въ алгебру отрицательныхъ чиселъ подъ указаннымъ условіемъ относительно вычитанія большаго изъ меньшаго позволяетъ упрощать и обобщать рѣшеніе задачъ и другихъ вопросовъ.

Опытъ показываетъ, что при такомъ способѣ изложенія учащіеся не только не затрудняются усвоеніемъ вопроса объ отрицательныхъ числахъ, но и обнаруживаютъ большой интересъ къ данному вопросу.

Подобнымъ же образомъ обстоитъ дѣло и съ несоизмѣримыми, числами. При формальномъ ихъ опредѣленіи преподаватель сперва указываетъ ученикамъ, что если взять пару перемѣнныхъ чиселъ k и l, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что всякое значеніе k меньше всякаго значенія l, а разность $l-k$ безгранично мала то система этихъ чиселъ иногда опредѣляетъ собою единственное цѣлое или дробное число x, удовлетворяющее неравенству $k < x < l$, а иногда не опредѣляетъ никакого соизмѣримаго числа. Затѣмъ вводится условіе: „условимся въ послѣднемъ случаѣ говорить, что система чиселъ k и l опредѣляетъ нѣкоторое особое число z, удовлетворяющее неравенству $k < z < l$; подобныя числа будемъ называть несоизмѣримыми“. Врядъ ли нужно доказывать, что такое опредѣленіе, несмотря на всю свою правильность, не разъяснитъ, а только запутаетъ для учащихся изучаемый вопросъ; и ужъ ни въ какомъ случаѣ имъ не придетъ въ голову, что эти мудреныя числа могутъ пригодиться для выраженія значеній нѣкоторыхъ величинъ, тѣмъ болѣе, что вопросъ о существованіи несоизмѣримыхъ отрѣзковъ, угловъ и другихъ несоизмѣримыхъ объектовъ остается для нихъ обыкновенно подъ сомнѣніемъ.

Если же преподаватель пожелаетъ примѣнить къ дѣлу конкретно-индуктивный методъ, то онъ прежде всего подберетъ какую-либо цѣлесообразную задачу, напримѣръ, такую: „по сторонѣ даннаго квадрата, принимаемой за единицу, найти сторону квадрата, имѣющаго вдвое большую площадь“.

Учащіеся легко убѣждаются, что рѣшить данную задачу вычисленіемъ они не могутъ, такъ какъ искомая сторона должна была бы выразиться такимъ числомъ, квадратъ котораго равенъ 2, а такого числа нѣтъ среди извѣстныхъ имъ до сихъ поръ. Тогда преподаватель задаетъ имъ вопросъ: становится ли вслѣдствіе этого задача невозможной? и предлагаетъ подумать, нельзя ли рѣшить данную задачу построеніемъ. Такое построеніе оказывается очень несложнымъ, и въ результатѣ искомой стороной является діагональ даннаго квадрата.

Длина этой діагонали, какъ видно учащимся изъ предыдущаго положенія, не можетъ быть выражена никакимъ соизмѣримымъ числомъ; отсюда ясно, что необходимо ввести новое число для ея обозначенія. Естественно принять условіе, чтобы эта длина была выражена числомъ $\sqrt{2}$, при чемъ выраженію: „нѣкоторый отрѣзокъ равенъ $\sqrt{2}$ единицы длины“, приписывается пока такой смыслъ: „нѣкоторый отрѣзокъ равенъ діагонали квадрата, сторона котораго равна единицѣ длины“.

Чтобы учащіеся могли составить себѣ полное представленіе о новомъ символѣ, необходимо еще ввести условіе, которымъ опредѣлялось бы мѣсто послѣдняго въ ряду соизмѣримыхъ чиселъ. Это проще всего сдѣлать такъ.

Сперва преподаватель показываетъ учащимся, что вышеупомянутая діагональ можетъ быть измѣрена приблизительно при помощи любой доли принятой единицы длины. Пусть, напримѣръ, нужно измѣрить ее въ десятыхъ доляхъ указанной единицы, и пусть наибольшее число этихъ десятыхъ долей, укладывающихся на данной діагонали, будетъ a; построивъ квадраты на отрѣзкахъ, составленныхъ соотвѣтственно изъ a и $a+1$ десятой доли единицы, и сравнивая ихъ съ квадратомъ, построеннымъ на діагонали, учащіеся легко убѣждаются, что площадь послѣдняго должна заключаться между площадями первыхъ двухъ, т.-е. что число a удовлетворяетъ неравенству:

$$\left(\frac{a}{10}\right)^2 < 2 < \left(\frac{a+1}{10}\right)^2,$$

или равносильному ему:

$$a^2 < 200 < (a+1)^2.$$

Послѣ этого для нихъ становится ясно, что a представляетъ наибольшее цѣлое число, квадратъ котораго не превышаетъ 200; такое число они умѣютъ находить, и легко опредѣлятъ, что $a = 14$, а слѣдовательно, искомая діагональ содержится между двумя отрѣзками, соотвѣтственно равными 1,4 и 1,5 принятой единицы.

Теперь преподаватель можетъ безъ затрудненія ввести второе условіе относительно символа $\sqrt{2}$, а именно: „если какое-нибудь число выражаетъ длину отрѣзка, меньшаго, чѣмъ данная діагональ, то оно считается менѣе числа $\sqrt{2}$, а если оно выражаетъ длину отрѣзка, большаго, чѣмъ данная діагональ, то оно считается болѣе $\sqrt{2}$"; въ примѣненіи къ данному случаю это условіе сейчасъ же даетъ:

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

Подобнымъ же образомъ учащіеся могутъ найти, что

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

и т. д.

Въ заключеніе преподаватель обращаетъ вниманіе учащихся на то, что принятое условіе относительно сравнительной величины $\sqrt{2}$ можетъ быть выражено въ такой формѣ: „число $\sqrt{2}$ считается болѣе всякаго числа, квадратъ котораго менѣе 2, — и менѣе всякаго числа, квадратъ котораго болѣе 2“, и наконецъ указываетъ, что введенное новое число $\sqrt{2}$ принято называть несоизмѣримымъ.

Сдѣланныя условія естественно обобщаются на случай извлеченія квадратнаго корня изъ любого неполнаго квадрата, т.-е. $\sqrt{A}$, гдѣ A неполный квадратъ, опредѣляется, какъ число, большее всякаго числа, квадратъ котораго менѣе A, и меньшее всякаго числа, квадратъ котораго болѣе A. Легко также показать, при помощи примѣненія пиѳагоровой теоремы, возможность построенія отрѣзка, длина котораго выражается числомъ $\sqrt{A}$, при всякомъ A (при этомъ предполагается, что доказательство пиѳагоровой теоремы основано на способѣ наложенія, а не на измѣреніи сторонъ).

Далѣе тѣ же условія могутъ быть обобщены на случай $\sqrt[n]{A}$, гдѣ подкоренное число есть неполная n-я степень; такимъ образомъ учащіеся будутъ имѣть вполнѣ ясное представленіе о корнѣ изъ неполной степени, какъ о несоизмѣримомъ числѣ; когда же преподавателю впослѣдствіи понадобится дать общее понятіе о несоизмѣримомъ числѣ, то онъ сможетъ это сдѣлать безъ особенныхъ затрудненій, такъ какъ учащіеся окажутся достаточно къ тому подготовленными. Ему придется тогда пройти еще слѣдующія методическія ступени: 1) выяснить ученикамъ, что опредѣленіе каждаго изучаемаго ими несоизмѣримаго числа было связано съ распредѣленіемъ всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ на двѣ группы, одна изъ которыхъ содержитъ числа, меньшія даннаго, а другая—числа, большія его; 2) выяснить, что въ первой группѣ нельзя указать наибольшаго числа, а во второй—наименьшаго. Послѣ этого нужно указать, что перечисленные признаки являются существенными для понятія о несоизмѣримомъ числѣ, и обратить вниманіе учащихся на возможность существованія несоизмѣримыхъ чиселъ и помимо извлеченія корней; это послѣднее можно выяснить на примѣрѣ такъ называемыхъ безконечныхъ непеѣріодическихъ десятичныхъ дробей.

Наконецъ, мы должны отмѣтить еще одинъ крупный недостатокъ абстрактно-дедуктивнаго метода, тѣсно связанный съ тѣмъ духомъ формальнаго обобщенія, который, по мнѣнію сторонниковъ указаннаго метода, долженъ выступать въ преподаваніи алгебры на первый планъ. Именно, при немъ недостаточно подчеркивается въ глазахъ учащихся та истина, что выводимыя алгебраическія формулы и правила можно считать общими лишь для того рода чиселъ, для котораго они были получены, а если приходится имѣть дѣло съ другими категоріями чиселъ или выраженій, то иныя формулы и правила сохраняютъ свою силу, иныя же нѣтъ.

Въ силу этого обстоятельства у учащихся слагается ложное представленіе объ абсолютной всеобщности алгебраическихъ формулъ и правилъ, а когда, напримѣръ, имъ приходится столкнуться съ фактомъ, что алгебраическія дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{am}{bm}$, равносильныя при m не равномъ нулю, перестаютъ быть равносильными при m равномъ нулю, или съ другимъ фактомъ, что отъ перемноженія многочленовъ (ирраціональныхъ) можетъ получиться одночленъ, или, наконецъ, съ тѣмъ обстоятельствомъ, что правило перемноженія квадратныхъ корней, выведенное для случая положительныхъ подкоренныхъ чиселъ непримѣнимо въ случаѣ отрицательныхъ подкоренныхъ чиселъ (т.-е. къ мнимымъ квадратнымъ корнямъ),—вообще во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда имъ приходится хотя бы случайно убѣдиться въ отсутствіи этой абсолютной всеобщности выводовъ, они начинаютъ сомнѣваться въ достовѣрности математическаго познанія, такъ какъ они не могутъ объяснить себѣ источника этихъ противорѣчій.

Я полагаю поэтому, что при прохожденіи курса алгебры факты, подобные только-что перечисленнымъ, должны не обходиться молчаніемъ, какъ это часто дѣлается, а подчеркиваться, чтобы учащіеся могли своевременно ознакомиться съ дѣйствительнымъ характеромъ алгебраическихъ обобщеній и избавиться такимъ образомъ отъ возможныхъ ошибокъ и недоумѣній. Въ тѣхъ же цѣляхъ должны быть совершенно устранены изъ курса всѣ попытки излишнихъ, искусственныхъ обобщеній при изслѣдованіи уравненій, напримѣръ, распространеніе формулъ рѣшеній квадратнаго уравненія вида $ax^2+bx+c=0$ на случай, когда $a=0$; совершенно ясно, что въ этомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ уравненіемъ первой степени вида $bx+c=0$, и только путемъ крайней натяжки мысли и дѣйствительно „странныхъ логическихъ фокусовъ“ удается авторамъ нѣкоторыхъ руководствъ доказать, что въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ тоже два корня.

Подводя итоги всему вышеизложенному, мы можемъ установить слѣдующія основныя положенія методики алгебры:

1) Всякое новое понятіе и всякая новая истина должны быть разъяснены на частныхъ примѣрахъ, подобранныхъ такъ, чтобы существенныя черты этого понятія или истины выступали въ нихъ какъ можно отчетливѣе, такъ сказать, сами бросались въ глаза; направивъ затѣмъ вниманіе учащихся на эти существенныя черты, преподаватель можетъ достигнуть того, чтобы учащіеся сами сформулировали изучаемую истину въ общемъ видѣ, подъ руководствомъ его наводящихъ вопросовъ.

2) Если дедуктивное обоснованіе какого-либо положенія черезчуръ затруднительно для учащихся даннаго возраста, то слѣдуетъ обнаружить съ ними это положеніе индуктивно, на частныхъ, цѣлесообразно подобранныхъ примѣрахъ; впослѣдствіи же, при повтореніи курса, излагается и дедуктивное доказательство.

3) Даже въ тѣхъ случаяхъ, когда дедуктивное доказательство какой-либо истины доступно для учащихся, полезно предпосылать ему индуктивную подготовку; отъ этого положенія можно отступать безъ ущерба для дѣла только тамъ, гдѣ дедуктивный выводъ опирается на хорошо извѣстныя учащимся понятія и представляетъ кратчайшій путь къ открытію и выясненію новой истины.

4) При всякомъ расширеніи понятія о числѣ необходимо не ограничиваться указаніемъ на формальныя цѣли введенія новыхъ чиселъ въ алгебру, но знакомить учащихся и съ той категоріей

величинъ, значенія которыхъ могутъ быть выражены этими числами. Съ этой цѣлью лучше всего подбирать каждый разъ цѣлесообразную задачу, вполнѣ конкретную и незамысловатую по содержанію. Понятіе о мнимомъ числѣ, какъ дающее менѣе конкретныхъ приложеній, слѣдуетъ отложить до конца курса.

5) При обобщеніи формулъ и понятій о дѣйствіяхъ необходимо подчеркивать то обстоятельство, что прежде доказанныя истины могутъ и не имѣть мѣста при новыхъ условіяхъ (въ особенности важно такъ поступать, когда въ формулѣ одно изъ неявныхъ количествъ обращается въ нуль).

При такомъ методѣ преподаванія будетъ достигнуто прежде всего лучшее пониманіе. Всякій математическій терминъ будетъ связанъ съ вполнѣ опредѣленнымъ представленіемъ объ извѣстной категоріи величинъ или свойствахъ ихъ, а не останется въ умѣ учащихся только словомъ безъ содержанія. Необходимость самостоятельно доходить до формулировки понятій и истинъ дастъ наибольшій просторъ самодѣятельности, а это обстоятельство въ связи съ отчетливымъ пониманіемъ предмета подниметъ интересъ къ дѣлу. Мы считаемъ излишнимъ прибавлять, что вырабатываемыя понятія и изучаемыя истины должны быть затѣмъ, въ рѣшеніи задачъ, приложены къ самымъ разнообразнымъ областямъ жизни, и что съ этой цѣлью характеръ задачъ долженъ быть такъ измѣненъ, чтобы онѣ могли выполнять свое главное назначеніе—служить связующимъ звеномъ между теоріей и жизнью.

Сторонники абстрактно-дедуктивнаго метода преподаванія обычно выставляютъ противъ всего вышеизложеннаго два возраженія. Во 1-хъ, они говорятъ, что обращеніе къ наглядности можетъ помѣшать выработкѣ отвлеченныхъ понятій, такъ какъ случайные признаки разсматриваемаго объекта въ глазахъ учащихся могутъ сойти за существенные. Но совершенно ясно, что дѣло учителя такъ подобрать конкретный примѣръ, чтобы на первый планъ въ немъ выступали именно важные, существенные признаки общаго понятія, и именно на эти признаки и обратить вниманіе учащихся. Кромѣ того, можно считать установленнымъ, что въ нашемъ сознаніи не существуетъ общихъ понятій, какъ совокупности представленій только о существенныхъ признакахъ того или иного объекта;

когда мы мыслимъ, напримѣръ, о треугольникѣ вообще, мы представляемъ себѣ треугольникъ, имѣющій совершенно опредѣленные размѣры и положеніе, и данный единичный треугольникъ лишь потому играетъ въ нашей психикѣ роль родового образа, что мы направляемъ наше вниманіе на существенныя его свойства. Таковъ взглядъ, который является преобладающимъ въ современной психологіи, и требованіе конкретности въ методѣ обученія математикѣ сводится именно къ тому, чтобы дать учащимся эти типичные образы, которые могли бы въ ихъ сознаніи сдѣлаться замѣстителями цѣлаго рода объектовъ, сходныхъ съ ними въ существенныхъ чертахъ.

Во 2-хъ, противъ конкретно-индуктивнаго метода приводится еще и другое, болѣе сильное возраженіе, сводящееся къ тому, что онъ подрываетъ достовѣрность математическихъ истинъ въ глазахъ учащихся, такъ какъ вмѣсто вполнѣ убѣдительнаго дедуктивнаго доказательства онъ во многихъ случаяхъ даетъ имъ индукцію, которая не можетъ считаться столь убѣдительной.—Но не слѣдуетъ упускать изъ виду, что для дѣтей и подростковъ, приступающихъ къ изученію математики, наивысшая степень убѣжденія дается не логическимъ умозаключеніемъ, а непосредственнымъ воспріятіемъ, и лишь впослѣдствіи, когда они переходятъ въ юношескій возрастъ, они начинаютъ критически относиться къ показаніямъ своихъ чувствъ и ощущаютъ потребность найти иной, болѣе устойчивый критерій истины. И вотъ въ этомъ-то возрастѣ, при окончаніи курса средней школы, и должны быть сведены въ научную систему ихъ математическія познанія; эта система будетъ построена на прочномъ основаніи, такъ какъ въ сознаніи учащихся есть уже въ эту пору фундаментъ конкретныхъ представленій, подлежащихъ систематизаціи, и есть потребность провѣрить логическими заключеніями тѣ истины, которыя ранѣе казались для нихъ совершенно очевидными и безспорными.

И тогда, убѣдившись въ незыблемости основъ построеннаго зданія математической науки и въ достовѣрности ея результатовъ, они ощутятъ потребность и въ другія области знанія внести такую же ясность, такую же точность и такую же достовѣрность. И можно будетъ съ увѣренностью сказать, что изученіе математики, какъ науки и какъ орудія міропознанія, не пропало для нихъ даромъ.

Вопросъ о способахъ оцѣнки и контроля познаній учащихся.

(Отмѣтки и экзамены.)

Что можно сказать новаго по вопросу о формахъ оцѣнки и контроля познаній учащихся, или, выражаясь болѣе привычнымъ языкомъ, объ отмѣткахъ и экзаменахъ? Развѣ недостатки традиціонныхъ формъ не стали общеизвѣстной истиной, развѣ не отмѣчались они уже въ теченіе десятковъ лѣтъ, вызывая то хладнокровное осужденіе, то страстные протесты? Но именно тотъ фактъ, что старыя формы уже изжиты, но не умерли окончательно, а новыя только возникаютъ, и позволяетъ мнѣ надѣяться, что, быть-можетъ, и мои соображенія по данному старому, но вѣчно новому вопросу окажутся не лишними.

Мы всѣ хорошо знаемъ ту систему цифровыхъ отмѣтокъ, съ которой намъ приходилось имѣть дѣло еще на школьной скамьѣ, и которая дожила и до нашихъ дней въ полной неприкосновенности: я говорю о знаменитой пятибалльной системѣ, по которой успѣхи учащихся обозначаются отмѣтками: „5 — отлично, 4 — хорошо, 3 — удовлетворительно, 2 — неудовлетворительно и 1 — худо". Общеизвѣстно и то, что школьная практика нерѣдко обращала эту пятибалльную систему чуть не въ 15-балльную, такъ какъ на ряду съ офиціальной пятеркой, четверкой и т. д. существовали отмѣтки 5 —, 4 +, 4 — и т. д. (пять съ минусомъ, четыре съ плюсомъ, четыре съ минусомъ...); особенно сложная система промежуточныхъ ступеней была на границѣ между тройкой и двойкой: въ ходу были отмѣтки 3 —, 3 =, 3 $\equiv$, 2 $^1/_2$, 2 + и т. д.

Были школы,—да и теперь еще онѣ не исчезли,—въ которыхъ офиціально была принята 12-балльная цифровая система отмѣтокъ (отъ 1 до 12), а есть говорятъ, даже заграницей, школы съ 24 - балльной системой. Всѣ эти цифровыя системы производятъ на первый взглядъ впечатлѣніе чего-то точнаго, чего-то позволяющаго не только измѣрить успѣхи учащихся въ нѣкоторыхъ условныхъ единицахъ, но и сравнивать успѣхи различныхъ учащихся между собою. Но, въ сущности, никогда ариѳметика не дѣлалась предметомъ бо́льшаго злоупотребленія, чѣмъ въ примѣненіи къ оцѣнкѣ познаній учащихся цифрами; если одинъ учащійся получалъ за свой отвѣтъ четверку, а другой единицу, то это никогда не значило, что первый знаетъ въ четыре раза больше или лучше второго, и—что самое главное—одна и та же цифровая оцѣнка у разныхъ лицъ могла соотвѣтствовать весьма различнымъ фактическимъ знаніямъ, и наоборотъ, одинъ и тотъ же отвѣтъ учащагося могъ быть оцѣненъ различными лицами при помощи весьма различныхъ цифръ; строгій экзаминаторъ могъ поставить двойку за такой отвѣтъ, который у снисходительнаго оцѣнивался четверкой. Эта субъективность и шаткость основаній, по которымъ познанія учащагося оцѣниваются данной, а не иной цифрой, служила и служитъ источникомъ безконечныхъ недоразумѣній между педагогами и учащимися. Я не буду говорить здѣсь о тѣхъ школьныхъ драмахъ, которыя создаются на этой почвѣ, если учитель обнаружитъ пристрастное отношеніе къ ученику; для меня важнѣе всего подчеркнуть, что при цифровой системѣ отмѣтокъ и самый добросовѣстный педагогъ не избѣжитъ нареканій и упрековъ въ несправедливости, такъ какъ развѣ можетъ онъ указать какія-либо объективныя, внѣшнія основанія, въ силу которыхъ онъ выставляетъ учащемуся за отвѣтъ ту или иную цифру? Въ самомъ дѣлѣ, какъ вы докажете, что данный ученикъ отвѣтилъ вамъ именно на тройку, а не на четверку? Развѣ у васъ есть какой-либо психическій силомѣръ, который позволилъ бы вамъ измѣрять познанія учащихся такъ, какъ мы измѣряемъ физическую силу динамометромъ или окружность груди съ помощью сантиметровой ленты?

Это отсутствіе достаточныхъ объективныхъ основаній для оцѣнки познаній учащихся той или иной цифрой—было фактомъ, который не ускользалъ отъ вниманія педагоговъ и въ старой школѣ. Такъ, напр., въ правилахъ объ экзаменахъ на аттестатъ зрѣлости въ мужскихъ гимназіяхъ (изд. 1891 г.) мы встрѣчаемъ только попытку опредѣлить болѣе или менѣе точно, какія познанія оцѣниваются отмѣткою 3: для полученія этой отмѣтки требуется „навыкъ въ рѣшеніи ариѳметическихъ, алгебраическихъ, геометрическихъ и тригонометрическихъ задачъ, не требующихъ особой изобрѣтательности; навыкъ и надлежащая внимательность въ производствѣ вычисленій и ясное пониманіе связи между всѣми основными положеніями элементарной математики, при чемъ въ письменныхъ работахъ должны быть излагаемы не только самыя вычисленія, но и тѣ соображенія, по коимъ произведены эти вычисленія, такъ чтобы каждая задача была вполнѣ разъяснена сколь можно короче, но съ строгою послѣдовательностью". Какъ видно, эти требованія довольно растяжимы; относительно же отмѣтокъ 4 и 5 сказано только, что этими отмѣтками оцѣниваются познанія, которыя превышаютъ указанный для тройки уровень „въ количественномъ и особенно въ качественномъ отношеніи". Такимъ образомъ, и старой школѣ не чуждо было сознаніе, что мы, въ сущности говоря, можемъ только намѣтить извѣстный минимумъ познаній и навыковъ, которыми долженъ обладать учащійся къ концу той или иной стадіи обученія, и болѣе или менѣе опредѣленно выяснять, кто изъ данныхъ учащихся удовлетворяетъ этимъ минимальнымъ требованіямъ, и кто нѣтъ; для болѣе же детальнаго распредѣленія учащихся на группы по количеству и качеству ихъ познаній у насъ нѣтъ еще достовѣрныхъ способовъ. Школы же новаго типа, какъ извѣстно, открыто признали этотъ фактъ, и, отказавшись отъ традиціонной цифровой пятибалльной системы, перешли къ системѣ словесныхъ оцѣнокъ: трехбалльной, сущность которой сводится къ терминамъ: „весьма удовлетворительно", „удовлетворительно" и „неудовлетворительно"; или чаще всего двухбалльной, выражаемой терминами: „удовлетворительно" и „неудовлетворительно", или „успѣваетъ" и „не успѣваетъ".

Эта послѣдняя система была, конечно, шагомъ впередъ по сравненію со всѣми предыдущими. Ею устранялась возможность соперничества изъ-за лучшихъ отмѣтокъ и оскорбленныхъ самолюбій по поводу того, что „мнѣ“, молъ, „поставили 4, а такой-то, который знаетъ нисколько не лучше меня, получилъ 5“. Затѣмъ, эта система не могла быть съ легкостью обращена въ 15-балльную, такъ какъ нельзя было присоединять знаки + и — къ принятымъ терминамъ: „удовлетворительно“ и „неудовлетворительно“; правда, школьная практика и здѣсь вводила термины: „вполнѣ удовлетворительно“, „не вполнѣ удовлетворительно“, „почти удовлетворительно“, „едва удовлетворительно“, — но въ этомъ отношеніи нельзя было уже заходить такъ далеко, какъ при системѣ цифровыхъ отмѣтокъ. Наконецъ, новыя школы обыкновенно вовсе отказывались отъ оцѣнки отдѣльныхъ отвѣтовъ учащихся, и сохраняли свою трехбалльную или чаще двухбалльную систему отзывовъ только для оцѣнки успѣховъ учащихся за какой-либо довольно продолжительный періодъ времени—по мѣсяцамъ, четвертямъ или третямъ учебнаго года; при этомъ отзывы: „успѣваетъ“ или „не успѣваетъ“, сопровождались и болѣе подробными словесными поясненіями того, въ чемъ именно выразилась неуспѣшность, или какъ вообще ученикъ усваиваетъ предметъ; иногда эти отзывы обращались въ подробную характеристику познаній, развитія и отношенія къ дѣлу учащихся. Вмѣсто какой-нибудь безсодержательной „четверки“, составлялась, напр., такая аттестація занятій ученика: „Обнаруживаетъ интересъ къ предмету, принимаетъ дѣятельное участіе въ классной работѣ и безъ большого труда усваиваетъ проходимый теоретическій курсъ алгебры и геометріи. При рѣшеніи задачъ обнаруживаетъ изобрѣтательность, но не всегда достаточно выдержки и внимательности, и потому допускаетъ ошибки въ преобразованіяхъ и вычисленіяхъ. Выражаетъ свои мысли въ общемъ ясно и достаточно связно“. Вмѣсто сухой „двойки“ получались такія характеристики: „Обладаетъ достаточными способностями для того, чтобы понимать и усваивать предметъ, но въ классѣ невнимателенъ, задаваемые уроки исполняетъ крайне неаккуратно, и вслѣдствіе этого познанія по пройденному отрывочны и сбивчивы, и не могутъ считаться удовлетворительными. Особенно плохо усвоенъ вопросъ о подобіи фигуръ и рѣшеніе квадратныхъ уравненій съ однимъ неизвѣстнымъ“. Или: „Занимается въ общемъ добросовѣстно какъ въ классѣ, такъ и дома, но изучаемое усваиваетъ чаще всего на память, не отличая существеннаго отъ маловажнаго; оказывается не въ состояніи отвѣчать на вопросъ, если онъ выраженъ не тѣми словами, что въ учебникѣ. Рѣшеніе задачъ, даже не требующихъ изобрѣтательности, дается съ большимъ трудомъ и только въ тѣхъ случаяхъ, когда раньше уже рѣшались похожія задачи. Выражаетъ свои мысли отрывочно и неясно; чертитъ плохо. Успѣхи въ общемъ неудовлетворительны".

Разумѣется, такіе отзывы давали и учащемуся, и родителямъ его, и самимъ преподавателямъ гораздо больше, чѣмъ голыя цифры или равносильныя имъ условныя отписки: вмѣсто сухого статистическаго значка, указывающаго, въ какую категорію зачисленъ ученикъ по успѣшности, школьныя аттестаціи стали живой рѣчью, характеризующей и способности, и отношеніе къ дѣлу, и результаты работы учащихся. Но все же и эта практика новыхъ школъ не была свободна отъ недостатковъ. Первый изъ нихъ состоялъ въ томъ, что преподаватели новыхъ школъ не всегда составляли свои отзывы объ успѣшности или неуспѣшности и свои характеристики на основаніи достаточнаго фактическаго матеріала. Такъ какъ оцѣнка отдѣльныхъ отвѣтовъ учащихся была отмѣнена, то случалось, что преподаватель не велъ никакихъ записей о работѣ учащихся, и при наступленіи срока оцѣнки давалъ свѣдѣнія объ ихъ успѣхахъ по памяти, руководясь общимъ впечатлѣніемъ, которое составилось у него о томъ или иномъ ученикѣ. При этомъ, конечно, могли происходить невольныя ошибки; послѣднія впечатлѣнія или какія-нибудь болѣе отчетливыя детали могли заслонить собою существенныя черты духовной физіономіи даннаго ученика, и оцѣнка получалась приблизительная, часто соотвѣтствующая дѣйствительному состоянію познаній, но иногда и уклоняющаяся отъ реальности. Бывало и такъ, что преподаватель, привыкшій ранѣе къ цифровой системѣ, продолжалъ и въ школѣ новаго направленія ставить цифровыя отмѣтки въ свою записную книжку, и подъ конецъ четверти переводилъ средній баллъ на языкъ принятыхъ въ школѣ терминовъ; отмѣтки такимъ образомъ изъ явныхъ становились тайными, но отзывы не дѣлались болѣе обоснованными. Иногда бывало и такъ, что школа въ началѣ своей дѣятельности затрачивала немало усилій на составленіе подробныхъ словесныхъ характеристикъ учащихся, а затѣмъ, по мѣрѣ возрастанія многолюдства въ школѣ, эти характеристики становились все менѣе содержательными и замѣнялись рядомъ шаблонныхъ терминовъ: „слабъ“, „усилить занятія“, „удовлетворителенъ“ и т. п. Второй существенный дефектъ былъ въ томъ, что требованія, которыя предъявлялись учащемуся для признанія его успѣвающимъ, попрежнему носили субъективный и неясный характеръ: и въ новой школѣ ученикъ могъ быть аттестованъ однимъ преподавателемъ, какъ успѣвающій, между тѣмъ какъ другой преподаватель при тѣхъ же условіяхъ призналъ бы его неуспѣвающимъ.

Очередной задачей новой школы и является усовершенствованіе системы оцѣнки познаній въ смыслѣ освобожденія ея отъ указанныхъ дефектовъ. Словесные отзывы объ успѣхахъ учащихся должны быть обоснованы на достаточномъ фактическомъ матеріалѣ, а этого можно достигнуть лишь тогда, когда преподаватель дастъ себѣ трудъ регистрировать всѣ впечатлѣнія о познаніяхъ учащихся, которыя онъ получаетъ во время учебной работы. Спросивъ у ученика заданный урокъ, преподаватель можетъ записать хотя бы въ самой краткой формѣ, о чемъ именно отвѣчалъ ученикъ и зналъ ли онъ этотъ урокъ, или зналъ нетвердо, или совсѣмъ не зналъ; выражалъ ли ученикъ при этомъ свои мысли ясно, точно и связно, или, наоборотъ, неясно, отрывочно; усвоилъ ли ученикъ этотъ урокъ сознательно или механически, главнымъ образомъ на память. Провѣривъ домашнюю или классную письменную работу, преподаватель можетъ отмѣтить, было ли правильно рѣшеніе задачи, и если нѣтъ, то въ чѣмъ состояли ошибки; рѣшена ли задача наиболѣе простымъ путемъ; какъ написано объясненіе — послѣдовательно, логично, подробно, или же въ немъ есть неточности, неясности, пропуски мыслей; обнаружена ли оригинальность въ данной работѣ или она выполнена по шаблону и т. п. Разрабатывая въ классѣ новый матеріалъ, преподаватель можетъ подмѣчать, кто изъ учениковъ обнаруживаетъ способность къ быстрымъ и правильнымъ обобщеніямъ или умозаключеніямъ, кто проявляетъ склонность къ активному участію въ работѣ и кто—

къ пассивному воспріятію, кто, наконецъ, съ трудомъ сосредоточиваетъ свое вниманіе на предметѣ классной работы; всѣ эти впечатлѣнія также подлежатъ регистраціи. Подобнымъ же образомъ, преподаватель можетъ подмѣчать и записывать, кто изъ учащихся обнаруживаетъ стремленіе выйти изъ рамокъ задаваемаго, и въ чемъ именно. Такія записи лучше всего заносить въ спеціальный дневникъ, какъ это дѣлаютъ, напр., психологи или врачи, наблюдающіе за развитіемъ тѣхъ или иныхъ психическихъ или физическихъ функцій ребенка; хорошо при томъ, чтобы впечатлѣнія записывались немедленно послѣ урока, по горячимъ слѣдамъ, пока они не смѣнились впечатлѣніями отъ уроковъ въ другихъ классахъ и съ другими учащимися. При наличности такой регистраціи подъ конецъ контрольнаго срока (мѣсяца, четверти или трети) у преподавателя окажется въ рукахъ достаточно полный матеріалъ для того, чтобы составить свой отзывъ объ учащемся въ ясныхъ и точныхъ выраженіяхъ, и чтобы этотъ отзывъ былъ фактически обоснованъ. По личному опыту нѣсколькихъ лѣтъ я знаю, что подъ конецъ четверти можно бываетъ имѣть о каждомъ изъ учащихся въ среднемъ около десятка записей, характеризующихъ ту или иную сторону его познаній или отношенія къ дѣлу. Правда, веденіе этихъ записей отнимаетъ время и при большомъ числѣ учащихся требуетъ большой затраты труда, но трудъ этотъ съ избыткомъ окупается тѣми благопріятными результатами, которые получаются отъ фактической обоснованности характеристикъ.

Для устраненія второго дефекта—несогласованности требованій отдѣльныхъ преподавателей—школа должна воспользоваться нѣкоторыми методами экспериментальной психологіи. Бинэ въ своей книгѣ „Современныя идеи о дѣтяхъ“ указываетъ (стр. 78—79), какъ ему удалось составить схемы для сужденія объ умственномъ развитіи ребенка въ различные возрасты: путемъ опроса и испытанія многихъ сотенъ дѣтей онъ убѣдился, какіе умственные акты успѣшно выполняются дѣтьми въ опредѣленномъ возрастѣ, но вмѣстѣ съ тѣмъ оказываются въ общемъ непосильными для дѣтей, которые моложе возрастомъ, хотя бы только на одинъ годъ; такимъ образомъ для каждаго возраста былъ составленъ цѣлый рядъ вопросовъ и дѣйствій, посильныхъ для нормальнаго ребенка именно въ данную пору его жизни, и умѣнье выполнять эти испытанія и является мѣриломъ умственнаго развитія ребенка. Такъ, напр., для 7-лѣтняго возраста находимъ слѣдующій списокъ умѣній, которыя долженъ обнаружить, по Бинэ, нормальный ребенокъ: „Указать пробѣлы на рисункѣ. Сосчитать свои пальцы. Списать написанную фразу. Срисовать ромбъ. Повторить пять цифръ“. Можно, конечно, сомнѣваться, насколько то или иное изъ этихъ испытаній дѣйствительно посильно для дѣтей даннаго возраста; есть психологи, которые оспариваютъ схемы Бинэ, да и самъ онъ не былъ склоненъ считать свои схемы окончательно установленными; можно навѣрняка ожидать, что схемы эти, выработанныя для французскихъ дѣтей, окажутся неподходящими для дѣтей другой страны и національности; но именно методъ, которому слѣдовалъ Бинэ при составленіи своихъ схемъ, могъ бы быть съ успѣхомъ примѣненъ и для разрѣшенія интересующаго насъ вопроса. Школа должна была бы путемъ многочисленныхъ наблюденій установить, какого рода математическія умѣнія и навыки являются посильными для учащихся даннаго возраста или класса и непосильными для предыдущихъ; напр., съ какого времени учащіеся начинаютъ ощущать потребность въ логическомъ обоснованіи математическихъ истинъ; когда они становятся способными давать связное объясненіе рѣшаемыхъ задачъ; съ какого возраста они обнаруживаютъ умѣнье строить послѣдовательный рядъ умозаключеній и т. д. Послѣ этого школа имѣла бы возможность выяснить болѣе или менѣе объективно, какія требованія можно предъявлять учащимся различныхъ классовъ при изученіи математики; и задача согласованія требованій была бы рѣшена, или по крайней мѣрѣ значительно приблизилась бы къ своему разрѣшенію.

Теперь я перейду ко второму вопросу, намѣченному въ началѣ этой статьи,—къ вопросу о способахъ контроля познаній учащихся. Старая школа, какъ мы всѣ хорошо знаемъ, разрѣшала этотъ вопросъ въ высшей степени неудовлетворительно. Въ теченіе учебнаго года контроль познаній учащихся долженъ былъ осуществляться при помощи спрашиванія задаваемыхъ уроковъ, а таковые при помощи письменныхъ работъ, домашнихъ и классныхъ; въ концѣ года для той же цѣли служила система устныхъ и письменныхъ экзаменовъ. При этомъ, спрашивая урокъ у одного какого-либо ученика, преподаватель старой школы обыкновенно не тревожилъ остальныхъ учащихся класса и предоставлялъ имъ пребывать въ состояніи пассивнаго вниманія или, лучше сказать, невниманія; такимъ образомъ въ многолюдныхъ классахъ преподаватель могъ освѣдомиться о познаніяхъ каждаго ученика только разъ въ мѣсяцъ или даже разъ въ четверть, при чемъ вызванный ученикъ въ случаѣ удовлетворительнаго отвѣта обыкновенно почивалъ на лаврахъ вплоть до того момента, когда разсчитывалъ снова быть спрошеннымъ. На помощь учителю приходили въ этомъ случаѣ классныя письменныя работы, которыя служили средствомъ одновременной провѣрки познаній всѣхъ учащихся. Провѣрка познаній, такимъ образомъ, переставала быть непрерывной и пріурочивалась къ нѣкоторымъ опредѣленнымъ моментамъ учебнаго года, преимущественно къ четвертнымъ срокамъ. Это обстоятельство отражалось на ходѣ учебнаго дѣла самымъ неблагопріятнымъ образомъ: учащіеся привыкали работать вообще спустя рукава и напрягать свою энергію только тогда, когда ожидали быть спрошенными или когда предстояла письменная работа, требующая подготовки; кромѣ того, провѣрочные отвѣты, въ особенности письменные, всегда болѣе или менѣе нервировали учащихся и съ одной стороны такое взвинченное настроеніе понижало качество самихъ отвѣтовъ, съ другой стороны, учащіеся въ цѣляхъ полученія удовлетворительнаго балла пускались на разныя хитрости и широко пользовались подсказкой и списываніемъ, обращая провѣрку знаній въ провѣрку своего умѣнья выдавать чужой трудъ за свой. Всѣ эти отрицательныя черты старой школы достигали своего кульминаціоннаго пункта на экзаменахъ, которые предназначались для окончательной и рѣшительной провѣрки знаній за весь учебный годъ.

Картина школьныхъ экзаменовъ намъ всѣмъ настолько общеизвѣстна, что я воздержусь отъ соблазна воспроизводить здѣсь ся наиболѣе комическіе или трагическіе уголки. Я не буду описывать, напр., той сложной системы ухищреній, которая практиковалась учащимися старой школы, чтобы заранѣе узнать темы письменныхъ экзаменовъ, или же во время письменныхъ экзаменовъ незамѣтно воспользоваться запретной помощью со стороны; не буду разсказывать, по какимъ неуловимымъ намекамъ учащіеся стараются догадаться (и небезуспѣшно), что именно изъ программы устнаго экзамена имъ нужно основательнѣе всего разучить и что можно оставить безъ вниманія; не буду описывать, какъ „дѣлаются" экзамены [1]) въ тѣхъ случаяхъ, когда экзаминатору хочется поразить кого слѣдуетъ блестящими отвѣтами учащихся, или наоборотъ, когда онъ находитъ нужнымъ предъявить особенно строгія требованія и добиваться отъ учащихся „основательныхъ" знаній; не буду, наконецъ, напоминать ни тѣхъ тяжелыхъ переживаній, которыя связаны у учащихся съ экзаменной лихорадкой, ни тѣхъ трагическихъ моментовъ, когда обрывались молодыя жизни, надломленныя гнетомъ экзаменной неудачи. Наоборотъ, я возьму самый обыкновенный случай, когда и экзаминаторы не слишкомъ требовательны, и программы не чрезмѣрно велики, и экзаменъ выдержанъ классомъ болѣе или менѣе удовлетворительно,—и поставлю вопросъ прямо: можетъ ли школа питать увѣренность, что результаты экзамена соотвѣтствуютъ дѣйствительной успѣшности учащихся, и насколько продуктивно затраченъ учащимися тотъ трудъ, который они употребили на подготовку къ этому экзамену?

Всякій изъ насъ по воспоминаніямъ своихъ школьныхъ лѣтъ или своей учительской дѣятельности можетъ припомнить не мало примѣровъ, когда учащіеся, особенно хорошіе, оказывались на экзаменѣ далеко ниже своей дѣйствительной силы и дѣлали, будто нарочно, такія ошибки, которыхъ никогда не допускали во время обычныхъ занятій. Изъ своей практики я помню, напр., случай, когда ученикъ четвертаго класса, хотя и не изъ блестящихъ, но вполнѣ удовлетворительный, въ экзаменаціонный письменной работѣ по алгебрѣ, желая выразить стоимость проданнаго товара, *складывалъ* стоимость одного фунта этого товара съ числомъ фунтовъ, и поступилъ такъ не однажды, а дважды, такъ какъ пришлось составлять два уравненія. А еще былъ случай, когда на устномъ экзаменѣ по геометріи ученикъ пятаго класса, также

---

[1]) См. по этому поводу напр., статью подъ названіемъ „Какъ дѣлаются экзамены" въ „Вѣстникѣ Воспитанія", 1913 г., № 6.

учившійся въ году удовлетворительно и уже отвѣтившій на болѣе трудные вопросы, никакъ не могъ вспомнить, что такое параллелограммъ, и упорно чертилъ вмѣсто него трапецію. Помню и еще случай, когда на выпускномъ экзаменѣ одинъ изъ лучшихъ учениковъ, изучавшій математику и сверхъ гимназической программы и поступившій затѣмъ на математическій факультетъ, совершенно забылъ, какъ выводится формула суммы членовъ ариѳметической прогрессіи, и не могъ вспомнить этого вывода, несмотря на наводящіе вопросы экзаминатора. Съ другой стороны, нерѣдки случаи, когда лѣнивый и мало знающій ученикъ, съ большимъ снисхожденіемъ допущенный къ экзамену, на скорую руку усваивалъ нѣкоторые отдѣлы программы и на экзаменѣ, получивъ билетъ по выученному отдѣлу, изумлялъ экзаминатора своимъ безукоризненнымъ отвѣтомъ. Всѣ подобные факты въ достаточной мѣрѣ свидѣтельствуютъ, что исходъ экзамена очень часто не отвѣчаетъ дѣйствительнымъ познаніямъ ученика; объ томъ же говорятъ и данныя, собранныя экспериментальной педагогикой. Еще въ 1905 г. Лобзинъ опубликовалъ въ журналѣ „Experimentelle Pädagogik“ нѣкоторыя свои изслѣдованія по вопросу о вліяніи экзаменной обстановки на успѣшность отвѣтовъ учащихся. Онъ произвелъ опытъ надъ 54 восьмилѣтними учащимися Кильской средней школы, задавая имъ въ теченіе двухъ послѣдовательныхъ дней письменныя работы одинаковой трудности—они должны были рѣшить каждый разъ по 20 задачъ на сложеніе и вычитаніе; при этомъ въ первый разъ они исполняли работу при обычныхъ условіяхъ, а во второй имъ было объявлено, что эта работа будетъ служить основаніемъ для оцѣнки ихъ успѣховъ. Оказалось, что въ первый разъ всѣ ученики выполнили въ общемъ 1024 задачи, а во второй за то же самое время только 990; число ошибокъ у всѣхъ учениковъ въ первый разъ было 402, а во второй разъ—въ экзаменной обстановкѣ—490, т.-е. среднимъ числомъ на каждую задачу приходилось въ первомъ случаѣ 0,39 ошибки, а во второмъ 0,49. Кромѣ того, Лобзинъ разсмотрѣлъ отдѣльно работы, принадлежавшія группѣ хорошихъ, среднихъ и плохихъ учениковъ, и нашелъ, что хорошіе ученики въ первомъ случаѣ выполнили удовлетворительно 88% всѣхъ задачъ, а во второмъ только 69%; средніе въ первомъ случаѣ 66%, а во второмъ 55%, и плохіе въ первомъ случаѣ 27%, а во второмъ 21%. Такимъ образомъ, экзаменная обстановка имѣла безспорное ухудшающее вліяніе на успѣшность работъ, при чемъ достойно вниманія то обстоятельство, что это неблагопріятное вліяніе болѣе всего отразилось на работахъ лучшихъ учениковъ.

Было бы въ высшей степени важно, чтобы и русскіе педагоги произвели подобныя изслѣдованія въ своей школѣ; но и указанныхъ фактовъ достаточно, чтобы утверждать, что экзамены ни въ коемъ случаѣ не могутъ быть мѣриломъ успѣшности учащихся, и что контролировать познанія учащихся съ помощью экзаменовъ столь же рисковано, какъ и производить взвѣшиваніе на завѣдомо испорченныхъ вѣсахъ. Впрочемъ, давно уже замѣчено, что экзаменъ представляетъ изъ себя, въ сущности, не испытаніе успѣшности, а испытаніе памяти, или, лучше сказать, испытаніе только одного вида памяти, а именно способности къ быстрому, но весьма непродолжительному запоминанію большого фактическаго матеріала. Еще Писаревъ подчеркивалъ этотъ фактъ, когда въ шутку предлагалъ современной ему школѣ продѣлать такой опытъ: въ тотъ день, когда учащіеся придутъ держать экзаменъ, скажемъ, по латинскому языку, объявить имъ, что латинскаго экзамена не будетъ, а вмѣсто того повторится экзаменъ изъ географіи, уже выдержанный ими за три дня до того; при этомъ онъ предсказывалъ, что такой повторный экзаменъ обратится въ повальный разгромъ, и „кто получилъ (раньше) пять балловъ, помирится на трехъ, а кто довольствовался тремя, тотъ не скажетъ ни одного путнаго слова“ [1]). Если подобный опытъ никогда и никѣмъ не продѣлывался, то, вѣроятно, потому, что всѣ мы и такъ хорошо убѣждены въ крайней непрочности экзаменныхъ познаній; да и любой учебникъ психологіи скажетъ намъ, что свѣдѣнія, усвоенныя въ короткій промежутокъ времени, да еще въ состояніи предъэкзаменнаго волненія и усталости, улетучиваются изъ памяти съ чрезвычайной быстротой. Въ силу всего этого нельзя не согласиться, что трудъ, затрачиваемый учащимися на подготовку къ экзаме-

---

[1]) Соч. Писарева, т. 3, статья „Наша университетская наука“.

намъ, трудъ усиленный и нерѣдко идущій въ ущербъ ихъ здоровью, а равно и трудъ, употребляемый преподавателями на самое производство экзаменовъ,—никакой педагогической цѣнности не имѣютъ.

Сторонники экзаменовъ обыкновенно не отрицаютъ, что экзаменная система страдаетъ всѣми указанными серьезными дефектами; но они полагаютъ, что другихъ, лучшихъ способовъ контроля познаній учащихся нѣтъ, и что экзамены, при всѣхъ своихъ отрицательныхъ сторонахъ, все же заставляютъ учащихся лучше учиться, и кромѣ того, даютъ имъ возможность охватить предметъ въ его цѣломъ, не сосредоточиваясь на частностяхъ. Я охотно вѣрю, что есть такія учебныя заведенія, въ которыхъ учащіеся въ виду экзаменовъ подтягиваются и усерднѣе берутся за книжки; готовъ повѣрить даже и тому, что въ этихъ учебныхъ заведеніяхъ безъ помощи экзаменовъ учащіеся учились бы еще хуже, чѣмъ въ дѣйствительности, но думаю, что школа, которая только при помощи экзаменной угрозы можетъ заставить своихъ учащихся заниматься, тѣмъ самымъ расписывается въ своемъ полномъ нравственномъ банкротствѣ. А что касается до возможности охватить предметъ въ его цѣломъ, то она, во 1-хъ, очень сомнительна, разъ въ программу экзаменовъ входитъ весь курсъ цѣлаго года или нѣсколькихъ лѣтъ: существенное несомнѣнно потонетъ въ массѣ мелочей; во 2-хъ, развѣ нельзя дать учащемуся эту возможность и помимо экзаменовъ? И въ этомъ вопросѣ сказывается несостоятельность традиціонныхъ путей нашей педагогики.

Наша новая школа опредѣленно стала на путь отмѣны экзаменовъ и рѣшенія вопроса о переводѣ учащихся изъ класса въ классъ по годовымъ оцѣнкамъ. Но мало было экзамены отмѣнить,—нужно было вмѣсто нихъ создать другую, болѣе надежную систему контроля познаній; а это далеко не всегда и не вездѣ имѣло мѣсто. Мнѣ уже приходилось выше указывать, что оцѣнка познаній учащихся въ школахъ новаго типа не всегда была достаточно обоснована фактическими данными; этотъ недостатокъ былъ не чуждъ и годовымъ оцѣнкамъ, и бывали случаи, когда удовлетворительная оцѣнка основывалась только на томъ, что ученикъ понимаетъ объясненія учителя, а помнитъ ли онъ при этомъ существенные факты и можетъ ли приложить свои познанія къ частнымъ случаямъ — это оставалось не вполнѣ освѣщеннымъ. И вотъ въ такихъ случаяхъ бывало, что школа, нѣсколько лѣтъ обучая ученика и считая его удовлетворительнымъ, потомъ случайно „вдругъ“ обнаруживала, что познанія его нетверды и сбивчивы и никакъ не могутъ считаться достаточными. Наличность подобныхъ случаевъ наводила на сомнѣнія въ полезности новаго направленія, и бывало, что школа, отмѣнившая было экзамены, потомъ возвращалась на старую дорогу и возстановляла ихъ въ чистомъ видѣ или подъ названіемъ репетицій, провѣрокъ и т. п. Но предоставимъ желающимъ повторять старыя ошибки и замыкаться въ этомъ заколдованномъ кругу; очевидно, что очередной задачей новой школы и является выработка такой системы контроля познаній учащихся, которая давала бы школѣ возможность обходиться безъ всякихъ экзаменовъ. А это возможно только въ томъ случаѣ, если школа дастъ себѣ трудъ осуществить систему подробной регистраціи впечатлѣній и отзывовъ преподавателей объ успѣхахъ учащихся, о которой я говорилъ раньше; тогда контроль успѣшности не будетъ пріуроченъ къ опредѣленнымъ, довольно рѣдкимъ моментамъ, нервирующимъ учениковъ однимъ своимъ наступленіемъ, а будетъ осуществляться, такъ сказать, исподволь, непрерывно и незамѣтно для учащихся; подъ конецъ четверти у преподавателя будетъ довольно обширный фактическій матеріалъ для сужденія объ успѣхахъ учащихся за четверть, а подъ конецъ года онъ сможетъ съ полной опредѣленностью выяснить, имѣются ли недочеты въ познаніяхъ учащихся по пройденному курсу, и можетъ ли этотъ ученикъ съ успѣхомъ продолжать занятія въ слѣдующемъ классѣ или нѣтъ. Тогда экзаменъ въ концѣ года станетъ просто ненужнымъ; зачѣмъ школѣ продѣлывать еще какой-то спеціальный и притомъ явно ненадежный контроль познаній для рѣшенія вопроса о переводѣ учащихся въ слѣдующій классъ, если она ихъ и безъ того хорошо знаетъ и можетъ рѣшить этотъ вопросъ на основаніи матеріала, собиравшагося и провѣреннаго въ теченіе цѣлаго года? Эти соображенія относятся въ равной мѣрѣ и къ выпускнымъ экзаменамъ, которые вѣдь отличаются отъ переводныхъ только тѣмъ, что выдержаніе ихъ сопряжено съ пріобрѣтеніемъ извѣстныхъ правъ по образованію; и даже вступительные экзамены нѣкоторыя новыя школы пытались, и не безъ успѣха, замѣнить организаціей, въ теченіе нѣсколькихъ дней, правильныхъ школьныхъ занятій съ поступающими, чтобы собрать впечатлѣнія о нихъ въ обстановкѣ обычнаго школьнаго дня, а не экзаменной лотереи..

Экзамены въ специфическомъ смыслѣ этого слова должны бы быть сохранены только для тѣхъ случаевъ, когда провѣрка знаній и подготовки производится внѣ школы или хотя бы и въ самой школѣ, но лицами, не занимавшимися ранѣе съ тѣми, чьи знанія подлежатъ контролю: напр., когда производятся для экстерновъ испытанія на свидѣтельство за курсъ гимназіи или нѣсколькихъ ея классовъ, или когда имѣютъ мѣсто экзамены для полученія какихъ-либо правъ, производимые посторонней школѣ экзаменаціонной комиссіей; пока экспериментальная педагогика не придумала для этой цѣли лучшихъ средствъ, приходится поневолѣ прибѣгать къ экзамену и только заботиться о томъ, чтобы по возможности смягчить его отрицательныя стороны.

Что касается письменныхъ работъ, то онѣ, конечно, и въ новой школѣ найдутъ себѣ мѣсто, но должны будутъ утратить свой провѣрочный, экзаменный характеръ; письменныя работы будутъ носить характеръ самостоятельныхъ упражненій по проходимому курсу, притомъ такихъ, которыя давали бы возможно бо́льшій просторъ самодѣятельности и творчеству учащихся.

И объединеніе познаній по курсу цѣлаго года или цѣлаго предмета въ новой школѣ никоимъ образомъ не исчезнетъ; оно только не будетъ пріурочено къ вопросу о переводѣ учащихся и не будетъ состоять въ повтореніи, со всѣми деталями, цѣлыхъ крупныхъ отдѣловъ курса. Наоборотъ, преподаватель, проходя въ школѣ свою науку, будетъ выбирать изъ каждаго ея отдѣла сравнительно мало фактическаго матеріала, иногда, быть-можетъ, не болѣе, чѣмъ это требуется на обыкновенный урокъ; но въ этомъ избранномъ матеріалѣ будетъ заключена суть дѣла. И вотъ эту суть дѣла онъ постарается внѣдрить въ сознаніе и въ память учащихся настолько прочно, чтобы для ея воспроизведенія не требовалось никакой спеціальной подготовки, а достаточно было одного вопроса; тогда, заканчивая прохожденіемъ какой-либо отдѣлъ, онъ не упуститъ случая заставить учащихся воспроизвести снова весь этотъ существенный матеріалъ и сдѣлать такимъ образомъ объединяющій обзоръ усвоеннаго. Такіе обзоры могутъ имѣть мѣсто какъ среди учебнаго года, такъ и въ концѣ его, но ни въ какомъ случаѣ не должны быть непосредственно связаны съ четвертной или годовой оцѣнкой познаній; только при такихъ условіяхъ работа въ школѣ будетъ носить равномѣрный и продуктивный характеръ, а не будетъ состоять въ смѣнѣ періодовъ бездѣлья и періодовъ напряженнаго натаскиванія познаній къ моменту генеральнаго смотра.

Пройдетъ, быть-можетъ, не мало времени, пока эти принципы получатъ широкое распространеніе въ нашей школьной практикѣ. Но тѣ школы, которыя желаютъ быть на высотѣ требованій современной педагогики, пусть найдутъ въ себѣ мужество рѣшительно вступить на новый путь; онѣ смогутъ тогда выпускать въ жизнь людей, которые дѣйствительно владѣли бы своими познаніями, а не изнемогали бы подъ бременемъ своей „учености“.

СОДЕРЖАНІЕ.