ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

ОТДЕЛЕНИЕ МЕТОДИК ПРЕПОДАВАНИЯ ОСНОВНЫХ ДИСЦИПЛИН В НАЧАЛЬНОЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

6

МОСКВА 1946 ЛЕНИНГРАД

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 6

ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
ИНСТИТУТА МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

Ответственный редактор
член-корреспондент АПН РСФСР
проф. В. Л. ГОНЧАРОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Москва 1946 Ленинград

Разрешено к печатанию
Редакционно-издательским Советом
Академии педагогических наук РСФСР

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

CONTENTS

page

Редактор В. М. Васильева
Техн. редактор В. П. Гарнек

А 12780. Подп. к печати 30/XI 1946 г. Уч.-изд. л. 13,39. Печ. л. 10,5.
Тираж 5000 экз. Заказ № 1752. Цена 10 р.

2-я фабрика детской книги Детгиза Министерства Просвещения РСФСР
Ленинград, 2-я Советская, 7.

ОТ РЕДАКЦИИ

Настоящий выпуск „Известий Академии педагогических наук РСФСР“ отражает исследовательскую работу Кабинета методики математики Института методов обучения, выполненную им на протяжении 1945 г.

Не преследуя широкой цели систематического охвата и углублённой методической переработки всего курса элементарной математики, а также временно оставляя в стороне совокупность вопросов программного порядка (или касаясь их лишь частично), Кабинет методики математики в своей работе основное внимание сосредоточил, с одной стороны, на узловых проблемах, а с другой, — на наиболее сложных моментах преподавания математики. То и другое стоит в порядке дня и требует безотлагательного приложения сосредоточенных усилий. Вместе с тем в данном выпуске ни один из математических предметов, преподаваемых в настоящее время в средней школе, не остался незатронутым.

Одним из слабых мест в подготовке оканчивающих среднюю школу является, по общему признанию, арифметика: указывается, во-первых, на плохое умение учащихся решать задачи, применяя приобретённые навыки счёта к реальным жизненным ситуациям (следствие так называемого формализма в преподавании), во-вторых, — на то, что сами эти навыки оставляют желать много лучшего в смысле их совершенства и прочности усвоения. Пути борьбы с недостатками преподавания, обусловливающими эти явления, указываются в статьях проф. И. В. Арнольда „Принципы отбора и составления арифметических задач“ и проф. В. Л. Гончарова „Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика в средних классах школы“. В последней из названных статей излагается также план мероприятий, которые могли бы на основе арифметической тренировки, продолженной за пределы пяти первых классов, способствовать развитию в сознании учащихся идеи функциональной зависимости, — другой важный предмет заботы в нашем математическом преподавании, ещё одна проблема, не находящая покуда положительного решения в пределах курса алгебры.

Геометрии посвящены также две статьи: проф. Я. С. Дубнова („Геометрия в семилетней школе“) и проф. Н. Ф. Четверухина („Вопросы методологии и методики геометрических построений в школьном курсе геометрии“. Первая из них трактует вопрос о придании самостоятельности и законченности курсу геометрии первого цикла, причём предусматривается широкое привлечение интуитивного начала в преподавании и одновременно — меры к постепенному, в соответствии с возрастом, переходу к дедуктивным рассуждениям. Вторая статья идёт навстречу необходимости интенсивнее культивировать пространственные представления школьника и развивать его геометрическое воображение. В ней разработаны общие принципы пространственных построений, выполняемых или посредством воображаемых операций или на проекционных чертежах.

Вопрос о месте тригонометрии в курсе элементарной математики рассматривается в работе А. И. Фетисова, содержащей также продукт учительского опыта — очерк своеобразного построения теории тригонометрических функций с привлечением векторов, операторов (преобразований векторов) и комплексных чисел.

Последняя статья сборника принадлежит Н. Н. Никитину. Она носит характер исторического обзора и содержит материалы, относящиеся к двум съездам преподавателей математики, состоявшимся в Петербурге и в Москве незадолго до первой мировой войны. К началу нашего века относится одна из наиболее ярких страниц истории математической педагогики и напомнить её вполне своевременно в связи с возможным созывом в недалёком будущем Всесоюзного съезда учителей математики и назревающей общей потребностью в привлечении более обширных кругов преподавателей нашей страны к активной методической работе.

Большинство статей, вошедших в настоящий выпуск „Известий", представляет лишь теоретическое решение выдвигаемых методических проблем. Конкретную реализацию содержащихся в них предложений нужно будет искать в других работах Кабинета.

Проф. В. Л. Гончаров

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем выпуске помещены работы Кабинета методики математики Института методов обучения Академии педагогических наук.

Будучи весьма разнородными по своей тематике, печатаемые статьи, в совокупности, охватывают широкий круг вопросов, связанных с преподаванием математики в средней школе, и потому позволяют судить об общей установке научного коллектива кабинета по отношению к этим вопросам.

Каждая статья затрагивает достаточно глубокую тему принципиального значения, научно освещает её и тем самым будит и стимулирует научно-методическую мысль читателя. Очень хорошо, что каждая статья носит не „директивный", а вполне дискуссионный характер и написана с большим темпераментом. Увлечённый своим пониманием вопроса, автор вызывает читателя на возражения, а тем самым — и на выработку своей собственной точки зрения.

Со стороны математической все статьи стоят на высоком научном уровне; этому не приходится удивляться, учитывая имена их авторов. Ещё более отрадным следует признать тот факт, что все статьи оказались вместе с тем и весьма актуальными в методическом отношении. Это непосредственно очевидно в отношении таких исследований, как работа проф. Я. С. Дубнова, посвящённая злободневному и трудному вопросу о программе курса геометрии в семилетней школе и дающая по этому вопросу весьма продуманные конкретные предложения, или статья проф. И. В. Арнольда, вносящая совершенно новую струю в старый и „больной" вопрос о подборе арифметических задач. Исследования проф. В. Л. Гончарова, проф. Н. Ф. Четверухина и А. И. Фетисова, имеющие целью оригинальное освещение отдельных важных, но мало разработанных разделов школьного курса математики, несомненно, составляют ценный вклад в методическую науку, прежде всего потому, что каждая из них дышит научной свежестью и будит творческую мысль математика-методиста.

Особое место занимает историческая работа Н. Н. Никитина. В сжатой и легко обозримой форме автор резюмирует и оценивает труды первых двух съездов преподавателей математики, происходивших, как известно, незадолго до первой мировой войны и сыгравших значительную роль в формировании и развитии русской общественной мысли в области преподавания математики.

Только в одном отношении научная продукция кабинета заслуживает, пожалуй, некоторого упрёка: при столь квалифицированном составе сотрудников Кабинет мог бы, повидимому, взяться и за более ответственную тематику. Общие основы методики математики в советской школе, глубокая научная проверка программ, выработка общих требований к учебникам математики, — вот какого рода тематику хотелось бы видеть в научном багаже Кабинета. Само собою разумеется, что разработка такого рода тем не может быть проведена силами одного, хотя бы и весьма квалифицированного сотрудника. Здесь необходим коллективный труд. Но наш упрёк кабинету именно в том и состоит, что до сих пор математический кабинет (как, впрочем, и многие другие кабинеты, и не только Академии педагогических наук) не даёт ещё никаких продуктов коллективного труда над большими проблемами. Каждый сотрудник работает отдельно от других; как правило, работает хорошо, получает ценные результаты, но всё же эта продукция носит частный характер, — никто в одиночку, естественно, не берёт на себя решения больших, центральных задач математической методики. А между тем, если от разработки этих задач будет отворачиваться математический коллектив Академии педагогических наук, то позволительно спросить, кто же за них решится взяться? А задачи-то, ведь, все весьма неотложные, настойчиво ждущие компетентной научной разработки.

Оправданием Кабинету может служить только его молодость. Учитывая её, мы готовы заменить наш упрёк настойчивым пожеланием этому молодому коллективу — поскорее стать слаженно действующим научным организмом, крепким и дерзновенным, не страшащимся самых больших задач своей науки.

Действительный член Академии
педагогических наук РСФСР *А. Я. Хинчин*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 6 · 1946

ПРИНЦИПЫ ОТБОРА И СОСТАВЛЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Проф. И. В. АРНОЛЬД

I. Постановка вопроса

Арифметические задачи, если исключить имеющие характер простых упражнений в производстве арифметических действий, преследуют довольно разнообразные и притом не слишком определённые цели. Имеется в виду и закрепление теоретического материала курса арифметики, и ознакомление с простейшими зависимостями между величинами, и тренировка сообразительности учащихся, развитие у них умения ориентироваться во всё более и более сложных „арифметических ситуациях". Однако более точно эти цели никогда не фиксировались, подбор и расположение задач определяются до сих пор в значительной мере исторической традицией: нет никаких твёрдо установленных принципов, которые позволили бы судить о том, что именно должно быть достигнуто, в каком порядке, какой степени сложности задачи должны решаться, каковы должны быть тематика и оформление задач, в какой связи эти задачи должны быть с другими частями курса математики, какие требования следует предъявлять к подбору числовых данных и т. д.

По всем этим вопросам в методической литературе можно найти довольно разноречивые указания весьма расплывчатого характера, в практике же преподавания встречается самое разнообразное разрешение этих вопросов как в программах, так и в содержании соответствующих учебных пособий.

Уже в дореволюционное время в среде наиболее активных и прогрессивных деятелей русской начальной и средней школы росли и крепли течения, стремившиеся отразить в практике преподавания те тенденции к обновлению материала и методов преподавания, которые с необходимостью вытекали из чрезвычайно быстрого количественного роста математических дисциплин и резкого увеличения удельного веса математических методов в современном естествознании и технике. С особенной остротой эти задачи возникают перед советской школой, призванной, в невиданных доселе масштабах, осуществить необходимую для овладения современной наукой и техникой подготовку работников первого в мире социалистического государства. Для советской школы, поэтому, совершенно нетерпимо такое положение, при котором как содержание, так и методы преподавания математики и, в частности, основы основ — арифметики, сохраняют ещё следы застывших и устаревших схем и традиций и не приведены в достаточно полное и точное соответствие с потребностями современности. Положение осложняется ещё тем, что конкретные условия обучения, его массовость и унификация требуют особенно осторожного подхода при внесении не только значительных, но даже и сравнительно небольших изменений. Но именно массовость и унификация преподавания обязывают произвести тщательный пересмотр материала с тем, чтобы, освободившись от всего того, что в настоящее время является излишним балластом, заполнить остающееся время и место действительно насущно необходимым материалом, без которого преподавание арифметики будет лишь в очень неполной мере разрешать стоящие перед ним задачи.

Мы позволим себе сослаться для сравнения на разработанность методики преподавания таких предметов, в которых наличие или отсутствие нужных навыков констатируется не по косвенным признакам (недостаточная подготовленность к дальнейшему обучению, беспомощность в решении практических вопросов), а непосредственно очевидно. Сюда относятся, например, обучение музыкальной технике или иностранному языку. Здесь с чрезвычайной тщательностью подобраны и составлены упражнения самого различного типа, известно, для чего они нужны, как их нужно дозировать, что должно быть достигнуто в результате. Изучены часто встречающиеся ошибки и дефекты исполнения (или — в случае обучения языку — дефекты произношения, словоупотребления и т. д.) и придуманы специальные упражнения для устранения этих дефектов. Достаточно сравнить любые два пособия, любые два методических руководства для того, чтобы убедиться, что в этом отношении арифметика плетётся в хвосте, хотя здесь-то и надо бы потребовать наиболее тщательной и продуманной методической детализации.

Итак, мы считаем, что для того чтобы в сложившихся у нас условиях правильно подойти к разрешению частного вопроса о содержании, форме и расположении арифметических задач, необходимо (учитывая весь имеющийся в распоряжении опытный материал и общие задачи математической подготовки учащихся советской средней школы в современных условиях) установить с достаточной полнотой и определённостью, *какие именно частные цели должны быть достигнуты в результате соответствующей работы учащихся над решением арифметических задач.*

Несмотря на то, что такой тезис может показаться трюизмом, на деле, в конкретном применении к арифметическому материалу, он оказывается далеко не тривиальным, так как подобного рода работа, насколько нам известно, у нас ещё не была проделана с необходимой тщательностью. Отдельные, „не претендующие на исчерпывающую полноту" экскурсии в эту область почти бесполезны — здесь нужна именно „претендующая на полноту" работа. Автор настоящей статьи не претендует на производство этой работы во всём её объёме (да и вряд ли силами одного человека может быть достигнута нужная степень объективности). Имеется в виду лишь более скромная цель — наметить те основные положения, из которых, по мнению автора, следует исходить при отборе и составлении задач по курсу арифметики, в особенности на позднейших стадиях обучения.

2. О требованиях, которые следует предъявить при отборе и составлении арифметических задач

Попытаемся прежде всего конкретизировать характер тех требований, которые мы считаем необходимым предъявлять к содержанию арифметических задач, входящих в обязательный минимум. Подчеркнём, что общее число задач, которые каждый учащийся должен решить в процессе обучения, не так-то уж велико. Поэтому уместно потребовать, чтобы каждая задача (ведь, с ней могут встретиться несколько миллионов учащихся детей!) была настолько полноценной во всех отношениях, что можно было бы обосновать и защищать её право на миллионный тираж. Нам кажется, что эти требования вполне естественны в отношении каждой задачи, включённой в сборник упражнений для начальной и средней школы. Авторы задач должны были бы, в идеале, быть в состоянии ответить на вопросы, скажем, такого типа:

— Какую цель преследует данная задача? Какие именно элементы арифметического обучения, воспитания и тренировки мысли имеются в виду? Необходимо ли помещение именно этой задачи в сборник для этих целей? Почему именно такие, а не другие конкретные величины, именно такая, а не другая „фабула“ задачи выбраны? Почему такие, а не другие числовые данные? Отвечают ли они реальной обстановке, в которой могло бы понадобиться решать такую задачу? Интересна ли фабула задачи для учащихся, увлекательна ли, естественна ли постановка вопроса, вызывает ли она у учащихся интерес к ответу или к способу решения, чем именно? Нельзя ли этот интерес повысить? Когда именно учащийся сможет самостоятельно решить данную задачу, что он для этого должен помнить, знать, уметь, представлять себе? А если он не сможет этого сделать, о чём это свидетельствует? Чем и в какой мере ему должен помочь учитель и чего он должен добиваться от учащегося? Как эта задача связана с предшествующей и последующей работой учащегося, почему она помещена именно в этом месте сборника, а не в другом? и т. п.

Может показаться, на первый взгляд, что эти требования к составителям задач чрезмерны. Есть, скажут, сборники задач: научите детей решать эти задачи, — и всё будет ладно, а в деталях учитель разберётся. Но мы хотим подчеркнуть, что одна из основных целей настоящей статьи — показать, во-первых, насколько такая традиционная терпимость к бросающимся в глаза дефектам преподавания недопустима, к каким последствиям она ведёт, и, во-вторых, наметить пути к устранению этих дефектов.

3. Фабула задачи и выбор числовых данных

Начнём с вопроса, в разрешении которого рутинность проявляется на практике с особенной рельефностью и в отношении которого сравнительно легко указать, что здесь необходимо предпринять. Мы имеем в виду фабулу или оформление задачи, естественность постановки вопроса и подбора числовых данных. Принято считать, что всё это имеет второстепенное значение, что суть дела в арифметическом содержании задачи, в тех усилиях воображения, в том процессе логического рассуждения, в тех числовых выкладках, которые предлагаются учащемуся, а вовсе не в степени реальности содержания задачи. Даже если в принципе с этим тезисом и можно было бы согласиться, всё же только что высказанные утверждения не являются достаточным основанием для того, чтобы отбрасывать всякую заботу о фабуле задачи.

Отсутствие заботы о фабуле приводит, в итоге, к нагромождению задач с искусственными, подчас прямо смехотворными, условиями, лишь по чисто внешним признакам, имеющим реальную оболочку. Хуже всего то, что обилие задач, заставляющих учащегося на протяжении нескольких лет обучения пережёвывать один и тот же традиционный материал, неминуемо навевает скуку, переходящую в отвращение к арифметике, в особенности, если обучение и по существу сводится к навязыванию учащимся рецептов и неукоснительных бюрократических правил арифметической бухгалтерии — записи хода решения и т. д.

Необходимо здесь подчеркнуть, что мы вовсе не собираемся совершенно отказываться от общеизвестных типов арифметических задач (задачи с путешественниками и поездами, встречающими и догоняющими друг друга, задачи на „бассейны", на „смешение" и т. п.). Эти классические задачи представляют собой достаточно наглядные и удобные *схемы* тех арифметических ситуаций, в которых должен уметь ориентироваться учащийся. Но нельзя ограничиваться этими задачами-схемами и вращаться в кругу одной и той же, очень скоро приедающейся, тематики. Иначе не избежать искусственных постановок вопроса и нудного повторения одних и тех же мотивов. С другой стороны, внося разнообразие в оформление и тематику задач и стремясь к возможно большему приближению к действительности используемых соотношений между данными и искомыми задачи и к соответственному выбору числовых данных, нельзя, конечно, перегибать палку и загромождать текст задачи такими техническими и статистическими данными, которые порождают для учащихся дополнительные трудности. Но эта последняя опасность сейчас меньше первой, — линия „наименьшего сопротивления" проходит именно там, а не здесь.

Если бы нельзя было нужное арифметическое содержание задачи облечь в более живую форму, подобрать интересное, конкретное и вместе с тем доступное для учащихся оформление, достигающее — в отношении умственной тренировки и воспитания арифметических навыков — нужных целей, тогда, конечно, пришлось бы мириться и с этим. Но всё дело в том, что почти всегда такое оформление найти можно, и если это не делается, то только потому, что легче переписать из составленных раньше сборников условия задач, слегка их осовременив, нежели подумать о том, как оформить задачу с соблюдением указанных требований. Я уже не говорю о том, что и над вопросом о нужном арифметическом содержании часто составители сборников не слишком-то задумываются.

Для иллюстрации приведём несколько примеров, взятых из применяющихся у нас сборников задач.

„У хозяйки было на руках $7^{8}/_{8}$ руб."

„Продано $3^{17}/_{19}$ *кг* сахара, по $2^{1}/_{7}$ руб. за килограмм".

„Заяц в 1,35 часа пробегает 14,13855 *км*".

Совершенно смехотворный выбор числовых данных здесь не нуждается в комментариях. И такие задачи — не редкость. Составители сборников иногда ссылаются на то, что „иначе трудно составить задачи, требующие действий с обыкновенными и десятичными дробями". Даже если это и верно, то такой аргумент был бы приемлем лишь в устах тех, кто *не составляет* сборников задач.

Рассмотрим задачи, которые не содержат таких бросающихся в глаза нелепостей и представляются нам в достаточной степени типичными.

„В 3 рощах 4160 берёз. Сколько берёз в каждой роще, если в первой в 3 раза больше, чем во второй, а в третьей столько, сколько в первых двух вместе?"

Как будто бы возразить нечего. Но всё же, — что это за странные рощи, с таким точным соотношением числа берёз? И разве не ясно всякому, что число берёз в каждой роще должно было бы быть заранее сосчитано, так как иным путём сравнить число берёз в них нельзя. В итоге — совершенно нереальная, если вдуматься — просто комическая, постановка вопроса, которая не может вызвать никакого интереса к ответу.

„Два бидона вмещают $10^1/_2$ *л*. Если бы вместимость первого была в два раза больше, а вместимость второго на 8 *л* больше, чем в действительности, то общая ёмкость удвоилась бы. Какова ёмкость каждого?"

Мы намеренно приводим безобидные, на первый взгляд, задачи. Все так привыкли к нелепому и скучному тексту, что не склонны видеть в задачах подобного рода ничего предосудительного. Но присмотритесь внимательней. Чем мотивировано условие задачи? Почему это всё так? Почему точно в два раза больше? Почему удвоится? В какой реальной обстановке могла бы встретиться необходимость решать такую задачу?

„1365 книг составляют 35% всех книг школьной библиотеки. Все библиотечные книги размещены в трёх шкапах, причём количества их относятся, как $3^1/_2 : 1{,}25 : 1^3/_4$. Сколько книг в каждом шкапу?"

Интересно и реально, не правда ли?

„Школьник издержал сначала $^3/_{14}$ своих денег на покупку писчебумажных принадлежностей, потом $^5/_{11}$ остатка на покупку учебников и у него осталось четырьмя рублями меньше того, что он издержал в оба раза. Сколько денег было у школьника?"

Одна формулировка чего стоит!

„Из колхоза в город, до которого 48 *км*, отправились одновременно колхозник на лошади со скоростью 7 *км* в час и письмоносец на велосипеде со скоростью 13 *км* в час. Через сколько часов остаток пути до города для письмоносца будет в 3 раза меньше, чем остаток пути до города для колхозника?"

Трудно себе представить, чем мог бы быть обусловлен интерес к получению ответа на вопрос задачи. Тематика лишь внешне связана с современностью. С тем же основанием можно было бы отправить рыцаря на лошади и гонца бегом, — оформление, может быть, стало бы для ребят забавнее, но постановка вопроса от этого не стала бы лучше.

И вот подобного рода задач — сотни, и детей держат на таком „арифметическом рационе" на протяжении нескольких лет.

Должно признаться, что в прошлом авторы задачников проявляли больше заботы о реальности условий и осмысленности постановки вопроса в задачах. Фигурирующие в классических задачах вопросы о купцах, смешивающих вина для получения прибыли, курьерах и путешественниках, землекопах и рабочих, мостящих равномерно улицу, от которых сейчас веет даже известной романтичностью — действительно, в своё время отражали реальность.

Насколько реально представляли себе условия задач прежние авторы, свидетельствуют следующие два примера, извлечённые из руководств по алгебре начала XIX в.:

„Шлюпка идёт по Неве и переходит в 48 мин. от Кадетского корпуса до Литейного двора, а оттуда возвращается в 32 мин., причём гребцы в оба конца гребли с одинаковой силой; спрашивается, скольким саженям равняется течение Невы в 1 мин. и сколько сажен шлюпка перейдёт в то же время в стоячей воде?"

Автор даже не считает нужным указать расстояние от Кадетского корпуса до Литейного двора, только в решении используется, как известный факт, что это расстояние „есть 1536 сажен“. Такое „упущение“ в современных задачниках едва ли было бы возможным.

„На вопрос о возрасте одна дама ответила: мой возраст таков, что если его возвысить в квадрат или умножить на 53 и из результата вычесть 696, то получается одно и то же“.

Условие, конечно, не слишком реально, но как к нему относится автор? Решая квадратное уравнение, он замечает: „так как вопрос касается возраста дамы, то из вежливости нужно перед радикалом взять нижний знак“.

Вот несколько задач из сборника 1868 г.:

„В аптеке заказан зубной порошок по следующему рецепту: на 2 драхмы растёртого в порошок красного сандального дерева взять 1 скрупул 10 гранов растолчённых квасцов, 4 драхмы растёртой в порошок лихорадочной корки, одну каплю лимонного и одну каплю гвоздичного масла. По ошибке аптекарский ученик взял 2 капли лимонного масла и 2 скрупула 8 гранов квасцов. Сколько к полученной смеси должно прибавить каждого из означенных веществ, чтобы между ними сохранилось предписанное отношение?“

И здесь постановка вопроса вполне реальна. Правда, с „драхмами“ нам, пожалуй, уже нечего делать, но то, что учащихся не знакомят ни с какими мерами, кроме метрических, это просто нелепо. Между тем в газетах можно встретить ярды, мили и другие названия, и учащимся очень полезно приобрести умение переводить эти меры в метрические, да, кстати, и на практике ощутить преимущества метрической системы мер по сравнению с теми, которые до сих пор применяются в Англии.

Когда автор задач имеет в виду реальность, он не боится деталей:

„Купец в Берлине купил 10000 заячьих мехов, весом в $77^1/_2$ пудов, за 115 рублей каждую тысячу; сверх того, он заплатил таможенных пошлин по 2 руб. 60 коп. с пуда, за укладку и доставку — 6 рублей с 1000 рублей, браковщику — 4 руб. с 1000 рублей, за доставку в Кронштадт — 8 рублей, за пересылку писем — 7 руб. 15 коп., за мелкие расходы — 1%, комиссионеру — 2%, за вексель и гербовую бумагу — $^5/_8\%$. Сколько талеров стоят купцу меха в Берлине, когда $107^1/_2$ талеров равны 100 рублям?“

Вот ещё задача из того же сборника:

„Часы с будильником, которые за 12 час. 35 мин. отстают на 15 мин., должно ставить в 10 час. 40 мин. вечера по выверенным часам так, чтобы будильник действовал в 4 часа 30 мин. утра следующего дня. На сколько минут после цифры X циферблата должно поставить минутную стрелку, если указатель будильника поставлен на 4 часа 30 мин.?“

В других задачах использованы сведения о материалах, необходимых для огрунтовки стены („$5^1/_2$ фунтов мелу плавленого, $^1/_5$ фунта клею и $^2/_5$ штофа молока“), о выходе „железняку, красного и алого кирпича“ из „сырца“, о материалах, применяемых при закладке фундамента („3540 кирпичей на кубическую сажень с прибавкой $^1/_{20}$ на излом“) и т. д.

Не меньше заботы о реальности тематики проявлено и в „Собрании арифметических задач“ Воронова (1876 г.):

„Определить вес сажени однополенных годовалых сосновых дров, зная, что вес свежего соснового дерева составляет 90% веса воды того же объёма; вес годовалой сосны $^9/_{11}$ веса свежей сосны; кубическая сажень воды весит 593 пуда; сажень однополенных дров = $^1/_4$ кубической сажени, а древесная масса (по причине промежутков между поленьями) занимает в среднем $^{14}/_{27}$ пространства занятого дровами".

„В одной деревне Нижегородского уезда большая часть жителей занимается выделкой топоров. Определить среднюю прибыль, выручаемую там с одного топора, полагая, что на него идёт $^1/_{20}$ пуда железа, что на выковку пуда железа расходуется четверть угля и $^1/_5$ пуда стали, что пуд железа покупается по 1 руб. 50 коп., пуд стали — по 3 руб. 20 коп., четвертной куль угля — по 1 руб. 25 коп., а средняя цена топора при оптовой продаже — 40 коп.".

„В Кадниковском уезде Вологодской губернии для добывания смолы крестьяне устраивают заводы об одной или нескольких печах. Вычислить средний ежегодный доход с завода о двух печах, полагая, что в печи 4 куба, из которых каждый даёт в сутки $^3/_4$ пуда смолы из $^1/_{16}$ куб. сажен осмола (сосновых пней), причём на выкурку бочки смолы в 30 пуд. расходуют 2 воза дров, а по местным ценам пуд смолы стоит 1 руб., куб. сажень осмола — 6 руб., воз дров — $12^1/_2$ коп.".

Конечно, и сейчас возможно всю необходимую арифметическую тренировку учащихся производить на задачах, в достаточной степени реальных, с интересным условием и числовыми данными, и с такой постановкой вопроса, при которой само получение ответа не было бы для учащихся эмоционально безразличным. Нас окружают разнообразнейшие и интереснейшие явления действительности. Любопытнейшие взаимоотношения вещей и явлений находят своё яркое отражение в числах. Неужели же нельзя из этого богатейшего материала извлечь числовые данные, доступные детям и интересные им, построить преподавание так, чтобы постепенно открывать перед ними всё новые и новые страницы „мира в числах", разумно используя числовые данные в предлагаемых им задачах?

Первым шагом в этом направлении должно быть составление соответствующего справочника. Здесь необходимо, прежде всего, просмотреть техническую справочную литературу, относящуюся ко всем видам транспорта (со всеми числовыми характеристиками: скорости, грузоподъёмности, размеров, норм потребления горючего, мощности машин, рекордных достижений и т. д.), собрать материал вплоть до фотографий соответствующих объектов, с точным указанием названий, места и времени характерных событий и т. д. К этой работе надо привлечь специалистов, которым не так уж трудно поделиться тем, что может оказаться полезным, интересным и, вместе с тем, доступным школьнику. Не менее богатый материал можно почерпнуть из физической географии, физики, химии, астрономии, из экономической географии (не увлекаться „сухой" цифровой статистикой и тривиальными сопоставлениями, а выбирать интересные, расширяющие числовой кругозор и действующие на воображение данные!), из современной технологии (состав различных часто встречающихся веществ, способы их получения, различные виды топлива, сорта стали и т д.). Актуален обильный материал, характеризующий в самых разнообразных отношениях войны далёкого и недавно прошлого (состав и численность войск, техническая оснащённость, быстрота передвижения, количество затраченных материалов и т. д.). Практический интерес могут представить расчётные задачи сметного характера с данными, отвечающими действительности (подсчёт нужного количества горючего для тракторного парка, для снабжения грузовых машин, количества и стоимости материала и его доставки с оплатой рабочей силы и т. п.). Задачи этого последнего рода должны по возможности точнее отражать реальную обстановку — числовые данные и детали могут в них меняться время от времени и от места к месту.

Таким образом, требования, которые надлежит предъявлять к арифметическим задачам в отношении их фабулы, осмысленности постановки вопроса и подбора числовых данных представляются достаточно определёнными. Путь, следуя которому обычные дефекты можно устранить также достаточно ясен, хотя и предполагает довольно кропотливую и трудоёмкую работу.

Несравненно более сложным, по самой природе своей, представляется вопрос об арифметическом содержании задач, к которому мы сейчас и перейдём.

4. Арифметическое содержание задач

В практике преподавания дело обстоит так. За основу принимается один или несколько сборников задач, из которых преподаватель выбирает те или иные по своему усмотрению. Традиция обеспечивает в известной мере то, что некоторые определённые типы „арифметического рассуждения“ будут как-то представлены, но что это за типы, достаточны ли они или, наоборот, в обычном материале есть лишний балласт, чего именно надо добиваться от учеников, — на всё это не даётся сколько-нибудь определённого ответа. Более или менее „установлено“, что учащихся надо научить решать задачи на „смешение“, на „пропорциональное деление“, на „совместную работу“, на „движение“, на „проценты“, на „тройное правило“. Если спросить о методах решения, то ответ ограничивается обычно тривиальными соображениями об аналитическом и синтетическом методе, о разложении сложной задачи на ряд простых, о способе приведения к единице, о способе пропорций, о задачах на „предположение“ („предположим, что каждого сорта куплено одинаковое количество“). Учеников — в том или ином порядке — знакомят с соответствующими „типами“ задач, причём обучение решению задач сплошь и рядом сводится к рецептуре и „натаскиванию“, к пассивному запоминанию учениками небольшого числа стандартных приёмов решения и узнаванию по тем или иным признакам, какой из них надо применить в том или ином случае. Количество задач, которые ученики решают действительно самостоятельно, с тем напряжением мысли, которое и должно являться источником полезности процесса решения задачи, ничтожно.

В итоге — полная беспомощность и неспособность ориентироваться в самых простейших арифметических ситуациях, при решении чисто практических задач, в дальнейшем, в алгебре — неумение составлять и исследовать уравнения и, вообще, неумение выйти за пределы узких формальных схем, — словом, то, что потом характеризуется, как „отсутствие математического развития“.

Наряду с этим встречаются и перегибы в другую сторону: в арифметику вводятся задачи с искусственным содержанием, которые, по существу, надо решать алгебраическим путём — после чего можно, хотя иногда и не без труда, „состряпать“ и „арифметическое решение“. Если подобного рода задачи не лишены элементов некоторой полезности, то их надо предлагать в порядке соревнования более сильным учащимся в математической стенгазете, в кружке.

Для устранения этих дефектов необходимо прежде всего отдать себе отчёт в том, какие же именно *элементы* (логического рассуждения, активной деятельности воображения, памяти, закреплённых большим количеством упражнений почти механических навыков и т. д.) должны составлять содержание „арифметического" воспитания и тренировки учащихся, в каких комбинациях, в какой последовательности эти элементы должны входить в задачи, какой степени трудности и сложности задачи должны войти в общеобязательный минимум. Ответ на вопрос должен учитывать как непосредственные потребности практики, так и основную задачу общего и математического развития учащихся, а также и подготовку к дальнейшему обучению в средней и высшей школе.

Существующие попытки классифицировать арифметические задачи по их тематике или по их алгебраической структуре — (отметим сравнительно удачные схемы Александрова (1887), Воронова (1939) и Поляка (1944) далеко не достаточны для этой цели. Здесь необходимо поставить вопрос в *полном объёме*, не ограничиваясь одной лишь *алгебраической структурой* задачи, т. е. характеристикой тех действий, которые надо выполнить для её решения. Одни и те же действия могут отвечать совершенно *различным конкретным ситуациям*, и учащийся может придти к заключению, что надо выполнить данное действие по совершенно различным основаниям.

Приведём в качестве примера несколько задач, решающихся действием

$$3-1=2.$$

1. Мне дали три яблока, я съел одно из них. Сколько осталось?

2. Трёхметровым шестом нащупали дно, причём над уровнем воды остался 1 *м*. Какова глубина?

3. Таня сказала: у меня на 3 брата больше, чем сестёр. На сколько в Таниной семье братьев больше, чем сестёр?

4. Час назад поезд должен был прибыть на станцию. Но он опаздывает на 3 часа. Когда он прибудет?

5. Сколько распилов надо сделать, чтобы распилить бревно на 3 части?

6. Я прошёл от первого столба до третьего. Расстояние между соседними столбами — 1 *км*. Сколько километров я прошёл?

7. Кирпич вместе с лопатой весит столько же, сколько 3 кирпича. Кирпич весит 1 *кг*. Сколько весит лопата?

8. Средняя арифметическая двух чисел равна 3, а их полуразность равна 1. Какова величина большего числа?

9. От нас до станции 3 *км*, а до Минухиных по той же дороге — 1 *км*. Сколько от станции до Минухиных?

10. Через сто лет мы будем праздновать трёхсотлетний юбилей нашего университета. Сколько сотен лет назад он был основан?

11. За 3 часа я проплываю 3 *км* в стоячей воде, а бревно вниз по течению — 1 *км*. Сколько километров я сделаю против течения за то же время?

12. Второго декабря было воскресенье. Сколько рабочих дней декабря предшествовало первому вторнику этого месяца?

13. Я иду со скоростью 3 *км* в час; мой приятель впереди меня ведёт свой мотоцикл со скоростью 1 *км* в час. Насколько сокращается расстояние между нами за один час?

14. Три одинаковых артели землекопов вырыли за неделю канаву длиной в 3 *км*. Сколько надо таких артелей, чтобы вырыть за то же время канаву, которая на 1 *км* короче?

15. Москва и Горький находятся в смежных часовых зонах. Который час в Москве, когда в Горьком — три часа пополудни?

16. При стрельбе по самолёту из неподвижного орудия надо было бы вынести прицел вперёд на 3 корпуса. Но орудие перемещается в направлении движения самолёта с втрое меньшей скоростью. На сколько корпусов надо вынести прицел вперёд?

17. Мой брат втрое старше меня. Во сколько раз ему было больше лет, чем мне сейчас, в тот год, когда я родился?

18. Если к числу прибавить единицу, то оно разделится на 3. Каков остаток от деления этого числа на 3?

19. Железнодорожный состав длиной в 1 *км* прошёл бы мимо столба за 1 мин., а терез туннель при той же скорости — за 3 мин. Какова длина туннеля?

20. По двухколейному трамвайному маршруту курсируют с интервалами в 3 *км* три вагона. Один из них сейчас находится на расстоянии 1 *км* от другого. Каково расстояние третьего вагона от ближайшего к нему?

Эти примеры наглядно показывают, что обучение арифметике включает в качестве одного из *основных* элементов воспитание *умения ориентироваться в различных по своей конкретной природе взаимоотношениях между величинами*. Самый метод „арифметического решения задачи" отличается от алгебраических приёмов в первую очередь тем, что на всех стадиях рассуждения все сопоставления и производимые действия *допускают совершенно наглядное и конкретное, осмысленное в области тех величин, о которых идёт речь, истолкование*.

Этим в известной мере определяется и отличие задач, для которых естественно потребовать арифметического решения, от таких, по существу алгебраических задач, для которых это требование носит искусственный характер. Арифметическое решение задач последнего типа может быть рассматриваемо лишь как более высокая ступень тренировки, выходящая за рамки общеобязательного минимума. Во многих задачах зависимости между искомыми и данными таковы, что обычный безыскусственный ход рассуждения, естественно, приводит к соответствующим алгебраическим *уравнениям*. Между тем арифметический путь решения потребовал бы производства трудно удерживаемых в памяти, алгебраических по своей природе, операций над неизвестными величинами.

Это имеет, например, место при решении такой задачи: „Если продать 20 коров, то заготовленного сена хватит на 10 дней дольше, если же прикупить 30, то запас сена исчерпается 10 днями раньше. Сколько было коров и на сколько дней заготовлено сено?"

Отчётливых представлений о соотношениях между фигурирующими здесь величинами достаточно для того, чтобы без особого труда облечь условия задачи в форму уравнений. Но требовать, чтобы учащийся пришёл независимо от этого к формуле

$$(200+300):10$$

для определения числа дней, значит — стремиться достигнуть такой изощрённости в оперировании неизвестными величинами, которая практически не нужна, а в массовом масштабе недостижима.

Несколько более приемлема задача:

„Куплено на одинаковую сумму два сорта товара, первого сорта вдвое меньше, чем второго. Их смешали и продали половину смеси по цене высшего, остальное — по цене низшего сорта. Сколько процентов прибыли или убытка получено при продаже?"

Это, по существу, типичная задача, решающаяся введением произвольных единиц меры. Однако и при этом условии необходимое для решения оперирование неизвестными величинами носит здесь отчётливо выраженный алгебраический характер.

Наряду с этим часто встречаются задачи, в которых, наоборот, арифметический путь решения значительно проще алгебраического. Это может зависить от двух причин. В одних случаях переход от известного к неизвестному настолько прост, что составление уравнений (переход от неизвестного к известному) внесло бы ненужную громоздкость, замедляющую процесс решения. Такова, например, задача, тематика которой, — несмотря на общеизвестное значение изучения игр (в том числе и азартных) в истории математики, — может оказаться препятствием к её использованию в практике преподавания:

„A, B, C и D сыграли четыре партии, причём проигрывавший обязан был удваивать суммы, принадлежавшие остальным в начале партии. Проиграли последовательно A, B, C и D и в результате у всех четырёх оказалось по 48 руб. Сколько было у каждого из них в начале?"

Вторая — классическая задача, интересная парадоксальностью формулировки условия. Этапы „синтетического" решения развёртываются в ней, как и в предыдущей задаче, в порядке, противоположном ходу описанных событий.

„Торговка яйцами продала первому покупателю половину всего числа имевшихся в её корзине яиц и ещё пол-яйца; второму покупателю — половину остатка и ещё пол-яйца, третьему — половину остатка и ещё пол-яйца, после чего у неё ничего не осталось. Сколько яиц было в корзине в начале?"

В других случаях составление уравнения требует проведения такого рассуждения, которое само по себе достаточно для достижения цели. Это — арифметические задачи в полном смысле этого слова: алгебраическое их решение не легче, а труднее и обычно сопряжено с введением лишних неизвестных, которые потом приходится исключать и т. п. К их числу принадлежат большинство из задач, решающихся действием $3-1=2$, приведённых выше. Так, если, например, в задаче № 3 обозначить число братьев через x, число сестёр через y, то уравнение будет $x-(y-1)=3$, но если мы уже догадались, что надо написать $y-1$ (сестра сама себя не считала), то и так ясно, что братьев не на 3, а только на 2 больше, чем сестёр. Приведём ещё несколько примеров.

„Я грёб вверх по течению и, проезжая под мостом, потерял шляпу. Через 10 мин. я это заметил и, повернув и гребя с той же силой, нагнал шляпу в 1 *км* ниже моста. Какова скорость течения реки?"

„К моему приезду на станцию за мной обычно высылали машину. Приехав однажды на час раньше, я пошёл пешком и, встретив посланную за мной машину, прибыл с ней на место на 20 мин. раньше обычного срока. Во сколько раз машина идёт быстрее, чем я пешком?"

Это — очень хорошие арифметические задачи, но, конечно, на вхождение в „обязательный минимум" они претендовать не могут.

Но, как было отмечено выше, большое количество сравнительно простых задач принадлежит к той же категории *специфически арифметических задач*: позволительно думать, что такой характер задач в большинстве случаев свидетельствует об их высокой методической ценности — их специфичность, ведь, как раз и основана на том, что они требуют *ясного представления о соответствующей конкретной ситуации*, а не действий по заученным формальным образцам.

Вот ещё пример арифметической задачи, для решения которой не надо производить никаких „действий":

„Из стакана с красным вином перелили в стакан, содержащий такое же количество белого, одну ложку. Перемешав, ложку смеси перелили обратно в первый стакан и повторили те же действия снова. Спрашивается, больше ли в итоге концентрация белого вина в красном в первом стакане или красного в белом — во втором?"

Для решения задачи достаточно задать себе вопрос: куда девалось то красное вино, которое вытеснено белым из первого стакана?

Подчеркнём попутно, что часто встречающийся при решении арифметических задач приём „предположения" (в классической формулировке: „предположим, что и того и другого было куплено одинаковое количество" или „предположим, что все вагоны-трёхосные", или „предположим, что в первый раз было куплено вдвое, а во второй раз втрое больше") мы причисляем к числу *закономерных приёмов арифметического решения задач*, хотя в последней, например, из упомянутых формулировок, речь идёт — с точки зрения алгебраической — о решении системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Действительно, если разобраться в логической сущности этого приёма и в *психологических предпосылках его применения* в конкретных случаях, то мы увидим, что здесь речь идёт, по существу, об одном из наиболее часто применяемых законов Бэконовской индуктивной логики в его элементарном количественном аспекте, притом тесно связанном с представлениями *о причинной обусловленности* замеченных особенностей числовых данных задач. В простейших случаях приводящий к указанным „предположениям" процесс анализа условий задачи как раз и начинается с вопроса „почему?". Почему такое расхождение в числовых данных, почему это вот больше и именно на столько? После того, как в определённых конкретных случаях учащийся научился в итоге извлекать нужный количественный результат, совершенно естественным является стремление в более сложной ситуации, в случае совместного влияния нескольких факторов, изолировать действие одного из них; сравнить положение при наличии и при отсутствии этого фактора, компенсировать, исключить временно влияние остальных и, таким образом, вернувшись к знакомой уже, более простой ситуации, получить нужный числовой результат.

Это не алгебра, не приведение подобных членов и не „перенесение из одной части в другую с обратным знаком". Это как раз та логика, связанная с воображаемыми, но имеющими в области изучаемых величин вполне реальное значение операциями, развитие и совершенствование которой входит в прямые задачи арифметики.

Приведённое выше разграничение между арифметическими и алгебраическими по своему характеру задачами, как нам кажется, и в теоретическом и в практическом отношении отвечает сущности дела, — вряд ли здесь можно в общем случае сделать больше: границы между задачами обоих типов по природе своей как бы несколько размытые, так как они зависят от количественных признаков, в оценке которых можно расходиться, подобно тому, как нельзя провести грань между „несколькими зёрнами“ и „кучей зёрен“.

Аналогичное замечание относится и к характеристике арифметических задач по степени их *сложности*. Под этим мы будем понимать не трудность сопоставления данных, о которой шла речь выше, а наличие сравнительно громоздкого условия, требующего от решающего систематичности и внимательности в расчленении задачи на более простые и в соединении элементов рассуждения, каждый из которых учащемуся уже знаком, в единое целое. Не подлежит сомнению, что такие задачи (конечно, с естественным условием, а не в форме пресловутых „составных“ задач, основанных на чисто внешнем и потому комическом соединении разнородных элементов) нужны именно, как таковые, ибо развитие соответствующих *навыков ориентировки в сложной ситуации* составляет один из существенных элементов воспитания, имеющий немаловажное практическое значение. Кроме того, такие задачи могут служить контролем того, насколько твёрдо усвоены учащимися *элементы хода рассуждения*, так как здесь эти элементы играют роль *инструментов*, которые учащийся без колебания должен *выбрать* и *применить* в нужном случае.

Это умение должно в результате успешного преподавания распространяться и на такие случаи, в которых ситуация не принадлежит к числу подробно рассмотренных раньше и закреплённых серией однородных упражнений. Поэтому необходимо тактично, и вместе с тем повседневно (я не имею в виду моментов контроля), предлагать учащимся и такие задачи, которые требуют *ориентировки в новой, необычной для них ситуации, самостоятельного напряжения мысли*. Для развития этого умения надо вообще избегать догматизма и рецептуры при решении задач, а стараться так тренировать мышление и воображение учащихся, чтобы ход решения всегда возникал у них естественным путём. Задачи, предлагаемые для самостоятельной ориентировки (а не для закрепления разученного приёма) должны, поэтому, быть по силам среднему учащемуся, т. е. основываться на таких элементах логики и конкретных представлений, наличие которых можно предполагать у учащихся на данной стадии их развития.

Мы остановились на этих тривиальных методических соображениях потому, что здесь речь идёт об одном из наиболее существенных дефектов практики преподавания. Задачу — научить учеников владеть математическим инструментарием как в смысле умения производить элементарные операции, так и в смысле умения *выбирать нужный инструмент в нужном случае*, часто подменяют более легко достижимой целью, — научить учащихся применять эти инструменты в определённой, регламентированной, иногда довольно сложной последовательности, по определённым установленным правилам. Если бы так готовить к будущей деятельности, скажем, слесаря, то ему нельзя было бы доверить даже простейшего ремонта, простейшей починки, ибо всякая вещь портится по своему и никаких правил порядка действий здесь установить нельзя.

Точно так же нельзя выучиться плавать, постоянно хватаясь за стенки бассейна или пользуясь плавательным поясом, — надо уметь самостоятельно держаться на воде, и в этом вся суть дела.

Приведём несколько задач, которые нам представляются полезными с этой точки зрения.

„В трёх палатках у продавщиц было поровну мандаринов. Когда каждая продала по 600 мандаринов, то у всех вместе осталось их столько, сколько было первоначально у каждой. Сколько же это?“

„Мне теперь втрое больше лет, чем было тогда, когда мой брат был в моём возрасте. Когда мне будет столько лет, сколько теперь моему брату, то нам вместе будет 96 лет. Сколько сейчас каждому?“.

Арифметическое решение этой задачи требует отчётливых представлений о процессе совместного роста двух величин, о которых идёт речь, и об „этапах“ этого роста. Вспомогательным средством может служить графическое линейное отображение условий задачи.

„Проезжая мимо станции, я заметил стоящий на станции товарный поезд из 31 вагона и услышал разговор смазчика со сцепщиком. Первый сказал: „105 осей всего пришлось проверить“. Второй заметил, что в составе много четырехосных вагонов — втрое больше, чем двухосных, остальные трехосные. На следующем перегоне я захотел, от нечего делать, подсчитать, сколько каких вагонов было в этом составе. Как это сделать?“

Арифметическое решение — проще алгебраического и требует отчётливого представления о том, что двухосные и четырехосные входят в состав (в количественном отношении) определенными группами (по 4 вагона). Воображаемая „замена“ всех вагонов трехосными — обычный и хорошо знакомый учащимся приём. Задача допускает и теоретико-числовое (не однозначное) решение в случае, если число вагонов неизвестно.

„В двух библиотеках 50 000 томов. За год количество книг первой увеличилось на 5%, а второй — на 6%, так что общее количество книг увеличилось на 2800. Сколько книг было в каждой библиотеке первоначально?“

Полезная задача, наводящая на представление о „весе“, с которым надо учитывать процентные приращения, сливаемые в одно целое.

„Чтобы проплыть некоторое расстояние по течению на лодке требуется времени втрое меньше, чем против течения. Во сколько раз скорость движения лодки больше скорости течения?“

Надо догадаться перейти от времени к расстояниям.

Аналогичная задача:

„Пароход идёт вниз по течению 2 часа, вверх — 3 часа. Сколько времени между теми же двумя пунктами вниз по течению проплывёт бревно?“

Ответы бывают самые фантастические — явный признак применения не подходящей „рецептуры“.

„Поезд проходит 15 сек. мимо телеграфного столба и 45 сек. проходит туннель длиной в 450 *м*. При встрече с поездом, длина которого 300 *м*, оба поезда идут один мимо другого в течение 21 сек. Найти скорость второго поезда“.

Задача Л. Н. Толстого:

„Косцы должны выкосить два луга. Начав с утра косить большой луг, они после полудня разделились: одна половина осталась на первом и к вечеру его докосила, а другая — перешла косить на второй луг, площадью вдвое меньше первого. Сколько было косцов, если известно, что в течение следующего дня оставшуюся часть работы выполнил один косец?“

Это — одна из наиболее характерных задач рассматриваемой категории. Успех в решении зависит от того, насколько у решающего развито воображение и умение сопоставлять количественные отношения.

В заключение сделаем ещё одно замечание, касающееся использования материала задач на уроках арифметики (а также и алгебры).

Конечно, при начальном ознакомлении с каким-либо приёмом рассуждения или с какой-нибудь новой для учащихся областью соотношений можно рассматривать каждую задачу с определённой постановкой вопроса, как законченный пример, и стремиться — в понятных целях — к возможному качественному многообразию примеров при одном и том же арифметическом скелете рассуждения: на соответствующие элементы арифметического обобщения и абстракции следует даже, в надлежащее время, обратить внимание учащихся. Но когда ученики владеют уже всеми основными приёмами рассуждения, достаточными для решения задач с данной тематикой, полезно использовать материал задач иначе, прибегая иногда к методу, который можно было бы назвать *монографическим*. Мы имеем в виду *варьирование постановки вопроса при изучении одной и той же зависимости между величинами*. Такое варьирование помогает учащимся объединить все относящиеся к данному объекту представления в одно целое, а преподавателю даёт возможность, во-первых, активизировать работу класса и, во-вторых, проверить и уточнить всю совокупность относящихся к данному вопросу элементарных арифметических навыков; очень полезно и попутное сопоставление различных приёмов решения одного и того же вопроса.

Пусть, например, предложено решить задачу.

„Смесь двух одинаковых объёмов воды и спирта занимает меньший объём, чем сумма объёмов обоих смешиваемых веществ. Литр такой смеси весит 936 *г*, между тем как литр чистого спирта весит 729 *г*, а литр воды — 1 *кг*. Сколько нужно взять воды и спирта, чтобы получить литр смеси?“

Здесь уместно рассмотреть предварительно или в связи с решением задачи, скажем, такие вопросы. Пусть при сокращении объёма какого-либо вещества единица объёма вместо 1 *кг* содержит 1,25 *кг*. Каково в процентах и в простых дробях увеличение веса единицы объёма? Уменьшение объёма в процентах к первоначальному? Как эти два показателя связаны между собой? Что надо знать, какие эксперименты произвести, какие числовые данные получить, чтобы их найти? Какие получатся процентные показатели, если говорить об обратном переходе (увеличении объёма и уменьшении массы)?

Как узнать, сколько нужно взять (по объёму, по массе) вещества в исходном состоянии, чтобы получить данное его количество (по объёму, по массе) в новом состоянии?

Рассмотреть эти задачи для случая перехода воды в лёд и обратно, подобрать другие конкретные данные аналогичного типа (изменение объёма легкоплавких тел, расширение твёрдых тел при нагревании и т. п.). Если это отвечает моменту, то параллельно следует рассмотреть и соответствующие пропорции, заставив учащихся отчётливо формулировать, о какой пропорциональности здесь может идти речь. С этим, если обстоятельства позволяют, можно связать и вопрос о взаимоотношении процентов „со-ста“, „на-сто“ и „во-сто“. Можно предложить дополнительно такие задачи: „Молоко вздорожало на 20%, а через неделю подешевело на 20%: дешевле или дороже оно стало? В другом городе, при той же начальной цене молоко сначала упало в цене на 20%, а потом вздорожало на 20%. Каков результат по сравнению с ценой в первом городе?“ Здесь можно проверить умение учащихся ассоциировать проценты с простыми дробями, возрастание какой-либо величины на p %, с умножением на $1+\frac{p}{100}$ и т. д., т. е. наличие у них чрезвычайно существенных и часто встречающихся в практических приложениях представлений. Для пояснения можно использовать здесь схематические диаграммы.

Полезно предложить учащимся составить небольшие справочные таблицы (для различных количеств льда, воды и т. п.), иллюстрировать их графически и т. п.

5. Проблема методологической систематизации материала задач

Приведённые в предыдущем разделе примеры различных задач показывают, что сравнительно нетрудно выделить в каждой задаче те элементы, которые определяют её дидактическую ценность. При этом, как особенно ясно показывает серия задач, решающихся действием $3-2=1$, основное внимание должно быть направлено не столько на „алгебраическую структуру" задачи, сколько на её конкретную оболочку, на то, в области каких величин и каким образом осуществлена данная „арифметическая ситуация". Именно от этого, существенно зависит характер и степень отчётливости представлений учащихся, определяющие ход рассуждения при решении задачи.

Возвращаясь к формулированной в начале раздела 4 (стр. 14) основной проблеме *выделения* указанных элементов, мы можем в качестве необходимой предварительной работы указать на соответственное исследование материала уже составленных и испытанных сборников арифметических задач, примерно, в том же направлении, в каком мы вели изложение в разделе 4. Но такое опытное изучение фактического положения вещей, хотя и может служить отправной точкой для дальнейших построений, само по себе недостаточно, — уже по одному тому, что на этом пути нельзя выйти за рамки традиционного круга вопросов и согласовать материал задач с возросшими запросами действительности. Необходимо, следовательно, предпринять встречный анализ на основе общих методологических соображений. Этот анализ следует вести так, чтобы a priori предусмотреть различные возможные и необходимые элементы арифметических задач, хотя бы только с точки зрения того, что можно назвать *арифметической схемой* рассуждения.

Этот анализ придётся затем дополнить на основе того перечня часто встречающихся конкретных величин, о котором шла речь в разделе 3 и рассмотреть все соответствующие варианты подходящих „арифметических схем".

При таком подходе к вопросу область искомых построений фиксируется тем определением содержания и объёма учебного материала и той характеристикой основных целей преподавания арифметики, которое будет положено в основу. Для этого мы считаем достаточным следующие положения.

1. Основными целями преподавания арифметики в средней школе являются:

а) создание у учащихся *отчётливых представлений* и одновременно закрепление *твёрдых технических навыков*, относящихся к области *рациональных операций над рациональными числами*;

б) ознакомление учащихся с соответствующими *элементарными функциональными зависимостями между величинами* и основанными на указанных в п. „а" представлениях и навыках методами решения относящихся сюда вопросов. Последнее должно быть осуществлено в качественном и количественном отношении так, чтобы дать достаточную подготовку для будущей специализации в процессе практической деятельности или дальнейшего обучения.

Присоединяя сюда ещё и характеристику изучаемых в арифметике функциональных зависимостей между величинами как таких, которые охватываются общим понятием линейной зависимости и простейшими свойствами обратной пропорциональной зависимости между величинами, и учитывая то, что было сказано о характерных особенностях арифметического метода решения задач, мы сможем сказать, что:

2. Основными целями решения „текстовых" арифметических задач в процессе обучения арифметики являются (наряду с общими задачами в 1, „а" и „б"):

а) создание и закрепление *отчётливых представлений, относящихся к конкретным случаям охарактеризованных только что зависимостей между величинами* (из числа наиболее доступных пониманию учащихся и практически важных);

б) воспитание умения *ориентироваться* в разнообразных возможных соотношениях между данными и искомыми величинами на основе *естественного хода логического рассуждения*, опирающегося на *диктуемые здравым смыслом соображения о взаимной обусловленности* соответствующих числовых данных;

в) создание и закрепление навыков *сопоставления и оперирования* с величинами, упомянутыми в п. „а", основанных на *воображаемых, но в принципе возможных в данной конкретной ситуации действиях* над ними.

Возникает вопрос о порядке проведения основанного на этих принципах методологического построения, о котором идёт речь, — составления перечня и систематизации *возможных арифметических схем и их конкретных осуществлений*, т. е. *элементов*, из которых состоят все арифметические конструкции, отвечающие указанным выше целям. Мы полагаем, что для достижения возможно большей полноты и общности эту работу надо вести не в порядке обычного расположения учебного материала, а в порядке, естественном с точки зрения более абстрактной классификации изучаемых в арифметике взаимоотношений, с одновременным учётом *психологических моментов*, определяющих связь абстрактного с конкретным и характер представлений учащихся.

Решение вопросов, касающихся трактовки выделенных указанным путём элементов, расположения материала, производства подготовительной работы по ознакомлению учащихся с новыми для них приёмами рассуждения и т. д., должно будет явиться уже последней частью такого рода работы, непосредственно предшествующей фактическому составлению соответственного собрания задач.

Насколько нам известно, такая работа ни в одном из указанных направлений никогда не была проделана; между тем, намеченный здесь порядок её проведения, несомненно, обеспечивает реальную её осуществимость. Более того, вряд ли можно отрицать необходимость положить в основу составления сборников задач по арифметике, да и не только по арифметике, именно такого рода предварительное исследование. Конечно, провести его можно по-разному, и результаты его не смогут однозначно предопределить ни объём материала, ни детали его оформления, оставляя во всех отношениях ещё достаточный простор для творческой методической работы. Останутся неизбежно и спорные вопросы. Но основа для суждения о роли тех или иных элементов, об их положении в курсе арифметики этим заложена, и можно будет подвергать обсуждению и выносить решения по определённым и отчётливо поставленным вопросам на основе соответственной мотивировки. До сих пор неопределённость, хаотичность, несистематизированная пестрота материала делали практически невозможным ведение сколько-нибудь плодотворного обсуждения важнейших методических проблем в этой области.

6. Таблица простейших элементов, входящих в состав арифметических задач

Изложение окончательных результатов только что охарактеризованного и по самой сути дела довольно кропотливого методологического анализа не входит в задачи настоящей статьи. Мы попытаемся всё же несколько конкретизировать сказанное в разделе 5 для того, чтобы дать здесь более ясное представление о том, какого характера анализ и систематизация имеются в виду.

Так как систематизация материала в основном зависит от двух факторов — арифметической „схемы" и её осуществления в области конкретных взаимоотношений между величинами, то расположение результатов должно в общих чертах отвечать „таблице с двойным входом". Систематизация элементов, скажем, по вертикали, по признаку изменяющегося (вообще говоря усложняющегося) арифметического содержания должна снабжаться — по горизонтали — перечислением и разбором различных конкретных интерпретаций и соответствующим анализом психологических моментов. Помимо этого, необходимо дать и монографическое сопоставление различных задач по вертикали, т. е. сводку тех основных постановок вопроса и приёмов рассуждения, которые относятся к данному конкретному материалу.

Систематизация по вертикали представляется нам в следующем виде (мы не ставим требования, чтобы отдельные пункты не перекрывались друг с другом):

I. Соотношения, связанные с одной скалярной величиной:

1) отношения равенства и неравенства;

2) аддитивные величины; разностное сравнение двух значений величины;

3) увеличение и уменьшение значения величины с помощью действий первой ступени (сложение и вычитание);

4) кратное изменение значения величины: операция умножения;

5) деление на равные части;

6) соотношение между целым и частями целого;

7) кратное сравнение двух значений величины; деление по содержанию;

8) переход от одного значения величины к другому путём деления на равные части и объединения таких частей; общая мера;

9) измерение величин. Единицы меры. Переход от одной системы измерения к другой;

10) понятие отношения двух значений величины. Выражение отношения простой и десятичной дробью и в процентах. Определение отношения по данным значениям величины и одного из значений при данном отношении (части целого и целого по части);

11) сопоставление разностного и кратного сравнения значений величины и совместное их применение. Приращение, выраженное в долях исходного количества и в процентах; его связь с отношением исходного и окончательного значения величины;

12) характеристика частей целого с помощью их отношений

к целому и взаимных отношений, процентные отношения. Круговые диаграммы. Средняя арифметическая.

II. Соотношения, связанные с совместным рассмотрением нескольких величин:

1) прямая пропорциональность. Параллелизм аддитивных и кратных изменений. „Приведение к единице";

2) прямая пропорциональность. Равенство кратных отношений значений двух пропорциональных величин. Пропорции;

3) прямая пропорциональность. Постоянство отношения соответственных значений величин. Коэфициент пропорциональности. Характеристика интенсивности равномерного изменения величины. Удельные характеристики однородных величин. Пропорциональные отрезки;

4) сопоставление аддитивных изменений и кратного сравнения для случаев пропорциональных величин, соответственные свойства пропорций;

5) линейная зависимость. Начальное значение и коэфициент пропорциональности, как скорость изменения или удельная характеристика. Исчерпание значения величины путём равномерного изменения;

6) направленные величины с двусторонним изменением. Начальная точка отсчёта. Аддитивные изменения разных знаков;

7) совместное рассмотрение нескольких величин, пропорциональных третьей. Взаимоотношения целого и частей при одном и том же их составе. Сопоставление скоростей изменения и удельных характеристик. Отношение подобия. Выбор произвольной единицы измерения; сопоставление разностных и кратных отношений;

8) совместное рассмотрение нескольких линейных зависимостей. Сравнение интенсивностей роста. Разностное сравнение двух линейных функций. Типовые задачи, решаемые на основе анализа причинной обусловленности расхождения числовых данных;

9) обратно пропорциональная зависимость между величинами. Измерение в долях целого и с помощью произвольной единицы меры. Прямое и обратное отношения. Применение пропорций. Сложные (составные) единицы. Аддитивные изменения и учёт разностных данных в различных конкретных случаях;

10) сочетание прямой и обратной пропорциональной зависимости нескольких величин;

11) более сложные зависимости. Измерение площадей и объёмов. Нелинейные изменения величин. Таблицы. Графики. Линейная интерполяция. Возрастание и убывание функций. Неограниченное возрастание и убывание;

12) элемент „сложности" в структуре задач. Задачи комплексного типа, их общая классификация и характеристика;

13) элемент „новизны" в структуре задач. Задачи с отличной от обычной постановкой вопроса или методом решения;

14) методологические элементы в решении задач. Характерные образцы синтетического метода рассуждения. Задачи с недостаточным и избыточным количеством данных. Задачи алгебраического содержания; сопоставление алгебраического и арифметического методов решения.

Не приходится и говорить, что этот перечень не является исчерпывающим. Каждый пункт отвечает целому ряду известных типов арифметических задач и подлежит соответственному дальнейшему расчленению как по вертикали, так и по горизонтали.

Так, например, в пункте I, 1 (отношения равенства и неравенства), должны найти место вопросы, относящиеся к конкретной интерпретации равенства и неравенства двух дробей (задачи сравнения дробей, расположения их в порядке возрастания), связанные с этим вопросы о равенстве простой и десятичной дробей (например, разъяснение таких соотношений, как $0{,}999\ldots=1$ и т. п.), приёмы записи различных (малых и больших) чисел с помощью выделения степеней 10, имеющие целью облегчить сопоставление различных числовых данных друг с другом, применение для той же цели процентов и диаграмм, далее изменение (увеличение и уменьшение) дроби при различных изменениях (в том числе и аддитивных) её числителя и знаменателя, упражнения, закрепляющие в сознании учащихся равенства $a:a=1$ и $a-a=0$ и т. п.

Аналогично, пункт I, 11 обнимает, как это сразу ясно, значительное число арифметических задач. Это связано с психологическими моментами. Как показывает практика, как раз одновременный учёт данных разностного и кратного сравнения (больше или меньше „на" и при этом составляет такую-то часть „от" и т. п.) требует большого количества упражнений и усваивается учащимся далеко не сразу.

Задачи на „пропорциональное деление" могут в простейших случаях встретиться уже в п. I,6 и I, 12, но также и в п. II, 7, 9 и 10. Различие здесь связано в известной мере и с моментом прохождения — один и тот же вопрос освещается по-разному и имеющиеся в виду навыки различны. Типовые задачи на движение (путешественники, курьеры) отвечают п. II, 5 и 6 (но и многим другим), задачи на смешение — главным образом п. II, 8, задачи на бассейны и совместную работу п. II, 9, 10.

Во всех случаях имеется в виду — и в этом суть дела — достаточно точная и подробная характеристика того, *что должно быть достигнуто в отношении развития представлений и умственных навыков учащихся в связи с данным пунктом и в применении к какому конкретному материалу.*

Так, например, по второй части п. I, 11 можно было бы формулировать требование, чтобы учащийся мог свободно ориентироваться в вопросах, указанных в связи с разбором задачи на смешение воды и спирта в конце раздела 4, где приведены и требования, отвечающие п. II, 9.

Перечислить (по горизонтали) те конкретные величины, которые надлежит принять во внимание при наличии справочника, о котором шла речь в разделе 3 — не составит труда.

Отметим попутно, что мы стоим за то, чтобы включить в материал арифметических задач простейшие приложения отрицательных чисел и геометрические факты, относящиеся к пропорциональности отрезков и приводящие к табулированным коэфициентам пропорциональности. Точно так же, не отпугивая учащихся тяжеловесным техническим аппаратом традиционного изложения начальных глав элементарной алгебры, следует, на наш взгляд, покончить с ни на чём не основанной боязнью вводить буквенные обозначения при решении арифметических задач и, соответственно с этим, уже на уроках арифметики знакомить учащихся с *простейшими уравнениями*, решая их „по соображению" на основе известных учащимся арифметических положений. Это кажется нам наиболее простым и целесообразным решением дилеммы, связанной с последним вопросом п. II, 14, затронутым нами уже в разделе 4. Мы придаём также большое значение учёту потребностей смежных дисциплин, физики и химии в первую очередь (пп. I, 9, 10, 11, 12; II, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10. 11). Недостаточная разработка соответственного материала арифметических упражнений является на наш взгляд, не только крупнейшим дефектом с точки зрения подготовки учащихся средней школы к практической деятельности, но и влечёт за собой тяжёлые последствия в отношении прохождения математических дисциплин как в средней, так и в высшей школе.

По нашему мнению, изложенное достаточно ясно характеризует то, что мы имеем в виду, говоря о выделении и систематизации простейших элементов, определяющих содержание арифметических задач и подлежащих в настоящее время включению в „арифметический минимум".

Резюмируем вкратце выдвигаемые нами основные принципы отбора, составления и расположения арифметических задач.

Арифметическое содержание задач должно фиксироваться на основе детального и исчерпывающего анализа тех элементов *мышления и воображения* учащихся, развитие которых составляет цель обучения арифметике. Эти элементы определяются, с одной стороны, *функциональным характером и конкретной природой* изучаемых зависимостей между величинами и, с другой стороны, требованием *естественности хода логического рассуждения* и *конкретной интерпретируемости* соответствующих сопоставлений и действий.

Постановка вопросов в задачах должна быть, как правило, *реальной*, получение ответа *интересным* для учащихся, конкретное оформление (фабула) и подбор числовых данных должны иметь либо *познавательную ценность*, либо *эмоциональную окраску* и расширять *числовой кругозор* учащихся. Решение задач должно воспитывать в учащихся *отчётливые представления* в области изучаемых соотношений, умение применять *нужные математические средства в нужных случаях и ориентироваться* как в часто встречающихся простых, так и в более *сложных* и *новых* для решающего, но доступных ему, арифметических ситуациях.

PRINCIPLES OF SELECTING AND COMPOSING ARITHMETICAL PROBLEMS

BY PROF. I. V. ARNOLD

Summary

The structure and subject-matter of arithmetical problems in the books of exercises used at school seems to a great extent casual and not meeting natural requirements.

Questions of principle in this connection are not being treated with sufficient penetration in methodical literature.

In order to eliminate these drawbacks we consider it necessary in the first line to fix distinctly the aims of teaching arithmetics. This will require the making up of a sufficiently detailed and complete list of the elements of arithmetical reasoning and imagination of the school children that are to be developed, in order to base the selection and composing of arithmetical problems on these elements. These elements, as well as the corresponding combinations in arithmetical problems, are characterized not only by the abstract feature of their „algebraic structure", but are essentially defined by their specific qualitative character in various interpretations, upon which to a great extent depends the process that takes place in the minds of school-children while solving a problem.

The aggregate of these elements is defined, on the one hand, by the peculiarities of functional relations studied in arithmetics (direct and inverse proportion, linear relation between variables) and on the other, by the requirement that the process of reasoning should follow natural ways of thinking, and the corresponding comparisons and manipulations should be capable of concrete interpretation. This is the chief limiting factor in making a distinction between the arithmetical problems and those requiring the application of algebraic methods.

It is by the methodical task of teaching pupils to master these elements in their various combinations that the arithmetical content of the ploblems, their disposition, the degree of complexity and so on should be determined.

As to the subject-matter of problems and the selection of numerical facts it is absolutely indispensable to give up the unhealthy tradition of regarding these as of minor importance, this attitude leading to harmful consequences: the topics become monotonous and the putting of question in the problems artificial. It is essential that the putting of questions in the problems, as a rule, should be concrete, the solution interesting for the pupils, the subject-matter of the problem and the numerical data either of educational value, or possess an emotional colouring and broaden the numerical scope of the pupils.

The preliminary stage of work on composing problems on these lines should be the making up of a sufficiently detailed and complete reference book of numerical facts and of concrete knowledge, which might be made use of in composing problems and which would contain material practically useful and interesting for pupils.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 6 · 1946

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОПЕДЕВТИКА В СРЕДНИХ КЛАССАХ ШКОЛЫ

Проф. В. Л. ГОНЧАРОВ
член-корреспондент АПН РСФСР

1. Описание одного эксперимента

В апреле 1945 г. в VIII классе одной из женских школ Москвы без всякой предварительной подготовки мною была предложена письменная работа (один урок) следующего содержания:

Вычислить значение величины

$$y=\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1+x^2}}$$

при $x=\ldots$ *В результате достаточно указать три знака после запятой.*

Числовые значения x, написанные на билетиках, были розданы учащимся. Они были все различные, в виде десятичных дробей с тремя знаками после запятой, и были разбросаны более или менее равномерно в промежутке, определяемом неравенством

$$0{,}5<x<1{,}5.$$

Помимо написанных на доске текста и числового значения x на билетике, никаких указаний дано не было. Да и спрашивать было не о чем.

Класс погрузился в вычисления.

Тем временем я проделал следующее.

Рассчитав заранее, что при значениях x, взятых из названного выше промежутка, значения y приходятся на весьма маленький промежуток $1{,}180<y<1{,}225$, я за 8—10 минут нарисовал на доске вырезку из координатной сетки, соответствующую указанным промежуткам: при этом, желая использовать всю доску (размерами, примерно, 4 *м* $\times$ 1 *м*), взял масштабы 1) по горизонтали (направление x) 0,05 — около 20 *см*, 2) по вертикали (направление y) 0,005 — около 10 *см*; таким образом, мне пришлось провести всего десятка два вертикальных прямых и десяток горизонтальных, с расстановкой, разумеется, соответствующих значений x и y по нижнему и левому краям доски. Линии были проведены от руки, следовательно, не безупречно, но со всей тщательностью, которую допускал глазомер.

Через несколько минут была сдана первая работа. Воздерживаясь от каких-либо объяснений, я разыскал на доске точку с координатами, равными числовому значению x на сданном билетике и числовому значению y в сданной работе, и отметил её на доске ясно видным небольшим кружочком (девочка, подавшая работу, и весь класс за мной следили). То же я сделал и после подачи следующей работы. Третья девочка уже *сама* пожелала отметить свою точку; я охотно уступал инициативе всех следующих, помогая разыскать точку, если это было нужно. Несомненно, первые полдесятка работ были выполнены наиболее надёжными ученицами: их точки с достоинством заняли свои места на доске. Но наступил и более печальный случай, когда на доске для точки не нашлось места: я не воспротивился желанию автора работы сделать проверку. Случилось далее и так, что поставленная точка вышла из ряда других, как будто не подчиняясь общему для всех правилу поддержания порядка и дисциплины: и девочка, уходя от доски, с сомнением смотрела на результат своей работы.

Час прошёл незаметно. Я вышел, оставляя за собой некоторое оживление у доски (несколько точек остались не отмеченными) и унося пачку листиков, представляющую собою ценный документ.

Учащийся, окончивший семь классов — неполную среднюю школу, должен быть в какой-то степени вооружён математически и ради дальнейшего образования и ради простейших жизненных или технических применений. Уметь прочесть формулу, сделать числовую подстановку, пользоваться десятичными дробями (как бы полученными в результате некоторого измерения или наблюдения), уверенно выполнять над ними основные действия, включая и извлечение корня — вот то, чего, по меньшей мере, мы вправе ожидать от наших восьмиклассников и восьмиклассниц.

Привожу итоговую статистику, вытекающую из анализа представленных и просмотренных мною 25 работ (это число в точности совпало с числом учениц, присутствовавших на уроке). Всего оказалось:

Правильных ответов	13
Ответов с погрешностью в последнем знаке .	3
Ответов грубо-ошибочных, включая и случай отсутствия ответа	9
	25

Останавливаясь сначала на ответах, *грубо-ошибочных* в смысле числового результата, отметим, что:

1) в одном случае, который, повидимому, можно отнести и к разряду так называемых „затмений“, оказалось невыполненным деление при чрезвычайно странной записи

$$\begin{array}{l|l} 3{,}243 & 2{,}164 \\ \cline{2-2} \underline{2} & 1{,}000 \\ 1\,243 & \end{array};$$

2) в одном случае оказалось невыполненным извлечение корня, очевидно, ещё не усвоенное;

3) в четырёх случаях налицо описки при сложении, умножении и делении, — явления рассеянности, свидетельствующие не о неумении выполнять действия, а о недостаточной тренировке в таковых;

4) в одном случае действие выполнено по схеме $\sqrt{\frac{a}{в}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{в}}$ [1], и из результата ещё раз извлечён корень;

[1] К сожалению, эта схема применена в целом ряде работ. В одной работе имеется приём „избавления от иррациональности в знаменателе“:

$$\sqrt{\frac{2{,}718}{1{,}815}} = \sqrt{\frac{2{,}718 \cdot 1{,}815}{1{,}815 \cdot 1{,}815}} = \frac{1}{1{,}815}\sqrt{3{,}953} \text{ и т. д.}$$

5) в одном случае природа ошибки не выяснена, так как приведены лишь числовые результаты;

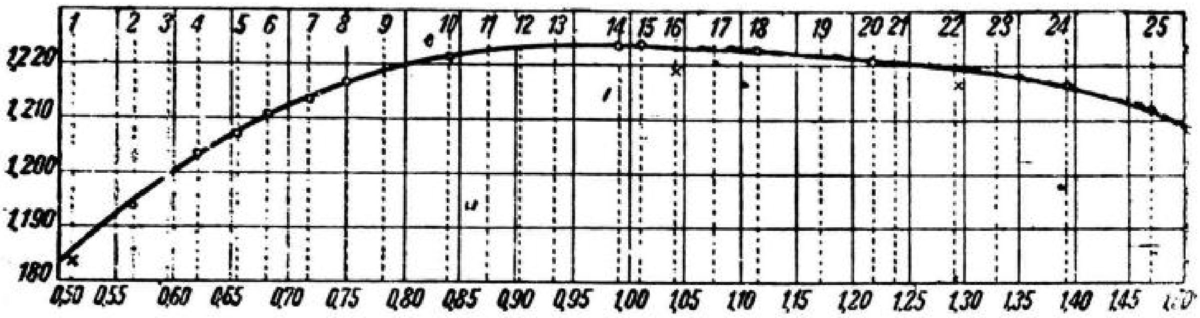
6) в одном случае наблюдается общая растерянность — хаос цифр.

Что касается ответов с погрешностями *в последнем знаке*, то следует констатировать, что такие неточности возникали под совокупным воздействием двух обстоятельств:

1) формулировку „в результате достаточно указать три знака после запятой" некоторые ученицы нашли возможным истолковать в том смысле, что *после каждого действия* разрешается округлять число в трёх знаках после запятой [1],

2) допускались округления „с недостатком" вместо округлений „до ближайшей тысячной", например,

$$0{,}291961 \sim 0{,}291$$



В качестве типического образчика работы с правильным ответом привожу текстуально работу ученицы, у которой числовое значение x было 0,686.

$$y = \sqrt{\frac{1+0,686+0,686^2}{1+0,686^2}} \approx \sqrt{1,466} \approx \sqrt{\frac{14\,660}{10\,000}} \approx \frac{\sqrt{14\,660}}{100} \approx \frac{121}{100} \approx 1,210$$

1)
$$\begin{array}{r} 0,686 \\ \times\ 0,686 \\ \hline 4116 \\ 5488 \\ 4116 \\ \hline 0,470596 \end{array}$$

2) $1 + 0,686 = 1,686$

3)
$$\begin{array}{r} 1,686 \\ +\ 0,470596 \\ \hline 2,156596 \end{array}$$

4) $1 + 0,470596 = 1,470596$

5) $2,156596 : 1,470596$

$$\begin{array}{r|l} 2156596 & 1470596 \\ \cline{2-2} -\,1470596 & 1,466 \\ \cline{1-1} 6860000 & \\ -\,5882384 & \\ \cline{1-1} 9776160 & \\ -\,8823576 & \\ \cline{1-1} 9525840 & \\ -\,8823576 & \\ \cline{1-1} 702264 & \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{r|r} & \sqrt{14660} = 121,0 \\ & -1 \\ \hline 22 & 46 \\ 2 & 44 \\ \hline 241 & 260 \\ 1 & 241 \\ \hline 2420 & 1900 \end{array}$$

Прилагаемый чертёж — тот же, что был на доске — даёт общую картину итогов эксперимента. Правильные ответы показаны здесь кружочками; ответы с погрешностями в третьем знаке — крестиками; грубо-ошибочные ответы указываются пунктирами, сами же точки нужно представлять себе находящимися за пределами чертежа.

[1] Значительное большинство писавших воздержалось от такого толкования — или по инерции или вследствие смутного предчувствия возможного возникновения текущей погрешности, выходящей за пределы третьего знака.

2. Арифметика в старших классах школы

Как самостоятельный учебный предмет, арифметика, согласно ныне действующей программе заканчивается в V классе школы [1]. Далее учащиеся приступают к изучению новых предметов — алгебры, геометрии, тригонометрии. Внимание учащих и учащихся устремляется к буквенным преобразованиям, к составлению уравнений, к доказательству теорем, к выводу формул. Есть крупица истины в том мнении, что при решении алгебраической или геометрической задачи наиболее существенной и ответственной частью работы является нахождение решения „в общем виде"; применить же полученный общий результат к частному случаю, выполнить числовую подстановку — дело второстепенное, оно „не стоит труда". С таким взглядом можно мириться, покуда теорией и практикой преподавания оно не возводится в принцип и не приводит к тяжёлым последствиям более или менее массового характера.

Указания на неблагополучие с арифметикой у окончивших среднюю школу слышатся уже давно; не прекращаются и в последние годы. Нет ничего удивительного в том, что эти указания исходят особенно часто из вузовских кругов; но характерно, что на эту тему чаще говорят представители смежных дисциплин (физика, сопротивление материалов) и специальных технических предметов, чем математики. Нужно думать, что о том же заявила бы и сама жизнь, если бы могла установить более тщательный контроль за всякого рода счетоводческими, статистическими и тому подобными вычислениями.

Весьма существенно проанализировать, *что именно* в области арифметической подготовки вызывает справедливые нарекания. Но это и не очень просто. Из года в год положение вещей несколько меняется. К тому же понятие „арифметика" несколько неопределённо и не всегда употребляется в одном и том же смысле.

Конечно, бывали случаи, когда экзаменующийся в вуз, а иной раз и питомец такового — обнаруживал *нетвёрдость в знании основных законов* (*или „правил"*) *арифметики*. Например, изредка встречаются на школьных скамьях молодые люди или девушки, высказывающие уверенность в справедливости дистрибутивного закона деления

$$\frac{a}{в+c}=\frac{a}{в}+\frac{a}{c},$$

и это длится обыкновенно до тех пор, пока их собеседнику не придёт в голову, скажем, указать на очевидную несообразность равенства

$$\frac{1}{2+3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Были в своё время обоснованными жалобы на *неумение части учащихся выполнять арифметические операции*, в особенности деление многозначных чисел и дробей, не говоря уже об извлечении квадратного корня. Это время прошло: теперь действия умеют делать неплохо — в согласии с правилами учебника. Тому свидетельство, — хотя бы результаты описанного выше эксперимента в VIII классе.

Посмотрим, что же остаётся неблагополучным в области арифметики. Можно признать, что оставляет желать лучшего усвоение теории делимости с её применениями; слишком примитивны приёмы

[1] В связи с тем, что в школу принимаются теперь дети семи лет, курс арифметики, повидимому, будет продлён до VI класса.

приведения к общему знаменателю; не всегда сокращаются дроби. Иной раз нас приведёт в ужас результат действия с участием нуля или единицы (в подобных случаях память нередко старается взять там, где не работает разум, и нет сознания непрерывности).

Но нет сомнения, что в настоящее время упрёки, относящиеся к арифметике, имеют в виду не столько плохое знание теории, сколько, во-первых, *безразличное отношение к числовому результату* и, во-вторых, *недостаточно высокий уровень вычислительной техники*.

Перед нами явления арифметической, или числовой, беспомощности. О них стоит говорить обстоятельно, так как они не являются исключительными, напротив, — они слишком распространены. Борьба с этими явлениями ещё не развернулась.

Рассмотрим внимательнее обе стороны дела.

„Формализм в обучении" — отрыв формы от содержания — изобличён, но не изжит. Решая математическую задачу элементарного содержания, взятую из задачника или из практической жизни, мы неизменно ищем удовлетворяющее тем или иным требованиям числовое значение некоторой величины, измеряемой в заранее определённых единицах. Обычно схема решения такова. Первая стадия есть „составление уравнения", „арифметизация" рассматриваемой проблемы, замена задачи конкретного (геометрического, физического, экономического) содержания соответствующей отвлечённо-математической задачей. Вторая стадия — „решение уравнения", совершаемое по определённым правилам арифметики и алгебры. Третья стадия — „проверка решения", возврат к конкретной ситуации, констатация наличия или отсутствие соответствия между полученным результатом и требованиями задачи. На *первой* стадии отрыв математической формы от конкретного содержания по существу *невозможен*, и в этом обстоятельстве, кстати сказать, кроются трудности, связанные с „составлением уравнений": учащемуся не так просто направлять внимание сразу и в сторону действительности и в сторону математического символизма. *Вторая* стадия — неизбежно *формальная*: мы оперируем с формулами и числами по правилам математики (которым доверяем), отвлекаясь от конкретного условия задачи и тем значительно облегчая себе работу. О *третьей, критической*, стадии нужно сказать, что она *необходима в разных смыслах*: и *математически*, поскольку неизвестно заранее, эквивалентна ли отвлечённо-математическая задача предложенной конкретной, и *практически*, так как решение могло и не быть безошибочным, и *психологически* — ради того чувства удовлетворения, которое возникает, когда убеждаешься, что поставленный вопрос получил правильное разрешение.

Явление формализма в обучении математике обнаруживается *не в наличии второй стадии решения задачи, а в отсутствии третьей*. Иногда третья стадия не игнорируется вполне, но недооценивается, или неправильно истолковывается.

Рассмотрим задачу: „Дан круг радиуса $R = 5$ *см*. Определить сторону квадрата, равновеликого этому кругу".

Первая стадия решения приводит к уравнению $x^2 = 25\pi$. Нечего возразить, если во второй стадии решения учащийся напишет

$$x = \pm 5\sqrt{\pi}$$

и дальше, извлекая корень приближённо, сделает заключение, что

$$x = \pm 8{,}86.$$

Но это ещё не всё. На третьей стадии разумный ученик поспешит отметить, что отрицательное решение уравнения не соответствует условию задачи и должно быть отброшено; затем, он сформулирует решение самой задачи (не уравнения) следующим образом: „искомый квадрат имеет сторону, приближённо равную 8,86 сантиметров"; мало того, он на клетчатой или миллиметровой бумаге начертит, или вообразит, и данный круг и квадрат с вычисленной стороной; сравнит их площади, подсчитывая квадратики, или *хотя бы на-глаз*, посредством „прикидки", констатирует отсутствие видимого противоречия.

Роль преподавателя в данном случае достаточно ответственная. Если ученик по собственной инициативе расположен выполнить всё, что относится к „третьей стадии", решения задачи, то, в зависимости от обстоятельств, преподаватель или предоставит ему действовать, или может быть в иных случаях и остановит его („ведь, вы сумеете это сделать?"), но если ученик просто *не видит* необходимости этой третьей стадии, то дело учителя — на то указать и потребовать выполнения задачи *до конца*.

Но нередко бывает ещё и худшее: получив итоговую формулу, учащийся убеждён, что, раз им найден таким образом „ход" решения, то работа закончена („остаётся одна арифметика"). Например, в вышеприведённой задаче чрезвычайно соблазнительно остановиться на формуле

$$x = 5\sqrt{\pi}\ .$$

При таких условиях формула отрывается не только от конкретного „текстового" содержания задачи, но и от какого бы то ни было числового содержания.

Писание формул без понимания их числового смысла есть одно из самых вредных проявлений формализма в обучении математике.

Выяснить, имеется ли налицо понимание числового смысла формулы, — для опытного преподавателя не представит затруднений.

Следующая задача — „найти сторону x квадрата с площадью 2 $см^2$ и сторону y куба с объёмом 3 $см^3$" — имеет формальное решение $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt[3]{3}$. Достаточно, однако, добавить вопрос: „Что больше: x или y?", чтобы числовое содержание задачи было выдвинуто на первый план.

Нельзя отрицать серьёзные трудности, возникающие в практике преподавания в связи с затронутым вопросом о выявлении числового содержания формулы, о доведении задач до „окончательного числового решения". На путь формализма фатально толкают учащегося и учащего постановка вопросов и ответы в задачнике; иногда будто бы нехватает учебного времени; наконец, закончить числовое вычисление часто кажется „мало интересным". Выдвинуть категорическое требование — доводить *каждую* решаемую задачу до числового результата — представляется слишком педантическим. Главное же к тому препятствие — известное усилие, которое приходится преодолевать при частой смене двух совершенно различных видов математической деятельности: упражнения изобретательности в нахождении „хода решения" и чисто вычислительной тренировки. Если не на самой низшей, то, во всяком случае, на дальнейших ступенях занятий математикой необходимо возникает психологически-оправданная тенденция избежать многократного раздражающего переключения внимания с одного рода умственной деятельности на другой — и отделить числовые выкладки от логического рассуждения.

Но отделить и упразднить вовсе — вещи разные.

Одна из распространённых форм „упразднения" арифметики заключается в таком подборе числовых данных задачи, при котором все деления совершаются без остатка, все корни „извлекаются", получающиеся уравнения имеют целые коэфициенты и целые корни и т. д. Имеют ли такие задачи что-либо общее с жизненной и технической практикой? И не странно ли, если учащийся имеет возможность заключить о том, правильно ли им решена задача, по второстепенным обстоятельствам теоретико-числового порядка?

Изложенное выше приводит нас к следующему выводу:

Преодоление формализма в обучении математике немыслимо без привлечения особого внимания учащихся и учащих к числовому содержанию буквенной формулы, без поднятия престижа арифметической выкладки, без осмысливания выполняемой вычислительной работы.

Очень существенно использовать возникающие возможности для доведения решаемых задач „до числового результата". Но вместе с тем следует найти способы и к тому, чтобы внимание направлялось к арифметике не только „попутно" и „между прочим", но также и к тому, чтобы от времени до времени само арифметическое вычисление выдвигалось перед учащимися как видимая цель работы — с таким расчётом, чтобы получаемые ими правильные числовые результаты могли быть ими оценены и доставили удовлетворение.

Перейдём к другой стороне вопроса, повидимому, уже не имеющей близкого отношения к формализму в обучении, но весьма важной с практической точки зрения.

Мы уже отметили, что задачник нередко преследует ложную цель уберечь учащегося средних и старших классов от арифметических неприятностей; да и учителю как-то неловко предложить на месте придуманную задачу или уравнение, если решения не являются целыми положительными числами.

Но жизненные и в особенности технические задачи, подразумевающие приближённые вычисления более или менее высокой точности, строятся совсем иначе: данными в них, по большей части, являются результаты наблюдений или измерений, выражающиеся округлёнными десятичными дробями; такими же должны быть и ответы задачи.

В школе учащиеся иногда узнают кое-что о способах оценки погрешностей; но их редко знакомят на практике с тем, как следует производить приближённые вычисления. Программа очень скромна и сдержанна в этом пункте.

Посмотрим, однако, как обстоит дело в вузах и втузах. Можно допустить, что преподаватель-математик (руководитель практических занятий или профессор-экзаменатор), следуя традиции или молчаливому соглашению, мало тревожит своих студентов вычислительными задачами с приближёнными данными. Но преподаватели физики, химии, а также многих специальных предметов — не участники в заговоре и обнаруживают известную беззастенчивость. Конечно, в результате упражнений всякое несложное умение рано или поздно приходит. Но взгляните на студенческие черновые тетради с расчётами по прикладным предметам — и вы увидите, как дорого обходится нашей молодёжи то обстоятельство, что средняя школа не вооружает её навыками экономно выполняемых, разумно расположенных и легко проверяемых вычислений.

Старая, дореволюционная школа выдвигала требование выполнять числовые операции не только „сознательно“, но также „быстро и изящно“. Мы думаем, что это не плохое требование. Умение хорошо считать устно и письменно (нас же здесь интересует преимущественно письменный счёт) должно быть и в наши дни рассматриваемо как один из важнейших признаков того, как усваивается курс математики. Человек, умеющий ценить точность и умеющий сам получать точные числовые результаты, на голову выше человека, который этими свойствами не обладает.

Мы описали в начале этой статьи эксперимент, произведённый в VIII классе одной школы: он заключался в том, что учащимся, закончившим курс арифметики, было предложено как раз вычисление технического характера — составление таблицы числовых значений не особенно сложного буквенного выражения, причём работа была разделена между всем классом. Если судить по числу сделанных ошибок, то результаты эксперимента нужно считать более или менее удовлетворительными: констатированные погрешности не принципиальны и не слишком многочисленны. Но мы не можем быть удовлетворены приёмами вычисления и расположением действия. Например, в приведённой выше работе основное вычисление содержит 191 цифру, тогда как, пользуясь сокращёнными приёмами записи действий, достаточно было бы написать всего 74 цифры. Кроме того, неумело (хотя и правильно) извлечён корень из десятичной дроби, и действия занумерованы так, как это делается при решении текстовых задач в начальной школе, тогда как лучше было пользоваться буквенными обозначениями, вынося арифметические выкладки на сторону. Нам бы хотелось видеть ту же работу выполненной примерно, в следующем виде, более удовлетворяющем, как мы полагаем, требованию „изящества“:

$$
\begin{array}{rl}
x & = 0{,}686 \\
x^2 & = 0{,}470 \\
\hline
1 + x + x^2 & = 2{,}156 \\
1 + x & = 1{,}470 \\
\hline
\dfrac{1 + x + x^2}{1 + x^2} & = 1{,}467 \\
\hline
\sqrt{\dfrac{1 + x + x^2}{1 + x^2}} & = 1{,}211
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\times\, 0{,}686 \\
6\,860 \\
\hline
412 \\
54 \\
4 \\
\hline
0{,}470
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
2{,}156 & 1{,}470 \\
\cline{2-2}
1\,470 & 1{,}467 \\
\cline{1-1}
686 & \\
588 & \\
\cline{1-1}
98 & \\
88 & \\
\cline{1-1}
10 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{1{,}467} = 1{,}211} \\
\multicolumn{2}{l}{1} \\
\hline
22 & 46 \\
2 & 44 \\
\hline
24 & 27 \\
1 & 24 \\
\hline
2 & 3 \\
1 & 2 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

Что касается идеала „быстроты“, то, как утверждают специалисты, оптимальная скорость писания числовых выкладок соответствует приблизительно одному типографскому знаку в две секунды; при такой скорости, в данном случае, для всей работы понадобилось бы около пяти минут. В нашем же эксперименте работа отняла, как мы видели, от 15 до 35 минут. Мы не сомневаемся, что после небольшой тренировки, и *без всякого форсирования*, тот же класс дал бы значительно лучшие показатели „быстроты“.

Относительно того, что такое „сознательность“ при вычислениях возможны различные, в том числе и превратные, толкования. В процессе усвоения четырёх основных арифметических действий, учащийся вникает в смысл совершаемых операций, хотя более солидное, формально-логическое их обоснование возможно (и крайне желательно) дать лишь в VII или VIII классах, например, при общем повторении арифметики, с использованием алгебраических обозначений. Алгорифм извлечения корня приходится объяснять не иначе как с привлечением алгебры. Но то, что усвоено *сознательно* (т. е. с участием разума, а не на чисто подражательной основе), только тогда становится прочным приобретением, когда в итоге достаточно продолжительной тренировки переводится из сферы сознания в сферу *подсознания*.

Совершенно обязательно добиваться высокого уровня прочности, свободы, беглости при выполнении повседневных математических операций[1]. Усваивать эти повседневные операции может быть нужно сознательно, но уметь выполнять непременно *без малейшего напряжения мысли*, я бы даже рискнул сказать — *автоматически*. Так, вероятно, можно научиться плавать по самоучителю, не входя в воду, но только о том мы скажем, что он „умеет плавать", кто, будучи в воде, не вынужден вспоминать „правила плавания". Когда нужно действовать — не место логическому анализу. Свободно, без усилий сознания, человек делает физические упражнения, ходит, танцует, умывается, одевается; так же свободно он говорит на родном языке.

Отсутствие свободы в выполнении арифметических операций на известном этапе (начиная с такого-то класса) *нельзя* оправдать необходимостью „упражнять мышление".

Значит ли всё это, что должно считать автоматически, наподобие машины? В известном смысле арифметическая машина есть, действительно, идеальный счётчик; но считающий человек в ином смысле стоит много выше. Он совмещает одновременно машину и того, кто ею управляет. Выключая сознание в его низших функциях, он направляет его к высшей функции: он планирует вычисление и контролирует его. Точно так же тот, кто говорит на родном языке, не „упражняет мышление", стараясь вспоминать правила склонений и спряжений, а сосредоточивается на содержании высказываемых мыслей.

Итак, под „сознательностью" в вычислениях мы склонны понимать наличие двух разных вещей: 1) способности в нужных случаях (при возникновении сомнений) дать логическое обоснование употребляемому приёму, 2) способности планировать и контролировать вычисления.

Мы приходим таким образом ко второму выводу.

В рамках учебного процесса в средней школе должны быть изысканы способы к тому, чтобы раз „объяснённые" и „логически обоснованные" повседневные арифметические операции в дальнейшем усваивались учащимися настолько прочно, чтобы выполнение их было вполне свободным и беглым. Необходима длительная тренировка на более высоких возрастных ступенях. При этом следует направлять внимание учащихся к планированию их вычислительных работ и упражнять их в контролировании получаемых результатов.

3. О функциональной пропедевтике

Учащемуся, закончившему школу и поступающему в вуз реальной специальности, предстоит изучение — в том или ином объёме — основ анализа бесконечно-малых и аналитической геометрии. На

[1] Сюда прежде всего относится умение перемножать однозначные числа: мы не уверены в том, нужно ли таблицу умножения „учить на память", но не сомневаемся, что её необходимо „знать на память" и применять с абсолютной беглостью.

этих более высоких ступенях математики основным предметом изучения становится *функциональная зависимость*, заданная в виде *уравнения* и ради наглядности изображаемая в виде кривой, или *кривая*, заданная геометрическим условием и ради краткости описываемая уравнением. Между тем и другим разница — лишь в точке зрения.

Учащийся из средней школы, идущий в вуз гуманитарной специальности или выходящий в практическую жизнь, может избегнуть встречи с высшей математикой как учебным предметом. Но переживаемая нами эпоха такова, что и в практической жизни он не сможет не столкнуться с самыми разнообразными примерами функциональных зависимостей, изображённых в виде графиков и диаграмм, „чтение" которых (а тем более „составление") подразумевает определённым образом направленное, так называемое „функциональное" мышление.

Студент технического вуза, не понимающий „языка формул", т. е. не обладающий способностью наглядного их представления, обречён на „формальное" заучивание математических предложений, иначе говоря, на бесплодную зубрёжку: цена его знаниям минимальна. Врач, или отец больного ребёнка, не умеющие записать график температуры, пусть спросят себя: зачем учили их в школе математике?

Речь идёт не о приобретении *обширных* знаний или усвоении каких-либо *теорий*, а всего лишь об идее функциональной зависимости, как такого (говоря словами учебника) соотношения между двумя величинами, что *„каждому значению одной величины соответствует некоторое значение другой"*, и о графическом представлении функции, о графике уравнения, как о *„совокупности точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению"*.

Если оставить в стороне функциональную терминологию и символику, то сказанным буквально *исчерпывается всё*, что учащийся средней школы обязан знать о функции как таковой. Десяти часов, предусмотренных программой VIII класса, вполне достаточно для того чтобы сообщить в развёрнутой форме приведённые формулировки, показать несколько примеров и разъяснить терминологию и символику. Во всей „теме" о функциях и их графиках не содержится *ни одного* положительного утверждения, *ни одной* „теоремы". На это обстоятельство, как и на „расплывчатость" самого понятия функции, указывают, между прочим, люди, оспаривающие педагогическую ценность функционального начала и оказывающие явное или неявное сопротивление его проникновению в школьное преподавание.

Но это „расплывчатое" в своей общности понятие должно быть *подлинно освоено* на конкретных примерах, а это дело — не малое. Представьте себе студента, который „выучил" не только общие словесные определения, но и почерпнул в учебнике сведение о том, что „уравнение $y^2 = 2px$ представляет параболу", однако обнаруживает неспособность без наводящих вопросов правильно изобразить на координатной сетке кривую $y^2 = 4x$. Мы позволим себе высказать суждение, что пребывание этого студента в стенах вуза совершенно бесполезно, покуда в результате продолжительных и надлежащим образом подобранных упражнений, в его сознании не укрепится идея функции и понимание принципа, на котором основывается её графическое представление. Возможно, что в условиях вуза, при известном усердии со стороны обучаемого, цели можно достигнуть за срок *порядка месяца*. Но нормально — в условиях средней школы, в обстановке классного преподавания, без спешки, с учётом возрастных особенностей, — для прочного усвоения идеи функции нужны *годы* незаметной, умело проводимой педагогической подготовительной работы.

В самом деле, с точки зрения содержания курса элементарной математики, — содержания, определяемого установившейся практикой преподавания, — задача внедрения в умы учащихся общей идеи функции далеко не проста. В VII—VIII классах в курсе алгебры учащийся имеет дело с зависимостями первой и второй степени, в курсе геометрии встречается только с прямой и окружностью. И вдруг — *общая* идея функции, идея *„произвольной“* кривой, проведённой остриём карандаша на бумаге или острым концом мела на доске! Любой учащийся — и иной преподаватель — готов сказать: „да это уже не математика, и к математике никакого отношения не имеет!“

Функциональная пропедевтика в средней школе призвана *предварительно*, независимо от того, будет ли учащийся или не будет изучать анализ, ознакомить учащегося с разнообразными типами функциональных зависимостей — с установкой на возможно более широкое раскрытие функциональных представлений. Сомнений нет в том, *как* следует проводить это ознакомление: *конкретно*, посредством сосредоточивания внимания на *частных* примерах, теснейшим образом связанных с *применениями*. Разве не так же точно осуществляется — отчасти в дошкольный период времени — и биологическая пропедевтика: путём посещения зверинца или зоосада, экскурсии в лес и в поле, с осмотром каждого животного и каждого растения в отдельности? Разве не таков наилучший способ вызвать у ребёнка сознание необычайного разнообразия форм в окружающей его природе?

Более дискуссионным является вопрос об объёме функциональной идеи, о *степени „произвольности“* функции и кривых, подлежащих рассмотрению в средней школе, а также — о *порядке* рассмотрения отдельных примеров.

Нам кажется педагогически оправданным считать, что в каждый данный момент прохождения школьной программы *общность пропедевтически вводимой идеи функции должна быть ограничена теми аналитическими средствами, которые к тому времени введены в обиход.* Так, покуда в распоряжении учащегося имеются лишь четыре арифметических действия, его вниманию могут предлагаться только примеры рациональных функций; после введения извлечения корня уместно ознакомиться с функциями, явно выражающимися через радикалы и т. д. Функции, заданные неявно или эмпирически, также неизбежны в средней школе, но они приходят позднее, когда уже возникли представления о действительном числе и о непрерывности, притом в связи с введением определения функции (конец пропедевтики). Пытаться в средней школе исчерпать общее понятие функции останется, вероятно, навсегда неосуществлённым замыслом. Но подготовлять учащихся к восприятию общей идеи *непрерывной* функции и „произвольной“ кривой, именно базируясь на эмпирических зависимостях, было бы весьма полезно и не безнадёжно. Правда, появление в курсе элементарной математики „произвольных“ непрерывных функций и кривых может быть полностью оправдано только теоремой Вейерштрасса о приближении непрерывной функции последовательностью полиномов. Не в способности ли отчётливо понять содержание этой теоремы следует видеть тот „порог анализа бесконечно-малых“, к которому, по слову Меранской программы, должна подвести учащегося общеобразовательная школа?

С другой стороны, желательно, чтобы при соблюдении указанного выше ограничения — идея функции предлагалась учащимся не в искусственно-обеднённой форме. Суть „ознакомления“ учащегося с данной функцией заключается в том, чтобы учащийся самостоятельно построил для неё „по точкам“ таблицу и график. Если из того, что, согласно программе, целый год изучаются линейные уравнения, преподаватель сделает вывод, что целый год нужно заставлять строить по точкам прямые линии, то учащийся с полным основанием придёт к заключению, что построение графиков — дело пустяковое и никчемное; от идеи пропорциональной зависимости он не сдвинется вперёд ни на шаг. Прибавление графика трехчлена второй степени $y=x^2+px+q$, само по себе, также ещё не означает серьёзного прогресса, так как учащийся мало приобретёт, если при слове „функция“ ему будет рисоваться парабола с поднятыми кверху „концами“.

Примеры функций должны быть и *более многочисленными и более разнообразными.*

Возвращаясь снова к сравнению, выскажем убеждённость в том, что показать ребёнку картинку с изображением домашних животных — скажем, коровы, лошади и овцы — не значит вызвать в нём представление о животном царстве в целом. Тигр, бабочка, змея, обезьяна, страус — вот более яркие и живописные представители этого царства.

Требование многочисленности и разнообразия рассматриваемых примеров функций в значительной степени осложняет проблему функциональной пропедевтики в средней школе.

От студента первого курса специального института или физико-математического факультета допустимо потребовать представления к определённому сроку такого-то количества графиков (30—40). Подобного рода работа — по плечу уже взрослому молодому человеку, обладающему способностью заниматься с известной настойчивостью, имеющему, как правило, достаточное расположение к математике, умеющему бегло считать, понимающему назначение изучаемого предмета и выполняемых упражнений.

К учащемуся средней школы такой подход едва ли возможен. Построение графика само по себе, несомненно, способно заинтересовать подростка 13—15 лет. Но после того, как принцип будет схвачен, и любопытство удовлетворено, работа ему прискучит и будет брошена, именно потому, что связанный с её выполнением арифметический труд не будет оправдан. В старших классах школы (возраст 16—18 лет) интерес во многих случаях может быть подогрет тем, что в качестве видимой цели будет выдвинуто не построение графика, а исследование конкретной задачи геометрического или физического содержания, в особенности нахождение максимума или минимума. Но для функциональной пропедевтики в средних классах следует найти какой-то иной движущий рычаг.

Резюмируем:

Одной из важнейших задач преподавания математики в средней школе является вызвать в сознании учащихся общую идею функциональной зависимости (непрерывной кривой) и обогатить его математический опыт рассмотрением значительного числа разнообразных примеров графиков функций. Соответствующая пропедевтика должна проводиться уже в средних классах (VI—VIII) и, не ограничиваясь многочленами первой и второй степеней, использовать более богатые имеющиеся в распоряжении учащихся средства.

Затруднение заключается в определении в каждом случае таких видимых целей, которые были бы достаточно убедительными в глазах учащихся, чтобы оправдать производимые ими табличные вычисления.

4. Рационализаторское предложение

Мы предлагаем: *известную часть учебного времени в VI—VIII классах отвести для упражнений особого типа, заключающихся в выполнении ряда заранее указанных числовых подстановок в одном и том же заданном буквенном выражении. Видимой целью такого рода упражнений служило бы усовершенствование навыков выполнения арифметических операций. Одновременно эти упражнения служили бы целям функциональной пропедевтики. При выполнении упражнений особое внимание надлежало бы уделять планировке операций и записи их в удобно обозримом расположении, а также контролю получаемых числовых результатов. Некоторая часть упражнений могла бы возникать из буквенных формул, решающих текстовые задачи геометрического или физического содержания.*

Работа, описанная в начале этой статьи, может служить примером упражнений, о которых здесь идет речь.

Мы усматриваем особую целесообразность и особую выгоду в том, чтобы две капитальной важности и высокой трудоёмкости проблемы — сообщение учащимся прочных навыков арифметических вычислений и пропедевтическое ознакомление с идеей функции — могли быть разрешаемы *совместно.*

О том, в каком аспекте преподносить учащемуся проектируемые упражнения: как тренировку в счёте или как функциональную пропедевтику — не может быть двух мнений. Видимая, явно указываемая учащемуся цель работы на первых порах должна быть ближе к *арифметике.* Каждый школьник сам прекрасно сознаёт, что искусство счёта у него не на высоте; он понимает, что считать *трудно,* что требуется *напрягать* внимание и *делать усилия,* чтобы не ошибиться; он должен *стараться* не быть рассеянным и небрежным; он много *выиграет,* если добьётся хороших навыков в счёте и т. д.; вообще идеал сознательного, быстрого и даже „изящного" счёта для него вовсе не непостижим. Если кто-нибудь сам этого не понимает, можно разъяснить, что тот, кто считает грязно, медленно, с ошибками, не должен этим гордиться. С другой стороны, из арифметических упражнений не так трудно, и совсем не опасно, сделать нечто в роде игры или спортивного состязания: погоня за малым числом арифметических ошибок ни в каком смысле не предосудительна.

Таков фокус видимых целей. Что же касается идеи функциональной зависимости, то... насильно её не притащишь: со временем, рано или поздно, она явится сама. Задача преподавателя — создать предпосылки для её возникновения. Нет средств ускорить появление так называемых „зубов мудрости". Неоправданное разъяснение отвлечённостей едва ли принесёт пользу, а скорее вызовет ощущение досады и скуки. Напротив, при составлении таблиц непременно то один то другой учащийся станет подмечать в рядах цифр „закономерности" и делиться вслух своими наблюдениями. В каждом данном случае учитель разберётся — поддержать ли высказанную мысль или угасить её. Мы остановимся несколько позднее (см. стр. 47) на той особенно значительной роли, которую играет график функции в нашей системе арифметических табличных упражнений. Позднее будут указаны и более точно конкретизированные, близкие арифметике видимые цели. О главной же — и скрытой — цели, функциональной, пусть знает учитель; ученики увидят её потом.

Мы указали только один образчик упражнений, но уже ощущаем вызванное им смятение и беспокойство, уже слышим недоуменные вопросы и направляемые нам возражения. Поспешим ответить хотя бы на некоторые.

Возражение первое. Легко сказать — „отвести известную часть учебного времени". Учебные программы достаточно перегружены и теперь. А часы занятий математикой не предполагается увеличивать. Откуда взять эту „известную часть" времени? За счёт чего?

Отвечаем:

1. Пора направить внимание нашей методической мысли не к ближайшим, а к *конечным* целям обучения математики. К таким конечным целям нельзя не отнести, во-первых, умение считать, во-вторых, овладение идеей функциональной зависимости. Можно спорить о том, верные ли средства найдены для достижения конечной цели. Но если средства такие есть, то надо их поставить на первый план, и им подчинить ближайшие цели преподавания.

2. От неудач не застрахован никто. Но позволительно рассчитывать, что, взявшись за дело правильно и на первых порах затративши некоторое излишнее, казалось бы, время, можно при дальнейшем движении вперёд приобрести такое *ускорение* и такой *размах*, которые с избытком компенсируют первоначальное отставание. В самом деле, если мы употребим, например, время в VI классе на то, чтобы математическая формула не отрывалась формалистически от принимаемых ею различных числовых значений, то не предохранит ли это позднее от целого ряда печальных последствий?

3. Система предлагаемых нами упражнений может быть разработана и детализирована таким образом, чтобы *органически влиться* в проходимый в данный момент раздел программы. Следовательно, наши упражнения способны стать частью текущего задачного материала, тем самым поднимая его на большую принципиальную высоту. Предусмотренные программой периоды повторения для того особенно удобны.

4. Говоря об „известной части учебного времени", мы умышленно воздерживаемся от суждения о том, какова эта часть в *процентном* отношении. В зависимости от локальных обстоятельств этот процент способен довольно значительно меняться: он выше, если класс отстаёт по арифметике и если „формализм в обучении" уже успел принести свои плоды; он ниже, если учитель по собственной инициативе продвинул вперёд вычислительные навыки и воспитал в учащихся живое восприятие числа и формулы. В нормальных условиях одной классной или одной домашней работы в 3—4 недели в среднем было бы, вероятно, достаточно.

Возражение второе. Оказывается, что предлагаемый вами рецепт сводится к „выполнению числовых подстановок в буквенных выражениях". Признаёмся: и не ново и не увлекательно! Мы ожидали чего-то более оригинального. Примеры на числовые подстановки в стабильном задачнике имеются (Шапошников и Вальцов, ч. I, изд. 10, 1941, гл. 1, 9). Для хороших учеников выполнение большого числа таких примеров неинтересно, для плохих слишком трудно, и в обоих случаях это — потеря времени.

Отвечаем:

1. Тяжеловесные примеры стабильного задачника метят в сторону — „порядка действия" и раскрытия „смысла скобок". В каждом буквен-

ном выражении стабильный задачник разрешает выполнить только одну числовую подстановку. Функциональный смысл формулы при этом никак не обнаруживается. Я же совершенно определённо указываю на необходимость *ряда* подстановок в *одной и той же*, зато сравнительно простой формуле. Так, в исходном эксперименте выполнено 25 подстановок: работа — коллективная и была поделена между 25 девочками, но это не нарушает её целостности, а функциональное содержание иллюстрируется графиком, сделанным мною на доске. В том, чтобы выполнить одну подстановку, едва ли можно усмотреть большую поучительность: мы озабочены прочным усвоением навыка, достигаемого путём многократного повторения операции, и сопоставлением результатов, получающихся при различных операциях.

2. Нужно различать два смысла термина „*трудный*": 1) трудный — требующий большого напряжения мысли и 2) трудный — отнимающий много времени. О чрезмерной трудности в первом смысле едва ли можно говорить, так как имеются в виду пройденные уже действия и нужно только „набить в них руку"; трудность во втором смысле есть то, что должно быть, между прочим, устранено в результате упражнений. Кроме упражнений, нет другого пути к достижению беглости, или, как говорили раньше, „сноровки".

3. Только что сказанное относится к более слабым ученикам, которые, безусловно, должны подтягиваться к среднему уровню: успех зависит исключительно от прилежания. Иной разговор о „хороших" учениках, для которых арифметические упражнения „не интересны". Тут нужно тщательно выяснять что это за „неинтересность" и выводить на чистую воду иных поверхностных верхоглядов, которые ищут предлога для того, чтобы уклониться от работы, требующей сосредоточения внимания. Поверхностное отношение к работе („понял — и с плеч долой") — очень опасное явление, которое, впрочем, не грозит укорениться, если своевременно встретит отпор со стороны преподавателя. С другой стороны, можно допустить, что данный ученик, действительно, сумел приобрести достаточные навыки беглости и аккуратности в счёте, заметно опережая в этом большинство своих товарищей; тогда процесс счёта ему не препятствие, а его внимание можно переключить на функциональный момент („сделай такие-то задачи, представь графики — и займись своим делом"). Как бы то ни было, *нельзя допускать, чтобы в смысле навыков счёта способный ученик, не привыкший работать, уступал менее способному, но прилежному.*

4. Считая, что от числовых подстановок и точечных построений не может быть освобождён ни один ученик — ни плохой, ни хороший, — мы согласны признать, что развиваемая нами мысль — трактовать точечные построения как тренировку в вычислениях, особенно плодотворна по отношению к *среднему* ученику, представляющему в классе устойчивое большинство. Мы не скроем и того, что сама мысль возникла на основе продолжительных наблюдений над *отстающими* студентами в течение первого семестра: при внимательном отношении руководителя практических занятий к выполнению студентами графических работ неизменно оказывалось, что разного рода дефекты в их подготовке по „арифметике" сами собой, автоматически, и довольно быстро изживались.

5. Содержание предлагаемых упражнений

Ответить на вопрос школьника „Чем мы сегодня будем заниматься?" — „Мы будем заниматься подготовительными упражнениями, которые подведут к понятию функции", — значит, дать ответ, правильный по существу, но совершенно не убедительный для самого школьника, который о функциях ничего не слыхал и не так скоро услышит. Напротив, сказать, что целью упражнений является тренировка в арифметических вычислениях, — звучит более веско и более доходчиво. Учащийся понимает смысл физических, орфографических, каллиграфических упражнений, ему нет надобности разъяснять смысл диктовки и т. д.

Однако весьма существенно, чтобы каждое отдельное упражнение преследовало определённую, конкретную, *видимую* цель, которая в глазах учащихся содержала бы некоторый элемент новизны и воспринималась бы ими как практически-полезная. Нужно дать почувствовать учащемуся, что он сегодня научился чему-то стоящему, что-то приобрёл.

В дальнейшем намечены некоторые типы упражнений, имеющих узкое целевое содержание; это содержание по большей части арифметическое, но иногда увязывается с текущим программным материалом, не теряя, впрочем, своего арифметического характера. Мы приветствуем *текстовое* интересное и поучительное условие, если оно оживляет преподавание и не отвлекает внимания учащегося в сторону; но изобретение текстов — особая статья, о которой речь здесь не идёт, и потому примеры текстов в дальнейшем приводятся лишь в тех случаях, когда эти тексты играют существенную роль.

Мы никогда не упускаем из виду *принцип разделения трудностей*.

1. В самом начале VI класса учащийся знакомится с *алгебраической формулой* и усвоение формулы, как таковой, вполне уместно связать с несложными вычислениями. Попутно усваивается обозначение действий в алгебре, роль скобок и т. п. Результаты обязательно записываются в табличной форме. Ради усвоения того, что значит „подставить в формулу такие-то значения", на первой стадии необходимо при каждой подстановке тщательно переписывать всю формулу, заменяя лишь всякий раз букву подставляемым значением. Полезно установить некоторый стандарт: учащемуся предлагается табличка с заполненными исходными горизонталью и вертикалью, — ему остаётся только заполнить свободные места. Пока внимание сосредоточено на формуле и на усвоении табличного расположения, вычисления, естественно, должны быть настолько просты, чтобы их можно было выполнить в уме. Приводим примеры.

Задание

x	$\frac{x}{x+1}$
4	
$\frac{2}{3}$	
$1\frac{3}{4}$	
$1{,}7$	

Выполнение

x	$\frac{x}{x+1}$
4	$\frac{4}{4+1}=\frac{4}{5}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1}=\frac{2}{5}$
$1\frac{3}{4}$	$\frac{1\frac{3}{4}}{1\frac{3}{4}+1}=\frac{7}{11}$
$1{,}7$	$\frac{1{,}7}{1{,}7+1}=\frac{17}{27}$

Задание

x	$2x+5$	$2(x+5)$	$\frac{1}{x+5}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{5}$
3				

Выполнение

x	$2x+5$	$2(x+5)$	$\frac{1}{x+5}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{5}$
3	$2\cdot3+5=11$	$2(3+5)=16$	$\frac{1}{3+5}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$

Задание

a	b	c	$a(b+c)$	$ab+c$
2	3	5		
4	7	12		
15	24	32		

Выполнение

a	b	c	$a(b+c)$	$ab+c$
2	3	5	$2\cdot(3+5)=16$	$2\cdot3+5=11$
4	7	12	$4\cdot(7+12)=76$	$4\cdot7+12=40$
15	24	32	$15\cdot(24+32)=840$	$15\cdot24+32=392$

2. Когда стандарт расположения в форме простых таблиц можно считать прочно усвоенным, своевременно показать и расположение в *двойной таблице* (таблице *„с двойным входом“*). Предположим, что формула содержит две буквы (два переменных параметра) и надлежит выполнить подстановки, возникающие при всевозможных комбинациях, составляемых из двух независимых рядов значений для каждой буквы. Такое расположение обеспечивает большое число действий при сравнительно малом числе данных и имеет и другие выгодные стороны.

Пример: вычислить значения $z=\frac{x+y}{x-y}$ при $x=9$, 11, 16; $y=2$, 5, 7, 8.

Задание

$x \backslash y$	2	5	7	8
9				
11				
16				

Выполнение

$x \backslash y$	2	5	7	8
9	$\frac{9+2}{9-2}=\frac{11}{7}$	$\frac{9+5}{9-5}=\frac{7}{2}$	$\frac{9+7}{9-7}=8$	$\frac{9+8}{9-8}=17$
11	$\frac{11+2}{11-2}=\frac{13}{9}$	$\frac{11+5}{11-5}=\frac{8}{3}$	$\frac{11+7}{11-7}=\frac{9}{2}$	$\frac{11+8}{11-8}=\frac{19}{3}$
16	$\frac{16+2}{16-2}=\frac{9}{7}$	$\frac{16+5}{16-5}=\frac{21}{11}$	$\frac{16+7}{16-7}=\frac{23}{9}$	$\frac{16+8}{16-8}=3$

Применение таблиц с двойным входом служит пропедевтикой функций двух переменных. Учащиеся с удовольствием убедятся, что хорошо знакомая им таблица умножения Пифагора построена именно по этой схеме (функция $z=xy$).

3. Раз схемы усвоены, можно направить внимание учащихся в другую сторону. Один из житейских полезных приёмов, с которым, к сожалению, не принято знакомить в младших классах наших школ, это — *приём контролирования девяткой* арифметических действий, совершаемых над целыми числами (или десятичными дробями). Метод девятки очень своевременно ввести в употребление в VI классе, не упуская в дальнейшем удобных случаев пользоваться им и добиваться автоматизма в его применении.

Вычеты по модулю 9 удобно писать правее основных чисел, за вертикальной чертой. Теории объяснять не нужно: к ней лучше будет обратиться несколько позднее, когда техника будет усвоена, и учащиеся потребуют объяснений. Термин „вычет“ не доходчив: я предложил бы „укорачивать“ числа, выписывая результат за чертой. „Укорачивание“ производится посредством суммирования цифр, с попутным выбрасыванием девяток. С „укорачивания“ удобнее всего начать. Приводим примеры „укорачивания“:

$$\begin{array}{r|l} 4025791 & 1 \\ 16243817 & 5 \\ 60675 & 6 \end{array}$$

и примеры основных действий:

$$\begin{array}{r|l} 37268 & 8 \\ +\,48736 & 1 \\ \hline 86004 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 73015 & 7 \\ -\,68746 & 4 \\ \hline 4269 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 385 & 7 \\ \times\,47 & 2 \\ \hline 2695 & \\ 1540 & \\ \hline 18095 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2015 & 43 \\ \underline{172} & 46 \\ 295 & \\ \underline{258} & \\ 37 & \end{array}$$

$$2015 = 43 \times 46 + 37$$
$$8 \;= 7 \times 1 + 1$$

Целесообразно предлагать контролировать методом девятки арифметические действия, в особенности умножение, выполненные по заданиям, в форме двойной таблицы: таблица выписывается на основном листе, сами действия с контролем — на вспомогательном.

4. Другой способ контроля — *табличный*. Он основан на суммировании чисел, стоящих на одной вертикали. Замечательный эффект этого контроля заключается в том, что учащиеся поневоле побуждаются (и привыкают) писать многозначные числа и десятичные дроби согласно правилу „разряд под разрядом“.

Пример:

Умножение

	2,3
1,73	3,979
2,15	4,945
4,47	10,281
8,35	19,205

Контроль:

$$\begin{array}{r} 8{,}35 \\ \times\;2{,}3 \\ \hline 2505 \\ 1670 \\ \hline 19{,}205 \end{array}$$

Сложение

	6,83
1,73	8,56
2,15	8,98
4,47	11,30
8,35	28,84

Контроль:

$$\begin{array}{r} 6{,}83 \\ \times\quad 3 \\ \hline 20{,}49 \\ +\;8{,}35 \\ \hline 28{,}84 \end{array}$$

5. Чтобы научить *округлять* числа с наперёд заданным числом знаков после запятой, выгоднее всего воспользоваться формулой деления $z = \frac{x}{y}$, прибегая к таблице с двойным входом.

Округление с двумя знаками после запятой

x \ y	7	17
10	1,43	0,59
12	1,71	0,71
15	2,14	0,88

Округление с тремя знаками после запятой

x \ y	7	17
10	1,429	0,588
12	1,714	0,706
15	22,143	0,882

6. Мы склонны усиленно агитировать в пользу широкого употребления приёма *сокращённого умножения* десятичных дробей и многозначных чисел. Мы имеем в виду не так называемое „правило Ферроля“ (иначе „индийское правило“), предписывающее избегать выписывания частных произведений и тем позволяющее, по слову покойного акад. А. Н. Крылова, „экономить мел, расходуя мозг“, а совсем иное „правило Утрехта“, рекомендующее не писать лишних цифр, если требуется лишь ограниченная точность. Образчик этого умножения уже был приведён на стр. 36 настоящей работы. Усвоение правила Утрехта требует от учащегося некоторых усилий, притом довольно продолжительных, направленных, главным образом, на преодоление привычки умножать обычным приёмом. Но раз усвоенное, это правило постоянно оказывает неоценимые услуги и притом вовсе не требует особого напряжения внимания.

Обучать приёму Утрехта удобно в три приёма: сначала не переставляя в обратном порядке цифр множителя и не принимая во внимание первого отбрасываемого разряда; затем переставляя цифры множителя и не принимая во внимание первого отбрасываемого разряда; наконец, переставив цифры множителя и принимая во внимание первый отбрасываемый разряд. Это демонстрируется на примере умножения $2{,}753 \times 6{,}294$:

1)	2)	3)
$\times$ 2,753	$\times$ 2,753	$\times$ 2,753
6,294	4926	4926
16518	16518	16518
550	550	551
243	243	247
8	8	11
17,319	17,319	17,327

Аналогичный приём при выполнении *сокращённого деления* заключается в следующем: вместо того чтобы умножать делимое на 10 посредством сноса цифры следующего разряда, увеличивают делитель в 10 раз, отбрасывая его последнюю цифру.

Мы настойчиво рекомендуем упражнения в сокращённом умножении и делении, с расположением действия в схеме простой или двойной таблицы и с применением табличного контроля (возможны небольшие неувязки, вызываемые текущей погрешностью). В дальнейшем, после первоначального усвоения приёма, им следует пользоваться при всяком удобном случае.

7. Очень важный момент в предлагаемых нами упражнениях — появление *графика* функции от одной переменной: график, по нашему замыслу, служит *средством контроля* вычисления, проделанного в схеме простой таблицы. Нам казалось бы правильным, предлагая числовые значения для подстановки в формулу, выбирать их или по принципу „беспорядочности“ или руководствуясь соображениями арифметического порядка. Но при переходе к *графическому контролю* естественно вызвать к жизни идею непрерывности, которая до того момента игнорировалась: предлагать для подстановок значения, расположенные в арифметической прогрессии, т. е. равноотстоящие, с маленькими промежутками, предоставляя учащемуся следить за маленькими изменениями числовых результатов подстановок.

Пусть, например, предложено подставить в формулу

$$y=0{,}24\,x^2$$

числовые значения

$$x=0{,}5;\ 1{,}0;\ 1{,}5;\ 2{,}0;\ \text{и т. д. до}\ x=4{,}0.$$

Построение графика на обыкновенной клетчатой бумаге придётся не столько объяснить (дать словесное описание этому процессу), сколько показать — почти молча. Учащиеся, несомненно, будут рады и новому занятию и той правильности в расположении точек, которая сразу им бросится в глаза и которую наиболее развитые назовут „закономерностью". Пытаться дать логическое определение понятию непрерывности — безнадёжно; уместнее пользоваться приблизительными синонимическими оборотами речи: „значения меняются постепенно", „график получается плавный" и т. п. В надлежащих случаях придётся сделать замечания в таком роде: „Что это у тебя точка стоит не на месте? Покажи-ка вычисления, посмотрим, в чём ты напутал".

И масштаб и подставляемые значения переменной преподаватель на протяжении долгого времени должен назначать сам, относясь к этой стороне дела с большим вниманием.

Арифметические табличные вычисления, заключающиеся в ряде числовых подстановок с последующим графическим контролем, — основной тип предлагаемых нами упражнений.

8. Если рассматриваемая формула с одной переменной буквой не особенно уж проста и если предлагается выполнить подстановку *ряда* значений, полезно рекомендовать выполнять все подстановки одновременно, вставляя в простую таблицу несколько вспомогательных, или промежуточных, вертикалей и переходя, таким образом, к *многоколонной* схеме. Например, в случае формулы:

$$y=\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1+x^2}}$$

удобна была бы следующая схема:

x	x^2	$1+x+x^2$	$1+x^2$	$\frac{1+x+x^2}{1+x^2}$	$\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1+x^2}}$

и заполнять её следовало бы не по горизонталям (что было бы равносильно выполнению каждой подстановки в отдельности), а по *вертикалям*, совершая подряд одну за другой все одноимённые операции. При таком порядке записи внимание не рассеивается, и сделанные ошибки обнаруживаются легче.

Применение подобного рода многоколонных схем значительно облегчает, например, построение по точкам эллипса и гиперболы, заданных в канонической форме.

Приведём еще образец сложной табличной схемы, на этот раз с двойным входом:

$$z = x^2 + y^2$$

	y	5	6	7	8	....
x	y^2 \ x^2	25	36	49	64	....
1	1	26	37	50	65	....
2	4	29	40	53	68	....
3	9	34	45	58	73	....
....	....	....	....	....	....	....

9. В случае таблиц с *двойным входом графический контроль* должен был бы, собственно говоря, осуществляться в пространстве но, оставаясь в пределах плоскости, можно применять обычную форму контроля для каждой вертикали (или для каждой горизонтали) в отдельности. При этом на одном и том же чертеже возникает *целый ряд* графиков.

Весьма поучительно составить двойную таблицу для

$$v = x^n$$

при числовых значениях

$$n = 1,\ 2,\ 3, \ldots ;\ x = 0{,}5;\ 0{,}6; \ldots 1{,}4;\ 1{,}5;$$

это — удобный случай тренироваться в сокращённом умножении и разобраться в том, что происходит с числом, близким к единице, при возведении его в последовательно возрастающие степени. Результаты можно проконтролировать по таблицам степеней, а графики построить на одном большом чертеже, коллективно, разноцветными карандашами.

10. Дальнейшим этапом, вносящим новый элемент разнообразия и приближающим к цели раскрытия идеи функции, являются *текстовые задачи геометрического содержания*, органически увязанные с предшествовавшими отвлечённо-арифметическими задачами. Вот образчик. „В полукруг, радиус которого равен единице, вписан прямоугольник, основание которого, равное $2u$, лежит на диаметре полукруга. Вычислить площадь S прямоугольника“.

Решение

$$S = 2u\sqrt{1 - u^2}$$

этой задачи даёт повод вычислить искомую площадь S не для одного какого-нибудь значения u, а для целого ряда значений u. Можно взять эти значения равноотстоящими (например, $u = 0{,}1$; $0{,}2$ и т. д. до $u = 0{,}9$, не исключая и предельных случаев $u = 0$, и $u = 1$) и составить табличку; затем применить „графический контроль". График функции $S(u)$ готов.

Не нужно *навязывать* вопросов вроде следующих: „Как изменяется площадь S при возрастании u от 0 до 1?" „При каком значении u площадь S примет такое-то значение?" „При каком значении u площадь S примет наибольшее возможное значение?" Нужно эти вопросы всячески *вызывать, стимулировать*, помогая мысли и слову оформиться и пробить себе дорогу.

Не беда, если не сразу удастся найти ответы на все поставленные подобного рода вопросы. В иных случаях, если ответ не сумеет дать сам класс, учитель, может быть, пожелает указать искусственный приём решения: это только поднимет его престиж в глазах учеников[1]. Или предупредит, что данный вопрос удастся разрешить более совершенными методами, с которыми учащиеся познакомятся в старшем классе.

Очень важно, чтобы, помимо графика (и, пожалуй, раньше графика) был составлен чертёж, на котором можно воочию увидеть круг и те прямоугольники, которые соответствуют отмеченным точкам графика.

Не стоит жалеть времени, потраченного на обстоятельное рассмотрение каждой отдельной задачи подобного рода.

11. К аналогичным задачам приводит также *тригонометрическая пропедевтика* в VIII классе. Она, кстати сказать, в школьной практике часто смазывается, а наши предложения предоставляют возможность сообщить ей должную устойчивость. Тип задач здесь — строго определённый: „По двум элементам прямоугольного треугольника (по одной стороне и одному острому углу или по двум сторонам) определить третий". В каждой такой задаче следует, по нашей мысли, давать углу по несколько (3—6) значений, рисовать соответствующие треугольники согласно масштабу и составлять табличку значений: ещё один повод упражняться в сокращённом умножении и делении.

При небольшом числе значений переменного угла пользоваться графическим контролем, конечно, мало смысла; но потом, один раз, в заключение — стоит, приняв данный линейный элемент за единицу и давая углу, скажем, 18 различных значений (через 5 градусов), прибегнуть к „графическому контролю" и как следует построить по точкам графики основных тригонометрических функций в пределах первой четверти.

12. *Текстовые задачи* уже не геометрического, а *физического, экономического, жизненного* содержания последуют за геометри-

[1] Например, следующее простое рассуждение исчерпывающим образом показывает, что площадь S принимает наибольшее значение 1 при $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Очевидно, S принимает наибольшее значение как раз тогда же, когда и S^2. Но $S^2 = 4u^2(1 - u^2)$. Положим $u^2 = U$ и получим $S^2 = 4U(1 - U)$. Из тождества

$$4U(1 - U) = 1 - (2U - 1)^2$$

видно, что S^2 никогда не превышает единицы, и может равняться единице только при $U = \frac{1}{2}$, т. е. при $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ческими. При графическом контроле решений, т. е. при построении графика рассматриваемой зависимости, координаты здесь могут обозначать не обязательно линейные величины, но и величины любой природы, любой размерности [1]. В этом для учащихся заключается особая трудность, к преодолению которой, как мы полагаем, необходимо подходить с большой осторожностью. Не без усилия в сознании учащегося создаётся представление о том, что физики называют „фазовой плоскостью“: но путь к созданию этого представления лежит опять-таки через „графический контроль“.

„Со скоростью v_0 путь пройден за t_0 часов; за какое число часов t тот же путь будет пройден со скоростью v (даётся ряд числовых значений t)?“. „В резервуаре объёма v_0 газ находится под давлением p_0; каково будет давление p, если объём резервуара станет равным v (даётся ряд значений v)?“ В этих задачах координаты-отрезки обозначают разные величины: и скорость, и время, и объём, и давление...

13. При графическом контроле табличных арифметических упражнений мы пользовались исключительно прямоугольной Декартовой сеткой. Преждевременно вводить не-Декартовы координатные системы педагогически рискованно: однако, если система Декарта усвоена прочно, то почему бы, объяснив предварительно, что мы по своему усмотрению решительно *меняем принцип* геометрического представления, не перейти и к использованию *полярной сетки*? До появления тригонометрических функций подходящий материал, правда, довольно беден, все же кое-какие спиралевидные графики могут быть построены и восприняты с полным успехом — в сочетании с обобщением понятия угла за пределы 360°. „Точка M движется с постоянной скоростью по лучу, который с постоянной угловой скоростью вращается около своей вершины. Нарисовать траекторию, описываемую точкой M“. „Тот же вопрос при условии, что луч заменён отрезком, вращающимся около одного из концов, причём расстояние точки M от другого конца обратно-пропорционально времени вращения“. Вот примеры относящихся сюда поучительных и вполне доступных текстовых задач.

После появления тригонометрических функций (хотя бы в пределах первой четверти) возникает богатый выбор „арифметико-тригонометрических“ задач с графическим контролем на полярной сетке.

14. Набрасывая общую схему, мы не уделили внимания отдельным *частным пунктам* программы курса алгебры, изучение которых может быть значительно улучшено в смысле качества усвоения, если будет сопровождаться надлежащим образом подобранными „арифметическими упражнениями“ указанного нами типа. Назовём некоторые примеры.

1) Табличные вычисления с графическим контролем помогут усвоению *отрицательных чисел*, заменяя догматически предписанное или логически-обоснованное заучивание правил действий живыми и наглядными геометрическими представлениями (графическая форма принципа перманентности формальных законов).

2) Тренировка в *извлечении квадратного корня*, требующая выполнения большого числа примеров, становится более осмысленной, если поставить её в связь с графическим контролем, т. е. с построением графика функции.

[1] Уже в геометрических задачах, подобных приведённой выше, отрезками изображаются площади или объёмы.

3) То же можно было бы сказать о *логарифмировании, потенцировании* и т. д., что, впрочем, вывело бы нас за пределы намеченной статьи.

6. Принципиальное замечание

Предлагаемая нами программа функциональной пропедевтики характеризуется схемой:

Формула → таблица → график → функция . . . (А).

Мы полагаем, что учащийся не встретит трудности в табличных вычислениях (числовых подстановках), если понимает смысл формулы и устремляет внимание к арифметике; не встретит трудности в составлении графика, если будет способен вычислить таблицу и пожелает подвергнуть её графическому контролю; наконец, не встретит трудности в усвоении обобщённого и отвлечённого понятия функции, если его апперцепция будет подготовлена рассмотрением достаточного числа разнообразных графиков.

От нашего внимания не ускользает иная, обратная, схема:

Функция → график → таблица → формула . . . (В),

которая имеет свои преимущества и находит защитников, аргументирующих в её пользу и от имени науки и от имени педагогической практики.

Схема (А) в известной степени находится в соответствии с более старой и более примитивной концепцией функциональной зависимости, — той концепцией, характерным выразителем которой в истории математики является Эйлер; другая схема (В) отвечает современной концепции функции, идущей от Дирихле и Римана.

Мы не видим возражений против того, чтобы в каких-то местах элементарного курса математики, скажем, в последних разделах программы VIII класса, в связи с введением понятия функции и демонстрацией примеров эмпирического содержания, частично была использована схема (В). Образчик соответствующего хода мыслей: температура (показание термометра) есть функция времени; ученик ведёт наблюдения; делает графическую запись; по записи составляет таблицу; наконец, ему, может быть, придёт идея и подобрать формулу, что он вряд ли сумеет сделать. Исчерпывающих указаний по поводу формулы не даст и учитель: нужны большая эрудиция, математический кругозор и педагогический такт, чтобы дать в этом случае правильные с научной и методической точки зрения разъяснения. Вопрос же о „подыскании формулы“ крайне интересен для учащегося.

Попытка строить функциональную пропедевтику по схеме (В) сделана в современной американской школе, хотя, наряду со сложными эмпирическими зависимостями, эта школа с самого же начала предлагает вниманию учащегося также и наиболее простые формулы. Отражая новейшие веяния математической науки, передовая американская школа идёт и дальше, выдвигая взамен Клейновского принципа „функционального мышления“ более общий принцип „относительного мышления“ (relational thinking). Мы признаём чрезвычайно интересным и заслуживающим самого внимательного изучения американский опыт; но полагаем, что схема (В) (притом в урезанной форме, так как последний шаг — переход от графика или таблицы к формуле — в средней школе сильно затруднён) *мало пригодна для того, чтобы на ней систематически строить функциональную пропедевтику*. Появление эмпирических примеров как раз придает курсу математики ту „расплывчатость“, которая неприятна многим учащимся и учащим. С другой стороны, недостаточно солидная аналитическая база не обеспечивает возможности безболезненного перехода к изучению основ анализа бесконечно-малых.

Вот почему мы *высказываемся в пользу построения функциональной пропедевтики не по схеме* (*B*), *а по схеме* (*A*), *под которую, кроме того, хотим подвести фундамент арифметической* (*вычислительной*) *тренировки*.

Что касается схемы (B), то, предусматривая использование её в отдельных случаях, и уже не в пропедевтическом плане, мы склонны сосредоточивать внимание именно на последнем шаге перехода к формуле: простейшие приёмы приближённого аналитического представления функций — линейная и квадратическая интерполяция — не за пределами понимания школьников трёх старших классов.

Следует считать нормальным, чтобы, начиная, примерно, с VIII класса, уже созревшее в сознании учащихся понятие функции было оформлено (словесно, терминологически) с тем, чтобы в дальнейшем стать *служебным инструментом* при рассмотрении самых разнообразных математических или прикладных задач. Но и тогда чисто арифметическая основа, отходя, может быть, на второй план, не должна быть окончательно утеряна.

7. Несколько методических замечаний практического порядка

В заключение обратимся к организационно-методической стороне дела.

Предлагаемая система упражнений обладает в разных смыслах высокой степенью гибкости. Мы уже отметили возможность легко адаптировать её к тому или иному изучаемому в данный момент разделу курса, к тому или иному уровню класса, наконец, к индивидуальным свойствам и способностям отдельных учеников. Существенно установить, далее, что наши упражнения в одинаковой степени могут служить материалом: 1) для *классной работы у доски*, 2) для *домашних заданий* и 3) для *классных контрольных письменных работ*. Мы представляем себе, что на протяжении курса первое, второе и третье протекает параллельно, причём первоначальный показ, демонстрация приёма проводится у доски (коллективная работа класса); основная тренировка, протекающая в рамках домашних заданий, индивидуализирована или иногда поручается отдельным группам учащихся, без запрета взаимной консультации; наконец, классные поверочные работы подводят итог достигнутым успехам в форме, исключающей возможность консультаций.

Разберём подробнее каждый из этих трёх пунктов.

1. Табличная запись не должна быть *навязана* учащимся; она вытекает естественно из принципа: „стирай всё, что не нужно, сохраняй то, что ещё понадобится". То, что ещё понадобится, ради экономии площади на доске, придётся записывать в отдельном месте, в определённом порядке: это — таблица, в тетради она попадает на „основной лист". Само же вычисление, расположенное в тетради алгорифмически („столбиком"), занимает „вспомогательный лист" и составляется из записей целого ряда операций, конечные результаты которых переносятся в таблицу; при работе на доске, из-за недостатка места, большей частью их сохранить невозможно, и тогда запись предыдущей операции стирается, а на её месте появляется новая. При коллективной работе *в классе* учитель делит доску на

две части; в левой пишет таблицу с исходными данными, приглашая затем учащихся одного за другим к доске для выполнения каждой отдельной операции в правой части доски и занесения результата в таблицу; тем временем все остальные проделывают то же в тетрадях, иногда (если операция уже усвоена) опережая стоящего у доски, сверяя его результаты со своими и делая заявления в случае расхождений. Преподаватель показывает 2—3 первых операции, а затем следит за работой ученика у доски, внося поправки (указывая на неувязки) и неукоснительно следит за *безукоризненным* расположением вычислений: терпимое отношение к одному несовершенству на доске рождает десятки несовершенств в тетрадях.

2. *Контрольная классная работа* отличается лишь двумя особенностями: 1) каждый ученик получает, лучше всего, на карточке или на билете, индивидуализированные данные или индивидуализированную таблицу с исходными данными; 2) к доске никто не вызывается, на ней записывает сам преподаватель то, что считает необходимым сообщить в порядке предварительных разъяснений. Необходимый текст и все формулы должны быть записаны на доске, на карточках же только числовые значения букв.

3. Распределяя *домашние задания*, преподаватель диктует или пишет на доске общее для всех условие, формулы, табличные схемы, а затем на карточках, или иначе, распределяет между учащимися исходные числовые данные. Распределение числовых данных в домашней работе — дело очень ответственное: необходимо, с одной стороны, обеспечить правильную количественную дозировку, а с другой, предусмотреть или желательную степень взаимных консультаций или абсолютную самостоятельность в работе. Абсолютная самостоятельность достигается (статистически), если все числовые данные будут различными, в сочетании с требованием представления вспомогательного листа. В иных же случаях преподаватель найдёт нужным оставить возможность взаимного контроля, и тогда намеренно дублирует распределение исходных данных. В случаях, требующих большей инициативы со стороны учащихся, можно образовывать целые группы учащихся с одинаковыми или сходными заданиями.

Работа у доски, домашняя работа, классная письменная работа — три взаимно дополняющих друг друга звена в нашей системе упражнений. Их следует хорошо пригонять одно к другому: какой-нибудь изъян в одном из трёх звеньев может сильно повредить целому. Первое звено легко переводится во второе или третье: например, начав работу на доске в форме двойной таблицы, после того, как у доски же сделано несколько примеров, я посажу на место стоящего у доски, впишу в клеточки, оставшиеся незаполненными, фамилии присутствующих учеников и скажу: „Каждый из вас до звонка сделает свой пример на отдельном листе“ или „Вот пример, который задаётся каждому из вас на дом“.

Оценивать отметками следует, по моему мнению, только поверочные классные работы; что касается домашних, то достаточно неукоснительно добиваться их самостоятельного и правильного выполнения.

Проверка всех письменных классных и домашних работ, сданных учителю, обязательна: иначе система упражнений теряет свою эффективность.

Мы предчувствуем ещё одно важное возражение. Постараемся отчётливо его формулировать.

Возражение третье. Как может учитель, ведущий работу в нескольких классах, справиться с колоссальным трудом: 1) подготовить различные материалы к „арифметическим упражнениям“ (условия, текстовые задания, подбор числовых данных, изготовление карточек, расчет масштабов и т. д.), 2) самое главное, — как сможет он проверить громадное число, арифметических операций в индивидуализированных заданиях?

Подобного же рода сомнения, вероятно, рождались в сознании не одного кустаря-одиночки в эпоху возникновения фабричного производства. Мы не оспариваем, что в наших предложениях, рассчитанных на массовую школу, содержится некоторый элемент „фабричности“.

Мы отвечаем:

1) Конечно, в помощь учителю полезно дать небольшое методическое руководство, содержащее образчики тщательно продуманных вычислительных упражнений. Число их не должно быть особенно велико: примерно два-три десятка на три класса (VI—VIII). В сборнике упражнений могут содержаться также и исходные числовые данные, и возможные варианты их распределения между учащимися класса; там должны быть предусмотрены и разъяснены всякого рода приёмы, которые позволят сэкономить учебное время и труд учителя.

Инициатива учителя поможет в дальнейшем улучшить выбор арифметических упражнений и методику их проведения и, может быть, доведёт их до некоторой мыслимой степени (пусть — „фабричного“) совершенства.

2) В том же руководстве, или сборнике, можно будет дать и ответы, как полагается во всяком задачнике. Но стоит ли это делать? Материал рассчитан так, чтобы учащийся сам учился обнаруживать свои ошибки. Если не все ошибки выловлены, то более опытный глаз учителя должен увидеть то, что ускользнуло от внимания ученика. Да, опытность придёт не сразу: но каждое упражнение продвинет на шаг вперед не только ученика, но и учителя. Графический метод, функциональное мышление, идея непрерывности постепенно перестанут быть пустыми словами.

Позволительно высказать мнение, что *наши предложения в значительной степени могут способствовать решению проблемы самостоятельной работы учащихся и в некоторой степени также — решению проблемы повышения методической квалификации учителя, который в новых формах учебной деятельности найдёт богатый источник для собственных размышлений и исследований.*

Я начал эту статью описанием эксперимента, проведённого в форме *классной* письменной работы в *VIII классе* одной из московских школ. Нет надобности разъяснять, что проверка этой работы свелась к просмотру тех немногих операций, которые дали результаты, не удовлетворившие или плохо удовлетворившие графическому контролю.

Закончу описанием того, как я проверил *домашнюю работу* на действия с обыкновенными дробями, проведённую в *VII классе* той же школы. В этой работе двойная таблица была использована для распределения числовых значений параметров между ученицами.

Содержание упражнения было таково:

„В формулу $y = \frac{a}{x} + \frac{x}{b}$, где

$$a = \ldots, \ b = \ldots,$$

подставить числовые значения

$$x = 1, 2, 3, \ldots 10;$$

по формуле вычислить числовые значения y, представляя их в виде десятичной дроби с округлением в двух знаках после запятой, и отметить соответствующие точки на чертеже“ [1].

a \ b	5	6	7	8	9	10
5						
6						
7						
8						
9						
10						

Числовые значения a и b я раздал, вписав фамилии учениц в незаштрихованных квадратах таблички (в классе было 30 учениц).

Собрав 30 работ, я разложил их дома на большом столе, как раз в том же порядке, который соответствовал расположению клеток в двойной таблице. Передо мной было 30 дуг гипербол; не каждая из них была безукоризненной формы: несколько фантастического вида зигзагов сразу выявили с полдесятка грубых ошибок. Затем, пробежав взглядом по каждому из горизонтальных рядов (для большей надежности контроля также и по вертикалям), я обнаружил 3—4 случая неудачно (в разрез с указаниями) взятых масштабов и один случай, когда две девочки почему-то поменялись заданиями. Так как мне было известно, что правила округления дробей предварительно не были достаточно разъяснены, то я ещё посмотрел, как обращали обыкновенные дроби в десятичные и обнаружил 2 — 3 записи вроде:

$$\frac{85}{56} = 1{,}51 \left(\text{вместо } \frac{85}{56} \sim 1{,}52 \right)$$

и отметил их для себя, решив разъяснить классу, в чем тут дело, и просить, чтобы такие вещи в дальнейшем не повторялись.

---

[1] С графическим контролем класс был ознакомлен раньше.

ARITHMETICAL EXERCISES AND FUNCTIONAL PROPAEDEUTICS IN THE MIDDLE GRADES OF SCHOOL

BY PROF. V. L. GONTCHAROV

Summary

1. The problem of overcoming „formalism in teaching mathematics" cannot be solved without both, teacher and pupil, paying special attention to the numerical meaning of the formula expressed in letters, without raising the prestige of the arithmetical computation, without a clear understanding of the calculation work to be done.

It is extremely important to make use of every possibility arising to work out the problems to a „numerical result". At the same time ways should be found to enable the teacher to direct the attention of the pupils to arithmetics not only as a side issue, but in such a manner that the arithmetical calculation should become the immediate goal of their work, and the correct numerical result would be appreciated by them and give them a feeling of satisfaction.

2. Within the limits of the teaching process at the secondary school, ways should be sought to make the pupils acquire durable skills in calculating: the every day arithmetical operations once „explained" and „logically proved" schould become so familiar to the pupils that they should be able to apply them freely and naturally in the course of their work.

Prolonged training is necessary in senior groups. Besides, the students attention should be drawn to planning their calculating work and they should be trained to check the results they are obtaining.

3. One of the most important tasks in teaching mathematics in the secondary school is to assist the pupils to grasp the general idea of functional dependence (as of a continuous curvė) and enrich their mathematical experience by analysing a large number of various examples of functions graphically expressed.

Similar preliminary instruction should be given as early as in the 6th, 7th and 8th grades, and not confined to polynomials of the first and second powers only: other more advanced means that are at the disposal of the pupils should be made use of as well. Some dfficulty arises in defining the objective points in each case convincing enough in the eyes of the pupils to justify the columns of figures he has to work out.

4. The author of the article suggests devoting part of the lessons in the 6th, 7th and 8th grades to exercises of a special type, which consist in performing a number of prescribed numerical substitutions in one given formula. The explicitly indicated aim of such exercises would be to increase the skill in working out arithmetical operations. At the same time these exercises would serve the aims of functional propaedeutics. When the pupils are doing these exercises special attention

should be paid to the question of the system to be adopted in wirking out and writing down exercises so as to facilitate the checking of the obtained numerical results. Part of these exercises might be taken from formulas used for solving problems in geometry or physics.

5. The author gives a short description of the type of exercises indicated and a number of examples which have partly been tested in experimental work.

6. The author holds that exercises of the type suggested will greatly assist pupils of mathematics to work independently, and to a certain extents help to raise the level of the teachers qualification. In these new forms of teaching activity the latter will find a wide scope for his ideas and experiments.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 6 • 1946

ГЕОМЕТРИЯ В СЕМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

Проф. Я. С. ДУБНОВ

Математика в семилетней школе ещё не имеет собственного лица. В принципе все признают, что преподавание этого предмета, как и любого другого, должно носить законченный характер, так как неполная школа для значительной массы учащихся будет последним этапом их общего образования. На деле же математика, в особенности геометрия, остаётся, пожалуй, единственным предметом, который в неполной средней школе изучается как механически отсечённая часть курса десятилетней школы.

Такое положение отражает и учебная литература: не существует учебников математики, предназначенных для семилетней школы: их функцию выполняют написанные в совершенно другой перспективе учебники, из которых используется несколько первых глав. Можно ли представить себе аналогичное явление в преподавании другого учебного предмета, скажем — физики (ближайшего к математике соседа)? Допустимо ли, чтобы оканчивающий семилетнюю школу, изучая в намеченном для средней школы объёме механику, ничего не знал об электричестве? А ведь, именно, такого рода несообразностью страдает существующая программа геометрии: оканчивающий семилетнюю школу обязан знать пять признаков взаимного расположения окружностей и в качестве апофеоза — четыре „замечательные" точки треугольника, но никогда не слышал о подобных треугольниках, о площади трапеции, о длине окружности, а вся стереометрия останется для него „высшей математикой". Правда, в недавнее время была сделана попытка исправить это положение, введя в план V—VI классов пропедевтический курс „наглядной геометрии" (46 час. по проекту 1943 г. см. [11] [1]). Но даже этот скромный паллиатив не получил осуществления.

Однако не только со стороны содержания, но и со стороны метода можно возражать против существующей системы преподавания.

Страх перед жупелом „концентризма" заставляет начинать с 12-летними детьми изучение „формально-логического" построения геометрии, выдержанного в едином стиле от VI класса до X. Можно расходиться во мнениях относительно образовательной ценности такого построения (об этом ниже), но со времён Гербарта и по мере демократизации школы педагогическая мысль укреплялась в убеждении, что насилием над психикой 12—13-летнего школьника является навя-

[1] Цифры в прямых скобках относятся к указателю литературы, помещенному в конце статьи.

зывание ему эвклидовой системы, как бы она ни модернизировалась в учебнике А. Киселёва или, чтобы взять лучший образец, Н. А. Глаголева. Прискорбные результаты такого обучения не раз отмечались в литературе (см. Т. М. Шидловская „О преподавании геометрии в VI классе" [1]).

* * *

Критиковать существующую систему преподавания и намечать пути реформы можно, разумеется, лишь после того, как точно сформулированы задачи этого преподавания. Ниже перечислены те задачи преподавания геометрии, которые представляются нам основными и бесспорными:

1. Развить правильные геометрические (в том числе, трехмерные) представления.

2. Ознакомить со способами прямого и косвенного измерения длин углов, площадей, объёмов.

3. Сообщить знания и навыки, необходимые в повседневной жизни и при изучении других предметов школьного курса (физика, география).

4. Дисциплинировать мышление, устную и письменную речь.

5. В процессе решения задач воспитывать активное мышление.

6. Заложить основу для дальнейшего обучения — в школе или путём самообразования (в частности, подготовить к усвоению идеи функциональной зависимости).

7. Дать представление о путях развития геометрии, о её роли в естествознании и технике.

Если эти принципы являются руководящими в вопросе о содержании курса, то при выборе методов преподавания решающую роль играют соображения, относящиеся к возрасту учащихся (11—14 лет).

Для характеристики возможных методов будем исходить из рациональной классификации, которой пользовалась Международная комиссия по преподаванию математики на Миланской конференции 1911 г. ([2], стр. 462)[1].

Направление A — выдержанное формально-логическое; полный отказ от интуиции; основные понятия (точка, прямая и т. д.) определяются только аксиомами (Peano, Hilbert, Halsted).

Направление B — основные понятия и связи заимствованы из опыта, дальнейшее построение должно быть дедуктивным. Различают три градации:

B_A) перечисляются все необходимые аксиомы (Sannia, D'Ovidio, Veronese, Enriques-Amaldi);

B_B) только часть аксиом указана в явном виде (Эвклид[2], Tieme, Киселёв [3], [4], Глаголев [5]);

B_C) формулируются только те аксиомы, содержание которых не представляется очевидным (Kambly, Müller).

---

[1] Характеристики направлений приведены в сокращении; ссылки на иностранную литературу воспроизведены из [2] и дополнены фамилиями русских авторов.

[2] Очевидно, имеются в виду так называемые „школьные" издания (Англия). Следует согласиться с Veronese, который, выступая на конференции [2, стр. 464], считал Эвклида идейно более близким к направлению B_A, чем к B_B.

Направление C — интуиция переплетается с дедукцией, без попыток отделить одну от другой (Borel [6], Behrendsen-Götting, Выгодский [7]).

Направление D — интуитивно-экспериментальное; геометрические факты устанавливаются путём эксперимента; логические связи отсутствуют (Perry, Астряб [8] [1]).

Миланская конференция констатировала ([2] стр. 463 и след.) полный неуспех двух крайних направлений A и D, по крайней мере, в странах Запада (добавим — и в России того времени; D оказывало некоторое влияние на советскую школу в первый период её существования). Причины этого явления понять нетрудно. Действительно, в школьном преподавании направление A (как, впрочем, и близкое к нему B_A) могло выродиться только в мелочный педантизм, отталкивающим образом действующий на ученика. Если же говорить об идее „определения через аксиомы", составляющей действительно драгоценное ядро направления A, то она доступна только высокоразвитому интеллекту: ни Эвклид, ни его последователи на протяжении 2000 лет не могли подняться до осознания этой идеи. По сравнению с A, направление B_A несколько ослабляет дидактические трудности, но достигает этого ценой утраты того идейного ядра, которое так импонирует нам в первом. В начале нашего века направление B_A имело сторонников в Италии, а также в Англии, если причислить к этому направлению и преподавание по школьным изданиям Эвклида. Больше шансов на успех имело направление D, здоровое зерно которого заключалось в том, что оно было реакцией против эвклидовой схоластики (поэтому не случаен тот факт, что „движение Перри" зародилось в Англии). Для того чтобы уяснить себе, в чём именно это направление оказалось неприемлемым для общеобразовательной школы, присмотримся ближе к судьбам его в нашей стране. Наиболее серьёзный у нас представитель экспериментального направления, А. Астряб, ставит эпиграфом к своему учебнику [8] цитату из „Положительной философии" О. Конта: „Для того чтобы определить отношение площади циклоиды к площади производящего круга, Галилей взвесил две пластинки: одну, имеющую форму круга, а другую — описанной им циклоиды, и нашёл, что последняя в три раза тяжелее первой. Отсюда Галилей заключил, что площадь циклоиды равна тройной площади производящего круга". Трудно было придумать пример, более компрометирующий ту систему, которую автор хочет защитить. Если не говорить о геометрии египетского периода, то не требуется глубоких познаний в истории науки для того, чтобы уяснить себе, насколько пример Астряба не типичен для путей действительного развития геометрии. Начиная с греческого периода, геометрия не была экспериментальной наукой, и в этом именно её принципиальное отличие от физики, с которой в остальном она имеет много общего: пользование абстракциями (твёрдое тело, светящаяся точка), дедукцией (теоремы статики), алгебраическим аппаратом (формулы геометрической оптики). Попытка придать геометрии характер опытной науки извращает историческую перспективу и препятствует выполнению одной из задач, поставленных выше перед преподаванием геометрии: „дать представление о путях развития и т. д.". Другая отрицательная сторона

---

[1] В цитированном издании приводятся и доказательства ряда теорем, но каждый раз после того, как утверждение теоремы проверено опытом.

этого направления (здесь мы говорим уже не об учебнике Астряба, см. сноску на стр. 61) заключается в том, что, отказываясь даже от доступных ученику образцов дедукции, оно не подготовляет его к продолжению образования. Таким образом, отказ школы от „движения Перри“ в его чистом виде следует считать вполне обоснованным.

Итак, перед первой мировой войной в преподавании господствовали направления B_B, $Б_C$ и C. Но в то время как на Западе всё более склонялись к последним двум, по крайней мере, в начальной стадии обучения, в России решительно преобладало направление B_B. Так как это направление в нашей школе ныне снова господствует, то становится необходимым более детальное критическое рассмотрение пригодности направления B_B для первого концентра геометрии.

Одну из отрицательных сторон существующей системы обучения мы уже отмечали: несоответствие её умственному развитию учащихся. Происходящий отсюда низкий коэфициент полезного действия приводит к тому, что даже формальный успех может быть достигнут только за счёт крайнего замедления темпов обучения, в результате чего семилетняя школа должна ограничиться небольшой и бедной содержанием частью планиметрии. Ведь мыслительные ресурсы 12—13-летнего ученика должны быть мобилизованы на то, чтобы усвоить текст ([3], стр. 4, первый урок!): „Геометрическое тело, поверхность, линия и точка не существуют раздельно. Однако при помощи отвлечения (подчёркнуто нами) мы можем рассматривать поверхность, независимо от геометрического тела и т. д.“. Позже ([3], стр. 21): „Хотя симметричные фигуры... могут быть приведены в совмещение, однако они не тождественны в своём расположении на плоскости“. Какой способностью к абстракции должен обладать тот же малолетний школьник для того, чтобы понять, что ([3], стр. 33) „Геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, называется...“? В другом учебнике, написанном, надо признать, более доступным языком, ученику VII класса предлагается выучить следующую формулировку теоремы ([5], § 140; то же повторяется в §§ 141—143): „Угол, образованный хордой и касательной, равен половине центрального угла, опирающегося на дугу, заключённную между хордой и касательной“. Одним и тем же языком говорят, обращаясь к ученикам VI и X класса! Очевидно, вслед за составителем программы, авторы цитированных учебников заботились только о нуждах десятилетнего обучения, игнорируя нашу нынешнюю школьную систему. Но и эту заботу надо признать плохо осуществлённой. Действительно, спросим себя, насколько обоснован даже в едином курсе геометрии этот возврат на 50 лет назад[1]. Здесь мы подходим к наиболее принципиальному пункту нашей критики, относящейся уже не только к семилетней, а ко всей общеобразовательной школе. Именно полвека назад, когда нео-эвклидовское направление (B_B) утверждалось в русской школе, в то же самое время в самой науке завершался процесс радикального пересмотра наших взглядов на природу геометрии. На историческом этапе, отделяющем Гильберта (Hilbert) от Лобачевского, эвклидово здание, как научная система, рассыпалось под ударами критики. Эвклидов список аксиом оказался только грубым прибли-

---

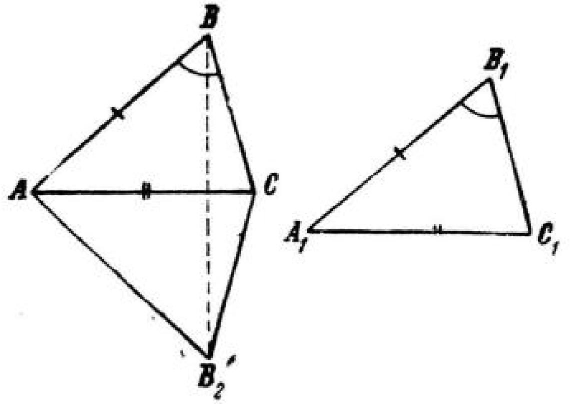
[1] Обращаем внимание на то, что в нашей школе математика является единственным предметом, по которому обучение опирается на учебники полувековой давности (Киселёв, Шапошников, Рыбкин).

жением к тому, на чём действительно может быть построена формально-логическая система геометрии. Из-за отсутствия у Эвклида аксиом порядка, недостаточности аксиом конгруэнтности и непрерывности, почти все его доказательства, перешедшие в наши учебники, оказываются неполноценными. Впрочем, давно уже было замечено, что в обычных эвклидовых доказательствах существенную роль играют чертежи, на которых расположение частей ничем не обосновано (и не может быть обосновано — при отсутствии аксиом порядка), вследствие чего не гарантированы ни допустимость предположенного чертежа, ни исчерпание всех возможных случаев. На этом основаны общеизвестные геометрические софизмы, к которым многие склонны относиться как к „математическим развлечениям“; особняком стоит Ф. Клейн (F. Klein) ([9] стр. 333—335), оценивший эти софизмы, как орудие серьёзной критики. Быть может, значительность этой критики ускользает от внимания большинства потому, что обычные софизмы основаны на так называемых „неправильных чертежах“, т. е. предполагают такое расположение частей фигуры, которое при углублённом анализе оказывается противоречащим условию теоремы. Поэтому небесполезно привести пример софизма, основанного на чертеже, хотя и возможном, но не единственно-возможном.

Излагая ниже доказательство заведомо-ошибочного утверждения, мы для удобства сравнения будем пользоваться той же формой изложения, какая принята в наших учебниках.

Теорема. Два треугольника равны, если две стороны и лежащий против одной из них угол одного треугольника равны соответствующим элементам другого треугольника.

Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ причём $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и $\angle B=\angle B_1$. Требуется доказать, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.



„Доказательство“. Приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику ABC так, чтобы их равные стороны (как раз те, которые лежат против равных по условию углов) AC и A_1C_1 совместились, причём точка A_1 совпала бы с точкой A, точка C_1 — с точкой C. Треугольник $A_1B_1C_1$ займёт положение AB_2C, причём $AB=AB_2$ и $\angle B=\angle B_2$. Соединив точки B и B_2, получим равнобедренный треугольник ABB_2 в котором углы при основании равны между собой, т. е. $\angle ABB_2=\angle AB_2B$. Отнимая эти углы соответственно от равных углов B и B_2 получим равные остатки: $\angle B-\angle ABB_2=\angle B_2-\angle AB_2B$ или $\angle B_2BC=\angle BB_2C$. Отсюда заключаем, что треугольник BCB_2 равнобедренный, именно $BC=B_2C$, следовательно $\triangle ABC=\triangle AB_2C$ по трём сторонам. Но $\triangle AB_2C$ отличается от $\triangle A_1B_1C_1$ только положением, значит теорема доказана.

Ошибка здесь заключается в том, что рассмотрено только одно из возможных расположений треугольников ABC и AB_2C и упущены другие, среди них — тот случай, когда точки B, C, B_2 оказываются лежащими на одной прямой и когда доказательство нельзя ни повторить, ни видоизменить. Входя в бо́льшие детали, можно заметить, что фигура $ABCB_2$ кажется единственно возможной только в результате того, что мы заранее изобразили треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равными, но ведь это то самое, что обычно делается при подобных доказательствах, в частности, при выводе всех признаков равенства треугольников. Бросается в глаза сходство только что приведённого доказательства с выводом „третьего признака" равенства треугольников ([3], стр. 24—25; [5], стр. 57). Теперь позволительно спросить, не преувеличена ли воспитательная ценность рассуждения, которое приводит один раз к верному, другой раз к ошибочному выводу [1]?

В борьбе за реформу преподавания геометрии уже не в первый раз традиционной системе делался справедливый упрёк в отставании от современной науки. Обычно под этим понимают игнорирование более молодых отраслей науки, какими, например, являются аналитическая и проективная геометрии. Однако эти пробелы имеют место на старшей ступени обучения, здесь же, в применении к первому концентру, главным злом является другая форма „отставания". Это — неоправдываемый нынешним состоянием науки пиэтет к эвклидовой системе, нашедший выражение в следующей цитате из наших учебников ([4], стр. 8 или [5], стереометрия, стр. 28): „...он (Эвклид) дал полное логически строгое построение геометрии, по форме в высшей степени совершенное и с точки зрения современной науки" [2]. Эвклидов гипноз или, чтоб употребить более мягкое выражение, „власть средневековой эвклидовой традиции" (Ф. Клейн), ([9], стр. 352) — вот что стоит на пути рациональной реформы преподавания геометрии. В свете современной науки, школьная геометрия должна отказаться от претензии служить привилегированной „школой дедукции", дедуктивное мышление можно и следует воспитывать также в преподавании арифметики, алгебры, реже — физики.

* * *

После этих критических замечаний, перейдём к положительной программе. Констатируя вслед за М. Симоном (M. Simon) ([10], стр. 158), что „геометрия (школьная) есть химическое соединение интуиции и логики", мы менее всего склонны занять позицию „всё или ничего". Другими словами, мы не видим себя поставленными

---

[1] Небезынтересно отметить, что в ранних изданиях учебника Киселёва теорема о равенстве треугольников по трём сторонам была изложена с большей полнотой (рассматривались три случая) и потому с воспитательной точки зрения представляла бо́льшую ценность (конечно, при обучении школьника старшего возраста, чем в наших V и VI классах). В цитируемом издании эта полнота принесена в жертву краткости, с оговоркой (см. [3] сноску на стр. 25), которая, однако, не спасает положения, так как содержит ссылку на недоказываемую теорему более сложного содержания, чем подлежащая доказательству. В учебнике Глаголева ([5], § 68) нет и этой оговорки; неполнота доказательства просто утаивается от ученика.

[2] Чрезмерная категоричность этой фразы смягчается тем, что несколькими строками ниже автор признает эвклидовы определения понятий „точка", „прямая" и т. д. „несовершенными с точки зрения современной науки" (можно было сказать резче — лишёнными всякой научной ценности). Сопоставление этих двух трудно согласуемых цитат оставляет всё же у читателя неправильное представление, будто определения являются единственным слабым местом у Эвклида.

перед альтернативой „направление *A* или *D*“ (если следовать миланской классификации). Не дедукция гильбертовского типа, а именно упомянутое „химическое соединение“ может быть усвоено младшим школьником. Но, ведь, таким соединением „стихийно“ является преподаваемая у нас ныне геометрия — скажет иной читатель. Нет, эта геометрия не достигает педагогической цели, потому что она: 1) вводит интуицию, маскируя её, как неполноправный составной элемент и выдаёт за чистую дедукцию то, что таковой не является, 2) игнорирует возрастные особенности ученика и одновременно лишает его той духовной пищи, которую он может с пользой усвоить. Вместо этого, мы предлагаем в качестве первого концентра геометрии — законченный курс, построенный на равноправии интуиции и дедукции, с постепенным повышением удельного веса последней. В дальнейшем будет изложен проект учебной программы, осуществляющей это задание. Предпошлём тексту этой программы несколько тезисов, которые помогут уяснить её структуру и содержание. Другие пояснительные замечания, более узкого методического характера и требующие ссылок на отдельные пункты программы, будут помещены вслед за её текстом [1].

1. Курс рассчитан на V—VII классы школы при 180—200 учебных часах. Предполагаются усвоенными лишь те сведения по арифметике и отчасти геометрии, которые даёт современная начальная школа. По своему содержанию и порядку изложения курс должен быть согласован с одновременно преподаваемыми курсами арифметики и алгебры.

2. В методическом отношении курс геометрии может быть охарактеризован как н а г л я д н о - д е д у к т и в н ы й. Без доказательства принимается ряд геометрических фактов, в справедливости которых можно убедить (не всегда сразу!) учащегося, опираясь на его геометрическую интуицию. Таковы, например: 1) возрастание стороны треугольника при возрастании противолежащего угла, с сохранением длин двух других сторон; 2) существование подобных фигур; 3) принцип Кавальери. Дедукция вступает в свои права постепенно, по мере того, как в ней возникает надобность и для её применения создаётся возможность. Этим не исключаются отдельные случаи применения дедукции (в целях воспитания дедуктивного мышления) к доказательству и таких предложений, справедливость которых представляется ученику очевидной (пример: прямолинейный отрезок короче ломаной, соединяющей его концы).

3. В целях согласованности преподавания с историческим ходом развития науки и общим принципом перехода от простого к сложному, сохраняется последовательность „планиметрия — стереометрия“. При этом, однако, следует избегать догматизма: трехмерные образования могут привлекаться всюду, где они помогают изучению плоских фигур (пример: в главе о площади — задача: по данным трём измерениям прямоугольного параллелепипеда определить его полную поверхность).

4. Везде, где к этому представляется повод, должна быть выдвигаема идея функциональной зависимости (может быть, без упоминания термина „функция“): изменение длины отрезка, отсекаемого сторонами угла на параллельно-перемещающейся секущей; изменение

[1] При редактировании тезисов и программы я был во многом обязан советам товарищей по работе в кабинете математики Института методов обучения АПН РСФСР.

площади сечения тела параллельно перемещающейся плоскостью (необходимо для применения принципа Кавальери) и т. п.

5. Задача воспитания геометрических представлений обычно возлагается на два школьных предмета: геометрию и черчение. Структура предлагаемой программы такова, что позволяет сосредоточить решение этой задачи в рамках одной геометрии. Вычерчивание учениками комбинированных фигур (орнаментов, паркетов) может здесь опереться не только на интуицию, но и на теоретическую базу (симметрия осевая и центральная). Упражнения подобного рода обогащают курс геометрии, придают ему более живое содержание и большую увлекательность.

6. Программа связывает преподавателя лишь в смысле объёма знаний, сообщаемых ученикам, и принципиальных установок, но в остальном допускает изменение порядка отдельных вопросов или иную их трактовку. Например, можно отказаться от применения принципа Кавальери, если удастся заменить это изложение другим, равноценным в научно-педагогическом отношении и укладывающимся в те же рамки времени.

7. Учебник геометрии, особый для семилетней школы, не должен быть сухим конспектом, состоящим из определений и теорем [1] (как например, книги Киселёва [3, 4]) столь невыгодно контрастирующим с принятыми в нашей школе учебниками по другим предметам. Новый учебник должен приблизиться к живой повествовательной форме изложения (хотя бы ценой значительного увеличения объёма); пусть наряду с чертежами появятся рисунки, вызывающие в ученике ассоциации геометрических схем с представлениями, получаемыми из внешнего мира. Приближения к этому типу учебной книги мы уже имеем: (Борель [6], Астряб [8], Выгодский [7], Bourlet [13]). В тексте учебника автор должен обращаться всегда к ученику, а не к преподавателю. Для последнего пусть будет написана тем же автором другая книга (комментарий к учебнику), содержащая все указания, способные облегчить труд преподавателя, начиная от общих методических принципов и кончая дополнительными задачами и упражнениями. Это — лучшая форма методики предмета.

Проект программы

1. Сведения по ранней истории геометрии. — 2 час.

2. Геометрическое тело и его поверхность. Плоская поверхность. Изображение тела посредством: 1) модели, 2) плоского чертежа. Линии и точки. Прямолинейный отрезок, ломаная, кривая. — 2 час.

3. Чертёжная линейка. Продолжение прямолинейного отрезка. Луч, прямая. Перенос отрезка. Сравнение отрезков наложением. Сложение и вычитание отрезков. — 3 час.

4. Измерительная линейка и её применение к действиям над отрезками (включая деление отрезка на равные части). — 2 час.

5. Чертёжный циркуль. Окружность, радиус, диаметр, хорды. Перенос дуги вдоль окружности. Сложение и вычитание дуг на одной и той же окружности. Дуговой градус. Измерение дуг в градусах. — 5 час.

---

[1] Нетрудно понять, как эта форма изложения исторически сложилась под влиянием необоснованных претензий геометрии, как предмета преподавания, служить образцовой школой дедукции.

6. Пучок лучей. Угол. Отображение лучей пучка на точки окружности; соответствие между центральными углами и дугами. Угловой градус. Транспортир. Перенос угла. Сравнение наложением. Сложение и вычитание углов. — 4 час.

7. Углы с общей вершиной: смежные, вертикальные. Углы: прямой, развёрнутый, полный. Сумма смежных углов; обратное предложение. Равенство вертикальных углов. Деление угла пополам; биссектриса. Перпендикуляр. Чертежный треугольник. Эккер. — 6 час.

8. Параллельные отрезки, лучи, прямые. Признаки параллельности двух прямых, пересечённых третьей: 1) по перпендикулярности к секущей; 2) по равенству соответственных углов. Построение параллели к данной прямой с помощью: а) рейсшины, б) линейки и угольника. Углы с соответственно параллельными сторонами. — 5 час.

9. Треугольник, многоугольник. Сумма углов треугольника и многоугольника. Внешние углы. — 4 час.

10. Осевая симметрия. Оси симметрии: 1) прямолинейного отрезка; 2) прямой линии; 3) угла; 4) пары параллельных прямых; 5) равнобедренного треугольника, 6) круга и окружности; 7) круговой дуги. — 4 час.

11. Сравнение расстояний. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и обратно. Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных; расстояние точки от прямой. Сторона треугольника меньше суммы двух других и больше их разности. Прямолинейный отрезок короче ломаной, соединяющей его концы. Если треугольник изменяется так, что две его стороны остаются без изменения, а угол между ними увеличивается от 0° до 180°, то третья сторона увеличивается (от разности до суммы двух других сторон). — 6 час.

12. Три признака равенства треугольников. Признаки равенства прямоугольных треугольников. — 5 час.

13. Построения циркулем и линейкой: разделить отрезок пополам (построить ось симметрии отрезка); восставить перпендикуляр к данной прямой из данной точки; опустить перпендикуляр из данной точки на данную прямую; через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой; разделить данный угол пополам; построить: 1) окружность, проходящую через две, три данных точки, 2) центр начерченной окружности, 3) середину круговой дуги. — 8 час.

14. Касательная к окружности. Перпендикулярность касательной к радиусу, проведённому в точку касания; обратное предложение. Вписанный и описанный углы. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Частный случай: угол, опирающийся на полуокружность. Измерение с помощью дуг: 1) угла между касательной и хордой; 2) между двумя касательными. — 5 час.

15. Параллелограм, свойства углов и диагоналей. Отличительные признаки параллелограма. Прямоугольник, ромб, квадрат; их отличительные свойства; оси симметрии. Трапеция. Равнобедренная трапеция; существование оси симметрии и вытекающие отсюда свойства. — 6 час.

16. Деление отрезка на несколько равных частей. Средние линии треугольника и трапеции. — 2 час.

17. Центральная симметрия. Центр симметрии отрезка: круга, параллелограма. Правильные многоугольники. Деление окружности на несколько равных частей. — 6 час.

18. Измерение одного отрезка другим. Общая мера и отношение двух отрезков. Пропорциональность отрезков двух пар. Теорема: если прямая, пересекающая стороны угла, перемещается, сохраняя постоянное направление, то 1) длина отрезка, отсекаемого прямой от одной из сторон угла, 2) длина отрезка этой прямой, заключённого внутри угла, изменяются пропорционально расстоянию секущей от вершины. Поперечный масштаб. — 5 час.

19. Подобие фигур: отношение подобия. Увеличение-уменьшение фигуры в данном отношении: 1) с помощью квадратных сеток (приближённо), 2) посредством лучистого растяжения-сокращения (гомотетия). Гомотетия отрезка, треугольника, угла. План. Пантограф. — 8 час.

20. Площадь прямоугольника. Измерение (приближённое) площади любой фигуры с помощью палетки. Площадь параллелограма, треугольника, трапеции. Правило Кавальери для плоских фигур. Изменение формы фигуры с сохранением площади (превращение многоугольника в треугольник; превращение в прямоугольник). Измерение площади многоугольника посредством разбивки на: 1) треугольники, 2) трапеции. — 7 час.

21. Теорема Пифагора, противоположная ей и обратная. — 6 час.

22. Отношение площадей подобных фигур. Отношение площадей двух кругов. Число π и его приближённая оценка. Длина окружности и площадь круга. — 5 час.

23. Задача „решения треугольника": 1) построением, 2) вычислением. Синус, косинус и тангенс острого угла; примеры их вычисления (углы в 45°, 30°, 60°). Формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Натуральные таблицы: применение к решению прямоугольных треугольников. — 8 час.

24. Разделение прямоугольного треугольника на два высотой, опущенной на гипотенузу. Соотношение между катетами, гипотенузой, высотой и проекциями катетов на гипотенузу. Второе доказательство теоремы Пифагора. — 4 час.

25. Теорема синусов и косинусов для остроугольного треугольника. Случай тупого угла. Обобщение понятий sin и cos на случай прямого и тупого угла. Площадь треугольника и параллелограма по двум сторонам и углу между ними. — 6 час.

26. Плоские и кривые поверхности. Прямые и плоскости в пространстве. Перпендикулярность и параллельность. Двугранные и многогранные углы. Угол между двумя прямыми (скрещивающимися), между прямой и плоскостью. — 10 час.

27. Призма и цилиндр (прямые и наклонные). Сечения этих тел плоскостями, параллельными основаниям. Перпендикулярное сечение. Объём прямоугольного параллепипеда. Правило Кавальери для сравнения объёмов. Объём любой призмы и цилиндра. Развёртки прямой призмы и цилиндра вращения; площадь боковой поверхности. Боковая поверхность наклонной призмы. — 8 час.

28. Пирамида и конус. Сечения этих тел плоскостями, параллельными основанию; закон изменения площади сечения. Объём пирамиды и конуса. Развёртка правильной пирамиды и конуса вращения. — 8 час.

29. Шар. Сечение плоскостью. Закон изменения площади сечения при параллельном смещении секущей плоскости. Равновеликость полушара с телом, образуемым вращением прямоугольного треугольника. Объём шара. — 6 час.

30. Поверхность шара. — 2 час.

31. Объём тела произвольной формы. Подобные тела; отношение их объёмов и поверхностей. — 4 час.

Разъяснения и методические указания [1]

1. Возникновение приёмов косвенных измерений.

2. Вместо псевдо-определений Эвклидова стиля — примеры употребления терминов „точка“, „прямая“ и т. д. в повседневной жизни. Условное изображение линий и точек в геометрии.

3. Проверка линейки (переворачиванием). Различные способы проведения и продолжения прямолинейных отрезков: натянутая нить (верёвка); провешивание; сгибание листа бумаги и т. п. Перенос отрезка с помощью: 1) бумажной полоски, 2) мерительного циркуля.

4. Приближённый характер измерения и результатов действий, осуществляемых посредством измерений. Глазомерная оценка длин отрезков, в дальнейшем повторяемая.

5. Скольжение дуги вдоль окружности. Отсюда — равенство хорд, стягивающих равные дуги. Обратное утверждение (для дуг, не превышающих полуокружности) постулируется и служит основанием для переноса дуги с помощью циркуля. Функциональная формулировка: если один конец дуги закреплён, а другой удаляется от него, двигаясь по окружности, то стягивающая дугу хорда возрастает, пока не сделается диаметром (модель). Следует подчеркнуть, что градусная мера дуги не есть мера её длины (принципиальное отличие от измерения отрезков).

6. Перенос угла с помощью: 1) прозрачной бумаги: 2) малки; 3) циркуля и линейки. Измерение угла на чертеже и на местности. Астролябия. Глазомерная оценка градусной меры угла, в дальнейшем повторяемая.

7. Равенство вертикальных углов получается в результате решения задачи: по одному из четырёх углов, образуемых пересечением двух прямых, найти остальные. Деление угла пополам перегибанием листа бумаги (приближённо — измерением с помощью транспортира). Деление пополам развёрнутого угла. Бумажная модель прямого угла — складыванием листа бумаги вчетверо. Проверка угольника. Решение с помощью угольника (и если понадобится — линейки) задач: 1) к данной прямой из данной на ней точки восставить перпендикуляр, 2) на данную прямую из данной вне её точки опустить перпендикуляр. Кроме обычных вычислительных задач, относящихся к углам с общей вершиной, задачи типа: найти угол между биссектрисами двух смежных углов, двух вертикальных углов.

8. В связи с определением параллельности, уместно сказать о скрещивающихся прямых в пространстве. Признаки параллельности могут быть доказаны от противного или же приняты без доказательства. Единственность параллели постулируется (говорить здесь об аксиоме не обязательно). При доказательстве теоремы об углах с соответственно параллельными сторонами точно формулируется понятие об одинаковой или противоположной направленности двух лучей (в первом случае лучи лежат на одну сторону от прямой соединяющей их начала, во втором — по разные стороны). Эти определения используются при доказательстве.

[1] Нумерация пунктов та же, что в программе.

9. Доказательству теоремы о сумме углов треугольника может предшествовать (или за ним следовать) эксперимент: измерение углов треугольника транспортиром, опыты с бумажным треугольником. Из многоугольников достаточно рассмотреть выпуклые, пояснив на примерах справедливость формулы 2d (n — 2) для более широкого класса многоугольников.

10. Определение симметрии — с помощью перегибания плоскости. Желательно рассмотреть примеры наличия или отсутствия осевой симметрии у известных ученику фигур (например, букв печатного алфавита; круга с хордой; с двумя параллельными хордами и т. п.). Особо выделить случаи бесконечного множества осей симметрии (прямая, пара параллельных прямых, круг). После того, как из соображений симметрии установлено равенство углов при основании равнобедренного треугольника (и обратная теорема), решаются задачи на определение углов этого треугольника, когда дан один из внутренних или внешних его углов. Частный случай — равносторонний треугольник. В дальнейшем к осевой симметрии плоских фигур возвращаются всякий раз, как к тому представится случай.

11. Сравнение стороны треугольника с суммой и разностью двух других сторон, в обоих случаях — геометрически. Для сравнения длины отрезка с длиной ломаной — упрощённое доказательство (типа $AB < ACB < ACDB < ACDEB$), или же вовсе опустить эту теорему. Теорему о треугольнике с изменяющимся углом можно дать без доказательства, но обязательно с демонстрацией модели (две линейки, соединённые шарниром, с нитью, натянутой между их концами). Связать эту тему с предыдущей (осевая симметрия), решая заинтересовывающие школьников задачи о „кратчайших путях“ (типа „кратчайший путь из A в B, с заходом на данную прямую“).

12. Доказательствам предшествуют построения треугольников — каждый раз по тем элементам, которые предполагаются одинаковыми у сравниваемых треугольников. Равенство по трем сторонам может быть сведено к равенству по двум сторонам и углу между ними на основании последней теоремы предыдущего раздела. Однозначная определённость треугольника с тремя заданными элементами демонстрируется на моделях (например, для равенства по трём сторонам — шарнирный треугольник; противопоставление жёстких систем нежёстким, с примерами из жизни и техники). Приложения к измерениям на местности.

13. Кроме перечисленных задач, предлагается для самостоятельного решения ряд доступных задач на построение, которые с этого момента входят в постоянный обиход. Разъясняются требования, предъявляемые к решению таких задач: описание построения; доказательство его правильности; выяснение (в доступных случаях) условий разрешимости и числа решений.

14. Симметрия фигуры, состоящей из круга и двух касательных. Центроискатель. Построение касательных: 1) в точке, лежащей на окружности, 2) из внешней точки. Построение перпендикуляра к отрезку в его конце, прямоугольного треугольника — по гипотенузе и катету. При недостатке времени, измерение нецентральных углов с помощью дуг может быть опущено.

15. При изучении параллелограма широко пользоваться шарнирными моделями („параллельные линейки“, весы Роберваля).

16. Практические способы деления отрезка (деление доски на полосы одинаковой ширины: параллельные линейки, соединённые нитями).

17. Выяснение наличия или отсутствия центра симметрии у знакомых ученику фигур. Деление окружности на 4, 6, 3, 8 равных частей. Вычерчивание орнаментов и паркетов.

18. Независимость отношения от выбора общей меры не доказывается. Отмечается возможность несоизмеримости (для сильного состава класса — пример: если бы диагональ квадрата была соизмерима с его стороной, то нашлось бы целое число, квадрат которого равен удвоенному квадрату другого целого числа). Материально-заданные отрезки практически соизмеримы. В дальнейшем случай несоизмеримости игнорируется.

19. Подобие двух фигур произвольной формы характеризуется пропорциональностью всех сходственных отрезков и равенством всех сходственных углов. Вычерчивание фигуры, подобной данной, с помощью обоих приёмов, указанных в программе. Съёмка плана; астролябия, мензула. Основанное на интуиции перенесение гомотетии в пространство (проекционный фонарь).

20. К тому, что учащийся уже знает о площади прямоугольника (когда длины сторон выражаются целыми числами), добавляется случай измерений, выраженных дробями. Правило Кавальери поможет уяснить ряд случаев эквивалентного преобразования фигур и служит пропедевтикой к аналогичному правилу для сравнения объёмов.

21. Первая формулировка и доказательство — с помощью площадей (но не по Эвклиду). Разнообразные применения к вычислительным задачам: прямоугольный треугольник; равнобедренный; равнобедренная трапеция и т. д. Знакомство с противоположной и обратной теоремами: 1) позволяет определить вид каждого угла (острый, прямой или тупой) треугольника, когда известны три его стороны, 2) устраняет опасность неправильных ссылок (на прямую теорему, вместо обратной).

22. Теорема об отношении площадей не доказывается, а иллюстрируется наложением на обе фигуры квадратных сеток, имеющих то же отношение подобия, что и рассматриваемые фигуры.

23. Многочисленные приложения к задачам геометрическим и практическим.

24. Соотношения появляются в результате сравнения формул, получаемых для синуса и тангенса острого угла, одного и того же для трёх прямоугольных треугольников. Теорема Пифагора в виду её важности заслуживает второго доказательства.

25. Обобщение представляет, кроме практической ценности, также методологическую, являясь хорошим образцом „принципа перманентности". Решаются вычислительные задачи, в том числе определение периметров и площадей правильных многоугольников (сравнение с окружностью и площадью вписанного или описанного круга). При недостатке времени пункты 24, 25 могут быть перенесены в курс VIII класса.

26. Эта часть курса носит преимущественно описательный характер, опираясь на знакомство ученика с несколькими телами (прямоугольный параллелепипед, пирамида, конус, цилиндр, шар), определения которых уточняются. Широко используются модели. Решаются стереометрические задачи, включая и требующие применения тригонометрии.

27. Призма и цилиндр объединяются законом постоянства сечения, параллельного основаниям. Правило Кавальери позволяет свести задачу измерения объёмов этих тел к такой же задаче для прямоугольного параллелепипеда. Сюда же можно присоединить изучение

трехгранной призмы, у которой за основание принята четырехугольная грань (с такой именно терминологией ученик встретится в оптике); объём равен половине произведения площади основания на высоту.

28. При выводе формулы объёма можно воспользоваться „расширенным правилом Кавальери" (площади сечения обоих тел одной и той же плоскостью находятся в постоянном отношении).

29. В качестве задач могут быть выведены формулы для вычисления объёма частей шара (шаровой сегмент и шаровой слой).

30. Порядок тем 29—30 установлен в предположении, что формула для поверхности шара будет выведена из формулы для объёма.

31. Аналогия с определением плоской фигуры (вместо квадратной сетки, кубическая решётка). Отсюда — отношение объёмов подобных тел (ср. п. 22). При недостатке времени этот пункт может быть опущен.

Теперь мы можем, на базе определённого проекта программы, вернуться к спору о двух системах преподавания и рассмотреть те возражения, которые делаются в защиту существующей и против новой системы.

В о з р а ж е н и е 1-е. Образовательное значение модернизированной эвклидовой системы состоит в том, что она является незаменимой школой дедуктивного мышления. Поэтому изучение даже фрагмента из эвклидова наследия даёт свой воспитательный эффект. Образующийся при этом пробел в запасе геометрических фактов может быть восполнен кратким курсом „наглядной геометрии", построенным на экспериментально-догматической базе [1].

Мы оспариваем оба тезиса этого возражения. Из того, что было сказано выше о научной ценности эвклидовой системы, следует, что стремление сохранить её ценою стольких жертв ничем не оправдано. По поводу пропедевтического курса геометрии надо прежде всего задуматься над причинами неуспеха попыток осуществить такой курс в нашей дореволюционной, а затем и в советской школе. Если, как это делалось и снова предлагается проектом 1943 г. [11], пропедевтике геометрии уделяется небольшое число часов в V—VI классах, причём в основу преподавания положены эксперимент и догматически-сообщаемые правила, то курс оказывается бледным и слабо закрепляется в сознании учащихся. Если же значительно увеличить продолжительность курса и шире применять дедукцию, то получится нечто близкое к предлагаемой нами программе и не соответствующее обычному пониманию пропедевтики. Такой курс во всяком случае поглотил бы всё время, отводимое геометрии в семилетней школе.

В о з р а ж е н и е 2-е. Предлагаемый курс настолько насыщен содержанием, что осуществление его в рамках отведенного времени нереально.

Это возражение не находит себе опоры в опыте нашей и особенно зарубежной школы. Можно привести несколько примеров преподавания, которое близко к нашему проекту по объёму, по продолжительности и по возрасту учащихся.

---

[1] Мы уже отмечали, что сторонники существующего преподавания геометрии, декларируя эту поправку, легко мирятся с тем, что на деле она не осуществляется.

а) В дореволюционных городских и высших начальных училищах преподавался „сокращённый“ курс геометрии, который, страдая многими недостатками, был, однако, законченным, достаточно насыщенным и при этом не встречал препятствий в виде недостаточной продолжительности или недоступности для учащихся.

б) В настоящее время для наших ремесленных и железнодорожных училищ принят учебник геометрии Выгодского [7]. Книга предназначена для учеников той же подготовки и того же возраста, что и в семилетней школе. Остальные условия преподавания в семилетней школе, пожалуй, более благоприятны, чем в ремесленной, где общеобразовательные предметы поглощают гораздо меньшую долю времени и внимания учащихся. Между тем объём сведений, содержащихся в учебнике Выгодского, равно как и уровень изложения, очень близки к тем, которые предложены нами. Если в нашей программе иногда больше подчёркиваются общеобразовательные элементы, то у Выгодского зато немало внимания уделено техническим приложениям, которые для семилетней школы не обязательны. Не разделяя взглядов автора на трактовку отдельных вопросов, я считаю книгу очень удачной реализацией направления *С*. Хотя ещё рано говорить об итогах преподавания по этому учебнику, однако, „педагогическая интуиция“ подсказывает осуществимость такого преподавания[1], быть может, в семилетней школе с большей уверенностью, чем в ремесленной.

в) В австрийской Untergymnasium начала века (более поздними сведениями мы не располагаем; см. [12], стр. 61–88) первый концентр геометрии преподаётся на протяжении $3^1/_2$ лет при $1^1/_2$ учебных часах в неделю. Судя по программе и инструкциям к ней, объём преподавания в некоторых отношениях выше предлагаемого нами (в курс входят: прямоугольные координаты, более сложные задачи на построение; элементы сферической геометрии; правильные многогранники), в других — ниже (отсутствуют элементы тригонометрии); в целом, отклонения компенсируются.

г) Для первого концентра геометрии во французской школе начала нашего века характерны учебники Бореля [6], и, в особенности, Бурле [13]. Второй из этих учебников, написанный по программам 1909 г., рассчитан на 4 года обучения в мужских школах и (с небольшими сокращениями) на 3 года в женских. Большей продолжительности обучения соответствует заметно большее содержание. Например, у Бурле находим: теоремы о биссектрисах внутреннего и внешнего углов треугольника; степень точки относительно окружности; теоремы о трехгранных и многогранных углах; тригонометрию, включая теоремы синусов и косинусов[2] (напомним, что у нас последние теоремы отнесены к факультативным). Степень трудности задач во многих случаях предполагает более высокую подготовку, чем та, на которую мы можем рассчитывать в семилетней школе.

Возражение 3-е. Если бы удалось выполнить предлагаемую программу, то оказалось бы обескровленным преподавание геометрии в VIII—X классах. Повторение тех же фактов, хотя бы с более глубоким обоснованием, не заинтересует учащихся. Накладывать заплаты в виде дополнений к тем или другим главам — потеря цель-

---

[1] Повидимому, таково же впечатление тех компетентных органов и специалистов, которые аппробировали издание книги большим тиражом, в качестве единственного учебника, отвечающего своему назначению.

[2] В программе упоминается также синусоида.

ности. Отказаться от этих дополнений — ущерб для подготовки к вы шей школе.

Боязнь того, что во втором концентре ослабеет интерес учащихся к предмету, ни на чём не основана. Почему не проявляют этой боязни физики, которые в своём втором концентре преподают те же разделы, что в первом: механику, теплоту, электричество и т. д.? Более того, некоторые из окончивших среднюю школу будут изучать в вузе третий концентр физики, с той же номенклатурой разделов, и никогда мы не слышим об упадке интереса, вызванном этой концентрической системой. Обратимся, наконец, к опыту, который накоплен за рубежом в деле преподавания самой геометрии. В австрийской школе, после того, как Untergymnasium даёт $3^1{}_2$-летний насыщенный содержанием курс геометрии (см. выше), начинают снова с параллельных прямых и равенства треугольников в Obergymnasium (4 года). Борель в предисловии к немецкому изданию своего учебника рекомендует ([6], стр. XVIII) в качестве следующего концентра классический курс Адамара, излагающий всю элементарную геометрию ab ovo[1]. По поводу беспокойства за подготовку к высшей школе надо, наконец, ясно сказать, что 10-летняя общеобразовательная школа не может ставить задачей полностью вооружить учащихся для конкурсных экзаменов в те вузы, которые предъявляют повышенные требования к математической тренировке[2] (и это обстоятельство надо учесть уже при построении программы семилетней школы). Составитель программы должен иметь перед собой не только облик будущего математика или инженера, но и юриста, историка, врача. Задачу специально математической тренировки и расширения объема знаний может взять на себя бифурцированный XI кл сс, а пока его нет — I курс высшей школы (вспомним, что на этот путь стали дореволюционные высшие женские курсы, а позже — наши педагогические институты).

Возражение 4-е. Радикальная ломка преподавания опасна. Школа допускает только медленную эволюцию, в процессе которой создаются новые учебники, методическая литература, переучиваются педагогические кадры.

Здесь содержится, собственно, не отрицание реформы, а только призыв к осторожности в её проведении. К этой осторожности (не переходящей, однако, в робость) мы присоединяемся. Массовой реформа может стать, конечно, после создания новых учебников,

---

[1] Здесь не место обсуждать проблему второго концентра геометрии во всей её полноте, что вывело бы нас далеко за рамки этой статьи. Тем не менее, разрешим себе сказать, что упомянутая в тексте система не кажется нам наилучшей. Можно было бы, не возвращаясь к планиметрии (подобно тому, как не возвращаются к арифметике, не смущаясь тем, что в младших классах её теоретический уровень, по необходимости, намного ниже, чем в последующем преподавании), посвятить один год (VIII класс) углубленному изучению той части стереометрии, которая, по общему признанию, составляет наиболее слабое место в современном преподавании: прямые и плоскости в пространстве, многогранники, параллельная проекция — с направленностью в сторону: а) развития пространственных представлений, б) выяснения роли аксиом (которые именно здесь не тривиальны), в) укрепления связи с тригонометрией. После этого IX класс посвятить введению в аналитическую геометрию, которая должна изучаться в первую очередь как новый метод и только во вторую очередь как источник новых геометрических образов (конические сечения). В X классе — единый курс математики, куда геометрия войдёт в качестве составного элемента (например, вычисление объёмов с помощью интегрирования).

[2] Иная точка зрения привела бы к тому, что представители гуманитарных дисциплин могли бы с основанием потребовать возрождения классического образования (латинский и греческий языки).

но к экспериментальной проверке новой программы в немногих школах следует приступить немедленно. Против характеристики наших предложений как радикальных спорить не будем. Этот радикализм имеет корни в действительно исключительной ситуации: полувековой застой в преподавании геометрии может быть преодолён только исключительными средствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Материалы совещания преподавателей математики средней школы. Учпедгиз, 1935.
2. Compte Rendu du Congrès de Milan, 18—21, IX, 1911; напеч. в журн. L'Enseignement Mathématique, XIII, 1911, стр. 437—511.
3. Киселёв, Геометрия. Ч. I. Учпедгиз, 1938.
4. „ „ Ч. II, 1940.
5. Глаголев, Элементарная геометрия. Планиметрия, 1944. Стереометрия, 1945.
6. Борель, Элементарная математика. Ч. II. Геометрия. Изд. Матезис, 1912.
7. Выгодский, Геометрия. Гостехиздат, 1944.
8. Астряб, Курс опытной геометрии. ГИЗ, 1925.
9. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. II, ГТТИ, 1934.
10. Симон, Дидактика и методика математики в средней школе. Изд. „Физика", СПБ, 1912.
11. Программы средней школы. Математика (проект на правах рукописи). Наркомпрос РСФСР, 1943.
12. Сборник программ и инструкций по преподаванию математики в Западной Европе. М., 1914.
13. C. Bourlet, Eléments de géométrie. Paris, Hachette, 1910.

GEOMETRY AT A SEVEN-YEAR SCHOOL

BY PROF. J. S. DUBNOV.

Summary

The initial point of this paper is that the course of geometry taught at the seven-year school should form a subject though this is not the case at the present time. The author enumerates the tasks of teaching geometry and analyzes the methods which have been applied to solving hem. He considers that the chief obstacle in introducing a reform, the necessity of which has become acute, is an exaggerated devotion to Euclid, which finds no support in contemporary science. The author puts forward the principle that at the first stage of teaching intuition and deduction have an equal bases in truth; he gives a detailed plan for a three year programme (grades V, VI and VII), each point of which is supplied with methodical explanations. The article concludes with an analysis of the objections brought forward against the new system and in favour of the existing ones.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 6 · 1946

ВОПРОСЫ МЕТОДОЛОГИИ И МЕТОДИКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

Проф. Н. Ф. ЧЕТВЕРУХИН
член-корреспондент АПН РСФСР

I. Развитие пространственных представлений учащихся и задачи на построение

Как неоднократно отмечалось, одним из наиболее существенных дефектов математического образования учащихся в средней школе является отсутствие у них хорошо развитых пространственных представлений.

„Как показывают приемные испытания во втузах, — пишет в предисловии к своей книга Б. В. Романовский[1], — учащиеся, за очень редким исключением, поражают почти полным отсутствием пространственного воображения".

Этот недостаток в сильнейшей степени затрудняет их учебную работу во втузе или техникуме, вынуждая иногда переходить в другие учебные заведения, где нет таких предметов как черчение, начертательная геометрия, детали машин и т. п., которые им не удаётся одолеть, главным образом, вследствие недостаточного развития пространственных представлений.

Тот же порок обнаруживается у тех учащихся, которые после окончания средней школы избирают технические профессии, идут работать на предприятия. Всё это особенно нетерпимо в нашей стране, где развертывается огромное строительство, наблюдается невиданный рост техники и изобретательства.

Итак, приходится признать, что средняя школа не даёт ещё необходимой подготовки учащимся в области пространственных представлений и умения применять последние в практической жизни, в частности — умения свободно оперировать с пространственными формами на проекционном чертеже.

Можно указать две главные причины этого явления. Первая — это плохая постановка, а иногда и полное отсутствие черчения (а также и рисования) в школе. Не раз и в печати, и в устных выступлениях писалось и говорилось о заброшенности этого участка работы школы. Однако и до сих пор почти ничего не сделано для исправления положения.

Вторая причина — неудовлетворительная методика преподавания курса геометрии (и в особенности — стереометрии) в школе. В ча-

---

[1] Романовский Б. В. Задачи на построение в стереометрии. Учпедгиз М., 1936, стр. 3.

стности,—почти полное отсутствие задач с геометрическим содержанием, недостаточное внимание к геометрическим построениям.

Президент Московского математического общества проф. П. С. Александров в своей речи на совещании преподавателей математики средней школы в 1935 г. говорил:

„Между прочим, преподавая в университете, я постоянно должен считаться с тем фактом, что у нас студенты совершенно недостаточно знают элементы стереометрии. Преподавание стереометрии в средней школе сплошь и рядом ограничивается одним бесконечным вычислением поверхностей и объёмов, готовым применением формул. Учащийся приобретает известную быстроту, вернее, натаскивается на применении этих формул, но даже самое простейшее соотношение фигур в пространстве для него остаётся совершенно недоступным и совершенно непонятным. Мне приходилось на первом курсе математического факультета слышать вопрос такого рода: не будет ли прямая, параллельная данной плоскости, параллельна всякой прямой, лежащей в этой плоскости? Над устранением этого недопустимого положения вещей педагогам необходимо работать. Учащиеся должны приобрести знания элементарных пространственных фигур и навык в применении этих знаний. Задача воспитания пространственных представлений должна в гораздо большей степени интересовать преподавателя, чем это имеет место сейчас. Первая, наиболее элементарная, часть стереометрии должна быть выведена из того состояния загона, в которое она совершенно незаслуженно сейчас попала“ [1].

Не надо забывать, что за редкими исключениями, школьные учителя придерживаются стабильного учебника и стабильного задачника. Поэтому в большинстве школ решаются только такие задачи и разбираются такие примеры, которые имеются в стабильных пособиях. *Особенно плохо обстоит дело с задачами на построение в пространстве.* В стабильном учебнике Киселева („Геометрия", ч. II) [2] о задачах на построение говорится лишь в первой главе; вторая глава посвящена вопросам начертательной геометрии (эпюры Монжа). В последующих главах, особенно интересных с точки зрения задач на построение, последние совершенно отсутствуют.

В стабильном задачнике Рыбкина („Стереометрия", ч. II) собраны преимущественно задачи на вычисление [3]; задачи на построение почти не встречаются, да и в тех случаях, когда их можно „усмотреть" в содержании задачи, преподавателю самому приходится выдвинуть дополнительные требования о построении той или другой фигуры на чертеже.

Таким образом можно констатировать, что стереометрические задачи на построение, особенно ценные для развития пространственных представлений, не нашли ещё должного места в средней школе, что отразилось на знаниях и навыках учащихся.

Такое положение дела не могло, конечно, ускользнуть от внимания преподавателей математики и вызвало отдельные попытки с их стороны исправить указанные недостатки в преподавании геометрии. Особенно следует отметить уже цитированную выше работу Б. В. Ро-

[1] „Материалы совещания преподавателей математики средней школы" (март — апрель, 1935 г.). Учпедгиз, 1935, стр. 5.

[2] Киселёв А. П., Геометрия, ч. II, под ред. проф. Н. А. Глаголева (учебник для средней школы). Учпедгиз, 1940.

[3] Напомним, что до переработки В. А. Ефремовым задачник Рыбкина носил название „Сборник геометрических задач на вычисление".

мановского, о которой ещё будет идти речь впереди, а также его „Дополнительный сборник задач по стереометрии“ [1].

Однако по причинам, которые отчасти уже были рассмотрены выше и будут ещё выясняться в ходе дальнейшего изучения вопроса, заметного улучшения достигнуть не удалось, и проблема насыщения школьного курса геометрии задачами геометрического содержания и, в частности, задачами на построение остаётся весьма актуальной.

2. Обоснование геометрических построений на плоскости

В первой части стабильного учебника Киселева (планиметрия) уделено довольно значительное место геометрическим построениям с помощью линейки и циркуля.

Другие инструменты, в частности, угольник, фактически не применяются, о чём приходится пожалеть, так как на практике угольник является обычным чертёжным инструментом наряду с линейкой и циркулем и в ряде случаев позволяет значительно упрощать построения [2].

„Заметим, — говорится на стр. 33 стабильного учебника, — что в элементарной геометрии рассматриваются только такие построения, которые могут быть выполнены с помощью линейки и циркуля. Употребление чертёжного треугольника и некоторых других приборов, хотя и допускается ради сокращения времени, но не является необходимым“.

Однако как можно видеть из разобранных в учебнике задач на построение, угольник фактически почти не используется. Лишь при построении перпендикуляра, а также в задаче на построение параллельной прямой, рекомендуется применять угольник [3].

Следует признать, что приведённая выше мотивировка стабильного учебника совершенно не убедительна и ссылается лишь на возможность обходиться без применения угольника при решении задач на построение второй степени [4].

Но, во-первых, как было показано в классической работе Маскерони [5], для решения тех же задач можно обойтись и без линейки, действуя лишь одним циркулем, а, во-вторых, придавая угольник к циркулю, оказывается возможным решить каждую задачу на построение 3-й и 4-й степени [6].

Таким образом, конечно, никаких „теоретических“ возражений против применения угольника не имеется. Тем более не может быть каких-либо „практических“ доводов против пользования угольником.

---

[1] Романовский Б. В., Дополнительный сборник задач по стереометрии. Учпедгиз, 1940.

[2] О построениях при помощи угольника, двухсторонней линейки и некоторых других инструментов см.:

Адлер А., Теория геометрических построений.

Четверухин Н., Методы геометрических построений, 1938.

Заметим, что непременным инструментом построений является также пишущее острие (карандаш), но его обыкновенно рассматривают как часть любого другого инструмента. Однако некоторые авторы упоминают о нём отдельно (Александров, Геометрические задачи на построение и методы их решения. М., 19.4, стр. 5).

[3] Киселёв, Геометрия, ч. I (Планиметрия). М., 1939, § 25, стр. 15; § 74, стр. 40. О „транспортире“ говорится только в § 20, стр. 13.

[4] Так называются задачи, которые в аналитической форме приводятся к решению уравнений 2-й степени.

[5] Mascheroni, „La Geometria del compasso“ (1797).

[6] См. об этом статью Иглиша, перевод которой был помещён в журнале „Математика и физика в школе“ (1935 г., № 5).

Наоборот, всё говорит за целесообразность включения угольника наравне с линейкой и циркулем в число инструментов построения.

Вероятнее всего, что этому мешает лишь устаревшая традиция[1].

В недавно вышедшем учебнике геометрии Н. А. Глаголева[2] с самого начала применяется угольник, как инструмент, весьма удобный для построения перпендикулярных прямых, а затем и для других построений. Эта точка зрения сохраняется лишь до главы IV („Геометрические задачи на построение"). В самом начале этой главы[3] автор говорит следующее: „До сих пор для выполнения различных построений (§ 21, 26, 27) мы пользовались тремя инструментами: линейкой, циркулем и чертёжным угольником. Доказанные теоремы о равенстве треугольников позволяют выполнить те же построения с помощью лишь двух инструментов — циркуля и линейки; циркуль — для вычерчивания окружности и её дуги, линейка — для вычерчивания прямой линии.

Греки времён Эвклида считали прямую линию и окружность основными линиями в геометрии и потому требовали, чтобы всякое геометрическое построение выполнялось при помощи лишь тех двух инструментов, которые вычерчивают эти линии. Умение полностью использовать эти два основных инструмента — линейку и циркуль и в настоящее время представляется весьма важным. В дальнейшем все построения будут выполняться лишь при помощи циркуля и линейки".

Если следовать соображениям о необходимости полного изучения линейки и циркуля, то надо было бы также преподавать построения, выполняемые: а) одной линейкой, б) одним циркулем, в) линейкой при однократном употреблении циркуля и т. д.

Однако вряд ли эта сторона геометрических построений является наиболее важной в общеобразовательной школе. Иметь такие построения, которые хорошо отражали бы жизненный опыт и были бы, поэтому, практически применимы и полезны — это гораздо важнее, тем более, что „теоретическое" обоснование средств построения совершенно аналогично при том или другом выборе чертёжных инструментов.

Мы привели цитату из учебника Н. А. Глаголева полностью, чтобы показать, что мотивы, по которым автор воздерживается от более широкого применения угольника для геометрических построений, мало чем отличаются от приведенных в стабильном учебнике.

Таким образом, отмечая как положительную сторону обоих учебников применение угольника в простейших построениях, мы не видим серьёзных причин для запрещения его применения и в других случаях.

Напротив, включение угольника в число основных инструментов построения наравне с линейкой и циркулем было бы целесообразно по следующим основаниям:

а) геометрические построения отображали бы опыт практической жизни и были бы полезны в этом смысле учащимся;

б) самые построения были бы проще в отношении техники их выполнения;

в) область возможных построений была бы расширена.

---

[1] Более подробно см. об этом Четверухин Н., Методы геометрических построений. Учпедгиз, Москва, 1936 г., стр. 13—24.

[2] Глаголев Н. А., Элементарная геометрия, планиметрия. Учпедгиз. М., 1944.

[3] Цит. выше, стр. 61.

„Итак, резюмируя, можно сказать, — пишет Феликс Клейн в своей „Элементарной математике с точки зрения высшей“, — что нет каких-либо основательных причин ограничиваться при построениях линейкой и циркулем, исключая, следовательно, подвижной прямой угол. Практика черчения тоже не даёт для этого никаких оснований, так как она требует как раз возможно бо́льшей свободы в употреблении инструментов“[1].

Исследуя вопрос о геометрических построениях на плоскости, необходимо констатировать его зависимость от средств построения. Так, задача деления отрезка пополам, неразрешимая при построениях только линейкой, оказывается разрешимой при построениях только циркулем или только угольником[2].

Поэтому каждая постановка задачи на построение должна сопровождаться указанием на тот инструментарий (средства построения), которым разрешено пользоваться для решения задачи. Отсюда, между прочим, следует, что главной целью построения является действительное (фактическое) выполнение его на плоскости чертежа, при помощи избранных инструментов.

Основная практическая ценность геометрических построений заключается именно в том, что при их помощи осуществляется материальная реализация абстрактных геометрических образов.

Рассмотрим в качестве примера задачу № 1 на построение из стабильного учебника[3]: „Построить треугольник по трём его сторонам a, b и c“.

В учебнике показано решение задачи при помощи линейки и циркуля, после чего указывается необходимое условие решения задачи (сумма каждых двух отрезков должна быть больше третьего), которое было доказано ранее (§ 50, стр. 28). О достаточности этого условия для возможности построения не говорится, конечно, потому, что она сводится к вопросу о пересечении двух окружностей, а этот вопрос исследуется позднее[4]. Таким образом, существование решения остаётся недоказанным. В данном случае целью построения было показать способ фактического осуществления треугольника с данными сторонами, причём вопрос о существовании такого треугольника решался опытным путём, т. е. в процессе самого построения.

Если обратимся к задаче на построение № 5 стабильного учебника: „Из данной точки A опустить перпендикуляр на данную прямую BC“[5], то получим еще более характерный пример. Доказательство существования искомого перпендикуляра было дано значительно ранее[6], поэтому перед построением в данном случае этой цели, очевидно, не ставилось. Точно также и единственность перпендикуляра была доказана ранее (там же). Следовательно, за построением оставалось единственное значение: иметь способ фактического осуществления перпендикуляра при помощи линейки и циркуля.

---

[1] Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей. ГТТИ, 1934, стр. 407.

[2] См. наст. статью, стр. 79.

[3] Киселёв, Геометрия, ч. I, стр. 34.

[4] Гл. VI — Взаимное расположение двух окружностей, стр. 63. Заметим, что в книге Адамара „Элементарная геометрия“, (ч. I, стр. 78—79) указываются необходимые и достаточные условия решения этой задачи, так как всё требующееся для этого рассматривается ранее.

[5] § 66, стр. 35.

[6] § 24, стр. 15.

Мы оставляем здесь в стороне вопрос о строгости этого доказательства.

Итак, если речь идет об „основных" геометрических построениях, то их главное назначение — дать способ достаточно точной, выполняемой инструментами, реализации (в виде чертежа) абстрактных геометрических образов, выступает вполне отчётливо. В некоторых случаях они используются также для „опытного" доказательства существования искомых фигур. Это назначение возникает само собой, если в должном месте не удаётся дать геометрического доказательства. Однако такое доказательство, если это возможно, даётся обыкновенно ранее и независимо от задачи на построение. С последнего снимается, таким образом, совершенно и эта косвенная цель.

В „основных" задачах на построение, например, когда речь идёт о существовании перпендикуляра к прямой или возможности построения угла, равного данному, вопрос, очевидно, не может быть поставлен в зависимость от средств построения, и поэтому желательно дать независящее от этих инструментов доказательство существования. Однако как мы видели (построение треугольника по трём сторонам — в стабильном учебнике Киселёва), это не всегда удаётся и прибегают к эмпирическому способу в процессе построения. В случаях более сложных задач на построение доказательство существования имеет значение лишь для самой задачи на построение и рассматривается как его составная часть. Вследствие этого задачи на построение рассматривают обыкновенно как некоторый комплекс различных по своим целям, но дополняющих друг друга моментов, а именно:

1) анализ, когда задача предполагается решенной и изучаются связи искомых элементов с данными с целью составить синтетический план решения;

2) построение, когда намеченный план реализуется при помощи выбранных средств построения;

3) синтез, когда доказывается, на основании аксиом и теорем, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи;

4) исследование, когда рассматривается вопрос о существовании и числе решений и выводятся условия возможности или невозможности решения. Иными словами, в этой части исследуются необходимые и достаточные условия задачи на построение.

Часто отмечается большое значение для решения задачи на построение отдельных звеньев этого решения, например, анализа. Справедливо указывают, что анализ даёт ключ к решению задачи. Точно также замечают, что без должного исследования задачи, построение может оказаться невозможным. Эти замечания, конечно, справедливы. Однако всё же не следует упускать из виду, что главной целью решения задачи (ядром) является фактическое построение искомой фигуры инструментами. Все остальные части решения имеют лишь вспомогательное значение. Если же какая-либо из них имеет самостоятельное принципиальное значение, то её стремятся отделить от задачи на построение и дать в виде самостоятельной теоремы.

Так, на стр. 11 мы уже приводили пример, когда доказательства существования и единственности решения были даны в стабильном учебнике ранее соответствующей задачи на построение („Из данной точки опустить перпендикуляр на данную прямую") в виде отдельной теоремы.

В этом случае, следовательно, оказалась отделённой теорема, которая должна была составить стадию „исследования" в задаче на построения.

Теорема, помещённая в § 104, стр. 57 стабильного учебника [1], гласит:

„Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну".

В ходе доказательства этой теоремы, которое построено аналитически, обнаруживается, что центр искомой окружности должен лежать на каждом из трёх перпендикуляров, восстановленных в серединах сторон.

Таким образом, доказательство этой теоремы воспроизводит „анализ", а выводы ее — „исследование" следующей задачи на построение: „Найти точку, равноотстоящую от трех вершин треугольника", помещенной гораздо ранее [2].

Значение же всех упомянутых моментов процесса решения для самой задачи на построение должно быть оценено с той точки зрения, что целью является не безразлично какая-либо реализация искомой фигуры [3], а построение её (достаточно точное) при помощи инструментов, обоснованное и проверенное теоретически.

„В геометрической задаче на построение, — читаем в известной работе Адлера [4], — требуется начертить фигуру, удовлетворяющую определенным условиям".

Существенное участие инструментов в решении задач на построение делает менее очевидным возможность вполне абстрактного истолкования геометрических построений, отображающих практический опыт. Иногда приходится слышать такой вопрос: „Что же такое геометрические построения, геометрия или черчение, математика или искусство?".

Ответом на него служит возможность дать вполне абстрактное истолкование геометрических построений. Такое формально-логическое представление геометрических построений на плоскости является весьма необходимым с методологической точки зрения: оно позволит внести полную ясность в вопрос о взаимоотношении геометрических построений, как части геометрии, и практических операций чертежными инструментами. С другой стороны, абстрактное истолкование геометрических построений на плоскости и в пространстве позволит сравнить те и другие, дать методологическое обоснование геометрическим построениям в пространстве. Почти все авторы учебников по геометрии или задачников по геометрическим построениям считают необходимым отметить, что геометрические построения сводятся „к применению некоторых основных построений, возможность которых заранее признаётся в геометрии". (Приведённая цитата взята из известного сборника геометрических задач на построение И. Александрова.) Далее обыкновенно перечисляются эти „основные построения". Такое перечисление имеется и в упомянутой книге И. Александрова [5]. Заметим, что из 8 основных построений, помещенных в этой книге от а) до з), два, поставленные под знаками б) и з), совершенно излишни.

Однако в приведенной схеме еще нет той ясности, которая желательна при разрешении поставленных выше вопросов.

Наиболее глубокое исследование этих вопросов было дано

---

[1] Киселёв, Геометрия, ч. I, стр. 57.

[2] Там же, стр. 36.

[3] Например, чертёж от руки.

[4] Август Адлер, Теория геометрических построений, стр. 6.

[5] Александров И., Геометрические задачи на построение и методы их решения. М., 1934, стр. 5.

С. О. Шатуновским в его введении к русскому переводу книги Адлера [1].

С. О. Шатуновский указал путь формализации инструментов построения, позволяющий представить каждую задачу на построение как абстрактно-геометрическую операцию. Некоторую неясность вносили только введенные им новые „постулаты" (или „логические средства решения"), так как оставалось, быть может, под сомнением — являются ли точки и прямые, удовлетворяющие этим „постулатам" (кроме обычных аксиом эвклидовой геометрии), точками и прямыми обыкновенной эвклидовой геометрии? Нам кажется, однако, что и эта неясность может быть устранена, так как все точки, рассматриваемые в данной задаче на построение, могут быть выделены путем „определений". В этом духе вопрос изложен в книге автора „Методы геометрических построений" [2].

Приведём ряд положений из этой работы в более сжатой и уточненной форме. Прежде всего следует подчеркнуть, что элементами геометрических образов нам будут служить точки, прямые и окружности именно обыкновенной эвклидовой геометрии на плоскости. Однако в каждой задаче на построение выделяется из всех элементов класс конструктивных элементов.

Содержание класса конструктивных элементов, или признаки, позволяющие установить, какие элементы должны быть отнесены к этому классу, выражаются следующими определениями.

Конструктивными являются (называются) следующие элементы:

1°. Все данные в задаче на построение элементы к которым могут быть также присоединены какие-либо произвольные (случайные) [3] точки плоскости.

2°. Прямая, если она определена двумя конструктивными точками.

3°. Окружность, если она определена конструктивными центром и радиусом (пара конструктивных точек).

4°. Точка пересечения двух конструктивных линий.

Эти определения соответствуют геометрическим построениям при помощи линейки и циркуля.

Первое из них устанавливает существование конструктивных элементов. Это — данные и произвольно присоединённые к ним элементы [4]. Без такой начальной совокупности конструктивных элементов нельзя было бы выполнять геометрические построения и получить класс конструктивных элементов. Этот класс оказался бы пустым.

Второе определение есть абстрактно-логическая замена линейки. В самом деле, при помощи линейки, мы получаем конструктивную прямую по двум конструктивным точкам.

Третье определение есть такая же замена циркуля, ибо в условиях третьего определения при помощи циркуля получаем конструктивную окружность.

Наконец, четвёртое определение устанавливает возможность

---

[1] Август Адлер, Теория геометрических построений. Одесса, 1910, стр. IX.

[2] Четверухин Н. Ф., Методы геометрических построений. М., 1938 г., гл. I.

[3] Мы будем называть точку „произвольной", если результат построения, соответствующего данной задаче, не зависит от выбора этой точки.

[4] Заметим, что в ряде случаев задача на построение содержит в числе данных элементов лишь одну точку или даже ни одной точки (напр., в следующей задаче: „Из данной точки опустить перпендикуляр на данную прямую" или: „Найти центр данной окружности"), тогда как применение определений 2 и 3 (инструментов построения) требует не менее двух конструктивных точек. В этих случаях к данным присоединяют произвольные точки.

образования новых конструктивных элементов при помощи уже существующих.

Таким образом, четыре приведённые выше определения выражают в абстрактной форме весь процесс геометрических построений, отображая практическое выполнение решения задачи на построение с помощью инструментов (линейки и циркуля).

Добавим к этому, что применение угольника[1] могло бы быть заменено следующим определением:

„Прямая, проходящая через конструктивную точку и перпендикулярная к конструктивной прямой, является конструктивной".

Из сказанного видно, что процесс решения каждой задачи на построение может быть представлен в абстрактно-геометрической форме, отображающей реальные операции с инструментами (линейка, циркуль, угольник).

Поэтому справедливо считать геометрические построения одной из глав математики (геометрии). Что же касается чертёжных операций с инструментами, то они являются тем жизненным источником, из которого берут своё начало геометрические построения и отображают их.

На практике, а также и в преподавании, конечной целью являются реальные построения с помощью инструментов, для достижения которой и разрабатываются как теория, так и методы решения геометрических задач на построение. С другой стороны, самый процесс обучения геометрическим построениям, умение применять методы решения задач на построение к конкретным случаям представляются весьма ценными и полезными в педагогическом отношении.

В известной работе Ю. Петерсена[2] читаем: „...именно в школе должно быть их настоящее место, ибо ни одни задачи не содействуют так развитию в учениках наблюдательности и правильности мышления, представляя в то же время для них и наибольшую привлекательность, как геометрические (задачи) на построение".

„Задачи на построение развивают изобретательность, инициативу, конструктивные способности, столь необходимые будущим строителям нашей великой родины"[3].

Весь комплекс, состоящий из четырёх стадий решения задач на построение (анализ, построение, синтез, исследование), является прекрасной школой исследования и решения проблем в области точных наук. Вот почему геометрическим построениям, не говоря уже об их роли в развитии пространственных представлений, должно быть уделено необходимое внимание в школьном курсе геометрии.

§ 3. Обоснование и принципы методики преподавания геометрических построений в пространстве

Если при решении задач на построение на плоскости удачно соединяются формально-логическая схема построений с их действительным выполнением при помощи чертёжных инструментов, то этого мы не имеем, по понятным причинам, в пространственных задачах. В самом деле, чертёжные операции в пространстве невозможны. Как

---

[1] Если угольником пользоваться лишь для проведения прямых линий и построения прямых углов.

[2] Петерсен Ю., Методы и теории для решения геометрических задач на построение. Перевод Ф. П. Крутикова. М., 1892 г. Предисловие, стр. VI.

[3] Четверухин Н. Ф., Методы геометрических построений. М., 1938, стр. 3.

показывает практика, пространственные задачи обычно переносятся на проекционный чертёж и решаются на нём.

Следовательно, возможны *два методологических направления в решении вопроса о геометрических построениях в пространстве:* либо 1) по аналогии с построениями на плоскости развить формально-логический метод построений в пространстве с отказом от реальных построений при помощи инструментов, либо 2) рассматривать и выполнять пространственные построения на проекционном чертеже, т. е. на отображении пространства, полученном по способу проектирования.

Методологические и методические трудности, встречающиеся при попытках обоснования и развития геометрических построений в пространстве, явились причиной того факта, что в этой области мы почти не имеем литературы[1], а в той, какая всё же существует, нет установившихся принципов и обоснованной точки зрения.

Рассмотрим, прежде всего, как обстоит дело с задачами на построение в пространстве в нашей учебной литературе?

В стабильном учебнике[2] о задачах на построение речь идет лишь в первой главе. Вторая глава посвящена ортогональным проекциям и построению чертежей по методу Монжа. В следующих главах задач на построение вовсе не даётся.

Изложение вопроса методологически примыкает к первому из указанных выше направлений. Делается предупреждение, что выполнение построений с инструментами в пространстве невозможно и предлагается некоторая формально-логическая концепция, аналогичная геометрическим построениям на плоскости. Она заключается в следующем[3]:

„Во всех построениях в пространстве мы будем предполагать:

1) что плоскость может быть построена, если найдены элементы, определяющие её положение в пространстве (§ 3 и 4), т. е. что мы умеем построить плоскость, проходящую через три данные точки, через прямую и точку вне её, через две пересекающиеся или две параллельные прямые;

2) что, если даны две пересекающиеся плоскости, то дана и линия их пересечения, т. е. что мы умеем найти линию пересечения двух плоскостей;

3) что, если в пространстве дана плоскость, то мы можем выполнять в ней все построения, которые выполнялись в планиметрии“.

Далее читаем:

„Выполнить какое-либо построение в пространстве — это значит свести его к конечному числу только что указанных основных построений“.

Нетрудно усмотреть, что 3 перечисленных положения, если не считаться с их формулировкой, составленной в духе школьного учебника, должны в абстрактно-геометрической форме определить *конструктивные элементы в пространстве.* В этом смысле они соответствуют тем определениям конструктивных элементов, которые были нами даны в предыдущем разделе для построений на плоскости (см. стр. 84).

---

[1] В то время как по геометрическим построениям на плоскости имеется обширная литература.

[2] Киселёв, Геометрия, ч. II („Стереометрия“). Следует отметить, что пространственные задачи на построение введены в учебник Киселёва его редактором проф. Н. А. Глаголевым.

[3] Там же, стр. 4, § 6.

Так, первое из этих положений выражает свойство того (правда, лишь воображаемого) инструмента, который по аналогии с линейкой можно было бы назвать „пластинкой". Второе устанавливает, что операции с „пластинкой" могут давать новые конструктивные линии. Наконец, третье узаконивает операции линейкой и циркулем на конструктивной плоскости. Для полноты этой концепции недостаёт положения, которое объявило бы все данные (и присоединённые)[1] элементы задачи „конструктивными".

Итак, хотя об этом в стабильном учебнике нет никаких упоминаний[2], мы здесь, очевидно, имеем ту же методологическую концепцию, выраженную тремя приведёнными выше положениями и прямо зависящую от применяемых инструментов (линейка, циркуль, „пластинка"). Правда, последний инструмент является лишь плодом воображения, да и действительное выполнение в пространстве таких построений невозможно. Но в абстрактной форме обе схемы (построений на плоскости и построений в пространстве) оказываются вполне аналогичными. Однако при формальном сходстве этих методологических схем их различие по существу чрезвычайно велико.

Пространственные построения (как они ставятся в стабильном учебнике и в большей части других руководств по теории) лишены своих важнейших свойств: они не выполняются в действительности, не дают, следовательно, реализаций геометрических фигур и не отражают жизненного опыта.

Выполнение же построений в абстрактной форме, как воображаемых операций, если и полезно, то лишь для тренировки пространственного мышления, причём эта тренировка носит искусственный характер.

Таким образом, могут сохранять своё значение лишь те сопровождающие самое построение моменты, которые заключаются в анализе, синтезе или в исследовании задачи на построение. Эти моменты сводятся, как мы уже не раз видели в основных планиметрических задачах на построение, к доказательствам существования и единственности решения, а также к исследованию необходимых и достаточных условий существования решения.

Однако этой стороне дела в стабильном учебнике уделено весьма недостаточное внимание[3].

В решениях задач на построение, разобранных в учебнике, даётся подробное изложение именно самого построения. Это приводит к недоразумениям. Читатель чувствует, что в таком „воображаемом" построении главный смысл надо искать в доказательстве существования или в исследовании условий решения. Поэтому он остается неудовлетворённым и ропщет на якобы „нестрогое" решение задачи на построение в учебнике[4].

Действительно, в форме задач на построение теоремы о существовании и о единственности оказались заслонёнными самими построе-

[1] См. настоящую статью, стр. 84.

[2] Нет также упоминания об этом и в других учебниках и задачниках, пользующихся той же схемой, например, в курсе элементарной геометрии Адамара и др. Об операциях с воображаемыми инструментами упоминается в статье Д. И. Каргина „О методах решения стереометрических задач на построение" („Математика в школе", 6, 1937).

[3] Между прочим в исследовании задачи (§ 22, стр. 9) имеется ошибка: если $M \parallel b$, то $c \parallel b$, а не $c \parallel a$; аналогично в случае: $N \parallel a$, $c \parallel a$, а не $c \parallel b$, как сказано в учебнике.

[4] Такие письма были получены математической секцией Учебно-методического Совета Министерства просвещения РСФСР.

ниями, и каждый читатель должен выводить их самостоятельно, пользуясь лишь намёками, содержащимися в решениях.

Такое положение возникло в результате того, что задачи на построение в пространстве отсутствовали в прежних изданиях учебника Киселёва, а взамен их в учебнике имелись соответствующие теоремы. Редактор нового издания учебника, взамен этих теорем, ввел задачи на построение. „Теоремы, утверждающие возможность выполнить то или иное построение, изложены в форме задач на построение (решенных в тексте)", — говорится в предисловии к первому (переработанному) изданию стабильного учебника[1].

Поэтому вполне понятно, что получившиеся задачи на построение имели своей основной целью установить существование и единственность решения. Таковы задачи: 1) „Найти точку пересечения данной прямой с данной плоскостью P" (§ 7, стр. 5); 2) „Через данную точку (A) провести плоскость, параллельную данной плоскости (P), не проходящей через точку A" (§ 20, стр. 81); 3) „Через данную точку O пространства провести прямую, перпендикулярную к данной плоскости P" (§ 36, стр. 14) и др.

Основные задачи на построения в пространстве, помещённые в стабильном учебнике, носят, однако, тот же характер, как подобные задачи и в большинстве других учебников и задачников, поэтому рассмотренную постановку задач на построение можно считать преобладающим методологическим направлением.

Слабые стороны этого методологического направления настолько очевидны, что в нём нельзя видеть удовлетворительного решения вопроса. В самом деле, как мы уже видели, самые построения не играют здесь своей основной роли, так как они *фактически не выполнимы в пространстве, не дают реализации геометрических образов, и не отображают опыта практической жизни.* Теоремы, сопровождающие построение, как, например, доказательство существования и единственности, не выигрывают от того, что они оказались в составе задач на построение и не всегда ясно, связаны ли они с самим построением или нет. Кроме того, в этой форме доказательство упомянутых теорем зависит от средств построения (линейка, циркуль и „пластинка"), что является, конечно, фактором искусственным и чуждым цели доказательства. Казалось бы рассматриваемые теоремы должны быть доказаны вне зависимости от „средств построения".

Таким образом, за геометрическими построениями этого рода можно признать лишь тренировочное действие, своего рода „гимнастику" в воображаемых пространственных операциях.

Однако тренировочные упражнения эти остаются совершенно искусственными, так как они связаны с выбором тех основных определений, которые выражают свойства инструментов построения.

При этом для облегчения трудности воображаемых пространственных операций обыкновенно применяется иллюстративный чертёж, позволяющий наглядно изображать ход этих операций. Так именно и сделано в стабильном учебнике. Следует поэтому иметь в виду, что решение задачи на построение выполняется всё же на чертеже, но элементы этого чертежа, включая и самое решение (искомый элемент), остаются произвольными. *Чертеж лишь иллюстрирует ход пространственных операций.*

Несомненно, что пространственная гимнастика без чертежа пред-

[1] Киселев, Геометрия. Ч. II, 1939.

ставляет более сильное, но в то же время и более трудное средство развития пространственного воображения.

Однако эти упражнения не следует связывать с инструментами, тем более несуществующими, как это имеет место в рассматриваемых задачах на построение.

Таковы неутешительные итоги анализа тех геометрических построений в пространстве, которые культивируются в нашей школьной литературе.

Слабость этой позиции сознавалась такими выдающимися математиками, как Адамар, который, приводя обычную концепцию геометрических построений в пространстве (т. е. три положения, аналогичные приведённым на стр. 21—22), затем замечает [1]:

„Это предположение носит чисто условный характер, так как мы не имеем никакой возможности осуществить практически эти операции. Однако в начертательной геометрии мы имеем такой способ изображения пространственных фигур на плоскости, при котором только что перечисленные построения могут быть выполнены с помощью циркуля и линейки.

Те построения, которые должны быть выполнены, не пользуясь указанным выше предположением, мы называем эффективными".

Из этой цитаты видно, что Адамар считает рассматриваемые пространственные построения вообще неэффективными. Он признаёт эффективными лишь те из них, которые действительно могут быть выполнены чертёжными инструментами (т. е. на плоскости). Так, например, по данному ребру куба можно эффективным образом построить его диагональ (для чего достаточно построить два прямоугольных треугольника).

Вместе с тем Адамар указывает путь, который приводит к действительно эффективному решению пространственных задач на построение. Это путь решения таких задач на проекционном чертеже по методам начертательной геометрии.

Та же мысль неоднократно отмечалась Клейном в его дополнении („О преподавании геометрии") к „Элементарной математике с высшей точки зрения". Так, на стр. 348 второго тома этой книги читаем:

„Проектирование и черчение пространственных фигур, имеющие, несомненно, чрезвычайно важное значение, в современном преподавании геометрии не занимают надлежащего места. Правда, внешне они включены в учебный курс, но внутренне не переплетены с ним" [2].

В нашей отечественной литературе особенно энергичная попытка внедрения начертательной геометрии в школьный курс геометрии была предпринята Н. М. Душиным в его учебнике, вышедшим в Харькове еще в 1923 г [3].

„Одной из основных задач предполагаемого курса", — говорится в предисловии автора,—является *развитие у слушателей способности геометрического воображения и пространственных восприятий*".

Для решения этой задачи используются следующие три принципа:

1. Идея движения и геометрических преобразований.
2. Слияние планиметрии со стереометрией.
3. Введение начертательной геометрии.

---

[1] Адамар, Элементарная геометрия. Ч. II (Стереометрия). Примечание к книге V, стр. 83.

[2] Клейн Ф., т. II (Геометрия). Заключительная глава, стр. 348.

[3] Душин Н., Курс элементарной геометрии. Харьков, Изд. „Путь просвещения", 1923.

Полезное влияние этой книги сильно снижалось, как это можно думать, двумя обстоятельствами:

а) Применялись специфические приёмы начертательной геометрии (ортогональные эпюры Монжа, косоугольная фронтальная проекция), отличающиеся от обычных для курса стереометрии способов изображения пространственных фигур.

б) Не были в достаточной мере разработаны геометрические задачи на построение.

Дальнейший шаг в этом отношении был сделан Б. В. Романовским в его уже цитированной выше книге „Задачи на построение в стереометрии" (Пособие для учителей средней школы. М., 1936).

Книга начинается главой: „Об изображении пространственных фигур на плоскости", в которой косоугольная фронтальная диметрия („кабинетная" проекция) называется „основным способом изображения на плоскости пространственных фигур, принятым в стереометрии".

Книга снабжена хорошими чертежами и содержит не мало полезных позиционных и метрических задач. Самое важное достоинство книги заключается в том, что в ней систематически разбираются конструктивные примеры и задачи на проекционных чертежах. Её главным недостатком является смешение обеих концепций, т. е. решение конструктивных задач на проекционном чертеже по методам начертательной геометрии с воображаемыми построениями с нереальным инструментарием. Здесь, повидимому, сказалась традиционная манера изложения геометрических построений в пространстве, от которой автор не счёл возможным отказаться. Он не заметил, что для решения задач на построение методами начертательной геометрии традиционная схема с её условностями становится совершенно ненужной.

Наоборот, Б. В. Романовский в отдельном абзаце под заглавием: „*Геометрические постулаты решения задач на построение в пространстве. Основные методы решения задач на построение*" — даёт список элементарных построений, которые заранее допускаются как возможные в пространстве. Вот этот список:

„1. Провести плоскость через три данные точки или через прямую и точку вне её или через две пересекающиеся прямые или через две параллельные прямые.

2. Определить пересечение двух плоскостей, а также прямой с плоскостью.

3. Взять произвольную точку, лежащую на данной плоскости или вне её.

4. Провести прямую, находящуюся на данной плоскости.

5. Из данного центра описать шаровую поверхность данного радиуса.

6. Взять произвольную точку, находящуюся на данной шаровой поверхности или вне её.

7. Определить пересечение данной плоскости с данной шаровой поверхностью, а также данной прямой с данной шаровой поверхностью.

8. В плоскости, заданной каким-либо образом в пространстве, выполнить ряд построений, относящихся к геометрии на плоскости" [1].

Несовершенство этой системы „постулатов" бросается в глаза. Так, например, постулат четвёртый вполне покрывается постулатом восьмым. Какое содержание вкладывается в этот последний постулат,

[1] Романовский Б. В., цит. место, см. стр. 15.

вообще неясно. Кстати сказать, если в нём утверждается возможность производить построения линейкой и циркулем, то, как нетрудно видеть, цитированная система позволяет совершенно исключить эти инструменты. Так, операции линейкой могут быть выполнены при помощи постулатов 1, 2 и 3; операции циркулем — при помощи постулатов 5 и 7 (причём постулат 7 надо несколько расширить). Таким образом, рассматриваемая система постулатов неявно предполагает применение лишь двух пространственных инструментов: „пластинки" (постулат 1) и „сферографа" (постулат 5), как мы позволили себе назвать соответствующий инструмент.

Оба эти инструмента не существуют в действительности и представляют абстрактные понятия, а построения с ними являются воображаемыми. Поэтому та часть задач из книги Романовского, которая связана с этой схемой, не отличается от рассмотренных выше аналогичных концепций и даже сложнее их.

Ценную часть книги представляют задачи на построение, поставленные и разрешаемые на проекционных чертежах методами начертательной геометрии.

К сожалению, автор рассматривает вопрос с узкой точки зрения: все чертежи он предполагает выполненными в „кабинетной" проекции.

От этого особенно пострадала та часть задач, которая относится к первым главам стереометрии. Эти задачи изложены в духе первой концепции, т. е. воображаемых построений. Однако глава о трехгранных углах позволяет автору оперировать с прямоугольной системой декартовых координат и применять „кабинетную" аксонометрию, т. е. решать задачи на построение в духе второй концепции методами начертательной геометрии.

Преимущества такой концепции очевидны. Она дает возможность фактического выполнения решения на чертеже (при помощи обычных инструментов для построений на плоскости). Она учит учащихся методам решения задач на построение в пространстве, причём все рассуждения требуют пространственной интуиции, которая таким образом упражняется и развивается.

Наконец, такие построения весьма ценны в практическом отношении, так как они отображают жизненный опыт, практику решения задач на технических чертежах. Эти построения наиболее отвечают тем важным целям, которые были формулированы в начале этой статьи.

При всём том мы полагаем, что главным недостатком попыток ввести такую концепцию в курс стереометрии явилась специфичность методов проектирования, применявшихся для этой цели. Эти методы, по большей части, переносились из начертательной геометрии и были предназначены для технических чертежей (эпюры Монжа, проекции с отметками, некоторые виды аксонометрии).

Благодаря этому курс стереометрии перегружался посторонними методами[1], которые нам представляется более уместным отнести к курсу черчения, где они хорошо согласуются с практическими работами.

Таким образом, практическая часть проблемы постановки и преподавания геометрических построений в пространстве сводится *к разработке проекционных изображений, соответствующих курсу стереометрии и вполне сливающихся с ним.*

---

[1] В стабильном учебнике Киселёва, в гл. II, дано изложение принципов построения эпюр Монжа, которые затем нигде не применяются.

В двух статьях, посвящённых этим вопросам[1], мы наметили пути возможного решения поставленной проблемы. Однако предстоит дальнейшая работа над составлением хорошо продуманного списка задач и над преодолением ряда возникающих при этом методических трудностей.

Такая работа, а также и её экспериментальная проверка в школе, ведутся в настоящее время в Институте методов обучения Академии педагогических наук РСФСР. В ней принимают участие заслуженная учительница РСФСР Л. В. Федорович, учителя М. Х. Кекчеева и П. Я. Дорф, успешно применяющие методы решения задач на проекционном чертеже в IX и X классах некоторых московских школ.

Всё изложенное приводит автора к следующим выводам:

1. Геометрические построения на плоскости представляют специальный раздел элементарной геометрии, который, как и все другие её разделы, допускает абстрактно-формальное изложение.

2. Эта формализация геометрических построений на плоскости достигается для каждой задачи выделением „класса конструктивных элементов", причём задача оказывается разрешимой, если искомый элемент содержится в классе конструктивных элементов.

3. Класс конструктивных элементов устанавливается с помощью определений, отображающих в абстрактной форме свойства тех инструментов, которыми разрешается пользоваться для построения искомого элемента.

4. Таким образом, геометрические построения на плоскости находятся в зависимости от выбираемого инструментария. Они отражают жизненный опыт и практику построения чертежей. Это усиливает их практическое значение и педагогическую ценность. В преподавании абстрактное рассуждение должно сопровождаться фактическим построением при помощи инструментов.

5. Попытки обоснования геометрических построений в пространстве встречают большие методологические трудности, чем, повидимому, и объясняется почти полное отсутствие литературы по этим вопросам.

6. В большей части работ, содержащих задачи на построение в пространстве, авторы предпосылают этим задачам краткие указания на допущение некоторых „основных построений" („постулаты"), являющихся по существу (в неотчётливой форме) теми определениями, которые должны установить класс конструктивных элементов в пространстве.

7. Таким образом, эта (наиболее распространённая) концепция является стремлением обосновать геометрические построения в пространстве с помощью той же методологической схемы, которая лежит в основе геометрических построений на плоскости.

8. Она связывает построения с выбором инструментария. Однако „инструменты" построения, выражаемые абстрактными определениями, оказываются несуществующими в действительности („пластинка", „сферограф"). Самые построения также являются воображаемыми и не могут быть осуществлены физически.

9. Это лишает упомянутые построения их практической ценности, аналогичной построениям на плоскости.

10. Поэтому понятно, что ценность таких воображаемых построе-

---

[1] Журн. „Математика в школе" за 1946 г., № 2 и 3.

ний должна заключаться в другом, как, например: в доказательстве существования, исследовании возможности решения, в логическом синтезе и т. п. Однако все эти вопросы не должны быть ни в какой степени связаны с выбором инструментов построения, тем более фиктивных и искусственных.

11. Отсюда следует, что рассмотренная концепция „воображаемых построений" в пространстве должна быть освобождена от включаемой в нее абстрактно-инструментальной схемы, определяющей класс конструктивных элементов. Эта схема является искусственной, ненужной и переносимой в пространственные построения лишь по традиции, основанной на копировании геометрических построений на плоскости.

12. „Воображаемые" построения в пространстве должны быть основаны на обычных аксиомах пространственной геометрии. Наиболее простые и важные из них возможно излагать в курсе элементарной геометрии в виде теорем (которые можно видеть в некоторых учебниках).

13. Наряду с рассмотренной концепцией геометрических построений в пространстве можно указать другую концепцию, построенную на совершенно иных методологических основаниях. Эта вторая концепция базируется на жизненном опыте, практике решения конструктивных задач на проекционном чертеже.

14. Итак, в этой концепции конструктивная задача переносится при помощи проекционного изображения на плоский чертёж. На этом чертеже она решается приёмами начертательной геометрии.

15. Отсюда следует, что для обоснования соответствующих построений достаточно того, что было установлено для геометрических построений на плоскости. Это, конечно, не означает, что при решении пространственных задач на построение этим способом значение пространственной интуиции умаляется. Напротив, решение задач на проекционных чертежах (которые, конечно, должны быть наглядными и хорошо увязанными с курсом стереометрии) весьма развивает пространственное воображение и приучает оперировать с фигурами и элементами пространства.

16. Применяя эту концепцию решения задач на построение в пространстве, необходимо подбирать как методы изображения фигур на чертеже, так и самое содержание задач в соответствии с курсом стереометрии, относя специфические вопросы и методы начертательной геометрии к курсу черчения.

Одно из возможных решений этой проблемы изложено автором в двух его цитированных выше работах.

17. Важным преимуществом второй концепции (решение задач на проекционных чертежах) является возможность фактического выполнения построения и приобретения учащимися полезных практических навыков.

18. Сравнивая обе концепции в смысле применения проекционных чертежей, следует отметить, что: а) в первой концепции чертёж применяется лишь для иллюстрации решения задачи и облегчения „воображаемых построений" („чертежи-картины", неполные изображения), б) во второй концепции решение задачи фактически производится на чертеже („чертежи-модели", полные изображения)[1].

19. В пункте 17 было указано основное преимущество второй концепции перед первой. Обратное преимущество может иметь место

[1] См. статьи автора, упомянутые в сноске на стр. 93.

в задачах более сложного характера. Проекционный чертеж, пригодный для решения на нём такой задачи на построение, может оказаться слишком громоздким и трудно выполнимым. В этих случаях предпочтительнее ограничиться воображаемым построением.

20. Однако позиционные задачи и более элементарные метрические могут быть вполне успешно поставлены и разрешены на проекционном чертеже.

21. Такая методика в наилучшей степени соответствует тем задачам, которые были поставлены в начале настоящей статьи: 1) развить пространственные представления учащихся, 2) научить их свободно оперировать с элементами пространства на проекционном чертеже, 3) дать им жизненно-полезные знания и навыки.

PRINCIPLES AND METHODS OF TEACHING GEOMETRICAL CONSTRUCTIONS IN THE SECONDARY SCHOOLS

BY PROF. N. F. TCHETVERUKHIN

Summary

The first part of the paper deals with plane geometrical constructions. The author shows the dependence of these problems on drawing instruments. However, as evident from section 2 of the Article, the problems on construction can be given quite an abstract form, where the instruments are replaced by corresponding definitions. In that way, the nature of plane geometrical constructions is made clear: they belong to the domain of pure mathematics, but reflect practical operations carried out by instruments.

When analysing geometrical constructions in the three-dimensional space, most authors show the tendency to develop a scheme analogous to that of plane constructions. This scheme is of the same abstract character and represents constructions by means of some „imaginary" instruments. By analogy with the ruler and compass the latter might be called „plate" and „spherograph", but these instruments as well as the operations produced with them, are fictitious or imaginary. Therefore the „instrumental" scheme for space constructions does not correspond to experience of every-day-life and loses its meaning. Thus these „imaginary" constructions play their role only in the development of constructive abilities and space imagination.

Of greater value for the school course is the second conception of geometrical constructions in space: solving space problems on projecting drafts. This conception corresponds to experience acquired from life and enables one to instill valuable practical knowledge and skills into pupils. It is only important to find such methods of representation, which would correspond to usual drawings of solid geometry and would not require ways specific to descriptive geometry.

The author's suggestions and his ideas upon the subject are exposed in two articles, published in the magazine „Mathematics at School" (№ 2 and 3, 1946).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 6 · 1946

УЧЕНИЕ О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ В КУРСЕ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

А. И. ФЕТИСОВ
Ст. научный сотрудник

1. Введение

Тригонометрия, как и все отрасли человеческого знания, была вызвана к жизни практическими потребностями людей. Сначала она понадобилась для разрешения задач сферической астрономии, позднее — для нужд геодезии и мореплавания. Эти цели имели в виду Гиппарх и Птоломей (II в. до н. э. и II в. после н. э.), вычислившие первые таблицы тригонометрических функций, к этому же стремился и Региомонтанус (Johann Müller) из Кёнигсберга, 1436—1476 гг.), написавший первый курс тригонометрии.

Бурное развитие математического анализа в последующих столетиях показало, что тригонометрические функции являются мощными орудиями анализа и что они могут разрешать задачи, далеко выходящие за рамки узко-практических целей, послуживших стимулом к введению тригонометрических функций. Это стало особенно очевидным после того, как Фурье (Jean-Baptiste Fourier, 1768—1830 гг.), показал, что огромный класс разнообразнейших функций может быть изображен при помощи тригонометрических рядов. Еще ранее Эйлер (Leonard Euler, 1707—1783 гг.) при помощи мнимых чисел установил связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией.

Наряду с этим было установлено, что интегралы от весьма простых дробных и иррациональных функций выражаются обратными тригонометрическими функциями.

Все эти факты указывают, что учение о тригонометрических функциях, по существу дела, является одной из глав общего учения о функциях, именно — главой, посвященной простейшим трансцендентным функциям.

Однако в практике школьного преподавания тригонометрия продолжает ещё рассматриваться как своеобразная надстройка метрической геометрии, — надстройка, назначение которой заключается в том, чтобы установить зависимость между сторонами и углами треугольника, а потом при помощи этих формул решать различные вычислительные задачи.

В результате последовательного проведения такой точки зрения, у учащегося создается прочное убеждение, что тригонометрия — это наука о решении треугольников. И только попав в высшую школу, он с изумлением узнаёт, что тригонометрические функции играют огромную роль во всем анализе, в механике, электродинамике и т. д.

Но этого мало. К сожалению, даже те, довольно скромные практические задачи, которые ставило перед собой школьное преподавание, достигались далеко не полностью. Постепенно в практике преподавания тригонометрии устанавливались прочные традиции, сильно понизившие как теоретическую, так и практическую часть курса тригонометрии.

Приведём несколько примеров. Начнём с первой, теоретической части, излагаемой в курсе IX класса (это — так называемая „гониометрия"). Как известно, основные формулы в этой части, именно, формулы приведения функций к наименьшему аргументу, а также формулы для синуса и косинуса от суммы и разности углов выводятся только для случая острых углов, и все построения производятся в первом квадранте. В стабильном учебнике Рыбкина мелким шрифтом помещено обобщение этих формул для углов любой величины, однако, это дополнение, как правило, всеми преподавателями пропускается, его не требуют от учащихся при доказательстве этих теорем, и в результате это доказательство самых основных формул тригонометрии остается логически неполноценным.

Далее, из программы исключены формулы $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $x - \sin x < \frac{x^3}{4}$, при помощи которых давалось понятие о построении таблиц тригонометрических функций, благодаря чему учащиеся остаются в полном неведении о возможности построения этих таблиц. Это же обстоятельство лишает преподавателя возможности объяснить учащимся конструкцию таблиц Далямбра.

Наконец, весьма важная и для всего анализа и для приложений — теория обратных тригонометрических функций проходится весьма поверхностно и не всегда строго. Формулы взаимной связи различных аркфункций, формулы суммы и разности их обычно не выводятся. Это тем более досадно, что многие курсы анализа, делая общий обзор элементарных функций, часто ограничиваются фразой: „мы предполагаем, что основные свойства прямых и обратных тригонометрических функций известны читателю из курса средней школы".

Если перейти к области практических приложений тригонометрии, то и здесь дело обстоит не лучше. В школах отсутствует элементарная геодезическая практика, инструментов для ее проведения школа или совсем не имеет, или, если имеет, то не использует. Это лишает учащихся возможности познакомиться с решением простейших задач практической тригонометрии: определением недоступных высот и расстояний, триангуляцией, решением задачи Potenot'a и т. д. В лучших случаях эти задачи разбираются на доске, а часто о них и совсем забывают.

На что же тратится время, посвященное изучению тригонометрии в средней школе? Из 127 часов, отводимых на тригонометрию (из них 55 часов в IX и 72 часов в X классах), оказывается, наибольшее число часов отводится теме „тригонометрические уравнения" (24 часа!). Теоретическое и практическое значение этой темы весьма невелико, так как класс трансцендентных уравнений, изучаемых здесь, весьма ограничен и состоит исключительно из уравнений, легко приводящихся к алгебраическим элементарными подстановками (например, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$). Можно весьма сильно сомневаться в том, что учащийся встретится с уравнениями этого типа где-нибудь, помимо школы, а например, уравнение вида: $\operatorname{tg} x = x$, встречающееся в математической теории упругости, наш учащийся решить не сможет.

Далее, из этих же 127 часов 16 часов отводится на решение задач из планиметрии и стереометрии с приложением тригонометрии. Вместо этих официальных 16 часов дальновидный преподаватель берёт себе гораздо больше, так как он имеет в виду письменные испытания и, в порядке подготовки к ним, начинает решать эти задачи ещё с первого полугодия X класса. Характер этих задач общеизвестен: в них обычно требуется определить поверхность или объем какого-нибудь тела по некоторым данным его элементам, причём эти данные подбираются так, чтобы процесс этого определения протекал, по меткому выражению Клейна, „наиболее неудобным образом". Автор задачи старается, чтобы в результате получилось громоздкое тригонометрическое выражение, требующее большого труда для приведения его к виду, удобному для логарифмирования. Практическое значение этих задач совершенно ничтожно, так как ни один здравомыслящий человек для определения объема конуса не станет вписывать в него пятиугольную пирамиду, проводить в ней диагональные сечения и т. д. Остаётся предположить, что роль этих задач сводится к своеобразной гимнастике ума. Но и здесь необходимо отметить, что для решения огромного большинства этих задач достаточно из тригонометрии знать основные взаимоотношения в прямоугольных треугольниках (конечно, ещё формулы приведения к логарифмическому виду), а из геометрии — теорему Пифагора и теоремы о перпендикулярности из стереометрии.

В результате приходится только пожалеть, что наш школьник тратит так много труда и времени на приобретение знаний и навыков весьма посредственной ценности.

Благодаря этому, представители высшей школы в своих выступлениях постоянно жалуются на то, что учащиеся средней школы приходят к ним с очень недостаточными познаниями именно *в области теоретической части тригонометрии.*

Что же необходимо сделать для устранения этих существенных недостатков в преподавании тригонометрии? — Прежде всего, для этого нужно совершенно четко определить те цели, которые ставит перед собой изучение тригонометрии в средней школе.

Как и всякий другой предмет, изучаемый в средней школе, тригонометрия должна разрешать как теоретические, так и практические задачи. В области теоретической учащиеся должны получить, во-первых, все необходимые сведения для прохождения курса высшей школы, а, во-вторых, всё то, что нужно для понимания других предметов и для построения правильного, научного мировоззрения. В области же практических приложений науки он должен получить те сведения, которые могут ему быть полезны при разрешении задач, с которыми он может встретиться в жизни.

Исходя из этих положений, можно утверждать, что в преподавании тригонометрии нашими целями должно быть:

1) В теоретической тригонометрии: возможно строгое и полное изучение тригонометрических функций в их взаимной связи со смежными разделами математики, при условии чёткого усвоения учащимися всех основных формул и операций.

2) В области практической: научить учащихся применять свойства тригонометрических функций к разрешению задач геометрии (решение треугольников), геодезии, механики, физики (колебательные движения), астрономии и т д.

В связи с только что высказанными положениями возникает новый весьма существенный вопрос стоит ли рассматривать тригонометрию, как самостоятельную дисциплину в общем плане школьного преподавания? — Не давая на этот вопрос категорического ответа, можно считать всё же возможным такое построение курса, когда всё учение о тригонометрических функциях будет рассматриваться как одна из глав элементарного учения о функциональной зависимости, которая должна быть помещена в алгебраико-аналитической части курса.

Что же касается практических приложений тригонометрии, то, например, решение треугольников можно свободно включить в соответствующий раздел метрической геометрии и свойства тригонометрических функций прилагать к решению треугольников так же, как применяется для этих же целей, например, теория квадратного уравнения.

Ниже мы помещаем конспективный курс тригонометрии в том виде, в каком он излагался автором этой работы в течение ряда лет в средней школе.

Конечно, предлагаемый курс ни в какой мере не претендует на единственно правильное решение поставленной проблемы и надо определенно думать, что возможны другие, более совершенные варианты. Но, во всяком случае, по сравнению с обычным изложением, он обладает следующими неоспоримыми преимуществами:

1. С первых же шагов устанавливается непосредственная связь тригонометрических функций с комплексными числами.

2. Все формулы получаются сразу для углов любой величины; так что никаких дальнейших обобщений, связанных с изменением величины угла, не требуется.

3. Изучение таких понятий, как „вектор“, „оператор“, поможет учащемуся в дальнейшем легче войти в круг идей современной математики, так как эти понятия играют большую роль в различных разделах алгебры и анализа.

4. Большая общность идей позволяет в сильной степени облегчить доказательство многих формул (формулы функций от суммы, функций от кратного и дробного аргумента и т. д.), что освобождает время для изучения других важных свойств тригонометрических функций, обычно не излагаемых в школе.

Нижеследующие строки посвящены сжатому изложению элементарных свойств векторов, теории операторов и комплексных чисел и важнейшим свойствам тригонометрических функций. На практических приложениях, в частности, на решении треугольников, мы останавливаемся лишь постольку, поскольку в них можно внести существенные изменения по сравнению с обычным курсом.

II. Конспект изложения теории комплексных чисел и тригонометрических функций

§ 1. Предварительные замечания

1. Прежде, чем перейти к систематическому изложению, в целях возможно большего сокращения записей, введём следующие условные обозначения:

D (definitio — определение).
T (theorema — теорема).
L (lemma — лемма — вспомогательная теорема).
C (corollarium — следствие).

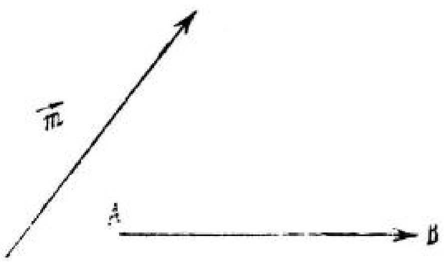
Перед изложением доказательства какого-нибудь предложения мы будем ставить знак $\vdots$.

Точно также мы будем иногда пользоваться знаком вывода $\because$ („а потому“).

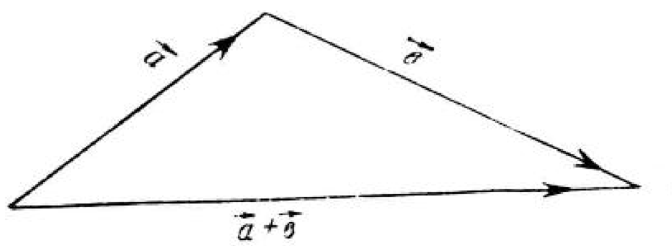
Для удобства при ссылках на ту или иную часть изложения, мы разбиваем его на параграфы, а параграфы — на пункты, нумерация которых идет непрерывно от начала и до конца. Порядковый же номер определений, теорем и следствий изменяется от параграфа к параграфу.

§ 2. Операции с векторами

2. D_1. Отрезок, на котором установлено определённое направление, мы будем называть *вектором.* В соответствии с выбранным направлением, один конец этого отрезка мы будем называть *началом*, а другой — *концом* вектора. На чертеже вектор мы будем изображать отрезком со стрелкой, показывающей направление. В записи мы будем вектор обозначать или малой латинской буквой со стрелочкой сверху или двумя большими латинскими буквами, обозначающими точки начала и конца вектора. Так, на черт. 1 мы имеем вектор $\vec{m}$ и вектор $\overrightarrow{AB}$.



Черт. 1.



Черт. 2.

D_2. Два вектора мы будем считать равными тогда и только тогда, когда соответствующие отрезки равны, параллельны и одинаково направлены („сонаправлены“).

Параллельные между собой векторы мы будем также называть *коллинеарными.*

Из этого определения следует, что вектор можно переносить, не изменяя его длины и направления, в любую точку пространства. Однако иногда приходится рассматривать вектор, начало которого находится в некоторой постоянной точке. Такой „связанный“ вектор мы будем называть *радиусом-вектором.*

В дальнейшем мы ограничимся изучением свойств векторов, принадлежащих одной и той же плоскости.

3. Из элементарной геометрии мы знаем, что для получения суммы двух отрезков нужно конец первого отрезка совместить с началом второго так, чтобы второй отрезок поместился на продолжении первого. Тогда *суммой* этих отрезков будет отрезок между началом первого и концом второго. Непосредственным обобщением этого является определение суммы векторов.

D_3. Чтобы получить сумму двух векторов, конец первого вектора совмещают с началом второго и берут вектор, идущий от начала первого до конца второго вектора (черт. 2).

T_1. Сумма векторов подчиняется переместительному и сочетательному законам.

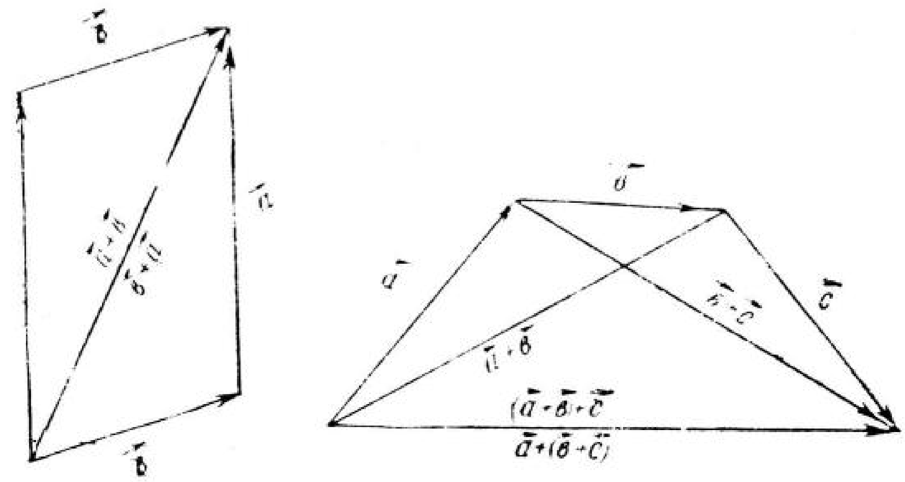
|: 1) Возьмем (черт. 3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и составим их сумму, согласно определению. Если теперь от этой же начальной точки сначала отло-

жить вектор $\vec{b}$ и присоединить к нему вектор $\vec{a}$, то в силу равенства и параллельности векторов, мы получим параллелограмм, диагональ которого будет суммой векторов и в том и в другом случае.

Итак
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

В том случае, когда слагаемые вектора коллинеарны, сложение векторов приводится к сложению и вычитанию отрезков. Доказательство наличия переместительного и сочетательного законов мы предполагаем известными из курса геометрии.

2) Для доказательства сочетательного закона прибавим сначала к сумме $\vec{a}+\vec{b}$ вектор $\vec{c}$ (черт. 3′), а потом к вектору $\vec{a}$ прибавим



Черт. 3.

сумму $\vec{b}+\vec{c}$. В том и в другом случае мы получим один и тот же вектор:
$$\therefore\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

C_1. Непосредственно из определения векторной суммы следует при любом расположении точек A, B и C имеет место равенство:
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

4. D_4. Если у данного вектора $\vec{a}$ изменить направление на обратное, то получим вектор, который мы будем называть **противоположным** данному и будем обозначать его: „$-\vec{a}$“. Сумма двух взаимно противоположных векторов дает **нуль-вектор** — точку. Если данный вектор у нас обозначался $\overrightarrow{AB}$, то противоположный ему вектор будем: $\overrightarrow{BA}$;
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0.$$

C_2. Непосредственно из самого определения нуль-вектора следует, что при сложении любого вектора с нуль-вектором данный вектор не изменяется $\vec{a}+0=\vec{a}$.

C_3. При любом расположении трех точек имеет место равенство:
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0.$$

D_5. Чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{b}$, прибавляем к $\vec{a}$ вектор, противоположный $\vec{b}$

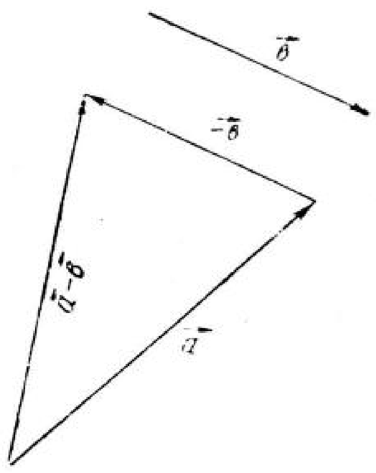
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \text{ (черт. 4).}$$

C_4. Основная определяющая формула вычитания, а вместе с ней и все вытекающие из нее формулы действий первой ступени остаются справедливыми для действий первой ступени с векторами.

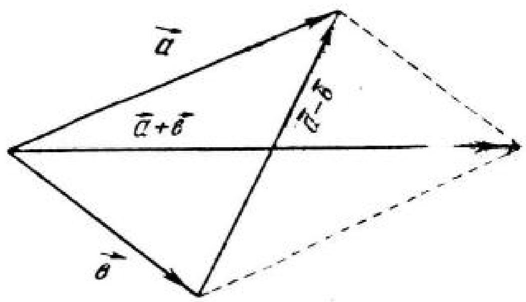
: По определению, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+0=\vec{a}$

Итак, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{b}=\vec{a}$, а это и есть определяющая формула вычитания

C_5. Если данные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ привести к общему началу и построить на них параллелограмм, то вектор сумма будет диагональю, идущей между векторами, а вектор разность — диагональю, соединяющей концы векторов, причем направление разности будет от вычитаемого к уменьшаемому (черт. 5).



Черт. 4.



Черт. 5.

§ 3. Отношение коллинеарных векторов

5. D_1. Если векторы коллинеарны, то под отношением их мы будем подразумевать действительное число, равное отношению соответствующих отрезков, причём число это мы будем считать положительным, если векторы сонаправлены, и отрицательным если векторы противонаправлены. Символически будем записывать так

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}}=k.$$

Условимся далее эту же запись писать в другом виде:

$$\vec{a}=k\vec{b},$$

и в этом случае рассматривать вектор $\vec{a}$ как результат *умножения* *вектора* $\vec{b}$ на *действительный оператор* k, при этом $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и сонаправлены при $k>0$ и противонаправлены при $k<0$. При $k=0$ произведение $0\cdot\vec{b}=0$; при $k=1$, $1\vec{b}=\vec{b}$.

Смысл этой записи заключается в том, что по данному вектору $\vec{b}$ и действительному числу k мы получаем вектор $\vec{a}$. отношение которого к вектору $\vec{b}$ равно k. Так как в результате этой операции происходит определённое изменение вектора $\vec{b}$, то число k в этом случае называется *оператором растяжения*, а сама операция: $\vec{a} = k\vec{b}$ называется *умножением* вектора $\vec{b}$ на оператор растяжения k [1].

D_2. Модулем или абсолютной величиной вектора называется действительное и притом неотрицательное число, равное отношению длины соответствующего отрезка к длине отрезка, принятого за единицу. Если длина вектора равна единице, то такой вектор называется единичным вектором или ортом (ort от orientation — определение направления). Модуль вектора обычно обозначается той же буквой, только без векторного знака, или же данный вектор заключают в скобки Вейерштрасса (| |):

$$a = |\vec{a}|.$$

C_1. Каждый вектор равен произведению своего модуля на единичный вектор: если $\vec{a}$ — данный вектор, $\vec{e}$ — сонаправленный с ним единичный вектор, то будем иметь:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{e}.$$

6. T_1. При умножении векторов на действительный оператор имеет место распределительный закон как для суммы векторов, так и для суммы операторов:

$$1)\ k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \qquad \text{и } 2)\ (m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}.$$

1) Пусть $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (черт. 6). Произведем гомотетию с центром в A и с коэфициентом k, при этом точка A перейдет в A^1, B в B', C в C', причем будем иметь:

$$\vec{AB'} = k\,\vec{AB},\ \ \vec{B''C'} = k\,\vec{BC},\ \vec{AC'} = k\,\vec{AC};$$

в то же время:

$$\vec{AB'} + \vec{B'C'} = \vec{AC'};$$

т. е.

$$k\,\vec{AB} + k\,\vec{BC} = k\,\vec{AC} = k(\vec{AB} + \vec{BC'}),$$

что и доказывает первый распределительный закон.

2) Для доказательства второго распределительного закона, возьмём вектор $\vec{a}$ и умножим его на m и на n. Векторы $m\vec{a}$ и $n\vec{a}$, по определению, коллинеарны и, если числа $m\vec{a}$ и $n\vec{a}$ одинаковых знаков, то их сложение приводится к сложению отрезков. Если принять $|\vec{a}|$ за единицу, то m и n будут длины этих отрезков, но тогда длина их суммы будет равна $m+n$,

[1] Примечание. Понятие „оператор" в современной математике определяет тот случай функциональной зависимости (главным образом между нечисловыми объектами), для которой выполняются условия:

$$1)\ u(a+b) = u(a) + u(b),$$
$$2)\ u(ma) = m\,u(a),$$

где

u — символ оператора, a и b — данные объекты, m — действительное число. Этими условиями оправдывается название „умножение" для операции применения оператора к какому-нибудь объекту.

откуда:

$$\overrightarrow{ma}+\overrightarrow{na}=(m+n)\overrightarrow{a}.$$

Если же числа m и n были бы разных знаков, то мы это же рассуждение применили бы к разности отрезков и получили бы тот же результат.

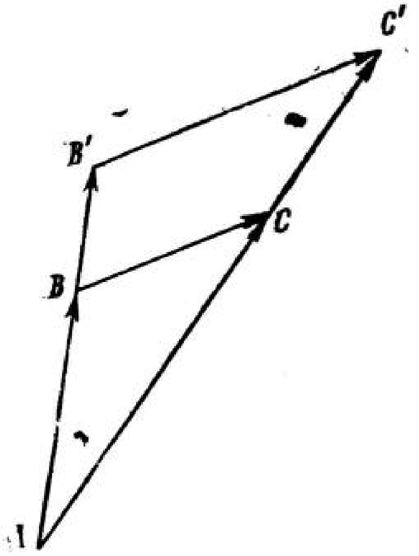
7. T_2. Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ является существование равенства:

$$\overrightarrow{ma}+\overrightarrow{nb}=0$$

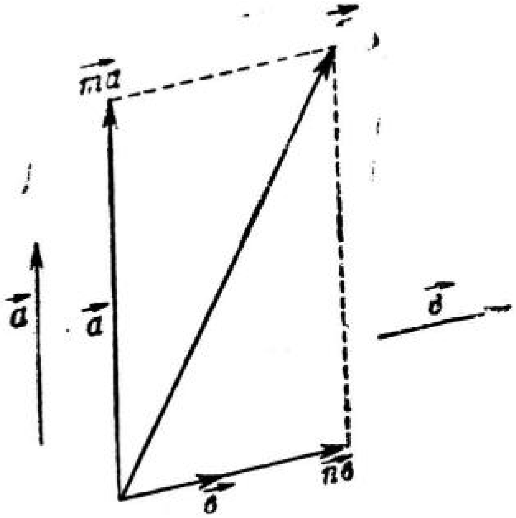
при m и n, не равных нулю.

|: Условие необходимо, так как если $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны, то будем иметь:

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}}=k \text{ или } \overrightarrow{a}=k\overrightarrow{b}, \text{ или } \overrightarrow{a}-k\overrightarrow{b}=0.$$



Черт. 6.



Черт. 7.

Положив $m=1$, $n=-k$, получим нужное равенство:

$$\overrightarrow{ma}+\overrightarrow{nb}=0.$$

Условие достаточно, так как, если оно выполнено, то будем иметь: $\overrightarrow{ma}=-\overrightarrow{nb}$, или $\overrightarrow{a}=-\frac{n}{m}\overrightarrow{b}$, откуда и следует, что $\overrightarrow{a}$ коллинеарно с $\overrightarrow{b}$.

8. T_3. Каждый вектор можно единственным образом разложить по двум заданным, не коллинеарным между собой векторам.

|: Пусть $\overrightarrow{r}$ данный вектор, $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — не коллинеарные между собой векторы (черт. 7). Приведем все три вектора к общему началу и проведем через конец вектора $\overrightarrow{r}$ прямые, параллельные $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Эти прямые вместе с прямыми, на которых лежат $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, образуют параллелограмм, диагональю которого служит $\overrightarrow{r}$. По определению суммы, получим:

$$\overrightarrow{r}=\overrightarrow{ma}+\overrightarrow{nb},$$

так как стороны параллелограмма коллинеарны соответственно $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Докажем единственность разложения. Для этого допустим, что существует второе аналогичное равенство:

$$\vec{r} = m'\vec{a} + n'\vec{b}.$$

Но отсюда получим:

$$m\vec{a} + n\vec{b} = m'\vec{a} + n'\vec{b},$$

или:

$$(m - m')\vec{a} + (n - n')\vec{b} = 0.$$

Согласно предыдущей теореме, это обозначало бы, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию теоремы. Поэтому полученное равенство возможно только при условии $m - m' = 0$ и $n - n' = 0$, или:

$$m = m' \text{ и } n = n',$$

т. е. разложение единственно.

C_2. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то из равенства:

$$m\vec{a} + n\vec{b} = m'\vec{b}' + n'\vec{b}$$

следует:

$$m = m' \text{ и } n = n'.$$

§ 4. Операторы поворота и растяжения

9. D_1. Возьмем два произвольных вектора: $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для того, чтобы охарактеризовать их отношение, недостаточно указать только на отношение их длин, а необходимо еще установить разницу их направлений, которая определяется тем углом, на который нужно повернуть вектор $\vec{b}$ в положительном направлении (т. е. против направления движения стрелки часов), чтобы оба вектора стали сонаправлены. Таким образом отношение двух произвольных векторов выразится символически равенством:

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = [r, \omega].$$

Символ $[r, \omega]$, в котором r обозначает действительное и неотрицательное число, определяющее отношение длин данных векторов, а ω обозначает величину угла поворота от $\vec{b}$ к $\vec{a}$ [1], мы и будем называть ***отношением*** вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$.

Ту же самую зависимость между векторами мы будем записывать и в другой форме:

$$\vec{a} = [r; \omega]\,\vec{b},$$

и здесь мы будем рассматривать символ $[r; \omega]$, как ***оператор поворота и растяжения вектора.*** Это значит, что умножение вектора на этот оператор поворачивает его на угол ω и изменяет его длину в r раз.

Например, на черт. 8:

$$\vec{a} = [2;\ 60^\circ]\ \vec{b}$$

[1] Величина ω может быть выражена как в градусной, так и в радианной мере, причем вопрос о мере угла мы относим к курсу геометрии.

или:

$$\vec{a}=\left[2;\ \frac{\pi}{3}\right]\vec{b}.$$

Иногда, для сокращения, мы будем оператор поворота и растяжения обозначать одной буквой z и называть его просто *z-оператором*: $z=[r;\ \omega]$.

Величина r в этом символе называется *модулем* или *абсолютной величиной* z-оператора и обозначается: $|z|$

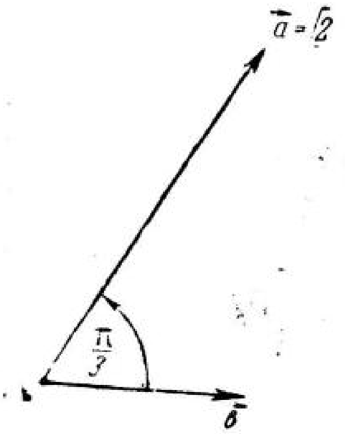
$$r=|z|.$$

Угол ω называется *аргументом* оператора и обозначается:

$$\omega=\arg z.$$

Условимся отношение нуль-вектора к любому, отличному от нуля вектору называть ***нулевым оператором*** и обозначать: $[0;\ \omega]$ при любом аргументе. Примем также, что произведение всякого вектора на нулевой оператор дает нуль-вектор:

$$[0;\ \omega]\ \vec{a}=0.$$


Черт. 8.

Заметим, наконец, что порядок, в котором производятся операции поворота и растяжения вектора, очевидно, безразличен, т. е. сначала можно произвести изменение длины вектора, а потом поворот, или обратно, сначала поворот, а потом — изменение длины.

Один и тот же оператор, будучи применен к различным векторам, преобразует их в векторы, образующие вместе с первоначальными векторами подобные и одинаково ориентированные треугольники: если $\overrightarrow{OA}=[r;\ \omega]\ \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{O'A'}=[r;\ \omega]\ \overrightarrow{O'B'}$, то $\triangle OAB \sim \triangle O'A'B'$ при одинаковой ориентировке и обратно, если соответствующие векторные конфигурации будут подобны, то операторы будут равны.

10. C_1. Непосредственно из определения оператора поворота и растяжения следует, что два оператора равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы или равны или отличаются на целое число полных оборотов, т. е. на $2\,k\pi$ или на $k\ 360^\circ$.

|: Действительно, из равенства $\vec{a}=[r;\ \omega]\ \vec{b}$ видим, что при умножении $\vec{b}$ на различные операторы длины полученных векторов совпадут только при одинаковых r, а направления совпадут или при одинаковых ω или при аргументах, отличающихся друг от друга на целое число полных поворотов.

Итак, если $[r;\ \omega]=[r';\ \omega']$, то $r=r'$ и $\omega-\omega'=2k\pi$ (при k целом) [1].

11. C_2. Всякий действительный оператор [2] можно рассматривать как частный случай z-оператора [2].

|: Рассмотрим оператор: $[r;\ n\pi]$ при n целом. Если n четное, то при умножении вектора на этот оператор, направление вектора сохраняется (полное число оборотов), а длина изменяется в r раз. Это равносильно умножению вектора на положительное число r: т. е.

[1] Аргументы, удовлетворяющие равенству: $\omega_1-\omega_2=2k\pi$, мы будем называть **эквивалентными**.

[2] Имеется в виду определение действительного оператора, данное в п. 5.

действие z-оператора на вектор равносильно действию действительного оператора, что мы запишем так:

$$[r;\ 2\pi n] = r.$$

Если же n — нечётное, т. е. $n = 2k + 1$, то умножение вектора на оператор повернет вектор на k полных оборота и один полуоборот, т. е. изменит его направление на противоположное, причём длина его изменится в r раз, но это равносильно умножению вектора на отрицательное число — r.

Итак, имеем:

$$[r;\ (2k+1)\pi] = -r.$$

T_1. При умножении суммы векторов на z-оператор имеет место закон распределительный:

$$z(\vec{a} + \vec{b}) = z\vec{a} + z\vec{b}\ .$$

: Положим $z = [r;\ \omega]$, и дана сумма: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Принимая A за центр вращения, повернем всю фигуру на угол ω и потом произведём гомотетию с центром A и коэфициентом r. Тогда получим, что все векторы в новой фигуре (предполагая, что A преобразовалось в A', B — в B' и C — в C') будут повёрнуты на угол ω, и длина их изменится в r раз по отношению к первоначальной длине; следовательно, мы получим:

$$\vec{AB'} = z\,\vec{AB};\ \vec{AC'} = z\,\vec{AC}$$

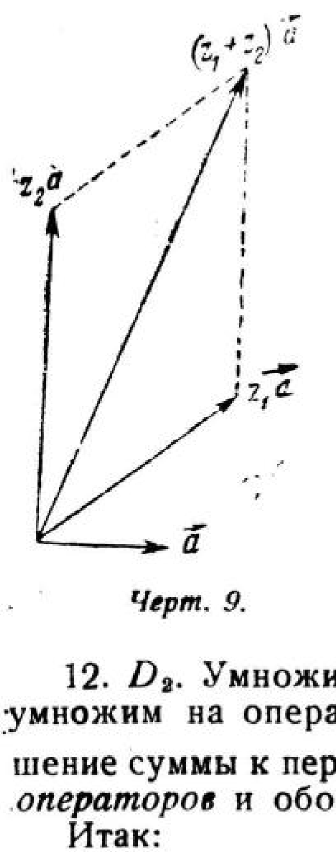
и

$$\vec{B'C'} = z\,\vec{BC},$$

$$\therefore\ \vec{AC'} = \vec{AB'} + \vec{B'C'},$$

или

$$z\,(\vec{AB} + \vec{BC}) = z\,\vec{AB} + z\,\vec{BC}.$$



Черт. 9.

12. D_2. Умножим вектор $\vec{a}$ на оператор z_1, потом этот же вектор $\vec{a}$ умножим на оператор z_2 и сложим полученные векторы. Тогда отношение суммы к первоначальному вектору $\vec{a}$ мы будем называть *суммой операторов* и обозначать $z_1 + z_2$ (черт. 9).

Итак:

$$\frac{z_1\vec{a} + z_2\vec{a}}{\vec{a}} = z_1 + z_2,$$

или иначе:

$$z_1\vec{a} + z_2\vec{a} = (z_1 + z_2)\,\vec{a}\ .$$

Полученная сумма $z_1 + z_2$ определяется только операторами z_1 и z_2 и не зависит от выбора вектора $\vec{a}$, так как произведя эту же операцию над любым другим вектором $\vec{b}$, мы получим, как легко убедиться, фигуру, подобную фигуре (черт. 9), в которой отношение вектора $(z_1 + z_2)\,\vec{b}$ к вектору $\vec{b}$, поэтому, дает тот же самый оператор $z_1 + z_2$.

Легко видеть, что, когда z_1 и z_2 являются действительными операторами, то полученное равенство есть распределительный закон умножения.

C_3. Если аргументы операторов эквивалентны, то модуль суммы равен сумме модулей слагаемых. Если аргументы отличаются на полуоборот, т. е. на π, то модуль суммы равен разности модулей слагаемых.

| : Действительно, в первом случае векторы $z_1\vec{a}$ и $z_2\vec{a}$ будут сонаправлены, и длина полученного вектора будет равна сумме длин составляющих, $\therefore$

$$[r;\ \omega]+[r';\ \omega]=[r+r';\ \omega].$$

Во втором случае векторы $z_1\vec{a}$ и $z_2\vec{a}$ противонаправлены, и длина суммы равна разности длин составляющих, $\therefore$

$$[r;\ \omega]+[r';\ \omega+\pi]=[r-r';\ \omega]\ (\text{при условии: } r>r').$$

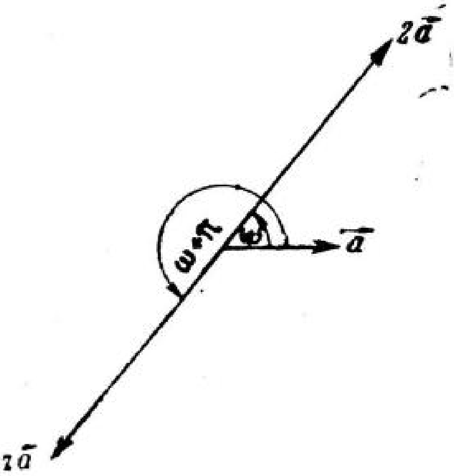
13. T_1. Сумма операторов подчиняется переместительному и сочетательному законам.

| : Переместительный и сочетательный законы доказаны для векторной суммы; $\therefore$ $z_1\vec{a}+z_2\vec{a}=z_2\vec{a}+z_1\vec{a}$. Беря отношение обеих частей равенства к вектору $\vec{a}$, получим:

$$z_1+z_2=z_2+z_1.$$

Аналогично доказывается и сочетательный закон:

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3.$$



Черт. 10.

14. D_3. Операторы, модули которых одинаковы, а аргументы отличаются на половину поворота, т. е. на π, называются *взаимно-противоположными*. Если один из них обозначен z, то другой мы будем обозначать $-z$.

C_4. Сумма двух взаимно-противоположных операторов дает нулевой оператор.

| : Пусть $z=[r;\ \omega]$,

$$\text{тогда } -z=[r;\omega+\pi].$$

Согласно C_3, будем иметь:

$$z+(-z)=[r;\ \omega]+[r;\ \omega+\pi]=[r-r;\ \omega]=[0;\ \omega]=0\ (\text{черт. } 10).$$

15. D_4. Чтобы получить разность операторов z_1 и z_2, прибавим к первому оператору оператор противоположный второму:

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2).$$

C_5. Основная определяющая формула вычитания, а значит и все опирающиеся на нее формулы действий первой ступени, остаются в силе для операторов.

$$|:\ z_1-z_2+z_2=z_1+(-z_2)+z_2=z_1+0=z_1,$$

так как

$$z_1+0=[r_1\ \omega_1]+[0_1\ \omega_1]=[r_1+0;\ \omega_1]=[r_1;\ \omega_1]=z_1.$$

Итак:

$$z_1-z_2+z_2=z_1.$$

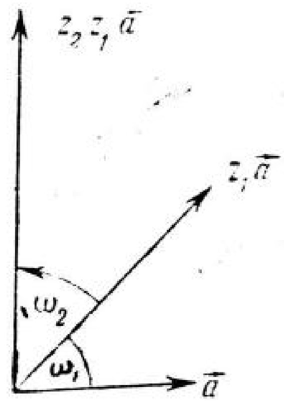
5. Действия второй ступени с z-операторами

16. D_1. Возьмём вектор $\vec{a}$ и умножим его на оператор z_1, после этого полученный вектор $z_1 \vec{a}$ еще раз умножим на оператор z_2. Тогда отношение последнего вектора к первоначальному вектору $\vec{a}$ мы будем называть произведением операторов z_1 и z_2

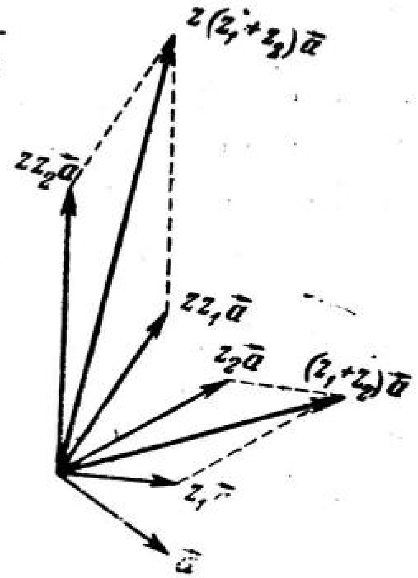
$$\frac{z_2 z_1 \vec{a}}{\vec{a}} = z_2 z_1.$$

Полученное произведение $z_1 z_2$ определяется только операторами z_1 и z_2 и не зависит от выбора вектора $\vec{a}$, так как, если это же построение произвести с другим вектором $\vec{b}$, то получим фигуру, подобную фигуре (черт. 11), и отношение вектора $z_1 z_2 \vec{b}$ к вектору $\vec{b}$ дает тот же оператор $z_1 z_2$.

T_1. При умножении z-операторов модуль произведения равен



Черт. 11.



Черт. 12.

произведению модулей множителей, аргумент произведения равен сумме аргументов множителей:

$$z_1 z_2 = [r_1;\ \omega_1] \cdot [r_2;\ \omega_2] = [r_1 r_2;\ \omega_1 + \omega_2],$$

или

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad arg z_1 z_2 = arg z_1 + arg z_2.$$

: При умножении вектора на оператор z длина этого вектора изменяется в r раз, . Длина нового вектора еще раз изменяется при умножении на z_2 в r_2 раз, длина окончательного вектора изменится в $r_1 r_2$ раз. Итак, модуль произведения равен произведению модулей множителей.

Если при умножении на z_1 вектор повернулся на ω_1, а потом при умножении на z_2 новый вектор повернулся еще на ω_2, то конечный угол поворота будет $\omega_1 + \omega_2$ (см. черт. 11): аргумент произведения равен сумме аргументов множителей.

17. T_2. При умножении операторов имеет место закон переместительный и сочетательный.

|: Это объясняется тем, что произведение операторов определяется произведением и суммой действительных чисел, для которых эти законы действительны.

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, \qquad \text{так как } r_1 r_2 = r_2 r_1 \quad \text{и } \omega_1 + \omega_1 = \omega_2 + \omega_1.$$

И точно так же:

$$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3, \text{ так как } r_1(r_2r_3)=(r_1r_2)r_3 \text{ и } \omega_1+(\omega_2+\omega_3)=(\omega_1+\omega_2)+\omega_3.$$

C_1. Произведение операторов обращается в нуль тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю.

: Оператор равен нулю, если его модуль равен нулю. А так как модуль произведения равен произведению модулей множителей, то ясно, что он обратится в нуль только в том случае, если один из множителей равен нулю.

C_2. При умножении оператора на единицу данный оператор не изменяется:

$$z\cdot 1=[r;\ \omega]\,[1;\ 2\pi k]=[r\cdot 1;\ \omega+2\pi k]=[r;\ \omega]=z.$$

18. T_3. При умножении суммы операторов на оператор имеет место закон распределительный:

$$z(z_1+z_2)=zz_1 z\cdot z_2.$$

: Возьмем вектор $\vec{a}$ (черт. 12) и построим вектор $(z_1+z_2)\vec{a}$, определяющий сумму. Если теперь полученные векторы $z_1\vec{a}$; $z_2\vec{a}$ и $(z_1+z_2)\vec{a}$ умножить на оператор $z=[r;\ \omega]$, то длина всех векторов сначала изменится в r раз, отчего первоначальный параллелограмм преобразуется в гомотетичный ему параллелограмм, а потом все полученные векторы, т. е. весь параллелограмм должен повернуться на угол ω. Так как при этом фигура параллелограмма сохранится, то будем иметь:

$$z(z_1+z_2)\vec{a}=z\,z_2\vec{a}+zz_1\vec{a},$$
$$\therefore\ z(z_1+z_2)=zz_1+zz_2.$$

19. D_2. Два оператора, модули которых равны, а аргументы в сумме дают $2k\pi\,(k=0,\ 1,\ 2\ldots)$, называются *взаимно-сопряженными*, например,

$$z=[r;\ \omega] \text{ и } z'=[r;\ 2k\pi-\omega].$$

C_3. Произведение двух взаимно-сопряженных операторов равно квадрату их общего модуля.

: Действительно, если

$$z=[r;\ \omega],\ \ z'=[r;\ 2k\pi-\omega],$$

то

$$zz'=[r^2;\ 2k\pi]=r^2.$$

20. D_3. Если $z=[r;\ \omega]$, то *обратным* ему оператором называют и обозначают $\frac{1}{z}$ оператор с модулем, обратным по величине данному модулю и с аргументом, который в сумме с данным аргументом даёт $2k\pi$:

$$\frac{1}{z}=\left[\frac{1}{r};\ 2k\pi-\omega\right].$$

C_4. Произведение двух взаимно-обратных операторов равно единице: $z\cdot\frac{1}{z}=1$.

: Если

$$z=[r;\ \omega],$$
$$\frac{1}{z}=\left[\frac{1}{z};\ 2k\pi-\omega\right],$$

тогда

$$z \cdot \frac{1}{z} = \left[r \cdot \frac{1}{r};\ 2k\pi\right] = \left[1; 2k\pi\right] = 1.$$

21. D_4. Чтобы разделить оператор z_1, на оператор z_2, умножаем z_1 на оператор обратный:

$$z_1 : z_2 = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}.$$

T_4. Модуль частного равен частному модулей делимого и делителя; аргумент частного эквивалентен разности аргументов делимого и делителя.

|: Пусть

$$z_1 = [r;\ \omega_1];$$

$$z_2 = [r_2;\ \omega_2].$$

Тогда

$$\frac{1}{z_2} = \left[\frac{1}{r_2};\ 2k\pi - \omega_2\right]$$

$$z_1 : z_2 = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \left[r_1 \cdot \frac{1}{r_2};\ \omega_1 - \omega_2 + 2k\pi\right] =$$

$$\doteq \left[\frac{r_1}{r_2}; \omega_1 - \omega_2 + 2k\pi\right] = \left[\frac{r_1}{r_2};\ \omega_1 - \omega_2\right].$$

C_5. Основная определяющая формула деления справедлива для деления операторов:

$$: z_1 : z_2 \cdot z_2 = z_1 z \cdot \frac{1}{z_2} \cdot z_2 = z_1 : 1 = z,$$

$$\therefore\ z_1 : z_2 \cdot z_2 = z_1.$$

Отсюда также следует, что все формулы действий II ступени остаются правильными для операторов.

C_6. Чтобы оператор z_1 разделить на оператор z_2, достаточно z_1 помножить на оператор, сопряжённый с z_2, и разделить на квадрат модуля z_2.

1. Для доказательства, в частном $\frac{z_1}{z_2}$ умножим и делимое и делитель на z_2', сопряжённое с z_2, тогда получим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2'}{z_2 z_2'} = \frac{z_1 z_2'}{r^2{}_2}.$$

22. D_5. *Числовым полем* называется совокупность чисел, обладающая тем свойством, что всякое действие первой или второй ступени, произведенное над любой парой чисел этой совокупности (исключая деление на нуль) вновь даёт число той же совокупности.

C_7. В предыдущем мы сочли удобным рассматривать действительное число как оператор. Выводы предыдущего и этого параграфа дают нам основание операторы поворота и растяжения рассматривать как своеобразные числа, расширяющие понятие о числе и включающие в себе действительные числа, как частный случай. Из предыдущего определения, принимая во внимание выводы, полученные в этом и в предыдущем параграфе, можем сказать: *совокупность операторов поворота и растяжения образует числовое поле*.

§ 6. Действия третьей ступени с операторами

23. T_1. Степень оператора при любом рациональном показателе[1] равна оператору, модуль которого равен n-ой степени модуля данного оператора, а аргумент равен произведению n на аргумент данного оператора: $z^n = [r;\ \omega]^n = [r^n;\ n\omega]$.

Пусть сначала n будет целое положительное число. Тогда, по определению степени:

$$z^n = \underbrace{[r;\ \omega]\,[r;\ \omega]\ .\ .\ .\ [r;\ \omega]}_{n \text{ раз}} = [r^n;\ n\,\omega],$$

имея ввиду, что при умножении модули перемножаются, а аргументы складываются.

Положим теперь, что n — целое отрицательное число: $n = -m$, где m положительно. Тогда, по определению степени с отрицательным показателем:

$$z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{[1;\ 0]}{[r;\ \omega]^m} = \frac{[1;\ 0]}{[r^m;\ m\omega]} = \left[\frac{1}{r^m};\ -m\omega\right] = [r^{-m};\ -m\omega]\,.$$

Заменяя $-m$ на n, попрежнему получим:

$$z^n = [r^n;\ n\,\omega].$$

Положим теперь:

$$z^{\frac{p}{q}} = [r;\ \omega]^{\frac{p}{q}} = [\rho;\ \varphi],$$

где p и q целые числа, причем выражение $z^{\frac{q}{p}}$ мы определяем как оператор, который при возведении в степень q дает z^p. Возведя теперь в степень q полученное равенство, найдём:

$$[r;\ \omega]^p = [\rho;\ \varphi]^q, \text{ или } [r^p;\ p\,\omega] = [\rho^q;\ q\,\varphi];$$

следовательно:

$$\rho^q = r^p,$$

откуда

$$\rho = r^{\frac{p}{q}}.$$

Далее:

$$q\,\varphi = p\,\omega + 2\,k\,\pi;$$

следовательно,

$$\varphi = \frac{p}{q}\,\omega + \frac{2\,k\,\pi}{q}.$$

В частности, при $k = 0$, полагая $\frac{p}{q} = n$, получим $[r;\ \omega]^n = [r^n;\ n\,\omega]$, т. е. формула возведения в степень сохраняется и при дробном показателе.

Теорема доказана вполне.

24. T_2. Корень n-ой степени из оператора (при n целом) имеет n различных значений.

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = [r;\ \omega]^{\frac{1}{n}} = [r;\ \omega + 2\,k\,\pi]^{\frac{1}{n}} = \left[r^{\frac{1}{n}};\ \frac{\omega}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}\right].$$

---

[1] Теорему можно обобщить и на иррациональное n, но ввиду того, что иррациональная степень нам для дальнейшего не потребуется, мы этого обобщения не приводим.

Пусть теперь k принимает различные целые значения от 0 до $n-1$. Покажем, что все эти значения полученных корней будут между собой различны. Возьмём два произвольных корня:

$$z_k = \left[r^{\frac{1}{n}};\ \frac{\omega}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right] \text{ и } z_{k'} = \left[r^{\frac{1}{n}};\ \frac{\omega}{n} + \frac{2k'\pi}{n}\right].$$

Ввиду равенства модулей, для равенства операторов необходима эквивалентность аргументов. Рассмотрим разность:

$$\frac{\omega}{n} + \frac{2k\pi}{n} - \frac{\omega}{n} - \frac{2k'\pi}{n} = \frac{2(k-k')\pi}{n}.$$

При k и k', различных и меньших n, эта разность не может быть кратным 2π, так как дробь $\frac{k-k'}{n}$ правильная.

С другой стороны, всякое целое число a при делении на n дает один из остатков: 0, 1, 2,.., $n-1$.

$$a = qn + s\ (s < n).$$

Тогда при $k = a$ получим корень:

$$\left[r^{\frac{1}{n}};\ \frac{\omega}{n} + \frac{2(qn+s)\pi}{n}\right] = \left[r^{\frac{1}{n}};\ \frac{\omega}{n} + \frac{2s\pi}{n} + 2q\pi\right] = \left[r^{\frac{1}{n}};\ \frac{\omega}{n} + \frac{2s\pi}{n}\right];$$

но так как s — одно из чисел: 0, 1, 2,.., $n-1$, то это один из n первоначально рассмотренных корней. Итак, число различных корней будет n и только n.

C_1. В частности, корень n-ой степени из единицы имеет также n различных значений:

$$\sqrt[n]{1} = [1; 2k\pi]^{\frac{1}{n}} = \left[1; \frac{2k\pi}{n}\right] (k = 0,1,2, \ldots, n-1).$$

Эти значения будут:

$$E_0 = [1; 0] = 1;\ E_1 = \left[1; \frac{2\pi}{n}\right];\ E_2 = \left[1; \frac{4\pi}{n}\right], \ldots, E_{n-1} = \left[1; \frac{2(n-1)\pi}{n}\right].$$

§ 7. Комплексная форма z-оператора

25. D_1. Оператор вида $\left[r;\ n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ называется *мнимым числом*. (точнее: чисто-мнимым числом).

C_1. Квадрат всякого мнимого числа есть число отрицательное.

Действительно: $\left[r;\ n\pi + \frac{\pi}{2}\right]^2 = [r^2;\ 2n\pi + \pi] = -r^2$.

C_2. Обратно, при извлечении корня квадратного из отрицательного числа получаются два взаимно-противоположных мнимых числа.

$$\sqrt{-r^2} = [r^2;\ (2n+1)\pi]^{\frac{1}{2}} = \left[r;\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right].$$

По теореме 2 § 6, корень имеет два значения — при $k=0$ и при $k=1$,

$$\left[r; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \left[r; \frac{\pi}{2} + \pi\right].$$

Значения эти взаимно-противоположны.

26. D_2. Рассмотрим, в частности, оператор:

$\left[1; \frac{\pi}{2}\right]$ и будем называть его *мнимой единицей* и обозначать одной буквой i (от французского imaginaire — мнимый). По определению, *мнимая единица является оператором поворота на прямой угол.*

C_3. Последовательные степени мнимой единицы даются таблицей:

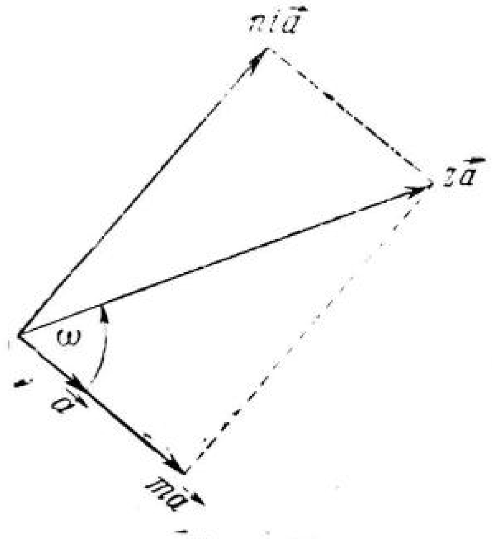
$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \\ i^6 &= -1 \\ i^7 &= -i \\ i^8 &= 1 \\ i^9 &= i \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Правильность этой таблицы легко проверяется непосредственным вычислением степеней оператора: $i = \left[1; \frac{\pi}{2}\right]$.

Действительно:

$$\left[1; \frac{\pi}{2}\right]^2 = [1; \pi] \qquad = -1;$$
$$\left[1; \frac{\pi}{2}\right]^3 = \left[1; \frac{\pi}{2} + \pi\right] = -i,$$
$$\left[1; \frac{\pi}{2}\right]^4 = [1; 2\pi] \qquad = 1$$

и т. д.



Черт. 13.

В дальнейшем необходимо заметить, что i^4 дает полный поворот и эквивалентно единице.

Поэтому можно писать вообще:

$$i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1;$$
$$i^{4n+3} = -i, \quad i^{4n+4} = 1.$$

Например:

$$i^{23} = i^{20+3} = -i.$$

T_1. Каждое мнимое число можно рассматривать как произведение действительного числа на мнимую единицу.

$$| : \left[r;\ n\pi + \frac{\pi}{2}\right] = [r;\ n\pi] \left[1; \frac{\pi}{2}\right] = ri.$$

D_3. Действительное число, на которое умножается i, называется *коэффициентом* мнимого числа. При n четном (см. предыдущую теорему) этот коэффициент положителен; при n нечётном этот коэфициент отрицателен.

C_4. При умножении вектора на мнимое число ai этот вектор надо повернуть на прямой угол и изменить длину в a раз. При a отрицательном получается поворот на $-\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{или, что все равно, на } \frac{3\pi}{2}\right)$.

27. T_2. Каждый z-оператор можно единственным образом представить как сумму действительного и мнимого числа.

| : Возьмем вектор $\vec{a}$ (черт. 13) и умножим его на оператор $z = [r; \omega]$. Полученный вектор $z\vec{a}$ можно единственным образом разложить по двум направлениям: по направлению вектора $\vec{a}$ и по перпендикуляр-

ному. В первом случае мы получим некоторый вектор $m\vec{a}$, во втором — вектор $ni\vec{a}$.

Итак:

$$z\vec{a} = m\vec{a} + ni\vec{a}$$
$$\therefore \quad z = m + ni.$$

Единственность разложения оператора есть следствие единственности разложения вектора. Числа m и n не зависят также от выбора вектора $\vec{a}$, так как, произведя это же построение с любым другим вектором $\vec{в}$, мы получим фигуру, подобную фигуре (черт. 13), и слагающие вектора $z\vec{b}$ будут равны $m\vec{b}$ и $ni\vec{b}$, в силу пропорциональности соответствующих отрезков.

D_4. Оператор вида $m+ni$, где m и n произвольные действительные числа, называется *комплексным числом*. Если $n=0$, комплексное число будет действительным числом; если $m=0$, то — чисто-мнимым. При этом m называется его действительной, n — мнимой частью.

28. T_3. (обратная). Каждое комплексное число единственным образом можно представить как z-оператор.

|: Умножим вектор $\vec{a}$ на число m и на число ni и полученные векторы $m\vec{a}$ и $ni\vec{a}$ сложим. Назовем $z\vec{a}$ их сумму. Искомый оператор получим из отношения: $z = \frac{z\vec{a}}{\vec{a}}$. Однозначность полученного результата основана на однозначности умножения вектора на число и однозначности сложения векторов.

C_5. Если комплексные числа равны, то равны в отдельности действительная часть действительной и мнимая — мнимой: если

$$m + ni = m' + n'i, \text{ то } m = m' \text{ и } n = n'.$$

|: Пусть $z = m + n'i$, $z' = m' + n'i$; и $z = z'$. Тогда ввиду однозначности разложения оператора z,

$$m = m' \text{ и } n = n'.$$

C_6. Если $z = m + ni$, то при $m = 0$ получаем мнимое число, а при $n = 0$ — действительное число. Наконец, при $m = 0$ и $n = 0$ будем иметь $z = 0$.

29. Действия с комплексными числами

Ввиду того, что всякое комплексное число является суммой операторов, которая подчиняется всем вышеустановленным законам действий, то мы получаем следующие правила операций с комплексными числами:

1) Сложение и вычитание комплексных чисел производятся путем почленного сложения и вычитания действительной части с действительной и мнимой с мнимой:

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i.$$

2) Умножение комплексных чисел производится по правилу умножения многочленов, причем только принимается во внимание, что $i^2 = -1$:

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

T_3. Сопряженным операторам соответствуют сопряжённые комплексные числа, которые отличаются только знаками при мнимой части: если $z=[r;\omega]=m+ni$, то $z'=[r;2k\pi-\omega]=m-ni$.

|: Умножим вектор $\vec{a}$ (черт. 14) на операторы z и z'. Тогда векторы $z\vec{a}$ и $z'\vec{a}$ расположатся симметрично по отношанию к вектору $\vec{a}$ и компоненты их по вектору $\vec{a}$ будут тождественны, а в перпендикулярном направлении — противоположны.

C_7. Квадрат модуля оператора равен сумме квадратов коэффициентов действительной и мнимой части:

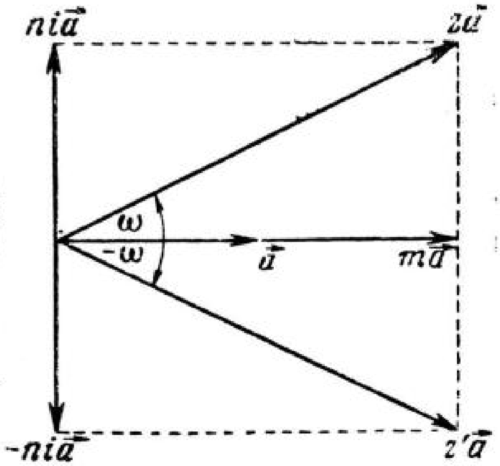
если $z=[r;\ \omega]=m+ni$,

то $r^2=m^2+n^2$.

|: Если $z=[r;\ \omega]=m+ni$,

то $z'=[r;-\omega]=m-ni;\ zz'=r^2;$

$(m+ni)\ (m-ni)=m^2+n^2$.



Черт. 14.

3) Деление комплексных чисел производится согласно правилу C_6 п. 21;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1z'_2}{r_2^2}$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2}.$$

4) Извлечение корня квадратного из комплексного числа производится следующим образом: положим

$$\sqrt{m+ni}=x+iy.$$

Возведем обе части равенства в квадрат:

$$m+ni=x^2-y^2+2\,ixy.$$

Отсюда, на основании C_5:

$$m=x^2-y^2,\quad n=2xy.$$

Возведя еще раз в квадрат, получим

$$\left.\begin{aligned}x^4-2x^2y^2+y^4&=m^2\\ 4x^2y^2\qquad&=n^2\end{aligned}\right\}.\ \text{Сложим:}$$

$$\overline{x^4+2x^2y^2+y^4=m^2}+n^2=r^2$$
$$(r=|m+ni|)$$

или:

$$(x^2+y^2)^2=r^2,\ \text{т. е.}\ x^2+y^2=r$$

(мы берем только положительное значение, так как сумма квадратов действительных чисел всегда положительна).

Итак:

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=r\\ x^2-y^2&=m\end{aligned}\right\}\therefore\ \left.\begin{aligned}2x^2&=r+m;\\ 2y^2&=r-m;\end{aligned}\right\}\begin{aligned}x&=\pm\sqrt{\frac{r+m}{2}}\\ y&=\pm\sqrt{\frac{r-m}{2}}.\end{aligned}$$

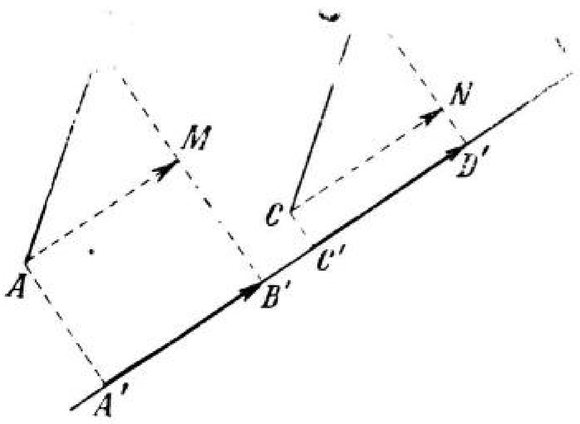
Окончательно имеем:

$$\sqrt{m+ni} = \pm\sqrt{\frac{r+m}{2}} \pm i\sqrt{\frac{r-m}{2}}.$$

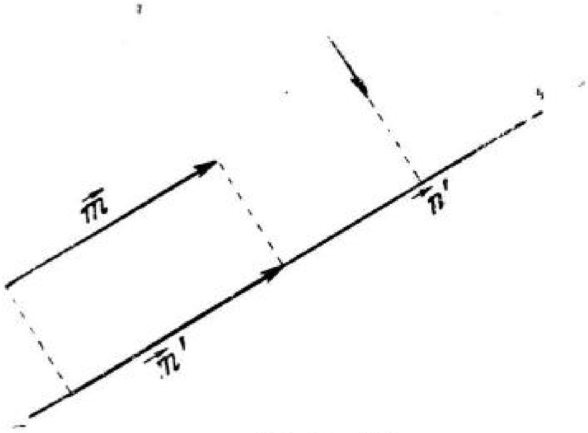
Из равенства $n=2xy$ мы видим, что при $n>0$ нужно для x и y *брать одинаковые знаки*, а при $n<0$ знаки x и y нужно брать противоположные.

§ 8. Геометрическое изображение поля z-операторов

30. D_1. Будем называть *осью* прямую, на которой установлено направление. *Углом* между осью и вектором называется угол, на который нужно повернуть ось в положительном направлении, чтобы её направление совпало с направлением вектора. *Проекцией точки* на ось будем называть основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось. *Проекцией вектора* на ось будем называть вектор, началом которого служит проекция начала, а концом — проекция



Черт. 15.



Черт. 16.

конца данного вектора. При этом условимся проекцию вектора считать сонаправленной, если ее направление совпадает с направлением оси и противонаправленной — в противном случае.

C_1. Равные векторы имеют равные проекции.

: Если $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ данные векторы, $\vec{A'B'}$ и $\vec{C'D'}$ — их проекции на ось l, причем $\vec{AB}=\vec{CD}$, то проведя $AM \parallel l$ и $CN \parallel l$, получим:

$$\Delta ABM = \Delta CDN,$$

так как оба они прямоугольные, $\vec{AB}=\vec{CD}$ и $\angle A = \angle C$ (составленные взаимно-параллельными сторонами). Тогда и

$$\vec{AM}=\vec{CN}; \text{ но } \vec{AM}=\vec{A'B'} \text{ и } \vec{CN}=\vec{C'D'}$$

$$\therefore\ A'B' = \vec{A'B'} = C'D' = \vec{C'D'} \qquad \text{(черт. 15).}$$

C_2. Проекция вектора равна самому вектору только в том случае, если вектор параллелен оси. Во всех остальных случаях модуль проекции вектора меньше модуля этого вектора. Если вектор перпендикулярен к оси, то его проекция даёт нуль-вектор (черт. 16).

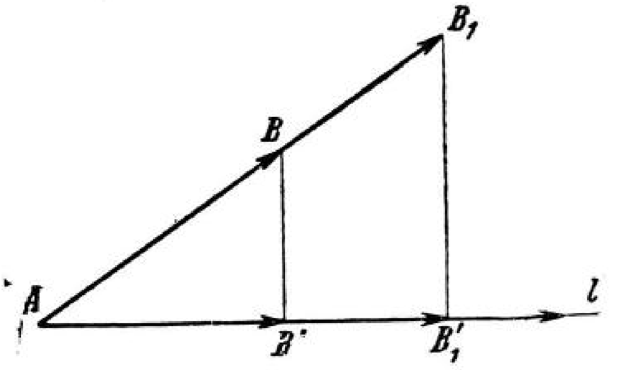
C_3. При умножении вектора на действительное число проекция вектора умножается на это же число.

| : Без нарушения общности можно взять начало вектора на оси (черт. 17). Тогда, умножая фигуру на число k при центре A, мы вектор $\overrightarrow{AB}$ преобразуем гомотетией в вектор $\overrightarrow{AB_1}$, а его проекцию $\overrightarrow{AB'}$ в $\overrightarrow{AB'_1}$. В силу гомотетики, $\overrightarrow{AB_1'}$ остаётся проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$, причем $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB'}$.

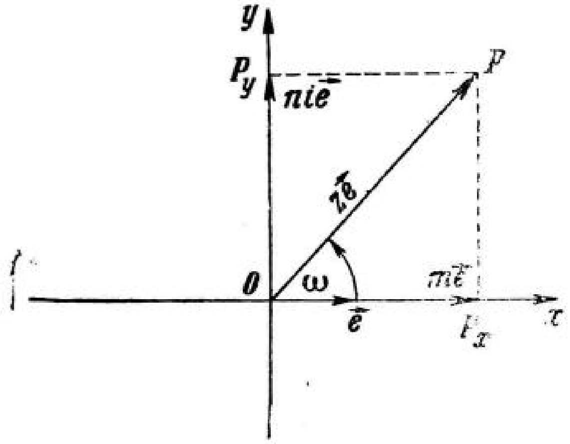
31. D_2. Возьмем две взаимно-перпендикулярные оси x и y, которые назовем *осями координат*, точку их пересечения O назовем *началом координат* (черт. 18).

T_1. При помощи координатных осей поле z-операторов взаимно однозначно отображается на точки числовой плоскости.

| : Проведём из начала координат по направлению оси x единичный вектор — *основной орт* $\vec{e}$. Тогда каждой точке плоскости (например, P, черт. 18) соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{OP}$, который, в свою очередь, однозначно определяет оператор $z = \frac{\overrightarrow{OP}}{\vec{e}}$, модулем которого служит модуль вектора $\overrightarrow{OP}$, а аргументом — угол между осью x и этим вектором.



Черт. 17.



Черт. 18.

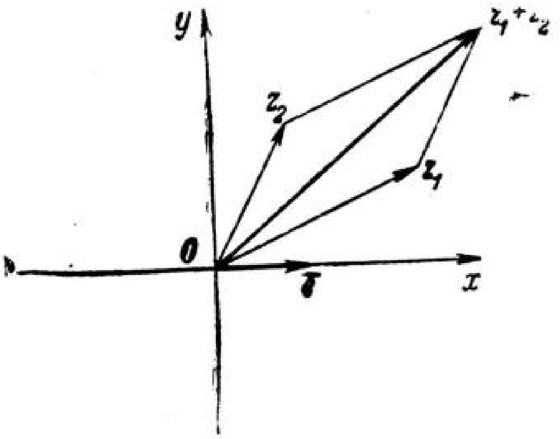
Обратно, если дан оператор $z = [r; \omega]$, то он однозначно определяет радиус-вектор, образующий угол ω с осью x, причем длина вектора равна модулю r. Этим также однозначно определяется точка — конец этого радиуса вектора. Точка эта называется *аффиксом* соответствующего оператора.

Наконец, действительная и мнимая часть оператора даются проекциями вектора соответственно на оси x и y. На черт. 18 действительной части соответствует вектор $\overrightarrow{OP_x}$, мнимой части — вектор $\overrightarrow{OP_y}$. В связи с этим, ось x называется также осью *действительных*, а ось y — *осью мнимых чисел*.

32. С л о ж е н и ю и в ы ч и т а н и ю операторов в геометрическом изображении соответствует сложение и вычитание отображающих их радиусов-векторов (черт. 19).

Для получения п р о и з в е д е н и я в геометрическом изображении, исходим из того обстоятельства, что произведение должно относиться к множимому так, как множитель относится к единице. Это значит, что вектор-произведение вместе с вектором-множимым определяет треугольник, подобный тому, который вектор-множитель образует с основным ортом. Соответствующее построение дано на черт. 20.

Наконец, геометрически легко изобразить все n корней n-ой степени из оператора. Так как все модули у них одинаковы, а аргументы отличаются последовательно на одну и ту же величину $\frac{2\pi}{n}$, то концы соответствующих радиусов векторов располагаются в вершинах правильного n — угольника с центром в начале координат.



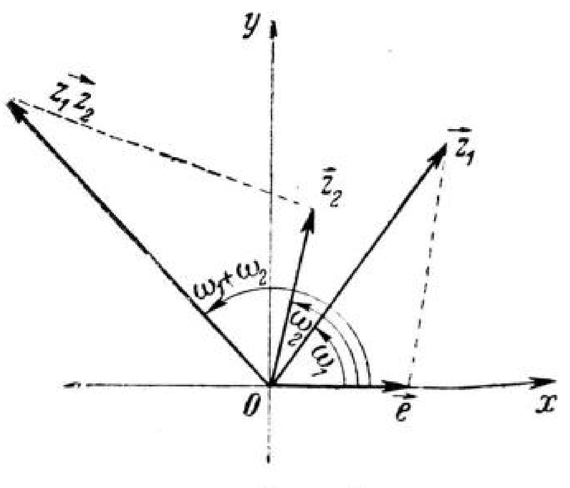
Черт. 19.

На черт. 21 показаны 5 корней 5-ой степени из единицы.

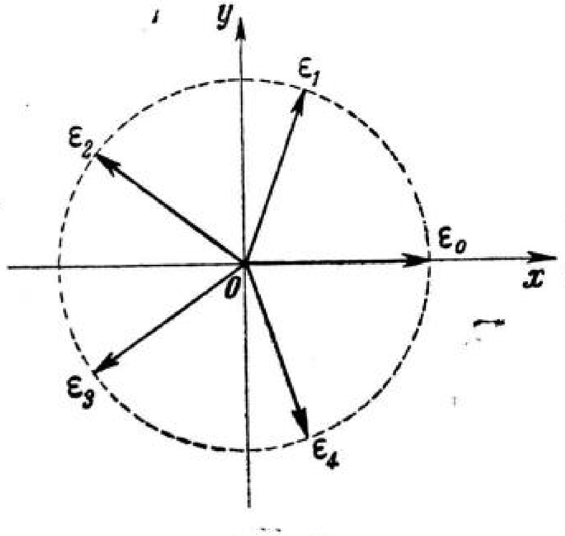
Заметим, в заключение, что при заданном основном орте величины r, ω, определяющие оператор, однозначно определяют положения точки - аффикса на плоскости. Поэтому они называются также *полярными координатами* этой точки. Начало основного орта — точка o называется *полюсом*, а сонаправленная с ортом ось x — *полярной осью*.

С другой стороны, положение точки также однозначно определяется заданием чисел m и n, дающих величины действительной и мнимой части оператора. Они называются *декартовыми координатами точки*.

Возникает вопрос: каким образом по данному модулю и аргументу оператора получить этот оператор в виде комплексного числа? Обратно: каким образом по данному комплексному числу определить модуль и аргумент этого оператора? Выше мы эти вопросы решали геометрическим построением. Однако на практике такое построение дает весьма малую степень точности.



Черт. 20.



Черт. 21.

Правда, в некоторых частных случаях удается произвести такое преобразование, исходя из некоторых теорем планиметрии:
Так, например,

$$[4;\ 60°] = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

Или наоборот:

$$3 + 3i = [3\sqrt{2};\ 45°].$$

Для того же чтобы решить эту задачу во всей общности, необходимо введение тригонометрических функций.

§ 9. Тригонометрические функции

33. D_3. Рассмотрим оператор:

$$z=[r;\omega]=m+ni$$

и возьмем отношения:

$$\frac{m}{r} \text{ и } \frac{n}{r}.$$

Эти отношения определяются только величиной аргумента ω, так как при изменении r в несколько раз величины m и n, как модули проекций вектора, изменяются во столько же раз ($n \cdot 30_1$ C_8).

Таким образом, величины $\frac{m}{r}$ и $\frac{n}{r}$ являются *функциями аргумента* ω[1]. Первая функция, определяемая коэффициентом действительной части, называется *косинусом* аргумента ω (cosinus — сокращенно: cos ω), вторая — определяемая коэфициентом n мнимой части, называется *синусом* ω (sinus — сокращенно: sin ω).
Итак имеем:

$$\frac{m}{r}=\cos\omega;\ \frac{n}{r}=\sin\omega.$$

Иначе $m=r\cos\omega$; $n=r\sin\omega$.

Отсюда получаем *основную формулу*:

$$z=[r;\ \omega]=m+ni=r(\cos\omega+i\sin\omega).$$

Косинус и синус называются тригонометрическими функциями, поэтому выражение: $z=r\ (\cos\omega+i\sin\omega)$ называется *тригонометрической формой оператора.*

Геометрически косинус и синус можно рассматривать как отношение длины проекций радиуса-вектора на координатные оси к длине этого радиуса-вектора, причем знаки этих отношений соответствуют направлениям проекций (см. черт. 18).

34. Согласно данному определению, косинус можно также рассматривать как отношение модуля проекции любого вектора на ось к модулю этого вектора. Отношение берется положительным при сонаправленной проекции и отрицательным — при противонаправленной.

Обратно: проекция вектора на ось по величине и направлению определяется произведением модуля вектора на косинус угла между осью и вектором. Если вектор имеет модуль r, орт, определяющий направление оси, будет $\vec{e}$, угол между осью и вектором ω, то проекция равна $r\vec{e}\cos\omega$.

35. Чтобы изучить изменение $\sin\omega$ и $\cos\omega$ с изменением угла ω, возьмем подвижный радиус-вектор $\vec{r}$, связанный с началом прямоугольной системы координат, приведем его сначала к совпадению с осью x, а потом будем постепенно поворачивать в положительном направлении, пока он не сделает полный оборот. При этом он последовательно пройдет через все четверти (квадранты) плоскости. Одновременно будут изменяться и его проекции на координатные оси, т. е. функции $\cos\omega$ и $\sin\omega$. Ход этих изменений, а также

[1] Понятие функции предполагается известным из курса алгебры.

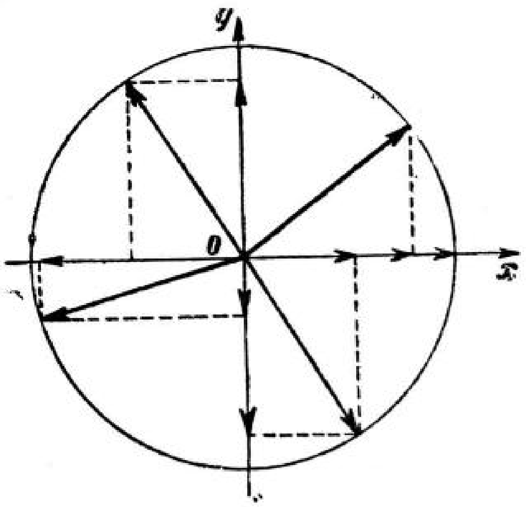
значения функций на границах квадрантов указаны в следующей таблице (см. также черт. 22)[1]:

Функция	Угол 0	I квадрант	Угол $\frac{\pi}{2}$	II квадрант	Угол π	III квадрант	Угол $\frac{3\pi}{2}$	IV квадрант	Угол 2π
$\cos\omega$	1	Уменьшается	0	Уменьшается	1	Увеличивается	0	Увеличивается	1
$\sin\omega$	0	Увеличивается	1	Уменьшается	0	Уменьшается	1	Увеличивается	0

D_2. Функция называется *монотонно-возрастающей*, если при увеличении числового значения аргумента увеличивается и числовое значение функции. Функция называется *монотонно-убывающей*, если с возрастанием аргумента числовое значение функции уменьшается.

C_8. Геометрически легко убедиться, что при изменении аргумента внутри каждого из интервалов:

$$\left(0; \frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right); \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right);$$



Черт. 22.

тригонометрические функции изменяются монотонно. Отсюда также следует, что по абсолютной величине $\cos\omega$ и $\sin\omega$ не могут быть больше единицы.

36. D_3. Функция называется *периодической*, если при увеличении любого числового значения аргумента на некоторую определенную величину, числовое значение функции не изменяется. Наименьшее числовое значение, от прибавления которого к аргументу функция не изменяется, называется *периодом функции*.

T_1. Косинус и синус являются периодическими функциями с периодом 2π.

: Так как $[r; \omega] = [r; \omega + 2k\pi]$, то следовательно:

$$r(\cos\omega + i\sin\omega) = r[\cos(\omega + 2k\pi) + i\sin(\omega + 2k\pi)],$$

$$\therefore \cos\omega = \cos(\omega + 2k\pi); \ \sin\omega = \sin(\omega + 1k\pi).$$

Прибавляемое к аргументу число принимает наименьшее значение при $k = 1$. Покажем, что число 2π служит периодом для $\cos\omega$ и $\sin\omega$. Заметим, прежде всего, что функции $\cos\omega$ и $\sin\omega$ имеют один и тот же период. Действительно, из равенства:

$$\left[r; \omega + \frac{\pi}{2}\right] = \left[1; \frac{\pi}{2}\right]\left[r; \omega\right] = i\left[r; \omega\right]$$

[1] Принимая во внимание, что дуга окружности, описываемая концом радиуса-вектора, пропорциональна аргументу, иногда говорят также, что тригонометрические функции являются функциями дуги.

получим:

$$\cos\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)=i(\cos\omega+i\sin\omega)=i\cos\omega-\sin\omega,$$

следовательно

$$\cos\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\omega;\quad \sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\omega.$$

Рассматривая последнее равенство, увидим, что если бы косинус имел периодом некоторую величину E, т. е.

$$\cos(\omega+E)=\cos\omega,$$

то было бы одновременно:

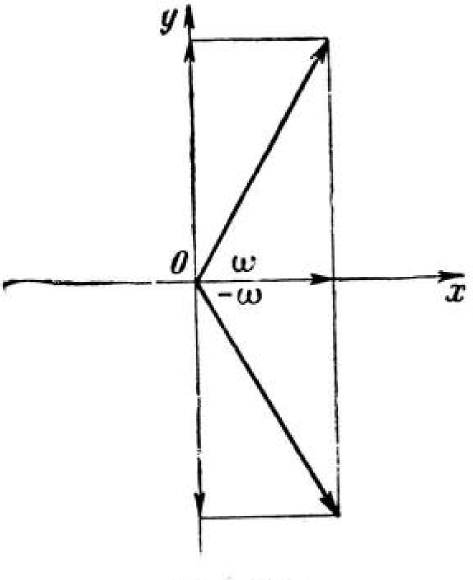
$$\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}+E\right)=\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right).$$

И обратно любой период синуса будет периодом косинуса. Установив это, положим, что обе функции имеют общий период $E<2\pi$. Тогда:

$$\cos(\omega+E)=\cos\omega \quad \text{и} \quad \sin(\omega+E)=\sin\omega.$$

Но тогда:

$$r(\cos\omega+i\sin\omega)=r[\cos(\omega+E)+i\sin(\omega+E)],$$



Черт. 23.

т. е.

$$[r;\ \omega]=[r;\ \omega+E] \quad \text{при} \quad E<2\pi,$$

что противоречит определению оператора. Итак, период обеих функций будет 2π. Геометрически это означает, что при полном повороте радиуса-вектора сам вектор и обе его проекции возвращаются в исходное положение.

37. D_4. Функция называется *чётной*, если при изменении знака аргумента её числовое значение не изменяется. Функция называется *нечётной*, если при изменении знака аргумента она, не изменяя абсолютной величины, изменяет знак на обратный.

T_2. Косинус является чётной функцией, синус — нечётной.

$$:\ [r;\ \omega]=r(\cos\omega+i\sin\omega);\quad [r;\ -\omega]=r[\cos(-\omega)+i\sin(-\omega)].$$

Но $[r;\ \omega]=$ и $[r;-\omega]$ — сопряжённые операторы, которые отличаются только знаками мнимой части:

$$\therefore [r;-\omega]=\cos\omega-i\sin\omega.$$

Сравнивая оба выражения для $[r;-\omega]$, получим:

$$\cos(-\omega)=\cos\omega,\quad \sin(-\omega)=-\sin\omega.$$

Это же легко установить и геометрически, так как при аргументе ω и $-\omega$ радиус-вектор располагается симметрично по отношению к оси x, благодаря чему проекции его на эту ось совпадают, а проекции на ось y противоположны по знаку (черт. 23).

Все только что указанные особенности функций $\cos\omega$ и $\sin\omega$ хорошо иллюстрируются графическим изображением обеих функций при помощи прямоугольной системы координат: на оси x откладываются значения аргумента в радианной мере, на ординатах — соответствующие значения функции. Ввиду равенства:

$$\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\omega,$$

в том и другом случае получается одна и та же волнообразная кривая — *синусоида*, только она будет во втором случае смещена на $\frac{\pi}{2}$ по направлению Ox.

38. T_3. Важнейшая зависимость между косинусом и синусом даётся формулой:

$$\cos^2\omega+\sin^2\omega=1.$$

|: Рассмотрим единичный оператор:

$$[1, \omega]=\cos\omega+i\sin\omega.$$

Мы знаем, что квадрат модуля равен сумме квадратов коэффициентов действительной и мнимой части:

$$\therefore\ \cos^2\omega+\sin^2\omega=1.$$

Установленная зависимость позволяет, зная значение одной из функций, находить значения другой. Например, геометрически очевидно:

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2},$$

откуда

$$\sin^2 60^\circ=\frac{3}{4}$$

и

$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Аналогично:

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2},\ \therefore \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Опять-таки из геометрических соображений имеем:

$$\cos 45^\circ=\sin 45^\circ,$$

откуда:

$$\cos^2 45^\circ=\sin^2 45^\circ=\frac{1}{2};$$

$$\therefore \cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

39. D_6. Отношение синуса к косинусу одного и того же аргумента называется *тангенсом* этого аргумента, обратное отношение косинуса к синусу называется *котангенсом* аргумента:

$$\operatorname{tg}\omega \text{ и } \operatorname{ctg}\omega.$$

По определению:

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{\sin\omega}{\cos\omega};\ \operatorname{ctg}\omega=\frac{\cos\omega}{\sin\omega}.$$

Свойства тангенса и котангенса непосредственно определяются свойствами косинуса и синуса.

C_4. Обе функции—*периодические*, с периодом π.

|: Так как поворот на π эквивалентен умножению оператора на -1, то будем иметь:

$$[r;\ \omega+\pi]=[1;\ \pi]\ [r;\ \omega]=-[r;\ \omega].$$

В частности:

$$[1;\ \omega+\pi]=-[1;\ \omega];\ \cos[\omega+\pi]+i\sin[\omega+\pi]=-\cos\omega-i\sin\omega,$$

т. е.

$$\cos(\omega+\pi)=-\cos\omega;\ \sin(\omega+\pi)=-\sin\omega,$$

$$\therefore \operatorname{tg}(\omega+\pi)=\frac{\sin(\omega+\pi)}{\cos(\omega+\pi)}=\frac{-\sin\omega}{-\cos\omega}=\operatorname{tg}\omega$$

и аналогично:

$$\operatorname{ctg}(\omega+\pi)=\operatorname{ctg}\omega.$$

C_5. Обе функции нечётные, так как изменяя знак аргумента, мы изменяем знак только у одного члена отношения.

C_6. Тангенс монотонно возрастает в каждом интервале. Котангенс монотонно убывает в каждом интервале — это следует из рассмотре ния таблицы в п. 35.

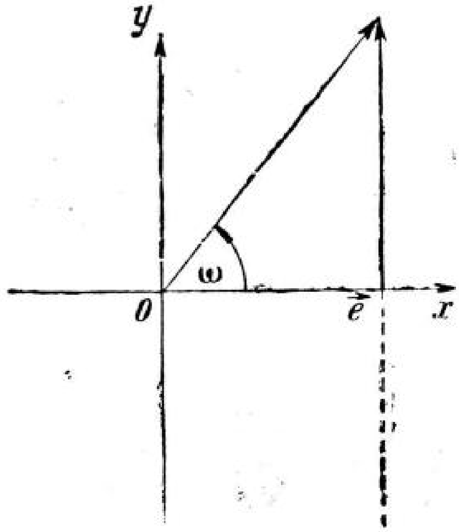
C_7. Тангенс теряет смысл, когда знаменатель обращается в 0, т. е. при значениях аргумента:

$$\frac{\pi}{2};\quad \frac{3\pi}{2};\quad \frac{5\pi}{\pi}\ \ldots$$

Котангенс теряет смысл, когда аргумент принимает значения:

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi\ \ldots$$

Справа и слева от этих точек функции могут принимать значения, сколь угодно большие по абсолютной величине.



Черт. 24.

C_8. Если

$$[r;\ \omega]=m+ni,$$

то

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{n}{m};\ \operatorname{ctg}\omega=\frac{m}{n},$$

т. е. тангенс и котангенс можно рассматривать как отношения длин проекций радиуса-вектора на ось x и ось y, снабжая эти отношения соответствующими знаками:

$$\frac{m}{n}=\frac{m:r}{n:r}=\frac{\cos\omega}{\sin\omega}=\operatorname{ctg}\omega;$$

$$\frac{n}{m}=\frac{n:r}{m:r}=\frac{\sin\omega}{\cos\omega}=\operatorname{tg}\omega.$$

Для удобства графического построения функции $\operatorname{tg}\omega$ через конец основного орта проводим перпендикулярную прямую к оси x, а конец радиуса-вектора заставим скользить по этой прямой (черт. 24). Тогда проекция радиуса-вектора на ось y даёт непосредственно числовое значение и знак тангенса.

Аналогично, для построения $\operatorname{ctg}\omega$ проводим через конец мнимого орта прямую параллельную Ox и конец радиуса-вектора заставим скользить по этой прямой. Тогда проекция радиуса-вектора на ось x определит числовое значение и знак котангенса (черт. 25).

C_9. Заметим, наконец, некоторые частные значения $\operatorname{tg}\omega$ и $\operatorname{ctg}\omega$, исходя из значений $\sin\omega$ и $\cos\omega$ в п. 38:

$$\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3};\quad \operatorname{ctg}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3};\quad \operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg}30^\circ=\sqrt{3};\ \operatorname{tg}45^\circ=\operatorname{ctg}45^\circ=1.$$

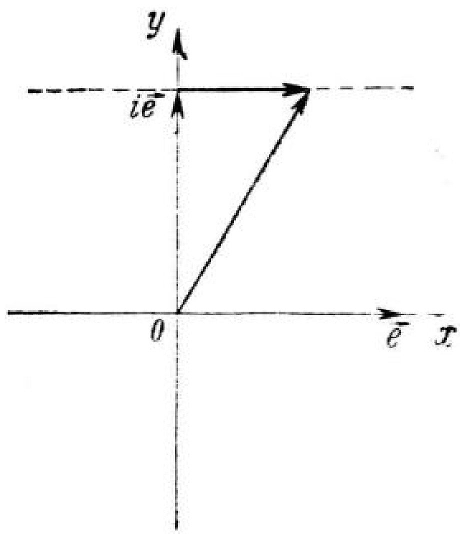
40. T_4. Все числовые значения функций *острого угла* можно получить как отношения сторон прямоугольного треугольника.

|: Возьмем прямоугольный треугольник с катетами: a, b и гипотенузой c и острым углом α, лежащим против катета a (черт. 26). Тогда, принимая гипотенузу за радиус-вектор с началом в A и концом в B, увидим, что катеты будут проекциями этого вектора:

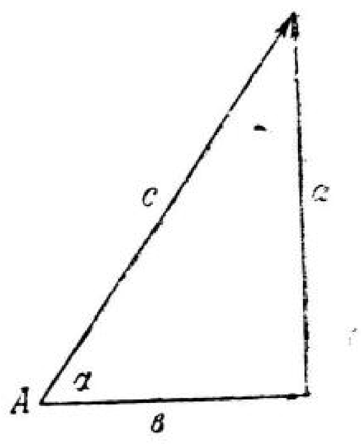
$$\therefore \frac{b}{c} = \cos\alpha; \quad \frac{a}{c} = \sin\alpha; \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Эти соотношения дают возможность по таблицам значений тригонометрических функций находить числовые значения сторон и углов прямоугольного треугольника, если в любой комбинации даны два из значений: a, b, c, α.

Заметим, в заключение, что иногда рассматривают еще функции: *секанс*: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ и *косеканс*: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$. Впрочем, в настоящее время эти функции сохранились только в практике школьного преподавания, в курсах же анализа и в приложениях тригонометрии они почти вышли из употребления.



Черт. 25.



Черт. 26.

§ 10. Основные взаимоотношения между тригонометрическими функциями

41. Формулы связи между тригонометрическими функциями позволяют по числовому значению одной функции вычислить все остальные. Этому помогают, помимо формул § 9

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

еще две вспомогательные формулы:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

их легко доказать, заменяя $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Вообще необходимо приобрести навык преобразования одних тригонометрических выражений в другие, чему помогают упражнения на тождественные преобразования этих выражений.

Например: $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)\,(1+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}=$

$$=\frac{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

42. *Формулы приведения к наименьшему аргументу.* Для отыскания значений тригонометрических функций по данному значению аргумента вычислены таблицы этих функций. Оказывается, для определения тригонометрической функции от аргумента любой величины достаточно иметь значения функций для углов, не превышающих 45°. Это есть следствие теоремы:

T_1. Тригонометрическая функция от аргумента любой величины может быть выражена через функцию аргумента, не превышающего 45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

| : Выведем формулы для аргументов вида:

$$1)\ \frac{\pi}{2}-\alpha;\quad 2)\ \frac{\pi}{2}+\alpha;\quad 3)\ \pi-\alpha;\quad 4)\ \pi+\alpha;$$

$$5)\ \frac{3\pi}{2}-\alpha;\quad 6)\ \frac{3\pi}{2}+\alpha;\quad 7)\ 2\pi-\alpha;\quad 8)\ 2\pi+\alpha.$$

Эти формулы будут иметь следующий вид:

$$1)\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad 2)\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$3)\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad 4)\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad \sin(\pi+\alpha)=-\sin$$

$$5)\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad 6)\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha. \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$$

$$7)\ \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha \qquad 8)\ \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha.$$

Формулы для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ легко получить почленным делением соответствующих значений для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Для доказательства этих формул мы воспользуемся умножением соответствующих операторов, что мы уже применили в пп. 36 и 39, где нами были доказаны формулы 2) и 7). Приведём примеры доказательства: формулы 5:

$$\left[1;\ \frac{3\pi}{2}-\alpha\right]=\left[1;\ \frac{3\pi}{2}\right]\ [1,-\alpha]=-i\,[1;-\alpha]$$

$$\therefore\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=i\,(\cos\alpha-i\sin\alpha)=$$

$$=-i\cos\alpha-\sin\alpha.$$

Следовательно

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha;\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

Формулы 7:

$$[1;\ 2\pi-\alpha]=[1;\ 2\pi]\ [1;-\alpha]=[1,-\alpha],$$

откуда:

$$\cos(2\pi-\alpha)+i\sin(2\pi-\alpha)=\cos\alpha-i\sin\alpha;\ \therefore \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha;$$

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha.$$

Для запоминания этих формул нужно помнить:

Правило: 1) В тех формулах, где π входит целым, название функции сохраняется; там же, где в формулу входит $\frac{\pi}{2}$, функция переходит в кофункцию (т. е. sin в cos и cos в sin).

2) Знак правой части определяется положением радиуса-вектора в соответствующем квадранте.

Первая часть этого правила есть следствие того, что если в аргумент входит целое π, то соответствующий множитель будет действительным числом, благодаря чему приходится приравнивать косинус к косинусу и синус к синусу. Если же в аргумент входит $\frac{\pi}{2}$, то множитель становится мнимым, благодаря чему коэфициентами при действительной части становится sin, а при мнимой — cos.

Вторая часть правила ясна сама по себе.

На практике данное значение аргумента сначала уменьшают на число кратное 2π (360°), а к остатку подбирают ближайшее из значений:

$$0,\ \frac{\pi}{2};\ \pi,\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi.$$

Например:

$$\sin 5843^\circ = \sin 83^\circ = \sin(90^\circ - 7^\circ) = \cos 7^\circ = 0{,}933 \text{ (по таблице).}$$

43. Функции от суммы и разности аргументов

T_2. Косинус и синус от суммы двух аргументов выражаются формулами:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$|: [1;\ \alpha+\beta] = [1;\ \alpha]\ [1;\ \beta],$$

откуда:

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta).$$

Сравнивая действительную и мнимую части, получим требуемые формулы.

C_1. Тангенс суммы двух аргументов выражается формулой:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}.$$

$$|: \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

это мы можем получить, деля числитель и знаменатель дроби:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \text{ на } \cos\alpha\cos\beta.$$

Функции от разности аргументов легко получаются или изменением знака второго слагаемого в аргументе или путем умножения операторов:

$$[1;\alpha-\beta] = [1;\alpha]\ [1, -\beta]:$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

44. Формулы функций от кратного аргумента

T_3. Для всякого рационального n[1] имеет место *формула Муавра*:

$$(\cos\omega + i\sin\omega)^n = \cos n\omega + i\sin n\omega.$$

| : В п. 23 нами была доказана для всякого рационального n теорема:

$$[r;\omega]^n = [r^n; n\omega].$$

Применяя это к единичному оператору $[1;\omega]$, получим:

$$[1;\omega]^n = [1; n\omega].$$

Переходя к тригонометрической форме, получим формулу:

$$(\cos\omega + i\sin\omega)^n = \cos n\omega + i\sin n\omega.$$

C_2. Непосредственно из формулы Муавра получаются формулы функций от кратного аргумента:

1) Формула удвоения:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

| : $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2i\sin\alpha\cos\alpha.$

Приравнивая действительные и мнимые части, получим требуемые формулы. Аналогично получим:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha =$$
$$= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha) + i(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha),$$

откуда:

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha;$$
$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

T_4. Для всякого целого положительного n имеют место формулы:

$$\cos n\alpha = C_n^0\cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \ldots$$
$$\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots$$

| : Применяя к выражению $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ формулу Муавра и биномиальную формулу Ньютона, получим:

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = C_n^\circ\cos^n\alpha + iC_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha -$$
$$- iC_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^{-3}\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha + iC_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получим нужные разложения.

45. T_5. Функции от половины аргумента выражаются формулами:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

| : Нами были выведены формулы извлечения корня квадратного из комплексного числа:

$$\sqrt{m+ni} = \pm\sqrt{\frac{r+m}{2}} \pm i\sqrt{\frac{r-m}{2}}.$$

---

[1] См. сноску к п. 23.

Применяя их к числу:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha,$$

получим:

$$\sqrt{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \pm i\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

откуда обычным путем получим нужные формулы. Для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ получим почленным делением:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

От радикала легко избавиться умножением числителя и знаменателя на $1+\cos\alpha$ или на $1-\cos\alpha$.

T_6. Все тригонометрические функции от данного аргумента выражаются *рационально* через тангенс половины аргумента.

| : Положим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$ и будем исходить из равенства:

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Преобразуем левую часть так:

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 + i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\left(1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{(1+it)^2}{1+t^2}.$$

Итак:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \frac{(1-t^2)+2ti}{1+t^2}; \quad \therefore \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Почленным делением получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Заметим, наконец, что формулы извлечения корня из единицы позволяют в некоторых случаях определить значения тригонометрических функций. Например, корень кубичный из единицы имеет три значения:

$$E_0 = 1;\ E_1 = \left[1; \frac{2\pi}{3}\right] = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3};$$

$$E_2 = \left[1; \frac{4\pi}{3}\right] = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \quad (\text{см. п. } 24; C_1).$$

С другой стороны, эти же корни можно получить, решая уравнение

$$x^3 - 1 = 0$$

или

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0,$$

откуда:

$$E_0 = 1; \quad E_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad E_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Сравнивая эти выражения с ранее полученными, найдём:

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}; \quad \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \cos 240^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

46. **Формулы приведения к виду, удобному для логарифмирования.** В целях облегчения логарифмических вычислений выводятся формулы, преобразующие выражения I ступени действий в выражения II ступени.

Рассмотрим единичные операторы

$$[1;\alpha]=\cos\alpha+i\sin\alpha \quad \text{и} \quad [1;\beta]=\cos\beta+i\sin\beta$$

и сложим их по правилу сложения операторов (черт. 27) и одновременно по правилу сложения комплексных чисел. Тогда модуль суммы определится длиной диагонали ромба, которая равна удвоенной проекции на нее единичного вектора. Угол при вершине ромба 0 равен $\alpha-\beta$.

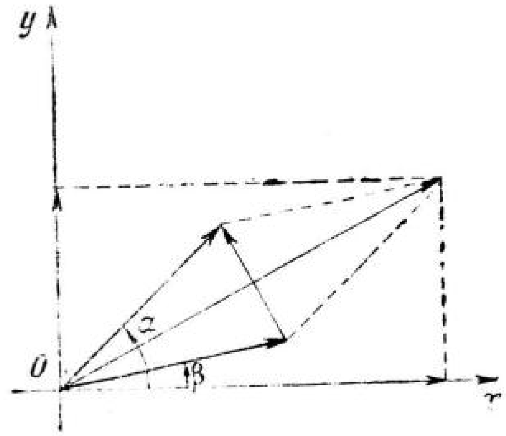
$$\therefore [0\vec{P}]=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

проекция на ось x будет равна

$$[0\vec{P}]\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Проекция на ось y будет равна

$$[0\vec{P}]\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$



Черт. 27.

Итак:

$$(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)=$$
$$=\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+i\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

откуда:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Разность тех же операторов даётся второй диагональю ромба, длина которой будет равна

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Вторая диагональ перпендикулярна к первой, $\therefore$ её угол с осью x будет соответственно равен:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ её проекция на ось x и ось y будут соответственно равны:

$$-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{и} \quad 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

т. е.

$$(\cos\alpha-\cos\beta)+i(\sin\alpha-\sin\beta)=$$
$$=\left(-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+i\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

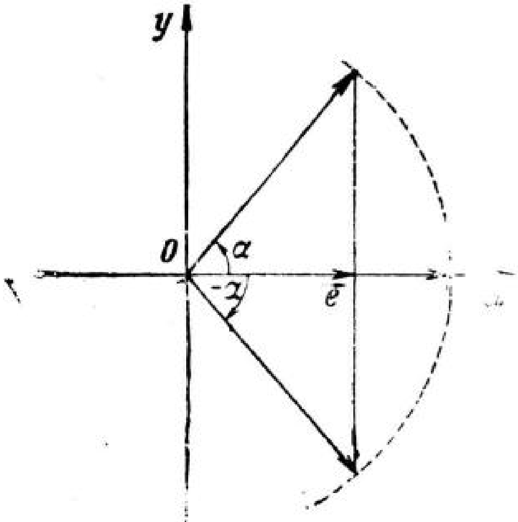
$$\therefore \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

На этом мы заканчиваем изложение основной части учения о тригонометрических функциях. К изложенным темам обязательно добавляется вывод формул:

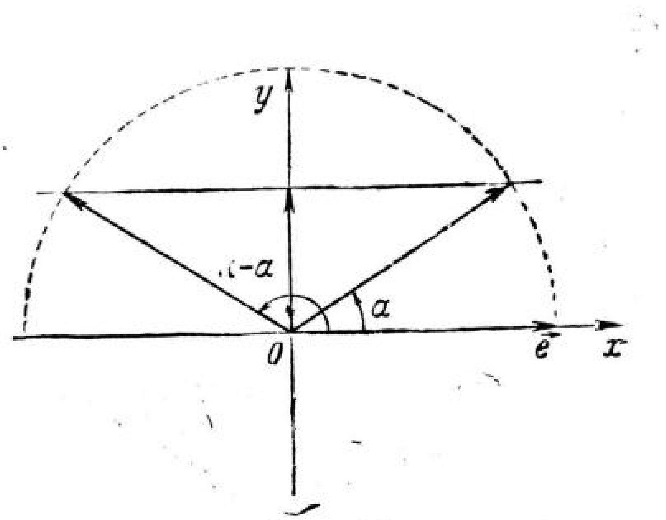
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

и

$$x-\sin x<\frac{x^3}{4}.$$



Черт. 28.

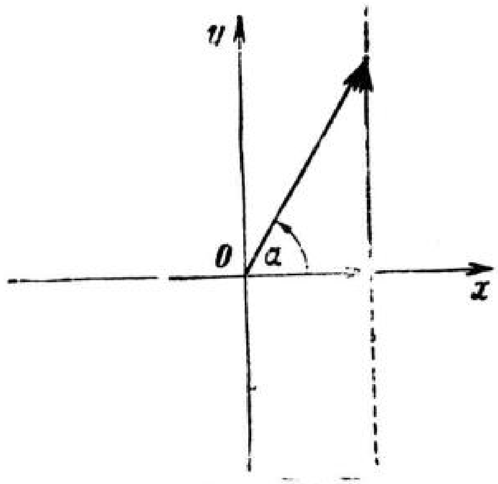


Черт. 29.

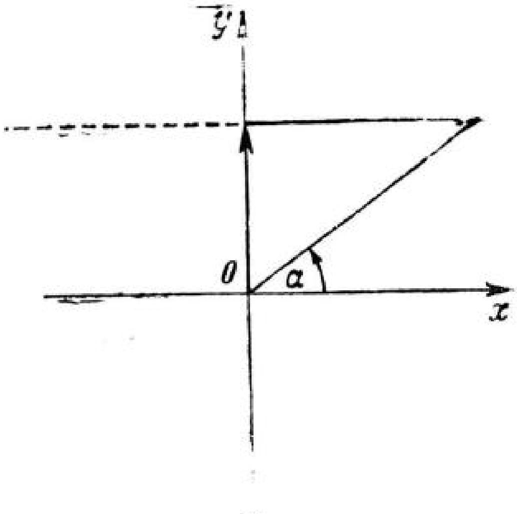
Кроме того, в тех случаях, когда удаётся в IX классе пройти достаточно полно теорию пределов и теорию логарифмов вместе с понятием о натуральных логарифмах, можно дополнительно вывести еще формулу Эйлера:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

и на основе её дать разложение функций $\sin x$ и $\cos x$ в ряды.



Черт. 30.



Черт. 31.

Некоторый интерес представляет еще вопрос о построении аргумента по данному значению тригонометрической функции, связанный с переходом к обратным тригонометрическим функциям. Эти построения показаны на чертежах: 28, 29, 30 и 31 соответственно для $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. В первом случае искомые положения радиуса-вектора будут симметричны по отношению к оси x, откуда без труда получим формулу $\operatorname{Arc}\cos x = \pm\alpha + 2k\pi$. Во втором случае искомые радиусы векторы расположены симметрично по отношению к оси y, и мы получаем:

$$\operatorname{Arc}\sin x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}, \text{ или сразу } \operatorname{Arc}\sin x = (-1)^k \alpha + k\pi.$$

Для $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x$ главные значения получаются однозначно и мы находим:

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x = \alpha + k\pi; \ \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x = \alpha + k\pi.$$

III. Методические замечания

1. Изложение вышеприведенного учения о тригонометрических функциях в практике школьного преподавания осуществлялось в двух вариантах:

1) Если преподавание математики, начиная с VIII класса, находилось в руках автора, то весь курс разбивался на несколько частей: учение о векторах излагалось в курсе геометрии VIII класса и там же частично, в связи с преобразованием подобия (поворот и растяжение), давалось понятие об операторах. Подробно теория операторов развивалась в IX классе в связи с теорией комплексных чисел, как введение к учению о тригонометрических функциях. В этом случае удавалось, как это было указано в примечании, познакомить учащихся и с рядом дополнительных вопросов.

2) Если преподавание математики приходилось начинать уже в X классах, тогда в тему „Эволюция понятия о числе" включались все вышеизложенные вопросы, в связи с теорией комплексных чисел и с дальнейшим повторением учения о тригонометрических функциях. Всё это производилось на уроках алгебры. Параллельно, на уроках тригонометрии, давались лишь в порядке повторения решения задач и примеров на проработанные темы.

2. Практика показывает, что, даже при наличии достаточного числа дополнительных вопросов, вполне удаётся уложиться в отведенное количество часов. При этом приходится ещё учитывать и то очень важное обстоятельство, что, ввиду отсутствия учебника, весь курс от начала и до конца приходилось учащимся диктовать.

Вторым существенным затруднением было то, что преподавателю всё время приходилось считаться с общими требованиями, предъявляемыми к курсу тригонометрии. Хотя, как это видно из представленного выше изложения, содержание курса намного превышает официальную программу, тем не менее, иное расположение материала часто ставило преподавателя в затруднительное положение. Так, например, проведение в середине учебного года (в конце второй четверти) массовых контрольных работ заставляло, в нарушение составленного плана, временно отказываться от движения вперёд и заниматься решением соответствующих задач. Приходилось, конечно, решать в большом количестве и задачи, связанные с подготовкой к экзамену, а также в достаточно большом числе и тригонометрические уравнения.

3. Возникает ещё вопрос о степени усвояемости описанного выше материала. Резкий уклон от обычных форм изложения может вызвать естественное сомнение: не слишком ли труден этот материал для уча-

щихся, и не будет ли такое изложение для них непосильной нагрузкой? Практика преподавания показала, что при всех указанных мною вариантах изложения результат получается гораздо лучший, чем при обычном изложении: если преподавание начиналось с VIII классов, то всё изложение многообразно увязывалось с изложением других математических дисциплин и своеобразное переплетение в одном и том же предмете разнообразных идей алгебры, геометрии и анализа вызывало постоянный повышенный интерес учащихся к предмету. Что же касается учащихся старших классов, то новое освещение курса тригонометрии всегда вызывало у них глубокий интерес, вызывало массу вопросов, и учащиеся всегда охотно переключались на новую точку зрения. Всё это весьма убедительно подтверждалось результатами экзаменов, на которых подавляющее большинство учащихся давало хорошие и отличные ответы.

4. Практика преподавания, при необходимости диктовать курс, показала, что наиболее приемлемой формой урока является сдвоенный двухчасовой урок. При этом первый час посвящается проверке домашних заданий, разъяснению характера нового задания (имеется в виду новый практический материал) и опросу учащихся. Часто проводится вызов к доске по нескольку человек (до 4-х) сразу. Большое число одновременно спрашиваемых можно допускать только при наличии в теме ряда небольших второстепенных вопросов. При этом остальной класс обычно тоже занимается решением какой-либо общей задачи. В том же случае, когда тема заключает один серьёзный и трудный вопрос, у доски отвечает один учащийся, причём все остальные также принимают участие в повторении.

Второй час посвящается исключительно изложению, разъяснению и диктовке нового материала.

5. Большое внимание должно быть уделено рациональному подбору примеров и задач. Особенно важны задачи, требующие не простого механического применения той или иной формулы, а умения математически мыслить и логически рассуждать. Так, например, большинство формул в разделе учения о тригонометрических функциях допускает как аналитическую, так и геометрическую трактовку. Нужно приучить учащихся пользоваться свободно тем и другим методом. Например, помимо того вывода формул приведения сумм и разностей к виду, удобному для логарифмирования, который дан в тексте, для самостоятельной работы, можно предложить учащимся обычный вывод. Большой интерес учащихся всегда вызывает построение корней из единицы в связи с возможностью построения правильных многоугольников и вычисления частных значений тригонометрических функций.

Желательно также, чтобы учащиеся познакомились с литературой, посвящённой этим же вопросам, но в другом освещении, или расширяющей круг сведений, получаемых ими в школе.

6. Замечу, в заключение, что затронутый данным изложением цикл вопросов в учении о тригонометрических функциях должен быть значительно расширен, если будет расширен последний концентр школы. Чтобы учение о тригонометрических функциях получило необходимую законченность, нужно сюда добавить, как уже указывалось выше, теорему Эйлера, разложение функций в ряды, связь между аркфункциями и логарифмами и ряд других вопросов.

Все эти вопросы, включая и основную тему, можно было бы рассматривать в общем плане той части элементарной математики, которая служит непосредственным переходом к соответствующим разделам анализа. Что же касается приложений тригонометрии к решению треугольников, то их рационально было бы включить в соответствующие главы геометрии. Другие приложения, как, например, учение о гармонических колебаниях можно было бы проработать в порядке упражнений.

Кстати, позволю себе попутно указать на те изменения и дополнения, которые нужно было бы дать в геометрических приложениях. Прежде всего, основную лемму о том, что сторона треугольника равна произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего угла, гораздо рациональнее дать в более общей формулировке: длина всякой хорды в окружности равна диаметру, умноженному на синус вписанного угла, опирающиеся на дугу этой хорды (или на синус полудуги, стягиваемой хордой).

При выводе формул решения косоугольных треугольников необходимо указать на существование внутренней связи между этими формулами, для чего нужно рассмотреть формулы проекций:

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$
$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

Рассматривая эту систему линейных уравнений, беря за неизвестные $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, получим теорему косинусов. Если же брать за неизвестные a, b, c, то получим теорему синусов.

Наконец, нужно непременно показать методы решения четырехугольников и триангуляцию.

* * *

Заканчивая настоящую статью, автор еще раз напоминает, что он рассматривает её как материал для дискуссии и с благодарностью примет все замечания, исправления и дополнения.

ЛИТЕРАТУРА

Дубнов Я. С.. Векторное исчисление. ОНТИ, М., 1939.
Кочин Н. Е., Векторное исчисление и др. ОНТИ, М., 1937.
Арнольд И. В., Теоретическая арифметика. Учпедгиз, 1937.
Вебер Г. и Вельштейн Н., Энциклопедия элементарной математики, т. 1. „Матезис", Одесса, 1914. Во II томе той же книги имеется хорошее изложение плоской и сферической тригонометрии.
Люстерник Л. А. и Бермант А. Ф., Тригонометрия. Учпедгиз. М., 1946.
Вопросам преподавания тригонометрии посвящен ряд статей в журнале „Математика в школе".

THE THEORY OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS AS TAUGHT AT A SECONDARY SCHOOL

BU A. I. FETISSO/

Summary

The article is devoted to the question of teaching the theory of trigonometric functions at school; it consists of three parts.

I. The introductory part. This deals with trigonometry as it is taught at school at present and with the chief drawbacks in the methods of its teaching; the course is not complete, the exposition of the theory is

not strictly scientific; and it is not applied to the solution of essentially important problems met with in practice.

The author maintains also that trigonometry may on the one hand be included in the course of algebra, namely into the chapter dealing with functions, and on the other in the metric part of geometry.

II. An abstract of presenting the theory of complex numbers and trigonometrical functions.

This part presents in a simple form the theory of complex numbers and of trigonometry just as it has been taught by the author at the secondary school for many years.

First the elements of vector algebra are given: the first two elementary rules of arithmetics as applied to vectors, multiplying the vector by a real number, decomposing the vector.

Further the idea of the operator of rotation and extension (z-operator) is introduced and the chief operation that can be performed with them defined. It is also shown that real numbers can be considered as a particular case in constructions with the z-operator.

The author gives then an idea of the imaginary numbers and the imaginary unit, as operators of turning through a right angle; it is proved that each operator can be represented in a complex form only in one way. On the bases of this, the rules for operations with complex numbers are deduced. Finally the author introduces the geometrical representation of the field of operators on the plane of complex numbers.

The next paragraph is devoted to the definition of trigonometrical functions, first cosx and sinx as the ratio of the real part and of the imaginary part to the modulus of the operator.

The main properties of these functions, their geometrical meaning and interrelationship are established. Further, functions tgx and ctgx are introduced as a ratio of sinx and cosx.

In the following paragraph the main trigonometric formulas are deduced.

III. Methodical Notes. This part deals first with the various ways by which the author exposed this course to his classes and with indications as to how the lesson should be conducted.

Further the author explains his view on the character of the exercises and problems that should be given to the pupils, as well as on a further extension of the course and on the place trigonometry might occupy in the whole course.

Next there are some hints on the content of the practical part of the course.

The article is supplied with a list of literature.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 6 · 1946

СЪЕЗДЫ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ

(ИСТОРИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК)

Н. Н. НИКИТИН
Кандидат педагогических наук

При разрешении вопросов, связанных с улучшением постановки преподавания математики в советской школе, нельзя не учесть дореволюционного опыта русской школы и тех прогрессивных мыслей, которыми жила передовая математическая общественность дореволюционной России, и которые частично нашли свое выражение в работах съездов преподавателей математики.

Конечно, ряд вопросов, которые волновали дореволюционную общественность, и которые не могли быть реализованы в условиях царской России, уже нашли свое воплощение в советской школе, как, например: преемственность обучения в различных школах, установление единых программ по математике для мужских и женских школ; организация специальных высших педагогических учебных заведений для подготовки учителей средних школ по всем специальностям (педагогические институты), каких не знала дореволюционная Россия (в советской же стране, помимо университетов, они имеются не только в столичных и крупных центрах, а почти в каждой области, в каждом крае); регулярное проведение районных и областных учительских курсов, конференций, совещаний, о которых только мечтали учителя дореволюционной России и участники I и II Всероссийских съездов преподавателей математики.

Однако в такой многогранной и сложной работе, как школьное обучение, имеется ещё немало весьма и весьма важных вопросов, при разрешении которых полезно было бы учесть опыт дореволюционной школы.

Настоящий историко-библиографический очерк имеет задачей дать историческую справку о съездах преподавателей математики в России, о содержании их работы, а также библиографический указатель докладов, прочитанных на съезде. Это тем более важно, что труды этих съездов стали библиографической редкостью и ознакомление с содержанием их не всегда и не везде доступно.

Съезды преподавателей математики в России

В дореволюционной России было два Всероссийских съезда преподавателей математики.

Первый Всероссийский съезд преподавателей математики происходил в Петербурге с 27 декабря 1911 г. по 3 января 1912 г.

Второй Всероссийский съезд преподавателей математики происходил в Москве, через два года после первого съезда в те же сроки — с 27 декабря 1913 г. по 3 января 1914 г.

В декабре 1915 г. предполагался созыв третьего съезда преподавателей математики в Харькове, но этот съезд не состоялся в связи с первой мировой войной.

Естественно встает вопрос: почему эти съезды возникли именно в начале XX века? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо представить себе эпоху конца XIX и начала XX в., которая характеризуется особым оживлением в области математической и методической мысли как в Западной Европе, так и у нас, в России.

Характеристика эпохи конца XIX и начала XX в.

Конец XIX в. и начало XX в. характеризуются особо повышенным и повсеместным интересом к вопросам, связанным с состоянием математической науки и с состоянием математики, как учебного предмета.

Достаточно сказать, что с 1897 по 1912 гг. состоялось пять международных съездов математиков:

I — в Цюрихе в 1897 г. (Швейцария),
II — в Париже в 1900 г. (Франция),
III — в Гейдельберге в 1904 г. (Германия),
IV — в Риме в 1908 г. (Италия),
V — в Кембридже в 1912 г. (Англия).

Успехи математической науки не могли не отразиться и на постановке её преподавания в школе.

В 1908 г. профессор Нью-Иоркского университета Смит внёс в секцию преподавателей математики IV международного конгресса математиков, собравшегося в Риме, предложение о создании особой Международной комиссии, которой было бы поручено изучение преподавания математики в различных странах. Конгресс отнёсся с большим сочувствием к этой мысли и следующим образом формулировал свое постановление по этому поводу:

„Руководясь убеждением в важности сравнительного изучения методов и учебных планов преподавания математики в средних школах различных стран, конгресс поручает г.г. Клейну (F. Klein), Гринхиллу (G. Greenhill) и Фэру (H. Fehr) образовать международную комиссию для изучения этого вопроса и представить отчет ближайшему конгрессу".

Желательность всестороннего исследования методов преподавания математики чувствовалась в Западной Европе уже давно и в значительной степени проистекала из повседневного недовольства постановкой преподавания этого предмета[1].

Германия

В 60-х годах XIX века Кер (Kehr) (Германия) свидетельствует о жалобах учителей на плохие результаты обучения математике в немецкой школе.

В 1895 г. Ридлер даёт резкую критику преподавания математики в Германии, после чего началось так называемое движение инженеров в пользу реформы преподавания. В 1903 г. на Кассельском съезде естествоиспытателей и врачей было решено заняться рассмотрением преподавания не только естественных наук, но и математи-

[1] Труды I съезда преподавателей математики, т. I, Предисловие, стр. III.

ческих и „всю совокупность вопросов математико-естественно-научного преподавания сделать предметом подробного обсуждения при ближайшей возможности“ [1].

В следующем же году на съезде в Бреславле была выбрана комиссия, которая в 1905 г. представила Меранскому съезду проект реформы преподавания математики.

Движение, связанное с реформой преподавания математики в Германии, возглавлялось Клейном и носит название „реформистского движения“. Основные идеи этого движения сводились к установлению большей связи преподавания математики с жизнью, к применению наглядности в преподавании, к приближению содержания школьной математики к самой математической науке: идея функциональной зависимости в школьном курсе, элементы высшей математики в средней школе.

Франция

Во Франции еще в 1898 г. была образована парламентская комиссия из 33 депутатов под председательством бывшего первого министра Рибо для исследования нужд среднего образования путем собирания разного рода фактических цифровых и иных данных, а также опроса лиц, мнения которых могли представлять интерес и значение.

Данные, собранные комиссией, работавшей с января до апреля 1899 г., напечатаны в 6-ти томах „Enquête sur L'Enseignement Secondaire“, представляющих в высшей степени драгоценный источник для изучения положения средней школы во Франции в конце XIX в.

Среди жалоб на французскую среднюю школу вообще встречается немало указаний и на неудовлетворительность лицейского преподавания математики. Математические познания бывших лицеистов, по мнению весьма компетентных лиц, принявших участие в анкете, представляют жалкую картину. Вот что об этом говорит, например, Бюкэ, директор, так называемой, Центральной школы, куда молодые люди, окончившие лицеи, поступают, как и в другие высшие школы Франции — Политехническую и Нормальную, — по предварительному испытанию:

„Прискорбно видеть поступающих в школу двадцатилетних молодых людей, проделавших на экзамене ряд выкладок и не способных дать себе отчет в том, чего они искали, чего ждали от выведенных в несколько рядов формул“...

„Воспитанники (говорит Пэйо) отделены от жизни действительности стеною слов и совершенно не привыкли заглядывать внутрь себя... Вся их умственная энергия вертится на словах“...

Такова картина, даваемая парламентской анкетой. Под влиянием общего недовольства существующим положением вещей правительственные учреждения разных стран, математические организации и отдельные лица предпринимают в начале XX в. ряд работ, направленных к радикальной реформе преподавания математики.

Во Франции в 1902 г., т. е. через 2 года после окончания работ парламентской анкетной комиссии по исследованию состояния и нужд среднего образования, было одобрено палатой и обнародовано новое положение о лицеях, существенным образом коснувшееся и препо-

[1] Труды I съезда преподавателей математики, т. I, Предисловие, стр. IV—V.

давания математики. Таким образом во Франции вопрос о реформе преподавания математики был тесно связан с реформой средней школы вообще[1].

Швеция

В Швеции, где среднее образование имело весьма большую давность (первая гимназия была основана еще в 1620 г.), по реформе 1905 г. в курс средней школы было включено применение прямоугольных координат для графического изображения и изучения простых функций. С III класса реальной гимназии вводится, сверх того, понятие о производной и аналитико-геометрическое изучение кривых 2-го порядка. Понятие об интеграле в учебном плане не фигурирует, но во многих гимназиях оно было введено с успехом и применялось к вычислению площадей и объемов и к задачам динамики.

Швеция едва ли не раньше других стран, еще с 1820 г. ввела пропедевтический курс геометрии, имевший целью подготовить учеников к систематическому курсу.

Интересно отметить, что из 60 ответов и писем по вопросу о пропедевтическом курсе только два отзываются отрицательно, большая же часть считает его единственно правильным методом начального преподавания геометрии.

Англия

Даже в такой консервативной в педагогическом отношении стране, как Англия, стали серьёзно задумываться над реформой преподавания математики. В начале XX века здесь возникает движение, именуемое по имени возглавлявшего его инженера Перри (J. Perry)- „движением Перри"; создаётся „Британская ассоциация для усовершенствования преподавания геометрии".

Америка

В Америке проф. Смит (D. E. Smith) в 1905 г. в своем ответе на международную анкету, предпринятую журналом „L'Enseignement mathématique" по вопросу: „О реформе, подлежащей осуществлению", высказывал развитую им впоследствии на Римском конгрессе в 1908 г. мысль об образовании особой Международной комиссии по этому вопросу.

Россия

Международное движение, имеющее целью обследование методов преподавания математики, нашло отклик и у нас в России.

В состав лиц, участвовавших в Международной комиссии от России, входили следующие лица: академик И. Я. Сонин, проф. Б. М. Коялович, директор 2-го СПБ реального училища К. В. Фохт, после смерти которого в состав комиссии вошел проф. К. А. Поссе.

От Харьковского университета и Харьковского математического общества в состав международной комиссии входили: проф. Н. Н. Салтыков и проф. Д. М. Синцов.

Следует отметить, что русское общественное движение, независимо от движения, охватившего всю Западную Европу, проявилось в целом ряде мероприятий, оставивших заметный след в истории

[1] Труды I съезда преподавателей математики, т. I, Предисловие, стр. IV и V.

русской школы и, в частности, в истории преподавания математики.

В подтверждение этой мысли достаточно указать на то обстоятельство, что во второй половине XIX в. и в начале XX в. в России издавалось значительное количество журналов, в которых освещались и дебатировались разнообразные вопросы, касающиеся дела улучшения преподавания математики.

Особого внимания заслуживает „Журнал элементарной математики", который издавался в Киеве с 1884 до 1886 гг. под редакцией издателя проф. В. П. Ермакова.

Этот журнал был предшественником журнала „Вестник опытной физики и элементарной математики", выходившим два раза в месяц в течение 30 лет (с 1886 до 1917 гг.).

Первые 5 лет он издавался в Киеве, а затем — в Одессе.

С 1886 по 1897 гг. он редактировался Э. К. Шпачинским; с 1898 по 1904 гг. В. А. Циммерманом, а с 1904 по 1917 гг. его редактором был проф. В. Ф. Каган.

За время своего существования журнал имел 672 выпуска (номера), в которых освещались самые разнообразные вопросы, связанные с преподаванием математики в школе. Журнал был достаточно высок в научном отношении, и многие методические вопросы, освещавшиеся на его страницах, не потеряли интереса и по настоящее время.

Из других математических журналов можно назвать следующие издания:

„Математический Листок, 1879—1882 гг. Редактор А.И. Гольдерберг.

„Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем". Москва, 1885—1898 гг. Редактор В. В. Бобынин.

„Физико-математические науки в ходе их развития". Москва, 1899—1905 гг. Редактор В. В. Бобынин.

„Школа математики чистой и прикладной" С.-Петербург, 1885 г. „Ежемесячный журнал для учащих, учащихся и всех любителей физико-математических наук". Издатель — редактор Н. П. Сенигов.

„Физико-математический сборник". Издание Кавказского учебного округа, 1909—1913 гг.

„Математическое образование". Журнал Московского математического кружка. Москва, 1912—1917 гг. Ответственный редактор И. И. Чистяков.

Издавались журналы и отдельными учебными заведениями. Например, в 1908—1914 гг. издавались „Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище". Журнал был попыткой объединить преподавателей и учащихся на почве общей учебной и научной работы.

Статьи математического содержания имелись в обще-педагогических журналах, как, например: „Русская школа", „Вестник воспитания", „Народный учитель", „Журнал Министерства народного просвещения", „Циркуляры учебных округов", „Педагогический сборник", который издавался Управлением военно-учебных заведений с 1863 г. и в др.

Несомненный интерес представляют также доклады земств о постановке преподавания математики в начальных школах России, отчеты директоров гимназий и реальных училищ, попечителей учебных округов, Министерства народного просвещения.

Об оживлении педагогической мысли в России в указанный период говорит и наличие большого количества математических кружков (обществ) преподавателей средних школ.

На первом Всероссийском съезде преподавателей математики были заслушаны доклады 8 кружков:

1. Московского математического кружка (Чистяков).
2. Отдела математики при Педагогическом музее военно-учебных заведений в СПБ (Левитус).
3. Математического отделения Рижского педагогического общества (Эрн).
4. Варшавского кружка преподавателей математики и физики (Пажитнов).
5. Польского математическо-физического кружка в Варшаве (Мрочек).
6. Орловского математического кружка (Острогорский).
7. Новочеркасского математического кружка (Кузнецов).
8. Нижегородского математическо - астрономического кружка (В. В. Мурашев).

Кружки эти насчитывали значительное по тому времени число членов. Например, Московский математический кружок, обязанный своим развитием, главным образом, энергичной деятельности своего члена, профессора Московского университета Б. К. Млодзеевского, насчитывал в своем составе до 150 членов.

Он ставил своей задачей разработку вопросов математики и вопросов преподавания математики. В состав кружка входили многие преподаватели университета, Высших женских курсов, специальных московских учебных заведений.

Особенно широкую работу развернул СПБ педагогический музей военно-учебных заведений, основанный еще в 1864 г.

Еще с 1871 г. в музее начали устраиваться публичные лекции по методике общеобразовательных предметов с применением наглядных пособий, а также публичные лекции для детей.

С 1872 г. к этому прибавились публичные научно-популярные лекции с демонстрациями наглядных пособий.

Насколько велика была популярность музея и проводимых им мероприятий, можно судить по тому, что в первые же $3^1/_2$ месяца на 84 лекциях присутствовало до 24 000 слушателей.

Первое собрание Отдела математики при музее состоялось 2 апреля 1885 г.

За первое десятилетие состоялось 70 заседаний, во время которых прослушано 200 докладов по вопросам, касающимся преподавания различных частей школьной математики.

В работах отдела принимали участие: академик Н. Я. Сонин, член Государственного совета проф. А. В. Васильев, профессора: К. А. Поссе, Б. М. Коялович, С. Е. Савич, П. А. Некрасов и др.

Музеем в 1910—11 гг. была предпринята обширная анкета среди учащихся в петербургских высших учебных заведениях, имеющая целью обследование вопроса о преподавании математики в средней школе.

Анкета была распространена в количестве 10 000 экземпляров, причём было получено до 2 000 ответов.

Может быть не столь широкую, но все же полезную работу вели и другие математические кружки преподавателей.

На I съезде (заседания 29 и 30 декабря 1911 г.) было постановлено ввести в Организационный комитет съезда следующие предложения:

1. Ввиду того, что в настоящее время в различных местах России существует довольно много математических кружков, было бы

желательно создание особой организации, которая, оставляя их вполне самостоятельными, объединяла бы эти кружки на почве их общих интересов и стремлений.

2. В случае принятия пункта 1 просить Московский математический кружок взять на себя труд по разработке проекта такой организации и после одобрения такового другими кружками позаботиться проведением его в жизнь.

Таким образом период, совпадавший с проведением съездов преподавателей математики, отмечался большим интересом и активностью широких научных кругов и преподавательских масс к вопросам улучшения преподавания в школе вообще и математики — в частности.

Насколько широки были эти интересы и насколько они захватывали передовых представителей педагогической общественности, — можно судить по такому факту. В своём докладе на II съезде преподавателей математики 27 декабря 1913 г. проф. А. К. Власов, докладывая о том, „Какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования“, — сообщает такой факт: „Мысли, которые я предполагаю развить в своём докладе подвергались обсуждению и критике в небольшом кружке моих друзей, в течение последних пяти лет поочередно собиравшихся друг у друга. В этих обсуждениях участвовали: М. Ф. Берг, преподаватель Высших женских курсов и директор гимназии при Реформатской церкви; С. П. Виноградов, доцент Коммерческого института и Высших женских курсов; А. А. Дмитриевский, приват-доцент Московского университета; А. Ф. Гатлих, преподаватель Высших женских курсов и нескольких женских гимназий г. Москвы“.

„Я должен признать, — продолжает проф. Власов, — что наша общая дружная работа наложила и должна была наложить свою печать на мысли, которые теперь мне выпало честь за собственной ответственностью изложить перед высокоуважаемым собранием“.

Таким образом, не только в математических кружках, но и в часы дружеской беседы, в часы отдыха, передовые представители нашей педагогической общественности занимались вопросами, их волновавшими и направленными на улучшение дела преподавания математики в школе.

Такова была настроенность передовой математической общественности перед первым съездом преподавателей математики.

Следует отметить, что некоторые передовые идеи того времени еще до I Всероссийского съезда преподавателей математики нашли отражение в учебных планах и программах некоторых видов школ. Так, например, в учебные планы реальных училищ, утвержденные Министерством народного просвещения 30/VI—1906 г., были введены в качестве обязательных предметов начала аналитической геометрии на плоскости и анализа бесконечно малых. Эти учебные планы были введены для VII классов реальных училищ уже с 1907 — 1908 учебного года; в кадетских корпусах элементы аналитической геометрии и анализа были введены с 1909 г.

I Всероссийский съезд преподавателей математики. Мысль о созыве съезда. Организационный комитет.

Потребность в общении преподавателей математики между собой для совместного обсуждения волнующих их вопросов преподавания не раз высказалась в годы, предшествовавшие съезду.

На XII съезде естествоиспытателей и врачей — в 1909 г., на I Всероссийском съезде по экспериментальной педагогике в 1910 г., на Рижской педагогической выставке 1911 г. раздавались находившие сочувствие голоса о созыве съезда преподавателей математики.

Мысль о созыве такого съезда в Петербурге в зимние каникулы 1911—1912 гг. принадлежит отделу математики Педагогического музея военно-учебных заведений.

В предисловии к I тому Трудов I Всероссийского съезда преподавателей математики директор педагогического музея генерал-лейтенант З. А. Макшеев приводит также данные о ходе работ по созыву I съезда преподавателей математики:

„Первое совещание кружка лиц, взявших на себя эту задачу, состоялось 4 мая 1911 г. В кружок этот входили: член Государственного совета проф. А. В. Васильев, директор педагогического музея высших учебных заведений З. А. Макшеев, проф. К. А. Поссе, проф. С. Е. Савич, помощник директора педагогического музея Д. Э. Теннер, преподаватели математики В. Р. Мрочек, Ф. В. Филиппович и секретарь отдела математики педагогического музея Д. М. Левитус. На этом совещании было выработано „Положение о съезде“, представленное 7 мая в Министерство внутренних дел вместе с подписанным г. Васильевым, Макшеевым, Поссе и Савичем ходатайством о разрешении созвать съезд.

На втором совещании, состоявшемся 10 мая, в котором кроме выше перечисленных лиц принимал участие профессор Харьковского университета Д. М. Синцов, было постановлено, не ожидая формального разрешения на созыв съезда, немедленно же перед каникулами (летними) предпринять некоторые меры как для распространения сведений о съезде, так и для его подготовки. С этой целью было решено выработать особое воззвание к обществу. Текст воззвания был принят 15 мая 1911 г.

Воззвание это было напечатано и вместе с проектом Положения о съезде разослано в числе 2000 экземпляров столичным и провинциальным педагогическим и научным обществам и кружкам, некоторым отдельным лицам, а также в редакции журналов и газет с просьбой поместить на страницах их органов полностью, или хотя бы в извлечении.

Разрешение на съезд последовало летом, а в августе было разослано приглашение на назначенное в Педагогическом музее 2 сентября первое заседание Организационного комитета.

2 сентября комитет организовался в следующем составе:

Председатель — директор Педагогического музея генерал-лейтенант З. А. Макшеев.

Товарищи председателя — генерал-лейтенант М. Г. Попруженко, проф. К. А. Поссе, проф. С. Е. Савич.

Секретари: Д. М. Левитус, В. Р. Мрочек, Ф. В. Филиппович.

Казначей — Д. Э. Теннер.

Члены: проф. А. В. Васильев, И. Н. Кавун, приват-доцент В. Ф. Каган (Одесса), А. Р. Кулишер, А. К. Линдеберг, Э. Ю. Лундберг, проф. Б. К. Млодзеевский (Москва), С. Г. Петрович, Б. З. Пиотровский, проф. Д. М. Синцов (Харьков), Н. А. Томилин, В. И. Шифф, С. И. Шохор-Троцкий, Т. А. Афанасьева-Эренфест, П. С. Эренфест.

Из состава Организационного комитета было выделено „Бюро“, в него вошли: председатель, секретари и казначей. На бюро возложено было ведение переписки, выдачи справок и вообще вся текущая деятельность по созыву съезда“.

Для заведывания выставкой учебных пособий и книг по математике была избрана „Выставочная комиссия“ в составе 11 человек.

Кроме того, была образована „Хозяйственная комиссия“ в составе 4 лиц.

В заседании 2 сентября был заслушан перечень поступивших докладов и постановлено, чтобы все доклады, или их конспекты, рассматривались в заседаниях Комитета, который и решает о допущении их на съезд. Предельным сроком для представления докладов было назначено 15 ноября.

Для планомерности в подготовке докладов решено было обратиться к некоторым лицам с просьбой взять на себя разработку и представление докладов общего характера по программе съезда: к С. И. Шохор-Троцкому, проф. К. А. Поссе и Д. М. Синцову, М. Г. Попруженко, В. В. Бобынину, А. В. Васильеву, В. Ф. Кагану.

Дальнейшие заседания Организационного комитета посвящались, главным образом, рассмотрению поступавших докладов.

Только два из них были отклонены, все же остальные допущены к прочтению на съезде.

Редакция журнала „Обновление школы“ обратилась в Комитет с предложением безвозмездно издавать бюллетень съезда. Всех бюллетеней с 20 октября 1911 г. по 22 января 1912 г. было выпущено 8 номеров.

Съезд заседал в „Соляном городке“ в помещениях Педагогического музея, Высших женских курсов и Императорского русского технического общества, представленных ему безвозмездно.

Для участников съезда гимназия Императора Александра I, гимназия Мая и Лентовской, Высшие женские курсы дали помещение на 130 человек отчасти бесплатно, а отчасти за небольшую плату (2—3 руб. — для вознаграждения обслуживающего персонала).

1-й Кадетский корпус бесплатно поместил у себя преподавателей военно-учебных заведений, приехавших на съезд. 2-й Кадетский корпус и 3-я гимназия дали 215 кроватей. В гостиницах делегаты имели 10% скидку.

Положение о Всероссийском съезде преподавателей математики

§ 1. ВСПМ созывается Организационным комитетом.

§ 2. Организационный комитет под председательством им выбранного лица, избирает товарищей председателя, секретарей и казначея, а также особое Бюро съезда. При этом допускается кооптация новых лиц.

§ 3. Занятия съезда продолжаются 8 дней (с 27 декабря 1911 г. по 3 января 1912 г.).

§ 4. Съезд имеет целью обсуждение следующих вопросов:

1. Психологические основы обучения математике (активность, наглядность, роль интуиции и логики и т. п.).
2. Содержание курса школьной математики с точек зрения:
   а) современных научных тенденций,
   б) современных вопросов жизни,
   в) современных общепедагогических воззрений.
3. Согласование программ математики средней школы с программами низших и высших школ.
4. Вопросы методики школьной математики.
5. Учебники и учебные пособия.

6. Исторические и философские элементы в курсе математики средней школы.

7. Рисование, лепка и ручной труд, как вспомогательные средства при обучении математике.

8. Подготовка учителей математики.

§ 5. При съезде организуется выставка наглядных пособий, диаграмм и литературы, соответствующих программе съезда. Для заведывания выставкой Организационный комитет избирает особых лиц.

§ 6. Подготовительные к съезду работы ведутся Бюро, избирающем из своей среды председателя и секретарей.

§ 7. В случае необходимости Организационный комитет устраивает секции по отдельным вопросам программы и избирает из своей среды председателя каждой секции.

§ 8. Председателю секции предоставляется право организовать бюро секции.

§ 9. Членами съезда могут быть: профессора и преподаватели математики и физики, представители учебных обществ и учебных заведений, а также лица, заявившие себя трудами в области математики или педагогики. Все прочие лица, интересующиеся программой съезда, могут принимать участие в работах съезда, но без права решающего голоса.

§ 10. Лица, желающие участвовать в съезде в качестве членов или гостей, заявляют об этом Организационному комитету и вносят одновременно денежный взнос в размере 3 руб.

§ 11. Доклады по программе съезда представляются в Организационный комитет по возможности не позже 1 декабря 1911 г. по адресу: СПБ, Фонтанка, 10, в канцелярию Педагогического музея военных учебных заведений.

§ 12. По открытии съезда новые доклады могут быть допущены не иначе, как с разрешения председателя съезда.

§ 13. Доклады на съезде могут продолжаться не более 1 часа; во время обсуждения речь каждого лица не должна продолжаться более 10 минут.

§ 14. Организационный комитет, руководствуясь постановлениями как общих собраний съезда, так и секционных заседаний, вносит в последнее общее собрание ряд резолюций по вопросам, обсуждавшимся на съезде, для голосования.

§ 15. Резолюции принимаются или отвергаются простым большинством голосов.

Таким образом Организационный комитет принял широкую программу работы съезда и предусмотрел все организационные вопросы.

Первый Всероссийский съезд преподавателей математики, как уже было сказано, состоялся в Петербурге и продолжался с 27 декабря 1911 г. по 3 января 1912 г. (8 дней). Этого времени оказалось недостаточно. Были заслушаны не все доклады, объявленные Организационным комитетом съезда. Так, например, председателем секции „Учебная литература по математике“ М. Г. Попруженко был возбужден вопрос о математической хрестоматии и было предложено желающим членам секции образовать особое совещание, посвященное обсуждению этого весьма важного вопроса, но, несмотря на сочувственное отношение секции к вопросу о математической хрестоматии, совещание это не состоялось за недостатком времени и обременённостью работой членов съезда.

Состав съезда

Во втором томе Трудов съезда напечатан список членов и гостей съезда.

Из этого списка явствует, что в работе съезда приняло участие 1217 чел., из которых только около 3% составляли гости (40 человек), а все остальные были действительными членами съезда.

Делегаты съезда были в большинстве своем представлены лицами из Санкт-Петербурга и Москвы; однако здесь были широко представлены и преподаватели математики всей России: из Барнаула, Ташкента, Тифлиса, Одессы, Вятки, Вологды, Великого Устюга, Варшавы, Киева, Вильно, Тулы, Пскова, Тобольска, Томска и целого ряда других городов России. Съезд, по праву, мог назваться Всероссийским.

В составе съезда в подавляющем большинстве были преподаватели математики средних школ, гимназий и реальных училищ. Были представлены также преподаватели коммерческих училищ, кадетских корпусов, торговых школ и городских (высших начальных) училищ, учительских институтов и семинарий.

Для того чтобы представить размер охвата съездом преподавателей школ, существовавших в России, любопытно проанализировать следующие данные из отчета Министра народного просвещения за 1912 г.

1. Число мужских гимназий	393	(в 1911 г. меньше на 34)
„ прогимназий	41	(„ „ 1)
Преподавателей	7358	(всех специальностей)
2. Число реальных училищ	276	(в 1911 г. меньше на 18)
Преподавателей	3747	(всех специальностей)
3. Технические училища	57	
4. Женские гимназии	825	
Прогимназии	95	
Число учителей	16.658	(всех специальностей)
5. Учительские институты	27	
6. „ семинарии	115	

Всего было, таким образом, 1829 учебных заведений.

Принимая во внимание, что на съезде присутствовали преимущественно преподаватели гимназий и реальных училищ, число которых было около 700, можно предполагать, что на съезде были представители почти от каждого учебного заведения этого типа.

Если учесть, что преподавателей математики мужских гимназий и реальных училищ насчитывалось примерно 1200—1300 человек (12—15% от общего количества преподавателей этих учебных заведений), то будет очевидным весьма значительный процент участия учителей математики средних учебных заведений на этом съезде.

Среди членов съезда были в значительной мере представлены и преподаватели высших учебных заведений:

Бернштейн С. Н. (пр.-доц., Харьков).
Богомолов С. А. (препод. Политехнического и педагогического института, СПБ)
Бобынин В. В. (прив.-доцент, Москва).
Белянкин А. С. (проф., Харьков).
Васильев А. В. (проф., СПБ).
Захаров А. Н. (проф. Ин-та путей сообщения, СПБ).
Каган В. Ф. (пр.-доц., Одесса).
Лермантов В. В. (пр.-доц., СПБ).
Мордухай-Болтовский Д. Д. (проф., Варшава).
Некрасов В. Л. (проф., Томск).
Петрович С. Г. (генерал-майор, СПБ).
Попруженко М. Г. (генерал-лейтенант, СПБ).

Поссе К. А. (проф., СПБ).
Синцов Д. М. (проф., Харьков).
Струве В. Б. (проф. Межевого института, Москва).
Шатуновский С. О. (пр.-доц., Одесса) и ряд других.

Многие участники съезда, преподаватели средней школы, впоследствии стали преподавателями высших учебных заведений.

Среди участников съезда многие являлись авторами учебных руководств: Александров, Киселев, Шапошников, Лебединцев, Шохор-Троцкий, Извольский, Эрн, Мрочек, Волковский, Цубербиллер, Чистяков, Пиотровский, Попруженко, Лермантов, Крогиус, Галанин и др.

В составе съезда были люди, которых близко интересовала судьба школы и вопросы улучшения преподавания в ней математики.

Председателем съезда был избран член Государственного совета профессор А. В. Васильев.

Средства съезда

1.	От Министерства народного просвещения	1000 руб.
2.	„ Министерства торговли и промышленности	1000 „
3.	„ Главного управления военно-учебных заведений	500 „
4.	Членских взносов	3650 „
5.	Подписка на труды съезда	3373 „
6.	Прочие суммы	1426 „
	Итого	10 949 руб.

Интересно отметить, что из остатков денежных сумм I съезда было предположено учредить премию „I Всероссийского съезда преподавателей математики“ в сумме 300 руб. за такой учебник алгебры для средней школы, в котором через весь курс была бы проведена и на примерах из геометрии, физики, механики, космографии, статистики и пр. ярко освещена идея функциональной зависимости, или за математическую хрестоматию (на обложке должно было быть указание, что работа удостоена премии „I Всероссийского съезда преподавателей математики“).

Повидимому, такой работы не было составлено. (Еще ранее за аналогичную работу Министерством народного просвещения была учреждена премия имени Петра Великого.)

Содержание работы I Всероссийского съезда преподавателей математики

Всего на I Всероссийском съезде преподавателей математики был прочитан 71 доклад.

Из них на пленуме 39 докладов, на секциях 32 доклада (I и II томы трудов съезда).

Сверх того не было прочитано 5 докладов. Они помещены в III томе трудов съезда.

Наибольшее число докладов падает на разделы: методология и методика; планы и программы курса математики средней школы экзамены.

Объем докладов колеблется от 2—3 до 30 страниц и более.

Были и более обширные доклады, например, доклад В. Ф. Кагана „О подготовке преподавателей“ представляет солидный трактат, занимающий 76 страниц (содержит 92 библиографических названия).

В I и II томах „Трудов I Всероссийского съезда преподавателей математики" напечатаны следующие доклады, заслушанные в пленарных заседаниях и на секциях съезда. Классификация докладов сделана так, как это имеется во II томе „Трудов" (стр. 340—345).

Психологические основы обучения

1. Требования, предъявляемые психологией к математике, как учебному предмету — С. И. Шохор-Троцкий. т. I, стр. 54—81
2. Экспериментальные проблемы в педагогике математики — В. Р. Мрочек. т. I, стр. 81—95, 99—101
3. Новые исследования по физиологии центральной нервной системы и педагогика — П. Д. Енько, т. I, стр. 96—101
4. О значении экспериментальной психологии для педагогики — проф. А. П. Нечаев. т. I, стр. 317—318

Цель и содержание курса школьной математики; исторические и философские элементы в курсе средней школы

1. Содержание курса школьной математики — А. Г. Пичугин, т. I, стр. 156—161, 180—190
2. Содержание курса школьной математики с точки зрения современных запросов жизни и приёмы для посильного выполнения школой этих требований — пр.-доц. В. В. Лермантов, т. I, стр. 161—190
3. О реальном направлении преподавания математики в связи с жизненными и научными фактами — Н. Н. Володкович, т. II, стр. 97—123, 135—136
4. Математическое и философское преподавание в средней школе — проф. А. В. Васильев. т. I, стр. 8—24
5. Цели, формы и средства введения исторических элементов в курс математики средней школы — прив.-доц. В. В. Бобынин, т. I, стр. 129—149

Учебная литература; наглядные пособия

1. Обзор литературы по арифметике младших и средних классов средних учебных заведений — В. Х. Майдель. т. II, стр. 53—61
2. Обзор четырех учебников по арифметике — Л. Н. Тяпкина, т. II, стр. 61—67
3. Обзор современной учебной литературы по алгебре Б. Б. Пиотровский. т. II, стр. 10—34
4. Обзор некоторых руководств по элементарной геометрии — А. Р. Кулишер. т. II, стр. 37—53
5. Обзор литературы на русском языке по методике арифметики — В. Р. Мрочек. т. II, стр. 68—72, 130—134
6. Примерный библиотечный каталог — К. Н. Дерунов, т. II, стр. 34—37
7. Наглядные пособия — Д. Э. Теннер. т. I, стр. 223—244

Методология и методика; планы и программы курса математики средней школы; экзамены

1. Метод обучения математике в старой и новой школе — К. Ф. Лебединцев. т. II, стр. 207—208
2. Об изменении метода обучения в низшей и средней школе — Д. Д. Галанин. т. II, стр. 190—201
3. О реформе преподавания математики. Общие положения и программы. Содержание курса математики за первые шесть лет обучения — Н. А. Тамамшева. т. II, стр. 140—165
4. О лабораторных занятиях по математике в средних учебных заведениях Казанского учебного округа — Н. П. Попов. т. II, стр. 266—273
5. Игры и занятия, способствующие развитию образного мышления и представления — А. Н. Смирнов. т. I, стр. 219—2 3, 241—244
6. Спорные вопросы в методике арифметики — Ф. А. Эрн. т. II, стр. 251—266, 317—319
7. Обоснование арифметических действий — В. А. Соколов, т. II, стр. 124—128
8. Вопрос об измерениях и мерах в системе арифметики — Л. А. Сельский. т. II, стр. 319—320
9. Вопрос о дробях в курсе арифметики — К. Ф. Лебединцев т. II, стр. 209—231

10. Приближённые и сокращенные вычисления в средней школе — В. А. Крогиус. т. II, стр. 231—244
11. Курс теоретической арифметики в старших классах средней школы — Б. Б. Пиотровский. т. I, стр. 190—219
12. Элементы теории чисел в средней школе — И. И. Чистяков. т. I, стр. 245—253
13. Иррациональные числа в средней школе — Т. А. Афанасьева-Эренфест. т. I, стр. 253—276
14. Отдел логарифмов в средней школе — Б. А. Маркович, т. II, стр. 273—285
15. О желательных изменениях в программе по алгебре женских гимназий Министерства народного просвещения — Г. П. Кузнецов. т. II, стр. 165—176
16. Об алгебраических преобразованиях — Д. М. Левитус. т. II, стр. 245—250
17. О графическом методе решения системы уравнений — Д. Э. Теннер. т. II, стр. 286—295
18. Применение графического метода в средне-школьном курсе — Н. А. Томилин. т. I, стр. 346—375
19. Номография и её значение для средней школы — М. Л. Франк, т. I, стр. 319—346
20. Обоснование геометрии в связи с постановкой её преподавания — С. А. Богомолов. т. I, стр 24— 53, 435—451
21. О систематическом курсе элементарной геометрии в средней школе — Д. В. Ройтман. т. I, стр. 431—434
22. Об упрощенном построении курса геометрии и расширении её содержания — А. В. Годнев. т. II, стр. 128—130
23. Начала логики в курсе школьной геометрии — С. А. Неаполитанский. т. II, стр. 202—207
24. Роль геодезических упражнений при обучении математике — Д. М. Левитус. т II, стр. 314—319
25. Современное состояние курса геометрии в средней школе в связи с обзором наиболее распространенных учебников — Н. А. Извольский. т. II. стр. 73— 96
26. Начальный курс геометрии. Его цели и осуществление — А. Р. Кулишер. т. I, стр. 376—412, 436—451
27. О первой теореме элементарной геометрии Эвклида — П. М. Травчетов. т. II, стр. 296—300
28. Построение параллелограмов — И. И. Александров. т. II, стр. 300—304
29. Принцип совместимости плоских и пространственных фигур — Е. С. Томашевич. т. II, стр. 304—314, 317—319
30. Неэвклидова геометрия в средней школе — П. А. Долгушин, т. I, стр. 150—155, 436—451
31. Постановка преподавания начал анализа в средней школе — Ф. В. Филиппович. т. I, стр. 101—128
32. Об анализе бесконечно-малых в средней школе — М. Г. Попруженко. т. I, стр. 577—579, 117—128
33. По вопросу о постановке преподавания математики, главным образом, аналитической геометрии и анализа бесконечно-малых в реальных училищах Кавказского учебного округа — Б. К. Крамаренко. т. I, стр. 412—431
34. О результатах преподавания начал анализа бесконечно-малых, аналитической геометрии и теоретической арифметики в реальных училищах и гимназиях — проф. П. А. Некрасов, т. II, стр. 176—179
35. Об экзаменах по математике в средней школе — Б. А. Маркович. т. II, стр. 179—184

Преподавание математики в средних технических заведениях и в коммерческих училищах

1. Курс анализа в средних технических учебных заведениях — М. Л. Франк. т. II, стр. 323—331
2. О необходимых отделах математики для экономических наук — проф. П. А. Некрасов. т. II, стр. 332—334
3. О постановке преподавания математики в коммерческих училищах — И. Л. Бакуменко. т. II, стр. 334—737

Согласование программ математики средней и высшей школы

1. О согласовании программ в средней и высшей школах — проф. К. А. Поссе, ... т. I, стр. 452—458, 468—479
2. К вопросу о согласовании программ математики в средней и высшей школах — проф. В. Б. Струве. . . . . т. I, стр. 458—479

Подготовление учителей математики

1. О подготовлении учителей математики для средних учебных заведений, приват-доцент В. Ф. Каган. . . . . стр. 479—554
2. Курсы для подготовления кандидатов на учительские должности в кадетских корпусах — С. И. Шохор-Троцкий. . . т. I, стр. 555—558
3. Временные педагогические курсы Киевского учебного округа — П. А. Долгушин. . . . . т. I, стр. 558—560
4. Женский педагогический институт — Н. Н. Гернет. . . . . т. I, стр. 560
5. Учительские семинарии — И. Т. Зубков. . . . . т. I, стр. 560—564

Деятельность математических обществ и кружков

1. Математические отделения Рижского педагогического общества — Ф. А. Эрн. . . . . т. I, стр. 287—295
2. Варшавский кружок преподавателей математики — Н. А. Пажитнов. . . . . т. I, стр. 296—298
3. Математическо-физический кружок в Варшаве — В. Р. Мрочек. . . . . т. I, стр. 298—299
4. Орловский физико-математический кружок — П. Н. Острогорский. . . . . т. I, стр. 299—300
5. Новочеркасский математический кружок — Г. П. Кузнецов, т. I, стр. 300—301
6. Московский математический кружок — И. И. Чистяков. . т. I, стр. 301—303
7. Нижегородский математическо-астрономический кружок — В. В. Мурашев. . . . . т. I, стр. 303
8. Отдел математики Педагогического музея высших учебных заведений — Д. М. Левитус . . . . т. I, стр. 304—316

Научные доклады

1. О постулатах, лежащих в основании понятия о величине — пр.-доц. С. О. Шатуновский. . . . . т. I, стр. 276—277
2. О преобразовании многогранников — проф. В. Ф. Каган. . т. I, стр. 579—604

В III томе Трудов съезда напечатано 5 докладов, которые были допущены Организационным комитетом, но по разным причинам на съезде не были заслушаны, а именно:

1. Доклад проф. Д. М. Синцова „Международная комиссия по преподаванию математики“.
2. Доклад проф. Д. М. Синцова „О согласовании программ средней и высшей школы“.
3. Доклад пр.-доц. С. Н. Бернштейна „Исторический обзор развития понятия о функции“.
4. Доклад Я. В. Иодынского „Обзор современной литературы по теоретической арифметике и тригонометрии“.
5. Доклад В. И. Шифф „Обзор учебников по аналитической геометрии, составленных для реальных училищ“.

На заключительном заседании I Всероссийского съезда были заслушаны и приняты весьма обстоятельные резолюции.

Резолюция I Всесоюзного съезда преподавателей математики

1. Съезд признаёт необходимым поднять самостоятельность и активность учащихся, а также усилить наглядность преподавания на всех его ступенях и в то же время повысить логический элемент в старших классах, считаясь, однако, с психологическими особенно-

стями возраста учащихся и с доступностью для них преподаваемого материала.

2. Съезд признаёт своевременным опустить из курса математики средней школы некоторые вопросы второстепенного значения, провести через курс и ярко осветить идею функциональной зависимости, а также — в целях сближения преподавания в средней школе с требованиями современной науки и жизни — ознакомить учащихся с простейшими и несомненно доступными им идеями аналитической геометрии и анализа.

3. Съезд признаёт крайне желательным, чтобы авторы настоящих и будущих учебников приняли во внимание точки зрения, изложенные во 2-м пункте настоящих резолюций. В частности, признаётся желательным выработка задачников, соответствующих кругу интересов учащихся, на каждой ступени их обучения и включающих в себя данные из физики, космографии, механики и пр., а также составление математической хрестоматии, дополняющей и углубляющей сведения, выносимые учащимися из обязательной программы.

4. Съезд признаёт желательной подробную разработку вопросов о такой организации преподавания в средней школе, которая, сохраняя общеобразовательный её характер, допускала бы специализацию в старших классах, приноровленную к индивидуальным способностям учащихся и удовлетворяющую требованиям высшей школы.

5. Съезд признаёт желательным, чтобы наиболее одаренные в математическом отношении учащиеся могли найти в учебном заведении удовлетворение своим запросам, а также организованное руководительство со стороны учебного персонала.

6. Съезд признаёт необходимым, чтобы Университет без ущерба для главного своего назначения — служить науке и научному образованию, усилил свое преподавание элементами, необходимыми для будущего преподавателя средней школы.

7. Съезд признаёт необходимым, чтобы кандидаты в преподаватели по окончании высшего учебного заведения получали специальную педагогическую подготовку на курсах, возможно лучше обеспеченных преподавательскими силами и материальными средствами.

8. Съезд считает необходимым, помимо постоянных курсов, устраивать для освежения как научной, так и педагогической подготовки учителей средних учебных заведений, также краткосрочные курсы и съезды.

9. В целях повышения специального и педагогического образования преподавателей желательно, чтобы библиотеки учебных заведений были в полной мере снабжены необходимыми учёными, учебными, методологическими сочинениями, справочными изданиями и журналами.

10. Съезд признаёт желательным, чтобы педагогическим советам учебных заведений было предоставлено больше самостоятельности в деле распределения учебного материала по классам и в выборе учебных руководств.

11. Съезд признаёт желательным повысить в женских учебных заведениях уровень преподавания математики, как ввиду важного общеобразовательного значения этого предмета, так и ввиду широкого стремления оканчивающих женскую школу к высшему образованию.

12. Сознавая всю сложность высказанных здесь пожеланий, съезд признаёт необходимым проявить соответствующую осторожность при всех начинаниях, касающихся проведения их в жизнь. Ввиду

этого, съезд выразил настоящие резолюции в весьма общей форме и поручает Организационному комитету II съезда составить комиссии, которые занялись бы тщательной и детальной разработкой высказанных здесь общих пожеланий.

Доклады этих комиссий необходимо отпечатать и не позже чем за 3 месяца до начала II съезда разослать состоящим при всех ведомствах учебным комитетам, советам и конференциям высших учебных заведений, математическим обществам и кружкам, преподавателям математики в средних учебных заведениях, а также органам педагогической печати.

Обсуждение этих докладов и постановление по ним окончательных решений должно составить главную задачу II Всероссийского съезда преподавателей математики.

13. Съезд признаёт желательным, чтобы отдельные члены его представили в организуемые комиссии свои соображения по указанным в предыдущих пунктах вопросам.

Соображения эти, если не будут включены в доклады, должны быть к ним приложены.

14. Ввиду того, что крайне серьезный вопрос об экзаменах и письменных работах обсуждался только в одной из секций и не прошёл через общее собрание, съезд, признавая неудовлетворительность современной постановки этого дела в средней школе и необходимость коренных в нем изменений, поручает Организационному комитету II съезда организовать отдельную комиссию, в которую передать и поступившие по этому вопросу из 2 секции заявления.

15. Съезд выражает желание, чтобы на II съезде преподавателей математики были образованы особые секции преподавателей женских, технических и коммерческих учебных заведений и чтобы туда были представлены доклады о проработке программ математики этих учебных заведений.

16. Ввиду того, что в настоящее время в различных местах России работает довольно много математических кружков, желательно создание особой организации, которая, оставляя эти кружки самостоятельными, объединила бы их на почве общих интересов и стремлений.

17. Съезд выражает свою признательность тем органам печати, которые служили и служат делу преподавания математических наук и приветствует начинание Московского математического кружка, выразившееся в издании журнала „Математическое образование", который включил в свои задачи содействие взаимному осведомлению обществ и кружков, посвящающих себя делу математического образования.

18. Съезд признаёт необходимым созвать II Всероссийский съезд преподавателей математики в Москве в декабре 1913 г. и просить Московский математический кружок, ввиду выраженной председателем и присутствующими его членами готовности организовать I съезд, взять на себя выполнение этой задачи.

Съезд поручает своему Организационному комитету сообщить настоящие свои постановления министрам и главноуправляющим, в ведении которых находятся средние учебные заведения.

Таковы были итоги I Всероссийского съезда преподавателей математики. Следует отметить, что за 7—8 дней работы съезда было заслушано свыше 70 докладов. Обращает на себя внимание та организованность, которая характерна для этого съезда как в части подготовительных мероприятий, так и со стороны проведения самого съезда и содержания его работы. Труды съезда напечатаны в трех томах, причем в I томе напечатаны доклады, прочитанные на общем собрании; во II томе — доклады, сделанные на секциях и в III томе доклады, которые не предоставилось возможным доложить на съезде. Труды съезда вышли в 1913 г. и были разосланы участникам съезда.

Через 2 года после первого съезда состоялся II Всероссийский съезд преподавателей математики.

II Всероссийский съезд преподавателей математики

II Всероссийский съезд преподавателей математики, во исполнение постановления I съезда, состоялся в Москве. Проходил он, как и I съезд в зимние каникулы, в период времени с 27 декабря 1913 г. по 3 января 1914 г. Всю подготовительную работу по созыву съезда и организации его работы провёл Московский математический кружок. Председателем Организационного комитета являлся проф. Б. К. Млодзеевский.

Участников съезда было, как и на I съезде, свыше 1200 чел. В основном это были, как и на первом съезде, рядовые преподаватели средней школы всех типов, съехавшиеся, в буквальном смысле, со всех сторон нашего обширного отечества: делегаты из Терской обл., Тобольской обл., из Усть-Медведицы, Челябинска, из г. Никольска, Приморской обл. и т. д. Число профессоров, видных деятелей, приват-доцентов составляло не более 2—3% общего числа участников съезда.

Председателем съезда был избран М. Г. Попруженко (СПБ).

Съезд проходил в аудиториях Московских высших женских курсов.

Занятия располагались так: с 10 час. утра до 3 час. дня происходили общие собрания и соединённые заседания секций, а вечером с 6 до 9 час. одновременно работали две секции — „А" и „Б".

При съезде была организована выставка наглядных пособий, моделей приборов и новейшей учебно-методической литературы.

Средства II съезда получались из тех же источников, как и при созыве I съезда. Кроме того, было ассигновано Московской городской думой 500 руб.

В период работы съезда регулярно выходил „Дневник Второго Всероссийского съезда преподавателей математики" (№ 1—8, 145 стр.). Он издавался Организационным комитетом съезда под редакцией И. И. Чистякова.

Задачи II съезда определялись решениями I съезда, который в п. 12 своих резолюций поручил Организационному комитету II съезда составить комиссии для тщательной и детальной обработки тех общих пожеланий, которые были приняты в 1—18 пунктах резолюций I съезда. При этом Организационному комитету II съезда было поручено доклады этих комиссий отпечатать и не позже, чем за 3 месяца до начала II съезда, разослать состоящим при ведомствах ученым комитетам, советам и конференциям высших учебных заведений, математическим обществам и кружкам, преподавателям математики средних учебных заведений, а также органам педагогической печати.

Обсуждение этих докладов и вынесение по ним окончательных решений должно было составить главную задачу II Всероссийского съезда преподавателей математики.

Следует отметить, что Организационный комитет II съезда, к сожалению, не смог справиться с этой задачей. Доклады комиссий не только не были разосланы заинтересованным учреждениям и лицам за 3 месяца до начала съезда, но они, повидимому, и не были составлены, поскольку они не нашли своего отражения в работах съезда.

М. Г. Попруженко в своей статье о II съезде преподавателей математики, помещенной в № 7 и 10 журн. „Педагогический сборник" за 1914 г., отмечая это обстоятельство, объясняет его сложностью поставленной Организационному комитету задачи и недостатком людей и времени для выполнения такой большой работы.

Этим недостатком подготовки съезда объясняется в значительной степени слабое участие рядовых учителей (участников съезда) в прениях по прочитанным докладам, поскольку они не имели возможности заранее ознакомиться с содержанием докладов, выступать же экспромптом на столь ответственном собрании многие не решались.

Таким образом, в подготовке II Всероссийского съезда преподавателей математики были организационные недостатки, которые до известной степени снизили его общественное значение.

Однако и II съезд провёл интенсивную работу, заслушав ряд интересных и ценных докладов.

Всего на съезде в общих собраниях и секциях было заслушано 49 докладов.

Доклады эти напечатаны в одном томе под названием „Доклады, читанные на II Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве" (Москва, 1915 г.).

Доклады напечатаны без определенной последовательности, не объединены по характеру их содержания, а помещены в порядке их представления для печати (напечатано 32 доклада).

Ниже приводится перечень этих докладов, причём нами доклады объединены по характеру их содержания, как это было сделано Организационным комитетом I съезда.

1. Психологические основы обучения. Логика

Проф. А. В. Васильев (СПБ), Принцип экономии в математике (стр. 42—54).

М. Воскресенский (Кострома), О развитии представлений о соотношениях в пространстве (стр. 169—175).

М. Д. Осинский (Варшава), Направляющие элементы математического исследования (стр. 205—218).

Цель и содержание курса школьной математики

Проф. А. К. Власов (Москва), Какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования? (стр. 20—29).

Проф. П. А. Некрасов (СПБ), Об учебных особенностях двух направлений математического курса средней школы (стр. 83—93).

Учебная литература

И. И. Чистяков (Москва), Об иностранных журналах по математике для учащих и учащихся (стр. 77—83).

Учебные планы и программы по математике для средней школы. Методология и методика. Учет знаний учащихся

Проф. Д. М. Синцов (Харьков), О международной комиссии по преподаванию математики (стр. 4—20).

Проф. В. В. Бобынин (Москва), Об указаниях, получаемых преподавателем математики от ее истории (стр. 54—60).

А. И. Бачинский (Москва), Запросы преподавателя физики в области математики (стр. 60—66).
Проф. Д. М. Синцов (Харьков), О преподавании аналитической геометрии в средней школе (стр. 70—77).
Проф. С. Н. Бернштейн (Харьков), Понятие функции в средней школе (стр. 93—100).
К. Ф. Лебединцев, Вопрос о способах оценки и контроля познаний учащихся (стр. 100—111).
Н. Г. Панков (Москва), Измерительный метод при начальном курсе арифметики (стр. 111—117).
Д. Д. Галанин, Эволюция в понятии действия умножения в XVIII в. в России (стр. 117—124).
В. Н. Рутковский (Яновичи, Витебской губ.), О письменных арифметических работах (стр. 124—144).
В. Фриденберг (Москва), Организация внеклассных занятий по математике в связи с новыми программами средней школы (144—147).
Н. А. Извольский (Москва), Комбинационная работа, как основа для преподавания математики (148—157).
Е. Кедрин (Самара), По поводу нового взгляда на значение условных выражений в математике (158—162).
С. Н. Поляков (Юзовка), Вопрос о реформе школьной математики с методологической точки зрения (163—168).
Проф. П. А. Некрасов (СПБ), Вторая (баккалаврская) ступень в составе будущей средней школы (175—181).
Д. Д. Галанин (Москва), Влияние экзаменов на успешность в математике (181—186).
Н А. Извольский (Москва), К вопросу об определении длины окружности (186—204).
Д. Л. Волковский (Москва), Значение картинок для первоначального обучения арифметике (218—224).
В. В. Петров (Кустанай, Тург. обл.), Практические работы по математике в средней школе (225—229).
В. Г. Фридман (Москва), Методика преподавания отрицательных и положительных чисел в средней школе (248—255).
В. А. Соколов (Майкоп), Когда и как проходить измерение длины окружности в VII классе реальных училищ и в средних учебных заведениях вообще (255—267).
Л. Т. Александров (Одесса), Глава об иррациональных числах в средней школе (267—277).
К. Ф. Лебединцев (Москва), Теория пределов в курсе геометрии (277—286).
А. Р. Кулишер (СПБ), Идея движения в современной геометрии и область её применимости в курсе средней школы (286—317).

Подготовление учителей математики

Проф. Н. Н. Салтыков (Харьков), Об организации подготовки преподавателей средней школы (стр. 29—42).

Научные доклады

П. С. Флоров (Урюпино, область Войска Донского). Страхование пенсии (Из теории вероятностей) (стр. 230—248).

Перечень вышеприведённых докладов, прочитанных на II съезде преподавателей математики, свидетельствует о том, что эти доклады не были органическим продолжением и развитием тех положений, которые были приняты на I съезде, а носили совершенно самостоятельный характер.

Их было значительно меньше, чем на I съезде. Обсуждение их также было менее широким, так как организовано было всего лишь две секции — „А“ и „Б“, которые были к тому же недостаточно диференцированы.

При заключении работы II съезда были вынесены следующие резолюции.

Резолюции II Всероссийского съезда преподавателей математики

„Второй Всероссийский съезд преподавателей математики, выслушав и обсудив доклады и прения по всем вопросам, относящимся к программе съезда, вынес следующие постановления:

1. Признавая необходимым условием успешного преподавания математики правильную постановку подготовки преподавателей, а также создание таких условий, при которых лицам, уже состоящим преподавателями, была бы предоставлена возможность освежать и пополнять познания, съезд находит крайне желательным осуществление следующих мер:

а) чтобы лица, приступающие к преподаванию, овладели подготовкой как научной, так и общепедагогической;

б) чтобы на физико-математических факультетах высших учебных заведений читались курсы, освещающие с научной точки зрения основные вопросы элементарной математики;

в) чтобы устраивались районные съезды преподавателей математики;

г) чтобы устраивались педагогические курсы для преподавателей математики;

д) чтобы организацию таких курсов, кроме учреждений, устраивающих их в настоящее время, приняли на себя высшие учебные заведения, а также математические кружки и общества, объединяющие преподавателей.

2. Признавая, что успешное преподавание математики может быть осуществлено лишь при дружной работе всех заинтересованных в нем кругов и что для правильной постановки его имеют большое значение не только общие мероприятия органов управления, но и личный почин отдельных преподавателей, — съезд признаёт крайне желательным осуществление следующих мер:

а) чтобы Педагогическим советам было предоставлено право разрешать преподавателям отступать от существующих программ под условием представления проектов изменений на утверждение Совета;

б) чтобы осуществление пересмотра программ и плана преподавания математики в средней школе было произведено в целом, а не путем частичных изменений; при выработке такого плана необходимо не только внесение новых отделов, но и освобождение курса от отделов, утративших свое значение;

в) чтобы преподавание математики в женских гимназиях было организовано на одних началах с мужскими;

г) чтобы к совместной работе по выработке плана и программы преподавания привлекались представители науки и преподаватели средней школы.

3. Съезд признаёт начала аналитической геометрии и анализа необходимыми в курсе средней школы всех типов.

Для повышения успешности результатов, достигаемых в деле преподавания аналитической геометрии и анализа, желательны следующие меры:

а) пересмотр программ аналитической геометрии и анализа;

б) назначение на эти предметы достаточного количества времени;

в) установление связи анализа с предыдущими частями курса;

г) более правильная методическая постановка преподавания аналитической геометрии и анализа.

4. Для скорейшего проведения в жизнь изложенных постановлений съезд признаёт необходимым учредить комиссию по вопросу

о постановке преподавания математики и просить Михаила Григорьевича Попруженко, Захария Андреевича Макшеева, Болеслава Корнелиевича Млодзеевского, Алексея Константиновича Власова, Дмитрия Матвеевича Синцова и Николая Николаевича Салтыкова принять на себя организацию означенной комиссии с тем, чтобы последняя, выделив из себя соответственные подкомиссии, представила к III съезду доклады по следующим вопросам:

а) постановка подготовки преподавателей математики;

б) общие основания постановки и планы преподавания математики в общеобразовательной средней школе; при этом необходимо обратить особое внимание на разработку вопросов о пропедевтических курсах, курсах аналитической геометрии и анализа и вопросов о продолжительности курса средней школы, о способах оценки, переводных, выпускных и конкурсных экзаменах.

5. Съезд признаёт весьма важным для успешности работы дальнейших съездов, установление преемственности и тесной связи между работой их организационных комитетов. Для осуществления такой преемственности он находит необходимым учреждение „Постоянного Бюро съездов преподавателей математики" и постановляет, чтобы из состава членов Организационных комитетов II и предстоящего III съездов была организована комиссия. На эту комиссию возлагается поручение представить третьему съезду доклад об организации „Постоянного Бюро съездов преподавателей математики".

6. Съезд признаёт желательным созвать III Всероссийский съезд преподавателей математики в Харькове в декабре 1915 г. и просить Харьковское Математическое общество взять на себя выполнение этой задачи.

7. Съезд поручает своему Организационному Комитету сообщить настоящие свои постановления министрам и главноуправляющим, в ведении которых находятся средние учебные заведения".

Из приведенных выше резолюций II съезда видно, что и здесь резолюции носили общий характер. Мысль о более детальной подготовке материалов для следующего съезда здесь снова была подтверждена, причём съезд сам наметил тех членов комиссии, которые должны были войти в комиссию по разработке необходимых материалов к III съезду (см. п. 4 резолюции).

Мало того, учитывая огромное значение преемственности в работе съездов, было высказано пожелание об учреждении „Постоянного бюро съездов преподавателей математики".

Третий съезд, намеченный в Харькове в 1915 г., не состоялся, как уже было сказано, в силу начавшейся в 1914 г. первой мировой войны.

Однако подготовка к III съезду преподавателей математики проводилась весьма организованно.

В № 2 и 3 журнала „Математический Вестник" за 1917 г. (редактор-издатель Н. А. Извольский) помещены материалы по подготовке III Всероссийского съезда преподавателей математики, из которых видно, что в целях тщательной и детальной разработки вопросов, подлежащих обсуждению на съезде, Организационным комитетом было составлено несколько комиссий, а именно:

1. Комиссия по выработке общих оснований постановки курса математики в средней школе (председатель М. Г. Попруженко).

2. Комиссия по вопросу о постановке курса аналитической геометрии, анализа и алгебры (председатель М. Г. Попруженко).

3. Комиссия по вопросу о постановке курса геометрии и тригонометрии (председатель С. А. Богомолов).

4. Комиссия по вопросу о постановке курса арифметики (председатель И. Н. Кавун).

5. Комиссия по вопросу о соотношении между преподаванием математики и механики в средней школе (председатель С. Г. Петрович).

6. Комиссия по вопросу об особенностях постановки курса математики в женских учебных заведениях (председательница В. Л. Шифф).

7. Комиссия по вопросу об особенностях постановки курса математики в коммерческих училищах (председатель П. А. Некрасов).

8. Комиссия по вопросу о подготовке преподавателей (председатель С. И. Шохор-Троцкий).

9. Комиссия по подготовке к съезду докладов научного содержания (председатель С. Е. Савич).

10. Комиссия по вопросу об особенностях постановки курса математики в средних и низших технических учебных заведениях (председатель М. Л. Франк).

11. Комиссия по вопросу о постановке курса математики в народной школе повышенного типа (председатель А. К. Янсон).

Организационным комитетом предполагалось перенести III съезд преподавателей на период зимних каникул 1917/1918 учебного года, но он не смог состояться и в этот период.

Значение Всероссийских съездов преподавателей математики

Съезды преподавателей математики оставили большой след в истории школьного преподавания математики. Являясь следствием широкого движения передовой части представителей науки и учительства в России, они прежде всего имели значение для современников.

Председатель I съезда проф. А. В. Васильев так охарактеризовал его значение, обращаясь к участникам съезда на заключительном заседании:

„Вы слышали на съезде несколько докладов по очень трудным вопросам нешкольной математики и большое число докладов, освещающих преподавание школьной математики с разных точек зрения. Наша выставка, которая так усердно посещалась Вами, дала возможность познакомиться с состоянием математической литературы с математическими учебниками разных стран. Мы прослушали здесь доклады о преподавании на всех ступенях, начиная с вопроса об именованных числах до анализа бесконечно-малых и таких абстрактных элементов, как учение о числе. Все это расширило наш кругозор. Кроме того, настоящий съезд в течение кратковременного существования успел уже оказать большую услугу делу объединения преподавателей математики различных городов“.

Не менее положительную оценку дал II съезду председатель Организационного комитета проф. Б. К. Млодзеевский в своем обращении к участникам съезда на его заключительном заседании.

„Может показаться, — говорил он, — что мы уносим со съезда не так уж много нового в области наших общих интересов. На самом деле это, конечно, не так. Самое ценное, что дал нам съезд — это новая бодрость и вера в то дело, которому мы себя посвятили и, вместе с тем, идейная связь, которая неизбежно возникает между членами съезда и которая, конечно, не может нарушиться вместе с его окончанием.

Во всяком случае наш съезд имеет ту заслугу, что на нем все время раздавался призыв к освобождению преподавателя от рутины и формализма и к более тесному сближению школы с наукой и жизнью“.

Те же мысли звучали и в заключительном слове председателя I съезда М. Г. Попруженко.

„Настоящий съезд, как мне кажется, интенсивно и продуктивно поработал во всех направлениях и по всем отраслям. Подвести точные итоги достигнутых результатов сейчас еще, разумеется, невозможно. Отметим только одно несомненно: наш съезд дал всем участникам больший подъём духа, желание повысить научные сведения, ответил на много запросов... Если у кого и остались сомнения и неудовлетворённость, то не станем на это жаловаться, а скажем, что иначе и быть не могло, что такие сложные вопросы и не могли быть решены в несколько дней. Хорошо уже и то, что сделано".

Такую положительную оценку дали проведенной работе сами современники — участники съездов.

Однако нельзя думать, что этим и исчерпывается их значение.

Прежде всего следует отметить, что труды съездов, так тщательно обработанные и прекрасно изданные современниками, представляют собой ценнейший вклад в историю преподавания математики в России.

Многие вопросы, которые обсуждались на I и II съездах, не потеряли своего значения и до сего времени. Отметим хотя бы некоторые из них.

Программные вопросы

Как на I Всероссийском съезде преподавателей математики, так и на II, — одним из центральных вопросов был вопрос о программах. В частности, стоял вопрос о включении в программу средней школы элементов аналитической геометрии и анализа, являющихся с конца XVII в. необходимой основой математического метода исследования.

На съездах имелась возможность учесть опыт введения элементов высшей математики в курс реальных училищ и кадетских корпусов. В реальных училищах имелся 3—4-летний опыт преподавания, в кадетских корпусах — 2—3-летний опыт.

Как представители научной общественности, так и преподаватели школ единодушно высказались за включение в программу средней школы элементов анализа и аналитической геометрии.

Недостатки, которые, естественно, имелись в преподавании анализа и аналитической геометрии проистекали не из существа дела, а вследствие новизны его, недостаточной подготовленности учительства, несовершенства учебников (проф. Некрасов П. А.).

„Курс анализа не заключает в себе ни одной статьи, затрудняющей учеников или им недоступной", отмечал М. Г. Попруженко.

Проф. Д. М. Синцов в своем заключительном слове к докладу о Международной комиссии по преподаванию математики (на II съезде) высказал следующие положения:

„Подводя итоги, можно сказать: курс математики общеобразовательной средней школы должен быть дополнен теми основными понятиями, так называемой высшей математики, которые уже стали достоянием общей культуры".

Однако он здесь же заявил: „Простое добавление нового предмета к числу уже существующего недостаточно. Надо, с одной стороны, устранить устарелое и дидактически непригодное (на счет того, что занести в эту категорию, возможны, конечно, мнения самые разнообразные), но может быть даже важнее устранить средостение между различными „предметами" — учить не арифметике, алгебре и т. д., а математике.

В начальной стадии слияние арифметики с пропедевтическим курсом геометрии без излишнего расширения последнего; слияние арифметики и алгебры как можно ранее; введение систематического изложения геометрии лишь на той ступени развития ученика, когда он в состоянии оценить значение логического элемента; постепенная подготовка к понятию о функции, при всяком удобном случае, но без принуждения и насилия, широкое пользование графиками, но с соблюдением необходимой осторожности".

Единодушное мнение представителей науки было поддержано участниками съезда, которые, выступая в прениях по докладу проф. Некрасова на I съезде, высказали ценные мысли и практические предложения, имеющие цель внести улучшения в дело преподавания.

Преподаватель М. Р. Блюменфельд (СПБ) сообщил съезду, что в одном из петербургских частных реальных училищ курс анализа бесконечно-малых проходился даже в значительно большем объеме, чем это требовалось официальными программами 1907 г.

Вопрос о включении идеи функциональной зависимости в курс советской средней школы и в настоящее время является чрезвычайно актуальным; он привлекает к себе внимание и научной общественности и передовых учителей нашей страны.

Разрешая этот вопрос, нельзя не использовать того положительного опыта, который имелся в дореволюционной школе и нашел свое отчетливое выражение в докладах и резолюциях как первого, так и второго съезда преподавателей математики.

Вопросы преподавания геометрии

Наибольшее число докладов было посвящено на том и другом съезде вопросам преподавания геометрии. Вопросы содержания школьной геометрии, строгости доказательства, роли интуиции, места и значения пропедевтического курса геометрии, — все они нашли отражение в работах съезда. Здесь следует отметить выступления Н. А. Извольского (Москва). Не ограничиваясь критикой существующего положения, он высказал ряд конкретных практических предложений, основанных в известной мере на опыте собственной его работы.

Н. А. Извольский высказывается против построения двух курсов геометрии: пропедевтического и систематического. (В этой части он расходится с большинством участников съезда.)

Из основного положения, что в созидании геометрии участвуют две наших духовных способности, интуиция и логика, — говорит он, — делают неправильный вывод (см. доклад С. А. Богомолова), что необходимо построить два курса геометрии, каждый из которых опирался бы на одну из этих способностей.

Вызывает прежде всего большие сомнения вопрос, возможно ли отделить вполне друг от друга роль интуиции и логику в созидании геометрии? И те научные работы, которые посвящены этому вопросу, еще не решили этой задачи.

Нет, если интуиция и логика обе участвуют в созидании геометрии, то отсюда следует, что должно стремиться к созданию такого учебного курса, в котором бы эти наши способности были бы гармонически соединены для достижения общей цели: сделать близкими сознанию учащихся те объекты, над которыми работает геометрия. В этом курсе и интуиция, и логика должны идти рука об руку.

... В современном курсе геометрии имеют место постоянные конфликты между логикой и интуицией, и даже логика нашего курса оказывается весьма сомнительной.

... Если мы правильно подошли бы к решению задачи о разделении курса геометрии на пропедевтический и систематический, то, может быть одним из главных условий такого разделения оказалась бы мысль, что в систематическом курсе не должно повторяться то, что уже усвоено в пропедевтическом, и таким образом, оба курса слились бы в один общеобразовательный курс, где в начале первенствующее место занимала бы интуиция и лишь постепенно все большие и большие права захватывала бы логика.

Следует сказать, что среди участников съезда были и другие точки зрения на постановку преподавания геометрии в школе. Так, например, профессор С. А. Богомолов в своем докладе: „Обоснование геометрии в связи с постановкой ее преподавания", прочитанном 27 декабря 1911 г. на общем собрании I съезда высказал мысль о необходимости „разбить преподавание геометрии на две части, в каждой удержать единство метода и каждую посвятить почти исключительному достижению одной из двух целей; первая будет соответствовать интуитивному, вторая — логическому элементу в геометрии.

Первая часть — пропедевтический курс „должна иметь целью развитие пространственной интуиции и накопление геометрических знаний. Учащиеся должны проделать в этом курсе тот путь, каким в глубокой древности шло человечество, закладывая основы нашей науки, при этом самым широким образом надо использовать их способность пространственного воображения, её постоянное упражнение и послужит лучшим средством к её развитию.

Мало того, в пропедевтическом курсе необходимо отвести видное место так называемому лабораторному методу, т. е. экспериментированию всякого рода; последнее может происходить при помощи построений с простейшими геометрическими приборами, построений на клетчатой бумаге, вырезывания и накладывания фигур и т. д.".

Развивая свои мысли в этом направлении проф. Богомолов считает необходимым затем привести учащихся к мысли, что „математика не может удовольствоваться теми приемами доказательств, которые они до сего времени применяли; этого можно достигнуть, ознакомив их с некоторыми парадоксами, где вводит в заблуждение именно чертеж, каковой до сего времени был почти единственным руководителем.

Независимо от этого необходимо выяснить, что для геометрии вовсе и не нужно постоянно прибегать к интуиции или опыту для обоснования своих предложений, исходя из некоторых фактов, можно прийти к другим путем одних рассуждений, причём выводы имеют такую же достоверность, как и предпосылки; на примерах учащиеся могут оценить силу дедукции..."

„Словом, — утверждает далее докладчик, — класс будет готов для перехода к систематическому курсу, который является второй частью намеченной программы".

На том же съезде мысль проф. Богомолова о разделении курса геометрии на обширный пропедевтический курс и строго-обоснованный систематический была поддержана П. А. Долгушиным (Киев) в его докладе „Неэвклидова геометрия в средней школе", прочитанном на общем собрании I съезда 27 декабря 1911 г.

Участник того же I съезда, А. Р. Кулишер (СПБ) прочитал подробный доклад на тему: „Начальный (пропедевтический) курс геометрии в средней школе. Его цели и осуществление". Основные положения его доклада сводились к следующему.

„Введение в учебный план пропедевтического курса геометрии не только преследует задачу более целесообразного выполнения последующего систематического курса, но является одним из необходимых условий правильного развития мышления ребенка неразрывно связанным с общими воспитательными и образовательными целями школы..."

„Пропедевтический курс должен с одной стороны способствовать изучению некоторых важнейших свойств пространства, способствовать, так сказать, выработке „пространственной грамотности", с другой стороны, внести свою долю в дело развития мышления и умения правильно формулировать умозаключения"...

В докладе Н. А. Тамамшевой (СПБ) „О реформе преподавания математики" была дана конкретная программа пропедевтического курса на первые 6 лет обучения.

Таким образом I съезд преподавателей математики чрезвычайно подробно и всесторонне обсуждал проблему рационального построения курса геометрии в средней школе. Его материалы представляют живой интерес для советской школы, поскольку вопрос об улучшении преподавания геометрии глубоко интересует как научную общественность, так и передовое учительство нашей страны.

Цели и содержание математического образования

Существенное значение для правильной постановки общего математического образования имеет ясное понимание целей его и содержания.

В этом отношении представляет интерес доклад, сделанный проф. А. К. Власовым на II съезде на тему „Какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования?"

Приведем некоторые выдержки из этого доклада.

... „Одними простыми сведениями, как бы ни были они обширны, нельзя расширить своего кругозора, нельзя достичь общего образования. Надо эти сведения пережить, надо, чтобы в этом переживании что-то в прежнем кругозоре уступило после борьбы место чему-то новому, приводящему уже приобретенное раньше в большую гармонию.

Общее образование в целом не может быть получено в средней школе; средняя школа лишь закладывает основание ему, подготовляет восприимчивость ученика к расширению кругозора.

Задачу средней школы, таким образом, можно было бы определить так — дать образование, возбуждающее работу мысли и интерес к знанию в различных областях наук, результаты которых сделались общим достоянием".

... „Я полагаю, что преподавание математики, хотя бы элементарной, заключается в том, чтобы вызвать в учащемся математическое мышление соответственно корням этого мышления как аналитическое, так и геометрическое, как относящееся к числу и вычислению, так и относящееся к пространственному представлению и построению, мышление, которое могло бы служить для него орудием познания мира, как со стороны множественности и величины, так и со стороны форм, строения сложного, пространственных представлений.

Такое мышление может быть различных степеней, начиная от элементарных, интуитивных навыков и восходя до сложных математических концепций.

Где бы оно для данного типа не кончалось, оно представляет для него ценность. Поэтому возражение, что такое мышление доступно только математикам, а не всем, отпадает".

Призывая участников съезда к кипучей работе, А. Н. Власов так заканчивает свое выступление:

... „Будут высказаны разнообразные взгляды соответственно разнообразию опыта участников обсуждения. Но я не сомневаюсь— одна мысль будет звучать во всем разнообразии мнений: мы должны научить идущие нам на смену поколения мыслить теми понятиями и образами, которые составляют математические сведения и которые независимо от их объёма ценны на всех ступенях знания; мы должны воспитать в молодых умах математическое мышление и тем самым подготовить работников на различных поприщах русской жизни и русской науки".

По вопросу о целях и содержании математического образования представляет интерес также выступление проф. А. В. Васильева на первом съезде. Доклад его был озаглавлен так: „Математическое и философское преподавание математики в средней школе".

Приведем тезисы его доклада.

„1. Средняя школа должна поставить одной из целей пробуждение интереса к серьезному философскому мышлению. В особенности этой цели должен служить последний учебный год средней школы.

2. Математическое образование на всех своих ступенях должно ставить себе целью развитие логического мышления.

3. Математическое преподавание в последний учебный год средней школы должно поставить целью:

1) выяснение учащимся значения математики для точного знания и математического выражения законов природы и

2) научный ретроспективный взгляд на систему элементарной математики.

4. Соответственно указанной цели в программах математики последнего года средней школы должно быть обращено особое внимание:

1) на выяснение понятия о функции и вопросы её роста и 2) на основания арифметики, алгебры и геометрии.

5. При указанной постановке преподавания математики в последний год средней школы возможно и желательно установление тесной связи между курсами математики и философской пропедевтики.

6. Основания арифметики (учение о целом числе) в особенности богаты вопросами поучительными и интересными с точки зрения философской пропедевтики".

По вопросу о целях обучения и значения школьной математики представляют также интерес мысли, высказанные преподавательницей одной из женских гимназий Петербурга Н. А. Тамамшевой в связи с её докладом „О реформе преподавания математики. Общие положения и программы. Содержание курса математики за первые шесть лет обучения". (Труды I съезда).

Тезисы её доклада сводились к следующему:

1. Математика не так далека от жизни, как это кажется.

2. Курс математики должен быть составлен так, чтобы ученики чувствовали в нём органическое целое.

3. Через весь курс должна ярко проходить идея функциональной зависимости и выражения этой зависимости в виде уравнения.

4. Для выяснения зависимости между величинами должны быть введены графики и графическая интерпретация.

5. По мере возможности должна быть установлена тесная связь между анализом и геометрией.

6. Пространственные представления должны быть даны и восприняты возможно ярче и определеннее. Для этого должны быть выделены в курс основы аналитической геометрии и теории проекций.

7. В геометрии должно быть введено понятие движения. Статистическое изучение должно быть заменено динамическим.

8. К приобретению знания можно приступать только тогда, когда уже усвоены математические понятия и представления.

9. Основные математические представления и понятия должны быть установлены при помощи самостоятельных работ, в лабораториях.

10. Математические законы и соотношения должны выводиться самими учениками, быть плодом их творческой работы, как бы их собственным открытием.

11. Между математикой и другими науками должна быть установлена тесная связь.

Далее Н. А. Тамамшева излагает подробное содержание программы по математике для первых шести лет обучения и в заключительной части своего выступления высказывает такие мысли.

„Целью всякого обучения должно быть всестороннее развитие всех способностей и творческих сил человека. Этому должен способствовать весь учебный материал: каждая отрасль науки должна будет развивать те способности, те стороны души человека, которые ближе методам и целям науки. Математика приучает к обобщению, к абстракции, к синтезу, вместе с тем она учит наблюдению, диференциации признаков и строгому всестороннему анализу. Она способствует выработке точного и краткого языка, ясного определения мысли, и учит употреблению символов для выражения идей, установлению связи между абсолютным и относительным, конкретным и абстрактным".

„Курс математики должен представлять собой органическое целое".

„Через весь курс должна проходить идея функциональной зависимости и идея выражения всякой зависимости в виде уравнения, тогда начальный курс математики будет тесно связан с изучением математики как науки".

„Где возможно, должна быть установлена тесная связь между анализом и геометрией".

„Надо ознакомить с историей математики".

„Не следует обособлять математику от других наук, а, напротив, указать на её место среди них, на её значение для физики, химии, механики, астрономии".

Преподавание математики и истории

Чрезвычайно мало разработанным является и поныне вопрос об использовании исторического элемента в преподавании математики. Между тем включение исторического элемента в преподавание, помимо огромного воспитательного значения, способствовало бы более сознательному изучению математики, значительно увеличило бы интерес к её изучению, дало бы возможность учащимся проявить свою инициативу и самостоятельность в постановке докладов на исторические темы, в особенности при организации внеклассных занятий. На съезде были заслушаны два доклада В. В. Бобынина по этому вопросу. На первом съезде был им прочитан доклад на тему „Цели, формы и средства введения исторических элементов в курс математики средней школы“, на втором съезде был прочитан доклад на тему „Об указаниях, получаемых преподавателем математики от её истории“.

Оба доклада весьма содержательны и не потеряли своего значения для современного преподавания математики.

Вопросы преподавания математики в начальных классах

Большинство докладов, которые были прочитаны на I и II съездах преподавателей математики, относилось к вопросам преподавания математики в средней школе. Вопросам преподавания математики в начальных классах на том и другом съезде было уделено значительно меньше внимания. Однако и в тех немногих докладах, которые были посвящены начальным классам, имеются положения, заслуживающие особого внимания.

Весьма содержательным был доклад Ф. А. Эрна (Рига) на тему: „Спорные вопросы арифметики“. В этом докладе Ф. А. Эрн поставил вопросы, которые окончательно не разрешены и в советской методической литературе. К этим спорным вопросам следует отнести, например, вопрос о приемах выявления самой сущности арифметических действий (деление на равные части, деление по содержанию), вопрос о классификации задач, о степени их трудности, вопрос о применении индукции и дедукции при обучении арифметике, о значении экспериментальных работ в области методики.

Нам кажется ценной и совершенно правильной мысль, высказанная докладчиком, о значении изучения и обобщения опыта передовых учителей в деле совершенствования и улучшения методики, чему в советской педагогике уделяется особое внимание.

„Научно-поставленные опытные исследования весьма важны и полезны, — говорил Эрн, — и можно только пожелать им более широкого распространения. Но их одних недостаточно для правильного развития методики арифметики. Пора нам, самим учителям, принять активное участие в выработке методики. Пусть каждый учитель, отвергнув раз навсегда всякую рутину, производит исследования в своем классе, испытывая различные приемы обучения и наглядные пособия, старательно отмечает интерес детей к отдельным частям курса к тем или иным задачам и т. д. Нужна коллективная обработка методики арифметики всеми учителями начальной и средней школы“.

Интересные и ценные мысли были высказаны также Д. Д. Галаниным (Москва) в его докладе „Об изменении метода обучения в низшей и средней школе“. Приводим некоторые мысли из этого доклада.

„Наилучшим путем в обучении я считаю тот, который даёт материал для мышления и творческих повторений, дает материал для издания идей. Путь для такого построения курса я вижу в опыте ребенка, в его конкретных чувственных восприятиях, которые уже им самим перерабатываются в идеи, а эти идеи сами собой перерабатываются в логические понятия и суждения. С этой целью я начинаю обучение с непосредственного опыта ученика в измерении длин, весов, объемов и т. п. и думаю, что он уже сам из моих опытов получит идею числа и функциональной зависимости...

Я думаю, что такие отделы геометрии, как равенство треугольников, вычисление площадей и объёмов, измерения длин и углов должны войти в курс школьного обучения, как пропедевтическое знание первой ступени. Это знание не есть абстрактное геометрическое доказательство, а — реальный факт, полученный из рассмотрения и приготовления моделей".

* * *

Мы остановились только на некоторых докладах. Можно было бы значительно расширить перечень докладов и выступлений, представляющих большую ценность для учителя математики средней школы. Почти по любому вопросу преподавания математики в материалах съездов можно найти интересные высказывания, будящие мысль и пробуждающие творчество.

Нельзя, конечно, думать, что здесь все было безупречно, что здесь не было ошибок. Разумеется, материалы съездов требуют не „слепого подражания", а и известного к ним критического отношения. Отдельные доклады не были безупречны в научном отношении: например, некоторые места доклада Годнева А. В. „Об упрощенном построении курса геометрии", прочитанного в секции „Методология и методика" первого съезда, были охарактеризованы председательствующим собрания Б. Б. Пиотровским, как логически несостоятельные; предложения докладчика были признаны неприемлемыми.

Нельзя целиком согласиться с мнениями, которые высказывались на съезде по вопросу об оценке знаний, об экзаменах. Несомненно, ошибочны были некоторые положения докладов В. Р. Мрочек „Экспериментальные проблемы по педагогике математики" и „Обзор литературы на русском языке по методике арифметики". В частности, Мрочек переоценивает значение экспериментальных работ Лая и, с другой стороны, признает догматическими методические указания А. И. Гольденберга, В. А. Евтушевского и др., тогда как в них отражён и обработан многолетний опыт учителей русской школы, который значительно ценнее и объективнее ряда выводов, получаемых так называемым экспериментальным путем.

Все же, несмотря на эти недочеты, труды съездов могут и должны быть изучаемы с большой пользой для разрешения весьма важных вопросов, связанных с улучшением постановки преподавания математики в школе.

Съезды, совещания, конференции учителей математики советской школы

После Великой Октябрьской социалистической революции не было общереспубликанских съездов преподавателей математики школ РСФСР. Однако совещания учителей в нашей стране распространены более, чем где-либо в другой стране.

Ежегодно, не менее 3—4 раз в год повсеместно проводятся районные совещания учителей которые, как правило, приурочиваются к школьным каникулам.

Один-два раза в год проводятся областные съезды учителей на которых ставятся доклады как по вопросам научного порядка, так и по вопросам, связанным с обобщением опыта лучших учителей.

Систематически проводятся курсы для повышения квалификации учителей.

Мероприятия эти в советской стране имеют особо важное значение в связи с огромным ростом сети школ и вовлечением в работу значительного числа новых учителей. Эти учителя иногда недостаточно подготовлены, так как педагогические учебные заведения, несмотря на их огромный рост, не успевают полностью удовлетворять запросы отделов народного образования.

Для планомерной организации работы по повышению квалификации учителей в каждой области (крае) организованы специальные учреждения — институты усовершенствования учителей.

Эти институты организуют научно-практические конференции, имеющие целью обобщение лучшего опыта передовых учителей.

В 1938 г. научно-исследовательским институтом школ была организована первая научно-педагогическая конференция, где была особая секция по математике. Труды этих конференций составили солидный том, они напечатаны в 1939 г.

В 1935 г. Управлением начальной и средней школы Наркомпроса РСФСР было созвано специальное совещание преподавателей математики средней школы. Продолжалось оно 4 дня: с 29 марта по 1 апреля. Совещание заслушало 35 докладов по различным вопросам преподавания математики. Труды совещания изданы Наркомпросом в 1935 г. под названием „Материалы совещания преподавателей математики средней школы".

Однако эти мероприятия нельзя считать достаточными. Задачи, стоящие перед нашей родиной в связи с осуществлением пятилетнего плана восстановления и развития народного хозяйства СССР на 1946—1950 гг., после окончательного разгрома фашизма, настоятельно выдвигают необходимость созыва в недалеком будущем широкого общереспубликанского съезда преподавателей математики, на котором при непосредственном и ближайшем участии представителей математической науки были бы поставлены и авторитетно разрешены все вопросы, связанные с поднятием преподавания математики на такую высоту, какую оно может достигнуть только в нашей стране.

ЛИТЕРАТУРА

1. Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. Том I. Общие собрания. С.-Петербург. Типография „Север", 1913 г., стр. XVI+609.
2. Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. Том II. Секции. С.-Петербург. Типография „Север", 1913 г., стр. VII+364.
3. Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. Том III. С.-Петербург, стр. III+114.
4. Доклады, читанные на II Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве. М., 1915 г., стр. 317.
5. Бюллетень I Всероссийского съезда преподавателей математики. С.-Петербург, 1912 г., № 1—8. Изд. журн. „Обновление школы".
6. Дневник II Всероссийского съезда преподавателей математики. Изд. Орг. Комитета II съезда под ред. И. И. Чистякова. М., 1913 г., № 1—8, стр. 145.
7. Подготовительная работа к устройству II Всероссийского съезда преподавателей математики. Журн. „Математическое Образование", 1913 г., № 6.
8. Попруженко М., Второй съезд преподавателей математики. Журн. „Педагогический сборник", 1914 г., № 7 и 10.
9. Кулишер А., Всероссийский съезд преподавателей математики. Журн. „Школа и жизнь", 1914 г., № 6 и 15.
10. Мордухай-Болтовский Д. Д., Второй Всероссийский съезд преподавателей математики. Варшава, 1914 г.
11. Синцов Д., Второй Международный математический конгресс. Журн „Вестник опытной физики и элементарной математики".
12. Поссе К., Международная Комиссия по преподаванию математики. Журн. „Вестник опытной физики и элементарной математики", № 607.
13. Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей. Том I. Перевод с немецкого Д. А. Крыжановского под ред. В. Ф. Кагана, 1933.
14. Борель Э., Арифметика и алгебра. В обработке проф. Штеккеля. Перевод с немецкого под ред. В. Ф. Кагана, с приложением его статьи „О реформе преподавания математики в средних учебных заведениях Германии и Франции".
15. Подготовка II Всероссийского съезда преподавателей математики. Журн. „Математический Вестник". 1917 г., вып. № 2 и № 3.

CONFERENCES OF TEACHERS OF MATHEMATICS IN RUSSIA

BY N. N. NIKITIN

Summary

During the period which immediately preceeded the Great October Socialist Revolution, two All Russian Conferences of Teachers of Mathematics took place. The first Conference was held in Petersburg, from December 27, 1911, up to January 3, 1912. The second Conference took place in Moscow. It opened on December 27, 1913 and closed on January 3, 1914. The third Conference was planned to take place in Kharkov in 1915—16, but that was impossible owing to the First World war.

By the end of the XIX-th and the beginning of the XX-th century an exceptionally great interest arose both in the problems of mathematics as a science and of teaching mathematics in the secondary school.

In Europe international mathematical congresses were organized and held, and the International Commission on the Teaching of Mathematics, was elected; representatives from Russia took part in it, too.

There was a noticeable activity of pedagogical thought in Russia; this found its expression in the periodicals on methods of teaching, as well as in the societies of mathematicians.

Finally there arose an idea of organizing an All Russian Conference of teachers of mathematics.

All the ideas that stirred the circles interested in mathematics at the end of the XIX-th and the beginning of the XX-th century were reflected in the work of the 1st and 2nd Conferences.

The main topics discussed on these conferences were problems connected with the curriculum of mathematics for schools, the aims and the methods of teaching mathematics.

The records of two Conferences were issued in separate volumes (those of the 1st Conference in three volumes, and those of the 2nd—in one volume). They are of great interest and may be of use in solving urgent problem s— cencerning teaching of mathematics in the Soviet school.