ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

21

МОСКВА · 1949

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

ВЫПУСК 21·1949

ВОПРОСЫ ФОРМИРОВАНИЯ И РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВООБРАЖЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

Ответственный редактор
член-корреспондент АПН РСФСР
доктор физико-математических наук
Н. Ф. ЧЕТВЕРУХИН

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Москва 1949

Разрешено к печатанию
Редакционно-издательским Советом
Академии педагогических наук РСФСР

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *А. В. Зансохов* Техн. редактор *В. П. Гарнек*

А09791 Подп. к печ. 26/IX 1949 г.
Печ. л. 11¼. Уч.-изд. л. 12,92 Формат 70×108¹/₁₆.
Тираж 5000 Зак. 600 Цена 7 р. 75 к.

Типография Изд-ва АПН. Москва, Лобковский пер., 5/16

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 21 · 1949

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема развития пространственного воображения учащихся является одной из основных задач преподавания геометрии, черчения и рисования в школе. Это подчеркивается и официальными программами 1948 г. Однако методика работы над развитием пространственного воображения учащихся еще мало разработана. Нет и ясной картины состояния пространственных представлений учащихся на разных ступенях обучения в школе. Недостаточно изучены факторы, влияющие на формирование и развитие пространственных представлений и пространственного воображения. Актуальность этой проблемы побудила группу научных сотрудников Института методов обучения Академии педагогических наук организовать специальный семинар, занимающийся исследованием всего комплекса упомянутых вопросов. В семинаре принимают участие школьные учителя и преподаватели вузов. Периодически слушались и обсуждались доклады, а также проводилась экспериментальная работа в средних школах и вузах Москвы.

Предлагаемый выпуск „Известий Академии педагогических наук РСФСР" посвящен работам участников этого семинара.

Первая из статей выпуска представляет собой работу автора этих строк при участии ряда членов семинара (кандидатов педагогических наук: Е. В. Зеленина, Г. А. Владимирского и П. Я. Дорфа; научных сотрудников Института методов обучения АПН: Л. В. Федорович, М. Х. Кекчеевой; преподавателей средних и высших школ: Л. И. Марченко, А. Д. Земляной, Л. И. Громан, Н. В. Архангельской, Е. В. Амиянц и др.; аспирантов К. П. Васьковой и А. М. Тевлина).

В этой статье описываются проведенные нами экспериментальные работы в различных классах средней школы и на первых курсах вузов[1] с целью выяснения развития пространственных представлений и пространственного воображения учащихся на разных ступенях их обучения. В работе затронуты также вопросы методики преподавания в связи с задачей развития пространственного воображения учащихся.

Вторая и третья статьи принадлежат двум авторам, участникам нашего семинара, преподавателю математики 110-й школы П. Я. Дорф и преподавательнице черчения 47-й и 126-й школ А. Д. Земляной. В первой из них изложен обширный опыт П. Я. Дорфа, в течение многих лет изучавшего вопрос о применении наглядных методов обучения в преподавании геометрии в средней школе. В частности, П. Я. Дорфом описаны придуманные им и другими авторами модели, помогаю-

---

[1] Экспериментальные работы проводились в следующих школах: 113-я, 29-я, 125-я, 472-я, женские средние школы; 360-я, 126-я, 525-я, 135-я—мужские средние школы; центральная музыкальная школа при Московской государственной консерватории; и в вузах: Московский городской педагогический ин-т; Московский авиационный ин-т и Московский пищевой ин-т.

щие развитию пространственного воображения учащихся. Преподаватель 47-й женской и 126-й мужской средних школ Москвы А. Д. Земляная излагает свой опыт развития пространственного воображения учащихся на основе приемов наглядного обучения черчению в школе.

Четвертая статья настоящего выпуска „Известий" носит название: „Экспериментальное обоснование системы и методики упражнений в развитии пространственного воображения". Она написана кандидатом педагогических наук Г. А. Владимирским и явилась результатом работы, выполненной им в Научно-исследовательском институте методов обучения АПН. Работа обсуждалась в семинаре и была рекомендована к опубликованию. В ней автор излагает систему упражнений на графическом материале, с помощью которых могут быть улучшены пространственные представления учащихся. Он также разрабатывает методику проведения этих упражнений в школе и рассказывает об экспериментальной проверке результатов применения упомянутых графических упражнений в школьном курсе геометрии.

Последняя статья выпуска принадлежит научным сотрудникам Института методов обучения АПН, преподавателям 113-й и 29-й средних школ Москвы—Л. В. Федорович и М. Х. Кекчеевой. В этой статье рассказывается об опыте проведения упражнений и решения задач на проекционных чертежах в курсе стереометрии. Новизна этого метода потребовала от авторов работы изложения организации и постановки упражнений на проекционных чертежах, а также описания типов задач и методики работы над ними. Целью решения задач на проекционных чертежах является развитие пространственного воображения учащихся и умения фактически решать задачи на построение в пространстве.

Как видно из этого краткого обзора, содержание настоящего выпуска „Известий" посвящено, с одной стороны, выяснению и исследованию состояния пространственных представлений у учащихся средних школ, с другой стороны, — исследованию различных методов преподавания (моделирование, графические упражнения, стереометрические задачи на проекционных чертежах), позволяющих улучшить и развить пространственное воображение учащихся и вместе с тем содействовать конкретизации школьного курса геометрии.

Сообщая о первых результатах нашей работы, мы надеемся привлечь к участию в ней всех интересующихся. Это позволит нам углубить и расширить изучение поставленной сложной проблемы. Все замечания, советы и пожелания просим направлять в адрес Научно-исследовательского института методов обучения Академии педагогических наук РСФСР (Москва, Чистые пруды, Лобковский пер., дом 5/16).

Член-корреспондент АПН РСФСР

проф. ***Н. Ф. Четверухин***

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 21 · 1949

ОПЫТ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВООБРАЖЕНИЯ УЧАЩИХСЯ[1]

Н. Ф. ЧЕТВЕРУХИН
член-корреспондент АПН РСФСР

§ 1. ВВЕДЕНИЕ (ВАЖНОСТЬ ЗАДАЧИ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВООБРАЖЕНИЯ)

Нетрудно понять, что определенный уровень развития пространственных представлений и способности пространственного воображения совершенно необходимы для лиц самых разнообразных профессий и специальностей. Вернее было бы сказать, что он необходим всем. Если приходится все же особенно подчеркнуть необходимость очень хорошего пространственного воображения для деятелей, посвятивших себя инженерно-техническим специальностям (что является совершенно очевидным), то при более внимательном отношении к этому вопросу — и для художников, скульпторов, педагогов, медиков (в частности хирургов) и других специалистов, пространственное воображение оказывается также весьма необходимым.

Понятно, что инженеру, который работает над изобретением какой-либо новой машины, еще не существующей в действительности, необходимо мысленно вообразить ее во всех деталях. Только после этого он может сделать ее чертежи, по которым затем будет осуществлена идея изобретателя. Интересно отметить, что, по отзывам бюро изобретений, одной из главных помех в работе изобретателей является отсутствие у них достаточно развитого пространственного воображения. Можно сказать также, что отсутствие достаточно развитой способности воображать пространственные фигуры служит большим тормозом на пути обучения тех учащихся, которые поступили в технические учебные заведения. Им трудно даются такие предметы, как начертательная геометрия, графика и другие инженерные дисциплины. Иногда это вынуждает их бросить избранную специальность и переходить в учебные заведения по гуманитарным наукам. Однако, как мы уже упоминали, пространственное воображение в той или иной степени совершенно необходимо работникам любой профессии. Как много полезных применений может найти в своей классной работе педагог, умеющий изображать мелом на доске то, о чем он рассказывает во время преподавания своего предмета. Как выигрывают, например, уроки географии или исто-

[1] В экспериментальной работе принимали участие кандидаты педагогических наук: Е. В. Зеленин, Г. А. Владимирский, П. Я. Дорф; учителя школ: Л. В. Федорович, М. Х. Кекчеева, А. Д. Земляная и др.; научные работники: К. П. Васькова, Л. И. Марченко, Е. В. Амиянц, А. М. Тевлин; ст. лаборанты: Т. П. Вовк и Р. Н. Никитенко.

рии, когда педагог сопровождает их умело сделанными иллюстрациями на доске. Что же касается таких предметов, как математика, астрономия, физика и другие, то преподавание их без сопровождения наглядными и схематическими изображениями, показывающими ход изучаемого вопроса, было бы просто невозможным. Еще более необходимо хорошее развитие пространственных представлений художнику или скульптору, но оно также необходимо анатому или хирургу. В самом деле, с какой исключительной точностью должен представлять последний всю систему кровеносных сосудов, нервов, мышц и т. п., когда он делает какую-либо тонкую операцию.

Но можно ли все-таки сказать, что вопрос о пространственном воображении должен рассматриваться как одна из важных задач общеобразовательной школы? Ответ на этот вопрос должен быть без сомнения утвердительным. Мы часто не замечаем, что в нашей повседневной жизни нам очень нужна способность пространственного воображения. Она нужна нам, когда мы рассматриваем план комнаты или дома и тем более, если мы хотим сделать набросок такого плана по собственному замыслу. Она нужна также и тогда, когда мы пытаемся представить себе какой-либо участок города по его фотоснимку или рассматриваем карту местности. Она нужна нам и тогда, когда мы хотим понять устройство какого-либо прибора по его чертежам или схему его действия по скупо составленному наброску. Не нужно забывать также об умении что-либо нарисовать или хотя бы понять изображенное на картине художником. Та же способность потребуется и тому, кто делает выкройку платья и обуви или чертеж мебели и т. д.

Итак, мы видим, как важно в нашей обыденной жизни обладать достаточно развитыми пространственными представлениями и способностью воображения. Если же мы примем во внимание высокую техническую и научную культуру нашей страны и ее быстрое движение по пути дальнейшего прогресса, то станет ясно, что стоящая перед общеобразовательной массовой школой задача формирования и развития пространственных представлений и пространственного воображения должна быть признана весьма актуальной, и, следовательно, она должна быть успешно разрешена.

§ 2. ВОПРОС О РАЗВИТИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВООБРАЖЕНИЯ КАК ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА

Пространственные представления и свойства геометрических фигур являются предметом преподавания геометрии в школе. Однако в методике геометрии можно видеть еще с давних времен борьбу двух направлений: „формально-логического“ и „наглядно-прикладного“.

Сторонники первого направления базировались на классической работе „Начала“, или „Элементы“, Евклида, которая в течение многих веков оказывала влияние на постановку и методы преподавания геометрии в школе. Последователи формально-логического направления считают основной задачей преподавания геометрии в школе построение логического аппарата и упражнение дедуктивного мышления учащихся. Совершенство построенного Евклидом курса геометрии производило столь неотразимое впечатление, что, несмотря на его явную неприспособленность для школьного употребления, авторы учебников геометрии копировали Евклида и подражали ему. Даже и в наше время можно видеть такое подражание во многих, особенно иностранных учебниках. Естественно, что при этом упускалась из виду геометрическая сущность школьного курса геометрии, который приобретал сухой и формальный характер изложения. В свою очередь, такие тенденции преподавания курса геометрии вызывали справедливые возражения педагогической общественности, которая понимала неприемлемость евклидовой концепции в школьном курсе геометрии. В результате появилось методическое направление, основывавшееся на совершенно противоположных принципах наглядного, конкретного преподавания геометрии и частого обращения к прикладным вопросам (черчение, измерение на местности и т. п.). В течение долгих лет развитие методики геометрии происходило в непрерывной борьбе этих двух направлений. Насколько острой была эта борьба, можно судить по тому отношению, которое высказывали представители обоих течений к „Началам“ Евклида. Так, Боссю писал в 1802 г.: „Никогда ни одно научное сочинение не имело успеха, сравнимого с „Началами“ Евклида. Исключительно по ним в течение веков учили геометрии во всех математических школах; они переведены на все языки и на всех языках комментировались,—доказательство их исключительного превосходства“.

А вот высказывание Роджера Бекона, еще в XIII в. резко возражавшего против преподавания геометрии по Евклиду: „Только розгами,—пишет Бекон,—можно вогнать ученикам четыре первых теоремы евклидовых „Элементов“, а пятая уже называется „Elefuga“ — бегство несчастного!“.

Живая струя, внесенная в преподавание геометрии последователями наглядно-прикладного направления, имела благотворное влияние на постановку этого предмета в школе. Заметим, в частности, что наш знаменитый геометр Н. И. Лобачевский выдвинул много ценных предложений в своем учебнике „Геометрия“, в свое время не нашедших признания у чиновников царской России. Однако в обширной литературе, посвященной наглядным методам преподавания геометрии, вскоре обнаружились крайние тенденции. Авторы курсов геометрии, среди которых особенно выделялся английский инженер Пэрри, скатились к чисто эмпирическим методам изложения курса геометрии, пренебрегая его внутренним содержанием как дедуктивной дисциплины. Доказательства геометрических теорем были заменены лабораторными методами нахождения законов этой науки. Наглядность из средства становилось самоцелью. С течением времени ошибки и крайности обоих методических направлений становятся все очевиднее. Они приводят как к неверному пониманию целей преподавания геометрии в массовой школе, так и к извращению методов преподавания.

Геометрия как наука является частью чистой математики, которая еще, по классическому определению Энгельса, „имеет своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, т. е. весьма реальное содержание“. Таким образом, геометрия занимается изучением тех геометрических образов и их взаимосвязей, которые представляют собой абстрактные модели реального мира. Именно из этого реального мира геометрия и черпает свои основные понятия. Поэтому важно, чтобы школьное обучение геометрии было основано на пространственном представлении всех геометрических образов и форм, свойства которых изучаются в курсе геометрии. Важно, чтобы учащиеся видели эти геометрические образы в окружающей действительности и могли бы применять свою геометрию в практической жизни. Только такое изучение геометрического материала является полезным, которое сопровождается конкретным представлением свойств геометрических фигур в пространстве.

Из этого следует сделать необходимые выводы как в отношении целей преподавания геометрии, так и методов преподавания.

Педагоги-практики, сознавая всю важность выработки у учащихся достаточного запаса геометрических понятий и представлений, прибегали и прибегают в своей работе к различным средствам наглядного обучения. Среди них наиболее употребительным является моделирование, т. е. работа учащихся с моделями геометрических тел. Имеется обширная литература, посвященная вопросам применения моделей в преподавании геометрии. (См. статьи Дорф и Земляной в настоящем выпуске „Известий".)

Существует большое количество предложенных различными авторами „стереометрических ящиков" и других пособий по преподаванию геометрии. Следует все же отметить, что в методической литературе нет единодушия по вопросам о роли моделей в преподавании геометрии. Одни авторы склонны почти все преподавание геометрии сводить к моделированию. Другие, наоборот, считают пользование моделями нецелесообразным и даже вредным. Как нам кажется, некоторой недооценкой роли геометрических моделей в выработке пространственных представлений у учащихся страдают и высказывания Н. М. Бескина в его недавно вышедшей в свет „Методике геометрии".

Тем не менее, можно считать общепризнанным, что в нашей советской школе применение наглядных пособий прочно вошло в преподавание геометрии и соответствующее указание имеется в официальной программе средней школы по математике Министерства просвещения РСФСР 1948 г. На стр. 12 этой „Программы" мы читаем: „Прохождение курса геометрии должно естественным образом согласоваться с возрастными особенностями учащихся, с развитием их геометрических представлений, способностью воображать пространственные фигуры и делать логические умозаключения. В этой связи методы преподавания геометрии в семилетней школе (VI и VII классы) должны в большей степени опираться на интуицию учащихся, следует широко применять наглядность в процессе изучения материала, возможно чаще делать чертежи изучаемых геометрических образов, а также обращаться к моделированию фигур. Учащиеся должны узнавать геометрические фигуры в окружающем мире. Все это имеет целью образование и накопление пространственных представлений учащихся, развитие их пространственного воображения".

К этим пожеланиям мы хотели бы только добавить, что и по отношению к старшим классам средней школы (VIII – X) требование пространственной представимости геометрических фактов должно быть сохранено в полной мере, хотя это и достигалось бы другими методами. Мало того, в старших классах средней школы проходится курс стереометрии, в котором с особенной полнотой должна быть разрешена задача развития пространственного воображения учащихся. Обычно считают, что наиболее полезным средством для этого является решение задач на построение. Однако если подходить к задачам на построение с точки зрения развития пространственного воображения учащихся, то следует поставить соответствующие проблемы и разработать методику задач на построение в пространстве.

В этом направлении сделано еще очень мало. Те задачи на построение, которые помещены в стабильном учебнике и вошли даже в программу, по сути дела, преследуют другие цели. В них рассматриваются вопросы о существовании и единственности искомых элементов. Что же касается фактического построения, то оно связывается с некоторыми условностями, не имеющими никакого реального значения[1]. По этим причинам учащиеся не выполняют фактического построения в пространстве, как это делается в конструктивных задачах на плоскости. Таким образом, ценнейшее свойство задач на построение отсутствует, и весь вопрос о постановке и методах решения таких задач требует коренного пересмотра. В напечатанных в 1947/48 г. двух небольших книжках под заглавием „Стереометрические задачи на проекционном чертеже", принадлежащих автору настоящей статьи, были предложены методы решения задач на построение на проекционных чертежах. Наиболее существенным отличием задач такого рода является возможность фактического выполнения построения искомого пространственного элемента на чертеже. Это дает возможность учащимся оперировать над пространственными фигурами, фиксируя производимые построения в пространстве соответствующими действиями на проекционном чертеже.

Опыт работы с такими задачами на построение в пространстве дал хорошие результаты и показал полную возможность проведения их в школах. (См. об этом статью Кекчеевой и Федорович в настоящем выпуске „Известий".)

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ У УЧАЩИХСЯ, ТОЛЬКО ЧТО ПОСТУПИВШИХ В ПЕРВЫЙ КЛАСС ШКОЛЫ

Для полноты картины развития пространственных представлений школьников по мере обучения их в школе, было интересно исследовать их пространственные представления при поступлении в первый класс школы. С этой целью в 113-й средней женской школе Советского района Москвы, в классе учительницы Н. В. Архангельской, была проведена экспериментальная работа, о которой мы и хотим рассказать.

Эта работа заключалась в следующем.

Учительница обратилась к детям с объяснением, что они должны будут сделать в течение этого урока. Она раздала детям заранее заготовленные листочки, имевшие вид прямоугольной полосы, разделенной на шесть частей. Затем учительница спросила, все ли получили листочки. Оказалось, что листочки были у всех. Тогда учительница сказала: „Вы видите, что на каждом из ваших листочков имеется 6 клеток. Эти клетки сделаны для того, чтобы вы нарисовали в каждой из них тот предмет, который я вам назову. Слушайте меня внимательно. В первой клетке вы должны нарисовать л и н е й к у. Вы все, конечно, видели линейку и знаете, как она выглядит. Постарайтесь нарисовать линейку так, как вы ее себе представляете. Теперь приступайте к работе".

Дети начали рисовать. Учительница обходит парты и следит за выполнением работы. После того, как все закончили рисовать ли-

[1] Н. Ф. Четверухин, Вопросы методологии и методики геометрических построений в школьном курсе геометрии („Известия Академии педагогических наук РСФСР", 1946, в. 6).

нейку, учительница снова обращается ко всему классу. „Теперь мы переходим ко второй клетке наших листочков. В этой клетке вы должны нарисовать с т о л. Постарайтесь прежде всего представить себе какой-нибудь стол и затем начинайте рисовать". После того, как был окончен рисунок стола всеми учащимися, учительница предложила детям нарисовать в третьей клетке ш а р. Одна из учениц спросила: „Можно мне нарисовать не шар, а мяч". Учительница ответила: „Если мяч ты считаешь шаром, то можешь нарисовать". После окончания этого рисунка в следующей, четвертой, клетке учительница предложила нарисовать ш а р н а п о л у. Потом перешли к пятой клетке, в которой дети должны были нарисовать к у б. Наконец, в шестой клетке им было предложено нарисовать к и р п и ч. Каждый раз при этом напоминалось, что нужно сперва представить предмет, а потом уже его нарисовать.

После выполнения всей работы учительница собрала у детей листочки, надписав на каждом из них фамилию ученицы. Работа заняла почти целый урок.

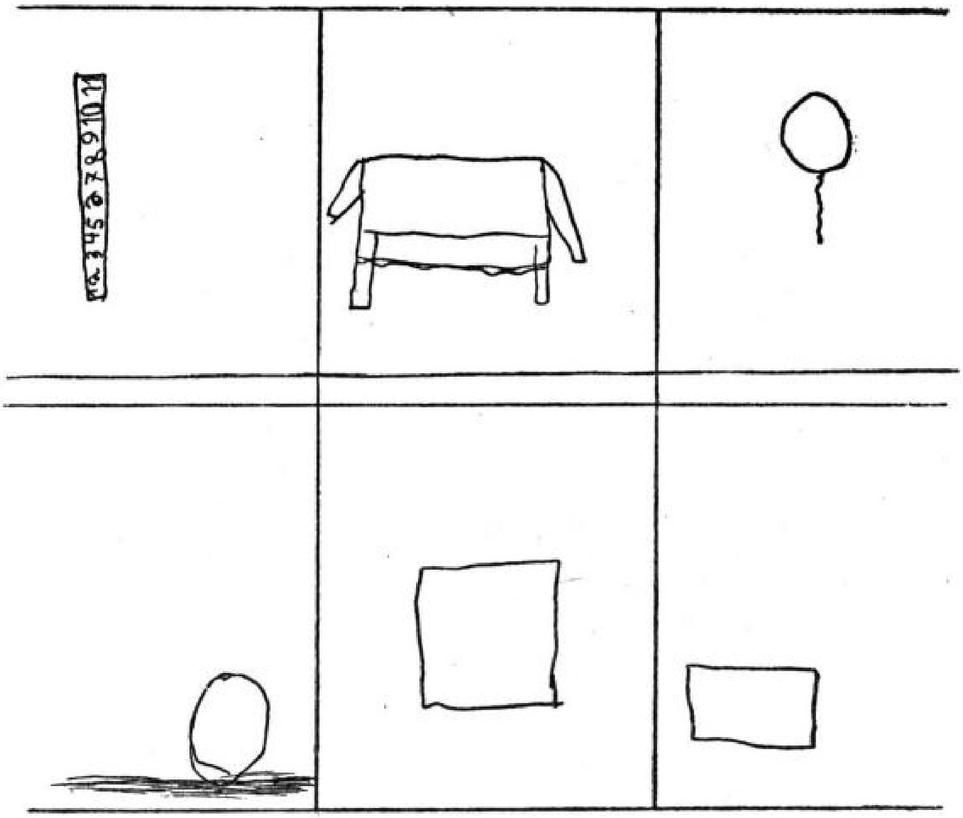


Рис. 1

Чтобы дать представление о том, как были выполнены эти задания, мы приведем снимки некоторых работ. Вот, например, три рисунка, обозначенные у нас № 1, 2, 3. Их можно считать типичными для среднего уровня всех собранных рисунков. Однако индивидуальные замыслы маленьких авторов довольно хорошо отражены в их работах. На рисунке 1 линейка снабжена цифрами, вероятно, обозначающими деления. На рисунке 3 изображена линейка с отверстием, а на рисунке 2 таких отверстий целых три. Или вот сравните рисунки столов, помещенные во второй графе. Во всех трех вы почувствуете, что дети не плохо представляют себе стол, но им трудно сделать его рисунок. Они не знают, как нарисовать ножки стола, хотя и в этом отношении проявляют некоторую изобрета-

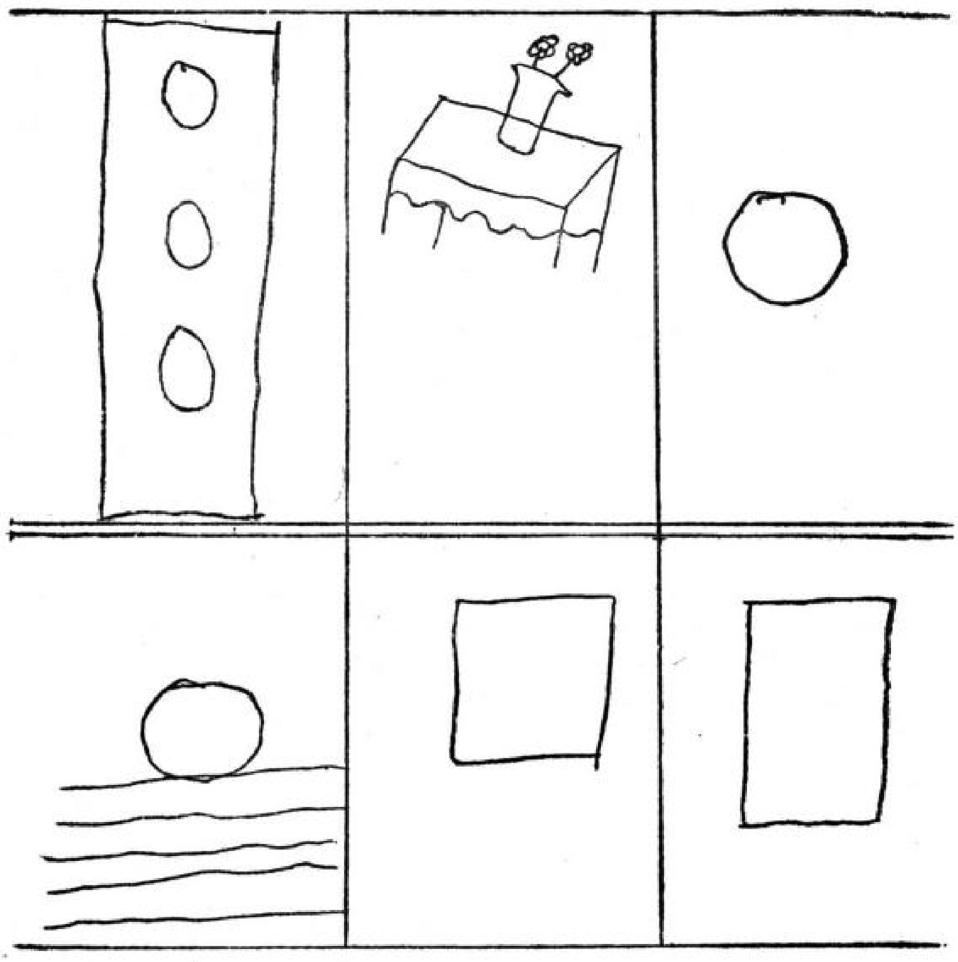


Рис. 2

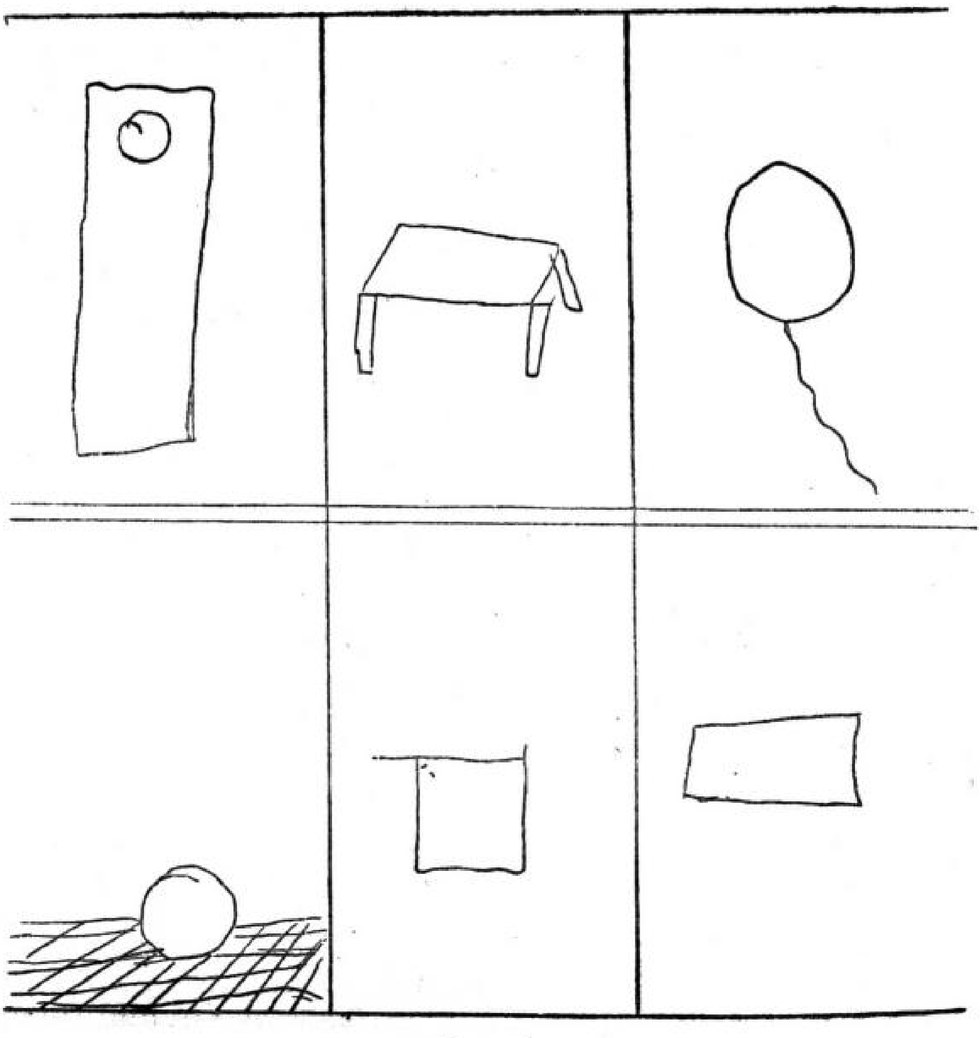


Рис. 3

тельность. Авторы рисунков 1 и 2 накрыли свои столы скатертями. На одном из столов стоит горшочек с цветами. В третьей графе шар изображен в конкретном детском представлении. На рисунках 1 и 3 это детский воздушный шар, который легко узнать по веревочке. Иначе представляют себе дети шар на полу. Он больше напоминает мяч. Особенного искусства достигла девочка, выполнившая рисунок 3. Половицы изображены на нем в перспективе.

Изображение куба и кирпича почти совершенно одинаково во всех трех работах. В них видно неумение детей передать объемную форму.

Интересно отметить, что две ученицы неожиданно обнаружили в своих изображениях в двух последних графах попытку показать куб и кирпич в перспективе (рис. 4 и 5). Так как дети, поступающие в школу, большей частью не обучались рисованию, то эти перспективные рисунки казались необъяснимыми. Однако специально наведенные, по отношению к двум упомянутым девочкам, справки показали, что одна из них является дочерью конструктора. Мать у нее чертежница. Девочка много рисовала, и родители исправляли ее рисунки.

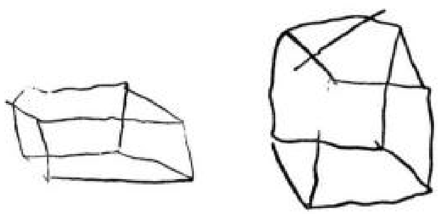


Рис. 4

Рис. 5

Вторая девочка много рисовала до поступления в школу и очень любит это занятие. Однако никто не руководил ею, и ей приходилось срисовывать с картинок в книгах.

Приведенные нами примеры подтверждают, с одной стороны, наличие у детей этого возраста пространственных и именно объемных представлений, которые они пытаются выразить теми или другими средствами. Посмотрите, например, на три рисунка стола в работах № 1, 2 и 3. В каждом из них видна попытка изобразить трехмерное расположение стола, либо изображая его плоскость в форме параллелограмма (рис. 2), либо показывая ножки стола удлиненными спереди и укороченными сзади (рис. 3). С другой стороны, по этим же рисункам видно и неумение детей справиться с перспективным изображением (см., например, ножки стола на рис. 2, где они показаны оканчивающимися на одном уровне, и поэтому задние вышли длиннее передних).

Особенно же заметно отсутствие умения передать перспективное изображение предмета в двух последних графах тех же трех работ. В них куб и кирпич изображены в виде квадрата и прямоугольника, т. е. своими плоскими гранями. Все это вполне подтверждает то положение, что у детей этого возраста уже имеется восприятие трехмерности и стремление его выразить доступными им средствами. Вместе с тем рисунки, в которых куб и кирпич представлены в перспективном изображении, показывают, что даже в этом возрасте можно обучать детей перспективному изображению.

Интересно также отметить еще две работы. В одной из них мы имеем во второй графе изображение стола с находящимися на нем предметами (рис. 6). Характерно, что все предметы изображены в лежачем положении, в то время как ножки стола показаны сбоку в укороченном виде. Словом это напоминает тот прием, который у чертежников встречался в старые времена и заключался в совмещении фасада с планом.

Совершенно своеобразное изображение куба в виде развертки, состоящей из пяти его граней, дано только в одной работе из всего класса (рис. 7). Оно объясняется тем, что девочка хотела, повидимому, изобразить знакомую ей игрушку: раскладной картонный куб.

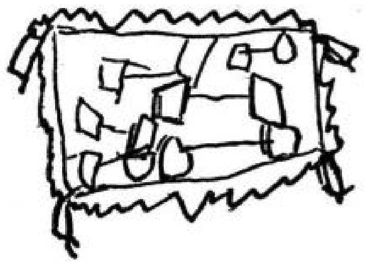


Рис. 6

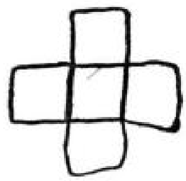


Рис. 7

Работы детей, начинающих свое обучение в школе, дали ясную картину состояния их пространственных представлений, примитивности их изобразительных средств. В то же время они обнаруживают несомненное наличие пространственных трехмерных представлений предметов окружающей действительности и стремление выразить эти представления какими-либо изобразительными приемами. Понятие о перспективном изображении проявилось только в исключительных случаях (рис. 4 и 5), объяснение которым дано выше.

§ 4. О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ УЧАЩИХСЯ СРЕДНИХ КЛАССОВ ШКОЛЫ (IV, V, VI классы)

Учащиеся средних классов начинали в свое время школу с тем запасом пространственных представлений, о котором мы говорили в предыдущем параграфе. Они постепенно росли, обучались и воспитывались. Их пространственные представления обогащались новым опытом, развивались и усложнялись. В различных предметах их школьной учебы преподаватели пользовались рисунками. Что же касается рисования как самостоятельного предмета, то обыкновенно в течение начального обучения, т. е. первых четырех классов, он преподается общим учителем и не занимает больше часа в неделю, да и то не во всех школах. В пятом и в шестом классах рисование большей частью поручается специальному преподавателю. Однако положение с преподаванием рисования (а также и черчения) до сих пор в школе настолько неустойчиво, что трудно сказать определенно о каждой школе в отдельности, в каком состоянии находятся эти предметы, не наведя соответствующих справок. Эту оговорку необходимо было сделать, описывая те опыты над пространственными представлениями учащихся, которые мы произвели в разных школах Москвы.

Экспериментальная работа, которая была проведена с учащимися четвертых, пятых и шестых классов различных московских школ, имела одно и то же содержание. Тематика ее, конечно, отличалась от той, которая предлагалась учащимся, поступившим в первый класс. Иной была и методика проведения работы.

На этот раз учащимся было предложено на заранее заготовленных и розданных им листках бумаги, разграфленных на шесть частей, нарисовать по памяти следующие предметы:

1) Кирпич (или спичечная коробка).
2) Стакан с водой (неполный).
3) Стол.
4) Арбуз на тарелке.
5) Чайник.
6) Самолет (или велосипед).

Запись о том, какие предметы надо нарисовать в упомянутых шести дольках листа, производилась учителем на доске. Далее учащимся было сказано, что они должны делать рисунки без черновиков и не пользуясь резинкой. Учащиеся задавали вопросы. Например, такие: нужно ли спичечную коробку нарисовать открытой? или: какой изобразить стакан — круглый или граненый? Нужно ли класть тени на предметы? и т. д. Получив разъяснения преподавателя, учащиеся принимались за работу. Время, отведенное на работу, — один урок. Однако многие учащиеся кончали ее раньше, особенно в VI классе. Остановимся теперь подробнее на результатах этого эксперимента в отдельных школах.

В IV классе „Б“ 472-й женской школы Москвы работа была выполнена под руководством аспиранта К. П. Васьковой и состояла из указанных выше шести заданий. Все девочки рисовали кирпич

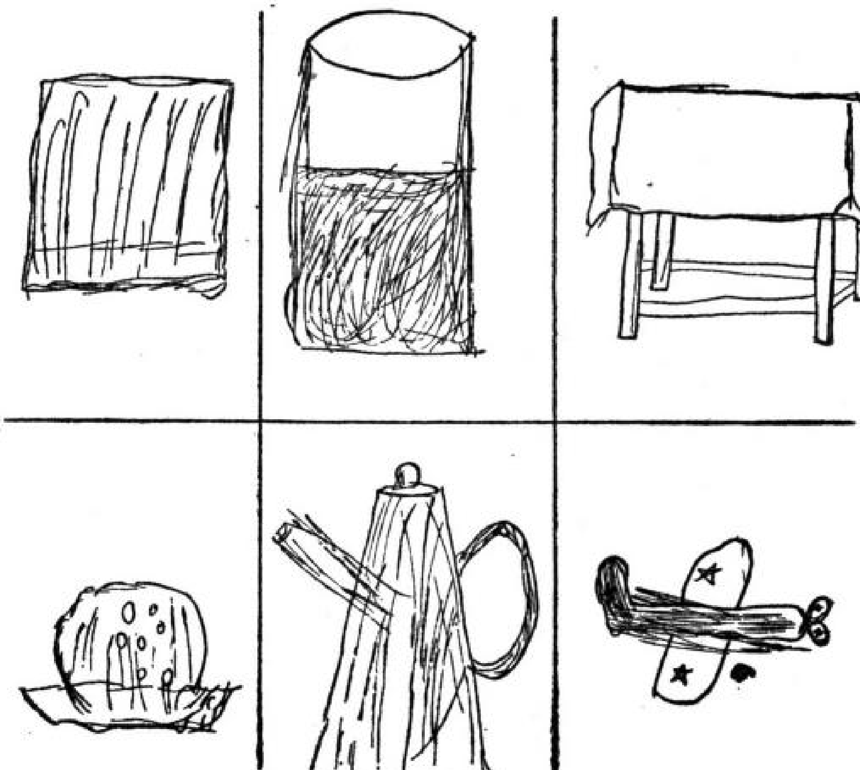


Рис. 8

и самолет, и только одна из них нарисовала в последней графе велосипед. Мы даем полностью два из рисунков учениц этого класса. Один из них (рис. 8) можно было бы назвать средним по своему исполнению. Второй же (рис. 9) принадлежит к числу лучших. Конечно, уже и средний рисунок позволяет судить о значительном развитии пространственных представлений и пространственного воображения учащихся по сравнению с тем, что мы видели в работах у учащихся, поступающих в школу. Так, например, в этих рисунках уже можно видеть умение изображать фигуры в перспективе. Такую попытку можно заметить и на рисунке 8 хотя бы в изображении стакана[1] и стола. Но вполне выраженное изображение в параллельной перспективе отчетливо заметно почти во всех гранках рисунка 9.

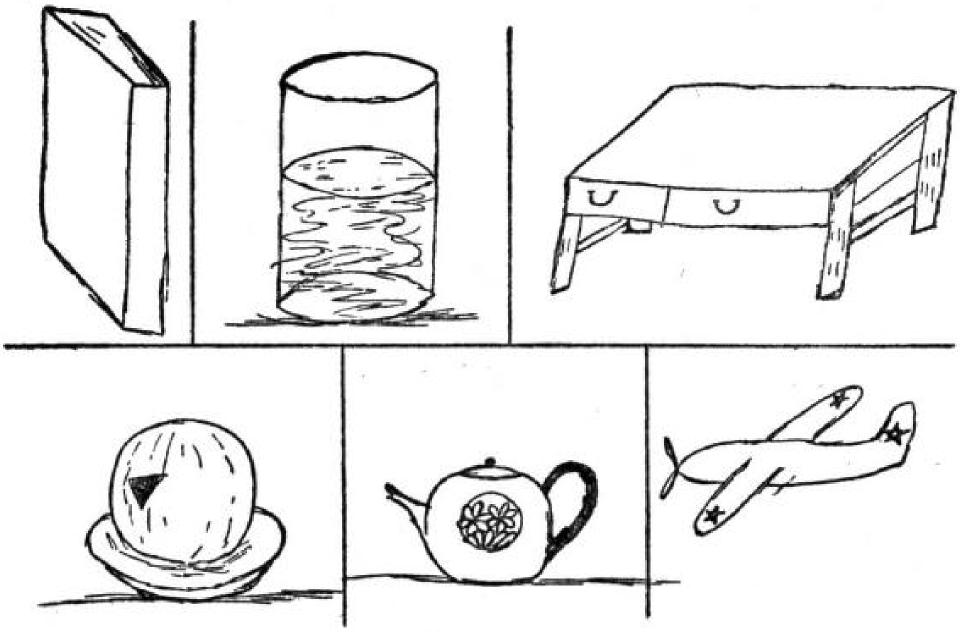


Рис. 9

Ученица Таня Б., выполнившая этот рисунок, обладает хорошим пространственным воображением. Она не только правильно изображает предметы в параллельной перспективе, но и делает их похожими на конкретные объекты, виденные и запомнившиеся ей.

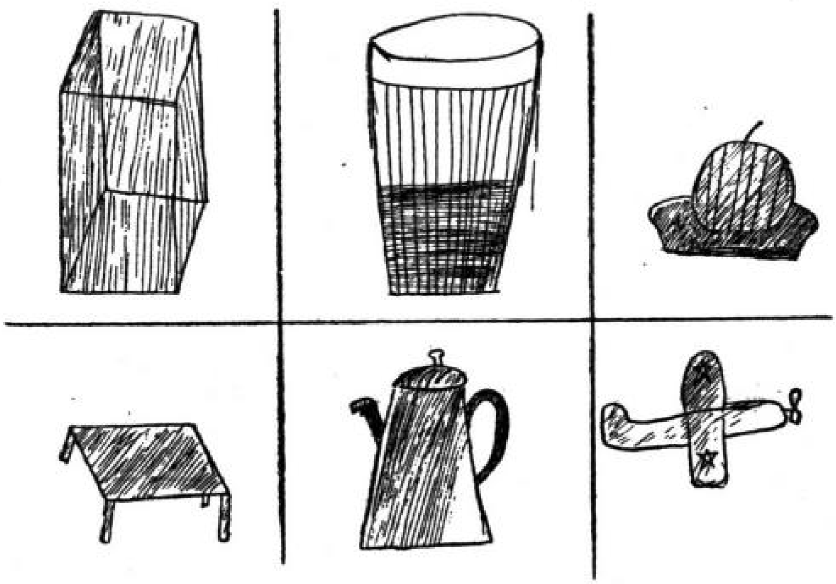


Рис. 10

Посмотрите, как хорошо изображены столь трудные объекты, как письменный стол с ящиками, арбуз, который Таня Б. снабдила вырезом, чайник, украшенный рисунком, и даже самолет с пятиконечными звездами на крыльях и руле. Итак, уже в IV классе мы за-

[1] При этом дно стакана и поверхность воды изображены в виде прямой линии. Эта ошибка является характерной для ряда рисунков.

мечаем значительный прогресс в развитии пространственных представлений и воображения учащихся, их стремление выразить объемные формы с помощью правильного рисунка, а в отдельных случаях — умение изображать предметы в параллельной перспективе.

V класс „В". Экспериментальная работа в V классе была повторена без каких-либо изменений по сравнению с IV классом. Здесь можно было отметить дальнейшее улучшение в рисунках учащихся. Это особенно сказалось в массовости рисунков, более удовлетворительно передающих изображения предметов в параллельной перспективе. Так, рисунки 10, 11, 12 и 13 можно признать типичными

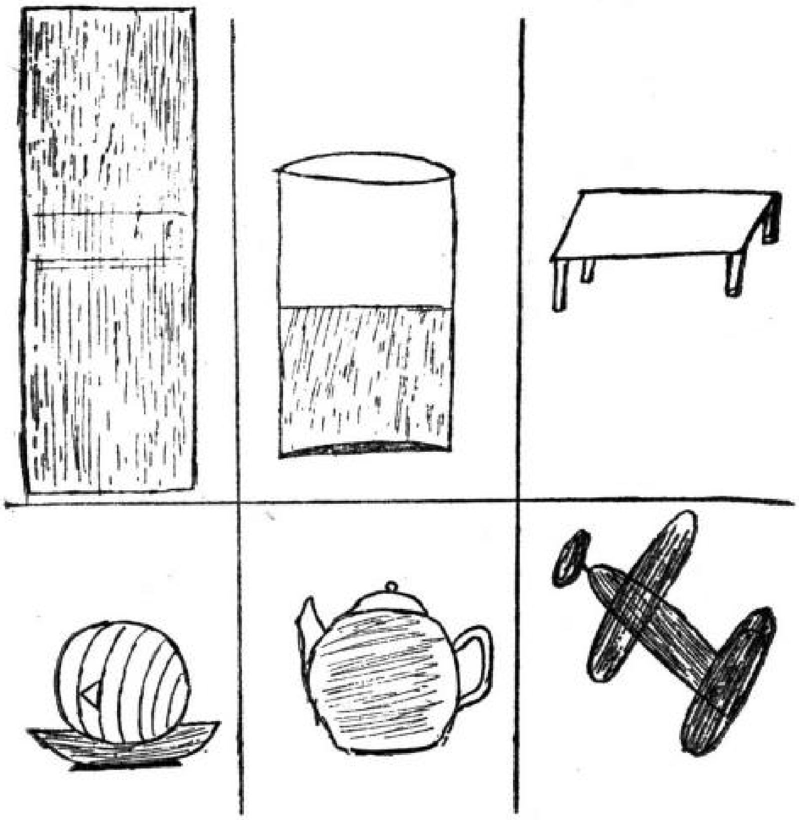


Рис. 11

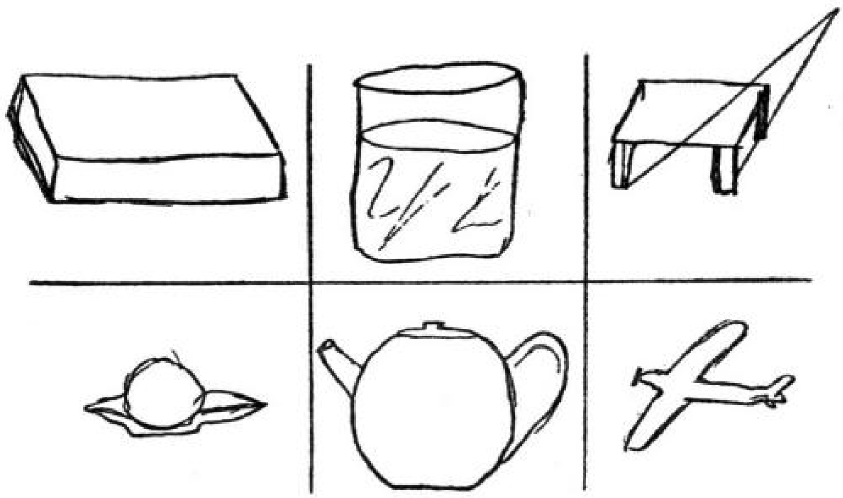


Рис. 12

для всех полученных работ. Обращает на себя внимание стремление по-разному решить проблему изображения арбуза на тарелке. При этом в трех из приведенных рисунков (рис. 10, 11, 12) ученицы сделали разрез тарелки, чтобы показать круглую форму арбуза.

Правильное изображение дано на рисунке 13. На том же рисунке удачно изображены и другие предметы. При этом ученица Вера М. прибегает к параллельной перспективе.

Интересно сравнить работы учащихся V класса 472-й школы с работами учащихся других школ того же класса. Вот, например, работы учениц V класса „А“ 113-й школы Советского района. Ученицы этой школы нарисовали в последней графе велосипед вместо самолета. Мы приводим здесь две работы, из которых одну можно примерно расценивать как среднюю (рис. 14), а вторую — как выше средней (рис. 15). Следует признать, что ученицы 113-й школы достигли бо́льших успехов в рисовании. Средний уровень их рисунков выше, фантазия разнообразнее, а исполнение более тщательно. Однако значительной разницы в этих работах все же нет.

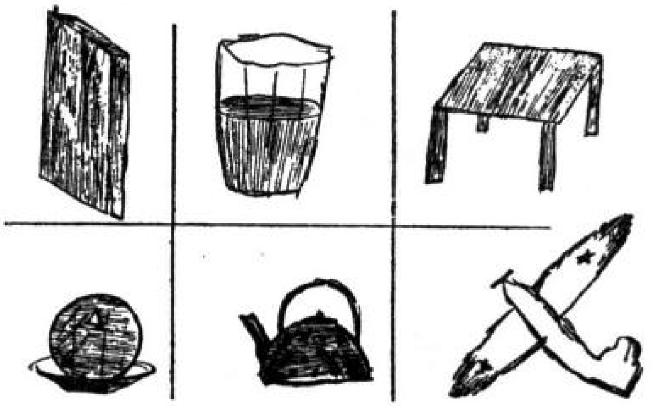


Рис. 13

Рис. 14

Посмотрим еще работы, выполненные в Центральной музыкальной школе учащимися пятых классов. В эту школу принимаются, как известно, музыкально одаренные дети, которые в процессе обучения значительное время уделяют своему музыкальному образованию. Что же касается графических предметов, то они не преподавались в школе. Экспериментальная работа была проведена на уроках математики преподавателем математики в этой школе Лидией Игнатьевной Громан. Работы, собранные по трем классам (два класса девочек и один — мальчиков), показывают общий высокий уровень рисунков детей и богатство их фантазии. Большинство из них уверенно пользуется изображением предметов в параллельной перспективе. Слабые рисунки, по сравнению с общим уровнем, встречаются редко. Это указывает на одаренность детей музыкальной школы и в изобразительном искусстве.

Приводим две работы, соответствующие среднему уровню учениц V класса этой школы, одна из которых (рис. 16) интересна правильностью построения изображения предметов с точки зрения параллельной перспективы, а вторая (рис. 17) показывает стремление маленькой художницы к изящному искусству, желание украсить изображаемые предметы прихотливыми узорами. Однако эта работа гораздо слабее с точки зрения правильности перспективного изображения, что особенно чувствуется в гранке 2-й (стакан), где неправильно показан уровень воды, в гранке 4-й (арбуз на тарелке) и в гранке 6-й (самолет, очень мало похожий на оригинал).

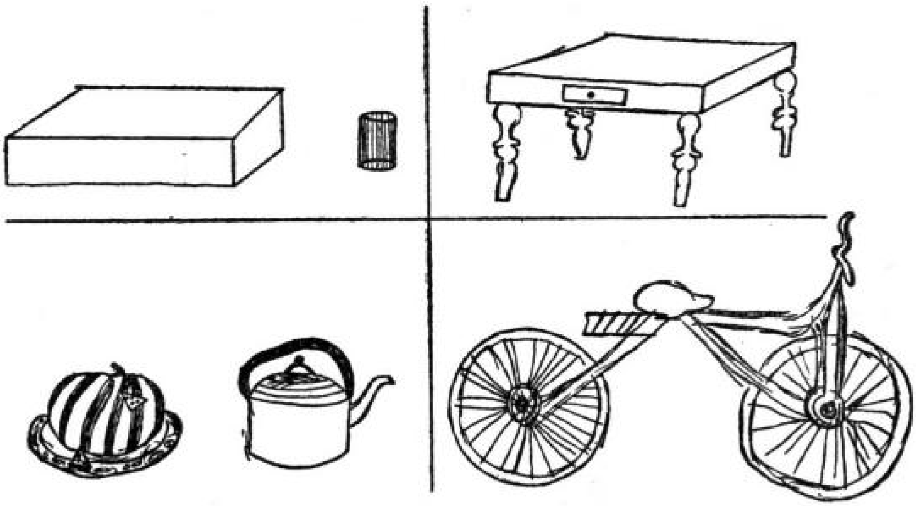


Рис. 15

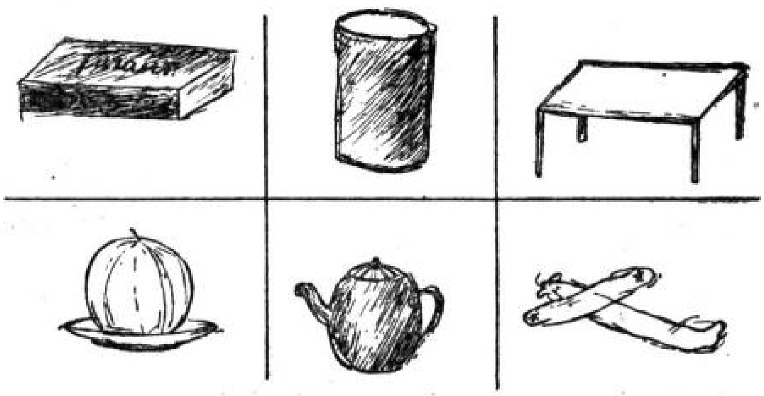


Рис. 16

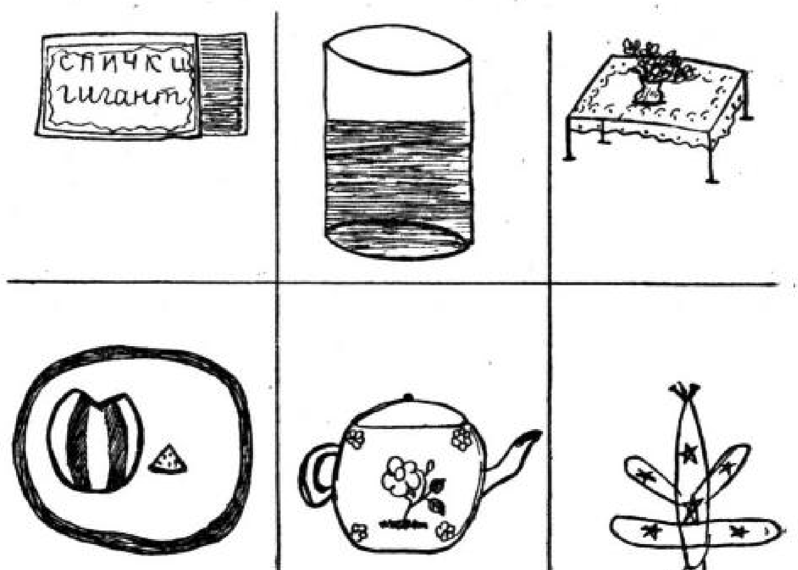


Рис. 17

Приводим еще работу ученицы Галины Г., которая отличается от всех других работ некоторым умением рисовать. Все предметы, изображенные девочкой, сопровождаются штриховкой, показом теней. Они выполнены в свободной живописной манере. Повидимому, девочка училась рисованию (рис. 18).

Рисунки мальчиков в общем стоят на том же уровне, что и рисунки девочек. Заметно лишь больше фантазии в изображении летящего самолета, который иногда снабжен реактивным двигателем.

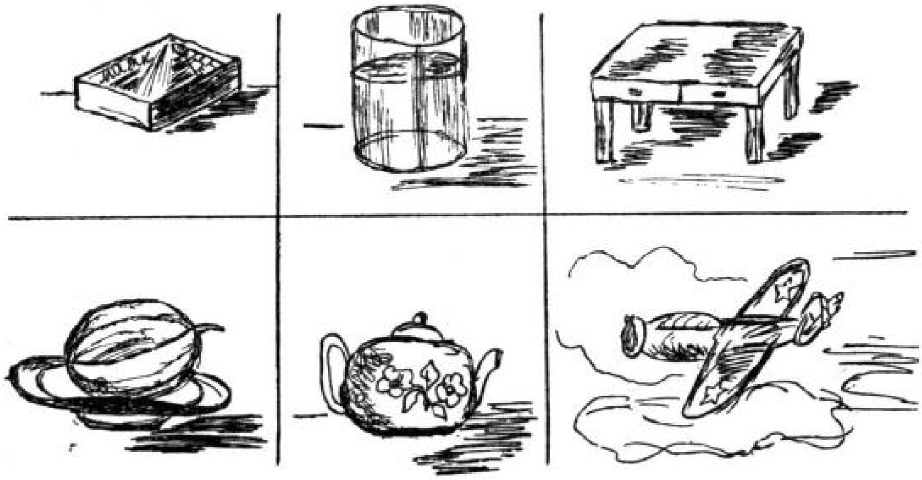


Рис. 18

Следующую ступень в развитии пространственного представления и пространственного воображения учащихся мы можем наблюдать в шестых классах советской средней школы. Экспериментальные работы, проведенные нами в центральной музыкальной школе при Московской консерватории, а также в 113-й женской школе, в 360-й и 126-й мужских школах, показали не только значительное развитие пространственных представлений учащихся и их умение изображать предметы на бумаге, но и большое разнообразие их творческой фантазии. Среди собранных нами во всех этих школах работах процент слабых сравнительно невелик. Работы, изобличающие слабость пространственных представлений, беспомощность учеников, встречаются как исключение. Наоборот, из большого количества хороших рисунков, иногда остроумно разрешающих задачу изображения того или иного предмета, было затруднительно сделать выбор. Мы показываем здесь ряд рисунков, выполненных учащимися разных школ. Некоторые из них можно признать средними и типичными для данного класса, другие же — лучшими.

Перед нами работы учениц VI класса „В“ 113-й женской школы. Работа ученицы Лидии Б. (рис. 19) была выполнена в течение 35 мин. Однако все шесть заданий сделаны достаточно аккуратно и правильно с точки зрения параллельной перспективы. Эту работу можно признать несколько выше среднего уровня класса. Другая работа ученицы Н. П. того же класса является одной из лучших. Она выполнена в течение 28 минут. Обращает на себя внимание не только хорошее пользование правилами параллельной перспективы, но и умение изобразить такой сложный объект, как самолет. Девочка обнаруживает при этом наблюдательность и интерес к явлениям окружающей действительности (рис. 20).

В 126-й школе опыты были проведены на уроке черчения. Мальчики VI класса „А“ этой школы с большим увлечением занимались выполнением задания. Мы даем здесь две из их работ, которые можно было бы отнести к среднему уровню всех работ этого клас-

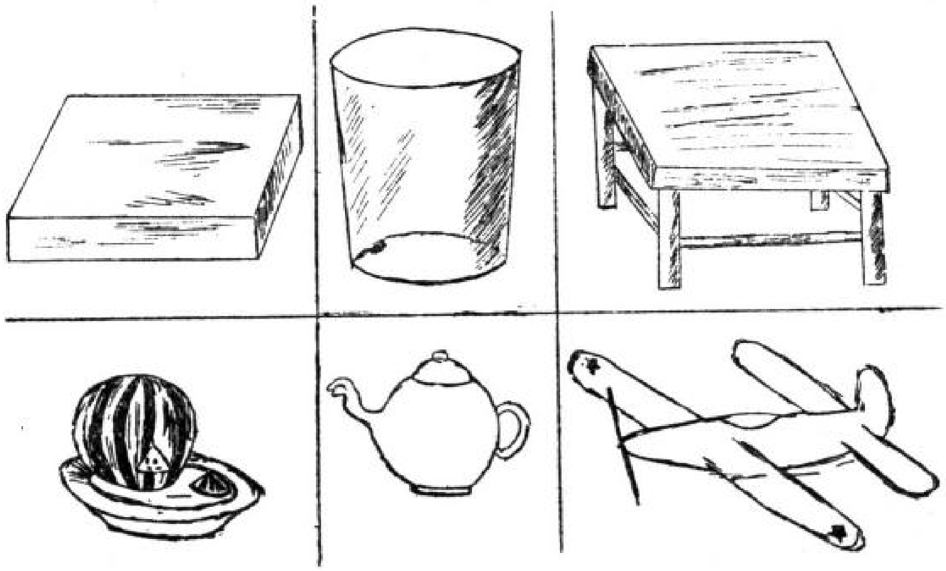


Рис. 19

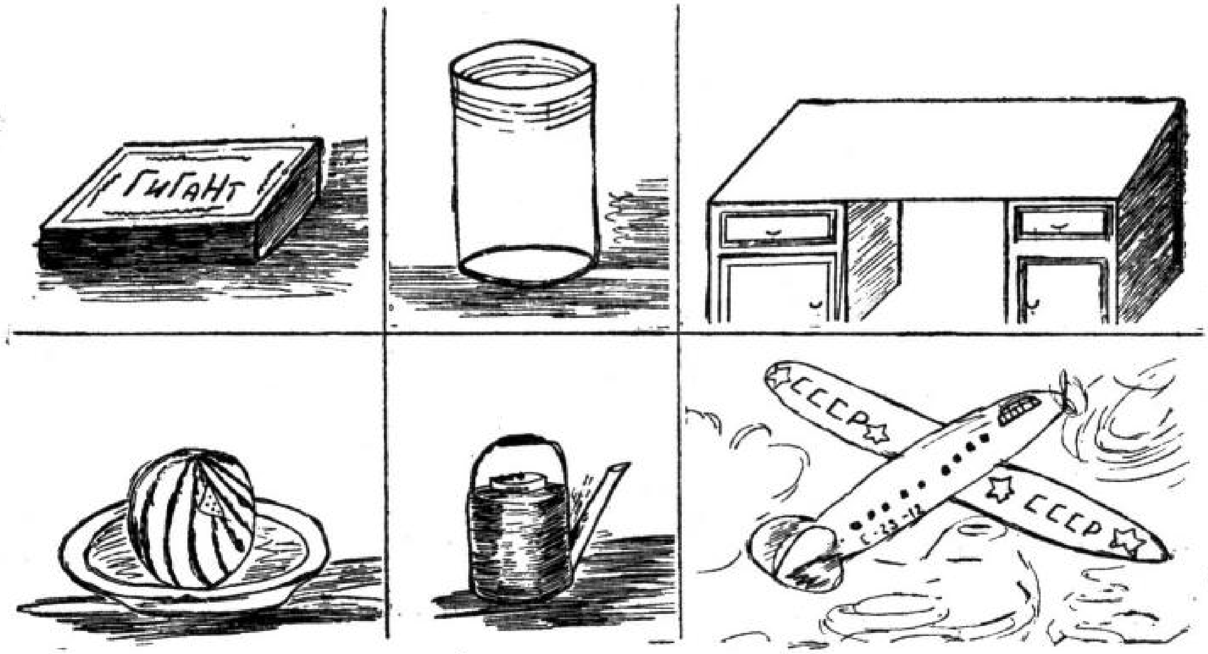


Рис. 20

са или несколько более высокому (рис. 21 и 22). Эти работы сами говорят за себя. Каждый предмет изображен несколькими твердыми штрихами, причем наглядность изображения усиливается тушовкой и штриховкой[1]. Чувствуется много изобретательности и фантазии, о чем свидетельствует изображение письменного стола в обеих работах или чайника. Особенно же обращают на себя внимание изображения велосипеда и самолета, дающие хорошее наглядное представление.

[1] Следует отметить, что в этом классе рисование преподавал опытный педагог-специалист.

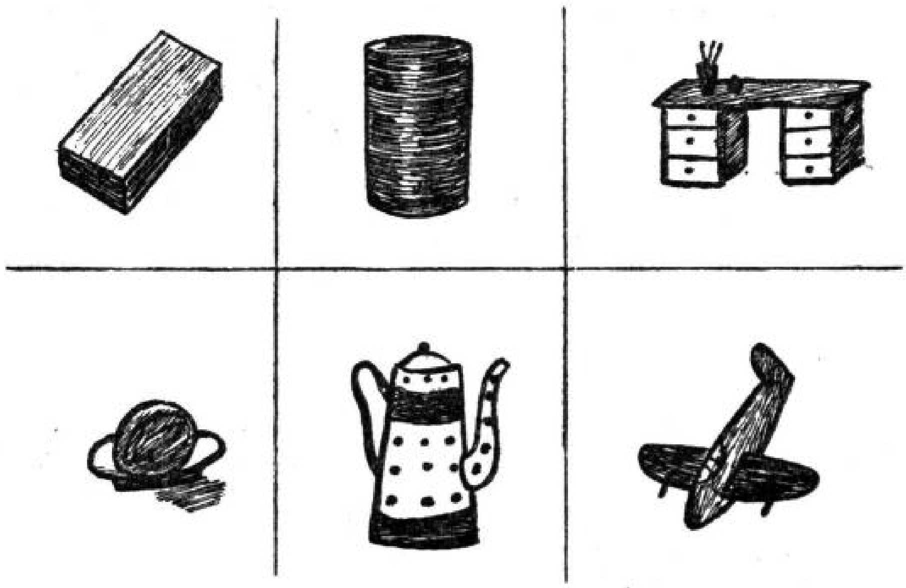


Рис. 21

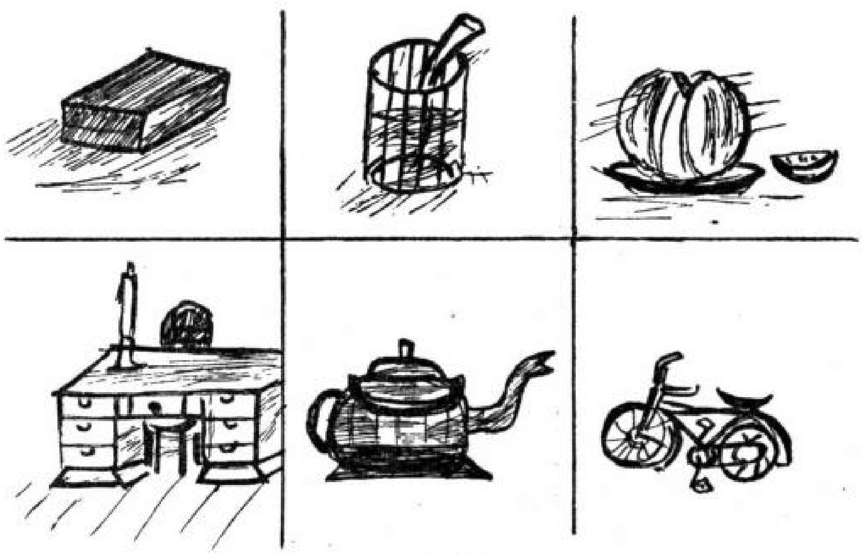


Рис. 22

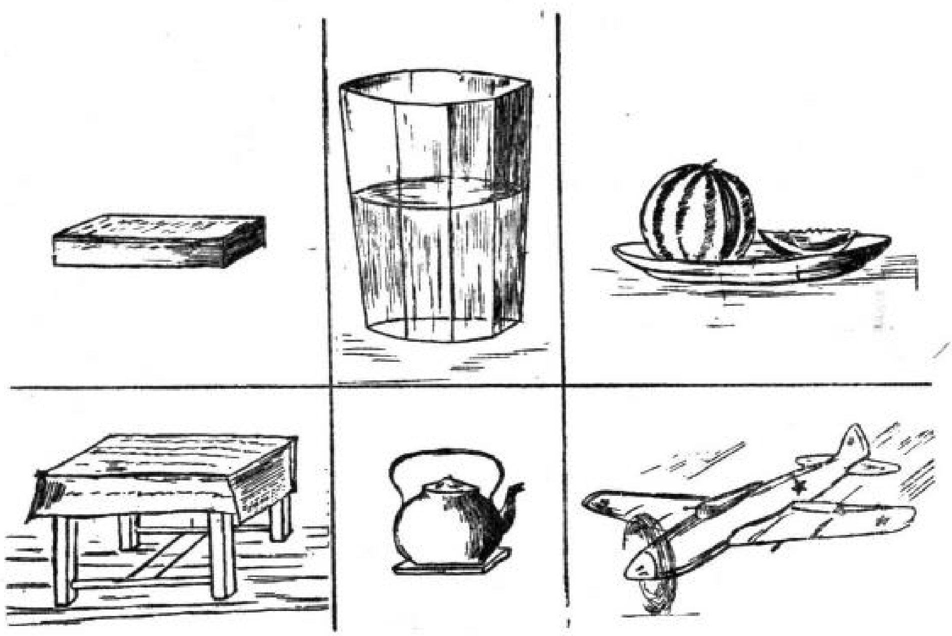


Рис. 23

Примерно, теми же особенностями можно охарактеризовать работы в шестых классах других московских школ, в которых были произведены эти эксперименты. Вот, например, одна из лучших работ ученика VI класса „А" 360-й школы (рис. 23). На ней не только уже с настоящим умением изображены все предметы, но самолет в последней гранке ученик А. М. сумел изобразить в быстром движении. Он обнаружил также при этом и познание в авиационной технике.

Из большого числа работ, выполненных в IV классе в центральной музыкальной школе при Московской консерватории, мы приводим здесь одну, которая показалась нам интересной как простотой рисунка, так и богатством выдумки, что особенно сказалось в последней гранке, посвященной изображениям самолетов. Здесь ученик Артур Ш. показал свое знакомство с авиацией (рис. 24).

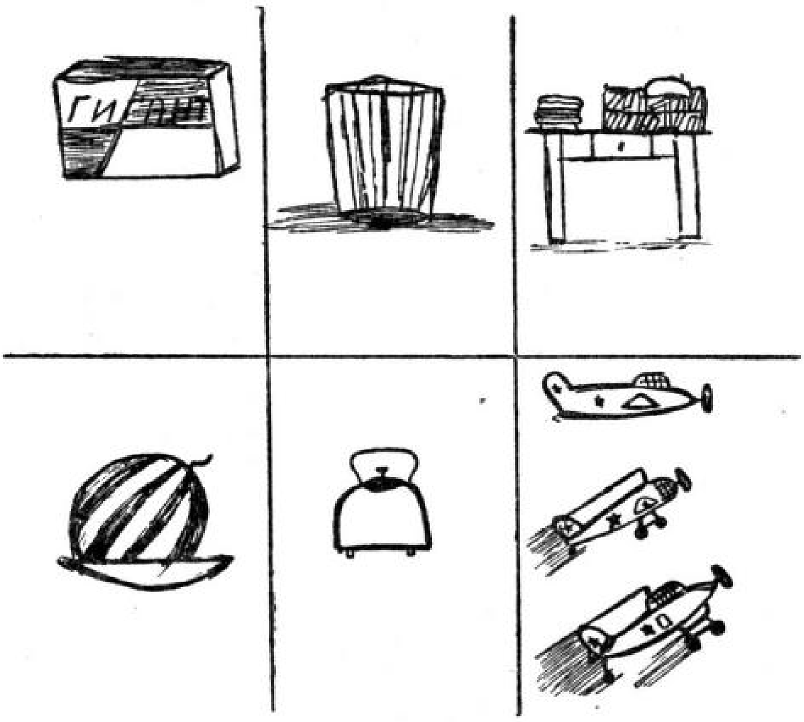


Рис. 24

Нельзя не отметить, что весь собранный нами материал убедительно показывает, какие богатые возможности открываются перед педагогами советской школы, имеющими дело со столь талантливыми учениками. Наши дети, живущие полной содержательной жизнью, интересуются наукой, техникой, замечательными преобразованиями природы, которые они видят у себя на Родине. Поэтому так быстро развиваются все их способности, их ум и фантазия. Их рисунки поражают изобретательностью и свежестью. Замечательно также то, что девочки в наших школах не отстают от мальчиков. Они также участвуют во всей многогранной жизни своей страны, интересуются техникой, и для них не была недоступной задача изобразить самолет или велосипед. Но в то же время можно видеть в рисунках девочек стремление показать изображаемые предметы красивыми, снабдив их узорами и цветами.

Совершенно очевидно, каких больших результатов можно было бы достигать в нашей советской школе при хорошей организации преподавания графических предметов и геометрии в смысле развития пространственного воображения учащихся, которое, как мы уже говорили ранее, так настоятельно необходимо людям всевозможных профессий в нашей стране.

Некоторые выводы

Все сказанное в предшествующем параграфе убедительно показывает наличие пространственных представлений у учащихся средних классов школы. Как видно из работ учеников и учениц V и VI классов, они имеют отчетливое представление об основных геометрических фигурах, таких, как параллелепипед (кирпич, спичечный коробок), цилиндр (стакан), шар (мяч, арбуз на тарелке), тела вращения и др. Мало того, они пытаются (и не без успеха!) дать наглядное изображение этих предметов, а также других предметов окружающего мира, даже и более сложных (самолет, велосипед). При этом надо отметить, что дети учились рисовать при очень малом руководстве со стороны педагогов школы или даже вовсе без него, как это, например, имело место в центральной музыкальной школе, где изобразительные дисциплины совершенно не преподаются. В последнем случае, впрочем, надо учитывать, что в школу принимаются одаренные дети, хотя бы и в музыкальном отношении.

Изучение пространственных представлений и пространственного воображения школьников IV, V и VI классов показывает всю несостоятельность предположения о их недостаточной подготовленности для понимания таких предметов, как геометрия (включая и стереометрические понятия) и проекционное черчение. Впрочем, этот ошибочный тезис некоторых методистов опровергается самой жизнью. Так учащиеся, поступающие после семилетки в техникумы, сразу имеют дело с этими предметами и успешно справляются с ними, хотя и испытывают гораздо больше трудностей из-за отсутствия соответствующей подготовки в семилетней школе.

В связи с этим естественно сделать следующие выводы:

1) Учащиеся VI и VII классов имеют достаточный запас пространственных представлений и пространственного воображения, на базе которых можно построить курс геометрии, содержащий необходимые стереометрические понятия. Такой курс вполне посилен учащимся и в большей степени отвечает тем требованиям, которые предъявляет жизнь к оканчивающим семилетнюю школу.

2) При более правильной и устойчивой организации преподавания рисования и черчения в семилетней школе могут быть достигнуты очень хорошие результаты. Безусловно можно потребовать, чтобы все учащиеся, оканчивающие семилетнюю школу, могли сделать грамотное изображение (рисунок и чертеж) предметов, имеющих простую геометрическую форму. Такое достижение было бы весьма полезным для выпускников семилетней школы.

§ 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВООБРАЖЕНИЯ УЧАЩИХСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ И ПЕРВЫХ КУРСОВ ВУЗОВ

Для исследования пространственных представлений и пространственного воображения учащихся, уже проходивших курс стереометрии частично (IX и X классы) или полностью (студенты I курса вуза), были проведены следующие экспериментальные работы.

Экспериментальная работа № 1

Работа эта заключалась в следующем. Учащимся, рассаженным в классе или в аудитории, диктовался следующий текст (без чертежа).

„Вообразим себе куб, верхнее основание которого обозначено буквами $ABCD$, а нижнее основание обозначено соответственно буквами $A_1B_1C_1D_1$. Причем, вершина A_1 находится под вершиной A и т. д. В этом кубе построена пирамида, вершиной которой является точка B, а основанием служит треугольник $A_1B_1C_1$. Кроме указанной пирамиды, вообразите вторую пирамиду. Она получается следующим образом при помощи того же самого куба $ABCD$ $(A_1B_1C_1D_1)$. Вершина второй пирамиды находится в точке B верхнего основания куба, а основанием пирамиды служит нижнее основание куба. Наконец, вообразите еще третью пирамиду. Вершина третьей пирамиды находится в середине S ребра AB верхнего основания куба, а основанием служит нижнее основание куба $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 24а). Итак,

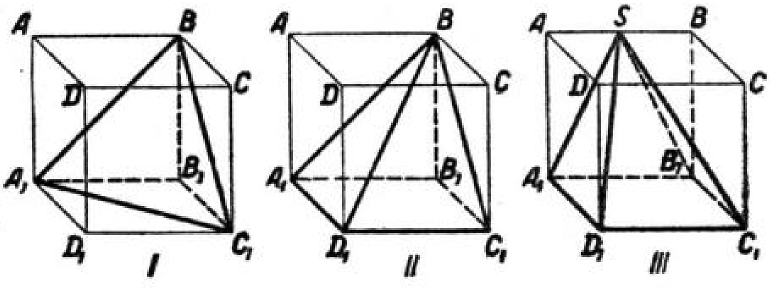


Рис. 24а

вы имеете теперь три пирамиды: первая — $B(A_1B_1C_1)$, вторая — $B(A_1B_1C_1D_1)$ и третья — $S(A_1B_1C_1D_1)$. Требуется ответить на следующие вопросы, относящиеся к каждой из трех вышеуказанных пирамид:

1) Сколько граней имеет пирамида?
2) Назовите равные грани данной пирамиды.
3) Назовите равные двугранные углы пирамиды.
4) Назовите равные стороны и равные углы в каждой грани пирамиды.
5) Назовите прямые (плоские и двугранные) углы пирамиды.

Примечание 1. Запрещается пользоваться каким бы то ни было чертежом; все ответы должны быть изложены в письменной форме.

Примечание 2. Плоские углы в гранях обозначаются как обычно при помощи трех букв. Двугранные углы пирамиды обозначаются при помощи ребра этого двугранного угла. Например, BB_1 — двугранный угол, образованный гранями AB_1B и CB_1B куба.

Организация работы должна быть такой, чтобы учащиеся были рассажены достаточно свободно и делали работу самостоятельно. После зачтения текста упражнения и записи его учащимися преподаватель задает вопрос: поняли ли учащиеся, что они должны выполнить в предлагаемой работе и как они должны выполнить ее. Особенно отчетливо должен быть поставлен вопрос о том, что все упоминаемые в работе фигуры, а именно куб и три пирамиды должны быть представлены только мысленно без какого-либо пользования чертежом. Точно так же и ответы должны быть даны лишь на основании тех представлений об упомянутых фигурах, которые соответствовали бы прочитанному тексту упражнения.

Целесообразно при диктовке текста работы сделать следующую запись на доске:

$$\text{Куб} \begin{cases} ABCD \text{ — верхнее основание,} \\ A_1B_1C_1D_1 \text{ — нижнее основание.} \end{cases}$$

Первая пирамида: $B\,(A_1B_1C_1)$.
Вторая пирамида: $B\,(A_1B_1C_1D_1)$.
Третья пирамида: $S\,(A_1B_1C_1D_1)$.

Следует заметить, что упражнение не предполагает каких-либо объяснений к ответам, даваемым учащимися. Однако можно допустить в некоторых случаях короткое объяснение, содержащее мотивировку того, почему учащийся дает такой ответ. Например, грань A_1BC_1 первой пирамиды является равносторонним треугольником, так как все три ее стороны служат диагоналями граней куба.

Анализ работы № 1

Заметим, что срок продолжительности выполнения упражнения учащимися зависит от категории учащихся и распорядка школы. Экспериментальная работа № 1 обычно проводилась нами в течение одного учебного часа.

После окончания срока работы преподаватель собирает листочки, на которых она выполнялась. Желательно, чтобы на работах, выполненных досрочно, преподаватель делал пометку о сроке подачи такой работы.

Предполагается, что учащиеся запишут имя и фамилию, номер класса и школы. Они сделают это без колебаний, так как перед выполнением эксперимента будут предупреждены преподавателем о том, что проводимая работа не будет принята во внимание при оценке их успеваемости. Приступая к обработке полученного материала, преподаватель заготовит таблицу с двойным входом, в которой в первом столбце будут помещены фамилии учеников, а в верхнем заголовке разместятся вопросы, заданные учащимся. Таким образом против фамилии каждого учащегося будут выставлены оценки его ответов на каждый из заданных вопросов. Такая таблица должна быть составлена для каждой из трех пирамид. При обсуждении способа оценки в коллективе участников экспериментальной работы была принята следующая система оценок:

2 — полный правильный ответ,
1 — неполный ответ,
0 — отсутствие ответа или неясный ответ,
(—1) — неверный ответ.

В тех случаях, когда неполный ответ неизбежно является неверным, принималась более простая система оценок, а именно:

1 — полный ответ,
0 — отсутствие ответа,
(—1) — неверный ответ.

После того как оценки были проставлены в таблицах, подсчитывались некоторые итоговые результаты по каждому вопросу. Эти результаты можно выразить в виде средней арифметической всех полученных оценок по этому вопросу.

Благодаря этому можно было установить, какие вопросы оказались более трудными для учащихся, и затем проанализировать причины этих трудностей. Это позволило выяснить характер всех пространственных комбинаций, которые трудно поддавались воображению учащихся, и таким путем установить границы (пороги) их пространственного воображения.

Желательно, чтобы анализ работы сопровождался описанием хода ее выполнения, поведения учащихся во время работы, вопросов, которые были ими заданы, а также характеристикой тех учащихся, которые дали работы, особенно выделяющиеся в ту или другую сторону.

Экспериментальная работа № 2

Эта работа состояла в следующем. Преподаватель делал на доске чертеж куба в произвольной параллельной проекции (рис. 25). Затем он сообщал учащимся, что в куб, только что изображенный им на доске, вписан шар, который он не будет изображать. Далее предлагалось провести четыре сечения этой фигуры (куба с вписанным в него шаром). Эти сечения следующие:

1) Через середину бокового ребра параллельно основанию.
2) На высоте четверти бокового ребра, параллельно основанию.
3) Диагональное сечение.
4) Через середину ребра верхнего основания, параллельно диагональному сечению.

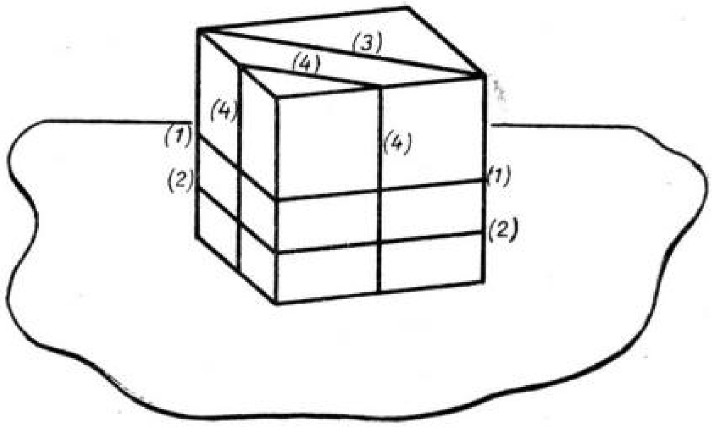


Рис. 25

На доске сечения были показаны соответствующими линиями (рис. 25).

Учащиеся должны были построить четыре проведенных сечения в их натуральном виде, причем считается данным (и вычерчивается на доске) отрезок, равный натуральной длине ребра куба.

Примечание. Учащимся предлагается записать текст задачи, а также перечертить изображение, сделанное преподавателем на доске, в свои тетради, не дополняя его изображением шара или какими-нибудь другими данными. Работа, которую они должны были выполнить, заключалась в построении (обычными классными инструментами) каждого из четырех сечений (куба и вписанного в него шара). При этом данный отрезок принимался за натуральную величину ребра куба. Таким образом размеры всех остальных сечений определялись графически, построением (а не вычислением), исходя из заданной величины ребра куба. Работа учащихся должна была, поэтому, состоять из четырех отдельных чертежей и некоторых дополнительных построений к ним, с помощью которых находились размеры фигуры сечения. Объяснения к построениям не являлись обязательными.

Работа № 2 значительно отличается по своему характеру от работы № 1. В то время как последняя была основана лишь на воображаемых фигурах, которые должны были описать учащиеся в своих ответах, в работе № 2 они должны были выполнить чертежи и по этим чертежам можно было судить о верности их пространственных представлений.

Тем не менее, в основе второй работы, как и в первой, лежит пространственное воображение учащихся, позволяющее им дать точный и верный ответ на заданные вопросы. Недостатки пространственного воображения немедленно сказывались на ответах.

Анализ экспериментальной работы № 2

Оценка результатов работы производилась следующим образом. Каждое сечение рассматривалось в отдельности и оценивалось баллом 1 — в случае верного ответа, 0—в случае отсутствия ответа или неясного ответа и—1—в случае неверного ответа.

Примечание. Как показал опыт проведения работы № 2 в ряде учебных заведений, наиболее трудными для учащихся явились сечения второе и четвертое. В силу этого было решено оценивать верный ответ по этим двум сечениям баллом 2.

Обработка материала производилась аналогично сказанному о работе № 1.

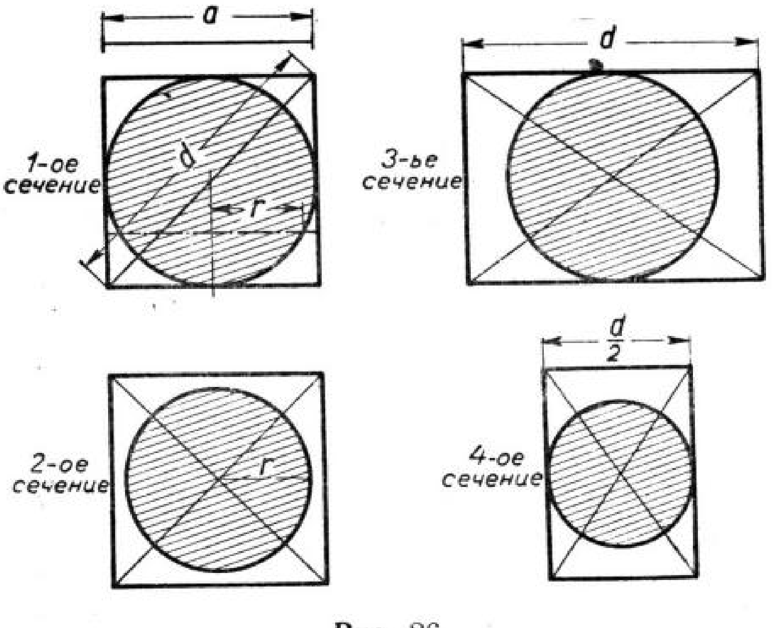


Рис. 26

Учащиеся средней школы, привыкшие больше к вычислительным методам решения задач, чем к графическим, стремились определять размеры фигур при помощи формул и не опирались на возможность конструктивного отыскания размеров сечения по заданному ребру куба. Между тем, желательно было получить чисто графическое решение, которое весьма удобно находилось из первого сечения, определяемого заданным размером ребра (рис. 26).

Экспериментальная работа № 3

Чтобы исключить некоторое количество неправильных ответов учащихся, получаемых вследствие незнания ими тех или других теорем геометрии и свойств фигур (как это могло иметь место в работе № 1), или неумения учащихся делать построения или вычисления, требующиеся для определения элементов сечений (как это могло быть в работе № 2), была проведена третья экспериментальная работа. Эта работа зависела только от пространственных представлений учащихся и развитости их пространственного воображения. Она заключалась в следующем.

Учащимся давалось определение фигуры, которая называется к о л ь ц о м или т о р о м. Задачей преподавателя было дать возможно более полное и точное описание этой фигуры. Поэтому, применялись различные методы ее определения. Кольцо определялось, например, как фигура, получающаяся в результате вращения круга вокруг оси, лежащей в его плоскости, но не пересекающей его. С другой стороны, указывались предметы, имеющие форму кольца (спасательный круг, автомобильная шина и т. п.). Но лучше всего было продемонстрировать готовую модель кольца, как это и было сделано в некоторых школах. Для простоты и определенности кольцо было выбрано таким образом, что диаметр образующего круга был равен расстоянию его до оси вращения, или иначе: диаметр внутренней окружности очертания кольца был в два раза меньше диаметра наружного очертания кольца (рис 27).

После того как все учащиеся хорошо поняли, что такое представляет собой кольцо, преподаватель делал чертеж кольца мелом на доске, как это показано на рисунке 27 и объяснял учащимся, что кольцо рассечено плоскостью, проходящей через ось вращения[1]. Это сечение обозначено на рисунке 27 цифрой I. Далее учащимся объясняется, что секущая плоскость постепенно передвигается параллельно самой себе сверху вниз и образует еще три сечения: сечение II, отстоящее от центра кольца на четверть радиуса его, сечение III, отстоящее от центра на половину радиуса, и сечение IV, отстоящее от центра на три четверти радиуса кольца.

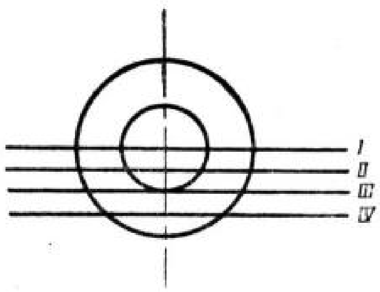


Рис. 27

Учащиеся должны были изобразить каждое из этих четырех сечений в отдельности в его натуральную величину, исходя из чертежа кольца, который каждый ученик должен был сделать в начале своей работы.

П р и м е ч а н и е 1. Следует отметить, что в этой работе нас мало интересовала точность размеров, получаемых сечений. Само собой разумеется, что какие-либо подсчеты или построения для определения вида сечения были для учащихся также совершенно невозможны. Поэтому весь упор в данном испытании был сделан на форму фигуры сечения, как ее представляли себе учащиеся.

На рисунке 28 (а, б, в, г) даны точные изображения всех четырех сечений, с которыми можно было бы сравнивать ответы учащихся.

П р и м е ч а н и е 2. По самому характеру предложенного упражнения ответы, которые давали учащиеся, не нуждались в объяснениях. Поэтому работа могла быть сделана очень быстро, тем

[1] На рисунке 27 ось вращения спроектировалась в точку.

более, что не требовалось тщательного выполнения изображения при помощи инструментов.

Как уже было сказано выше, экспериментальная работа № 3 имела своей целью выяснение вопроса о развитии пространственных представлений у учащихся старших классов средней школы и у поступивших в вузы. Успешные ответы учащихся зависели только от того, насколько ясно они представляли себе форму кольца. Таким образом их работы прямо свидетельствовали об этом.

Анализ работы № 3

Оценка работы, как и в предшествующем случае, производилась для каждого из четырех сечений в отдельности. Трудность определения оценки заключалась в том, что в этой работе нельзя было точно установить понятие верного или неверного ответа. Принимая тщательно сделанные одним из преподавателей чертежи всех четырех сечений (рис. 28а, б, в, г) за эталоны оценки, мы условились считать ответы верными, если форма сечения была выражена достаточно правильно в ответе учащегося, хотя бы технически и несовершен-

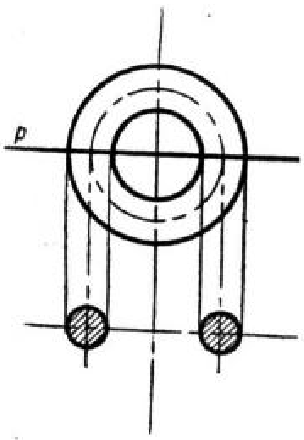


Рис. 28а

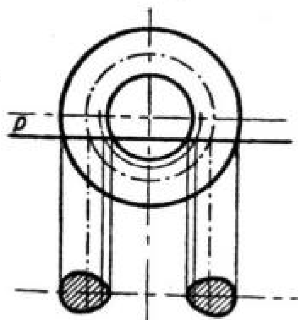


Рис. 28б

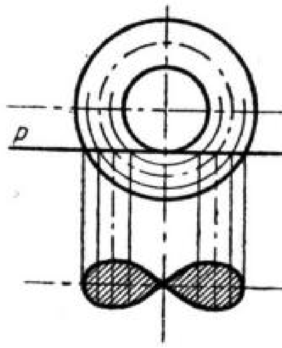


Рис. 28в

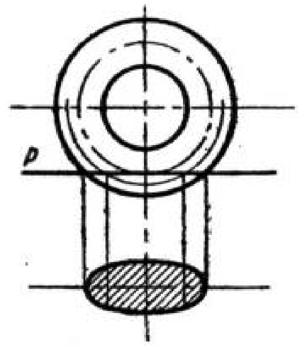


Рис. 28г

но. В тех случаях, когда эти технические недостатки выполнения не позволяли судить о форме сечения, ответ оценивался баллом 0, т. е. одинаково с отсутствием ответа. Ответы, верно передающие форму сечений, оценивались баллом 1, а неверные—баллом—1. Было также принято, что неверный ответ по первому сечению, как чрезвычайно простому, оценивался баллом—2.

Результаты проведения трех указанных экспериментальных работ в средних школах и некоторых высших учебных заведениях будут изложены в следующих параграфах.

§ 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В СТАРШИХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ (VIII, IX, X классы)

В ряде московских школ были проведены экспериментальные работы № 1, 2, 3, о которых было рассказано в предшествующем параграфе. Мы изложим здесь в краткой форме результаты этих экспериментов.

Экспериментальная работа № 1

Как было указано в § 5, работа эта должна была показать способности учащихся к пространственному представлению фигур, которыми в данном случае являлись три воображаемые пирамиды.

В IX классе 113-й женской школы преподавательницей Л. В. Федорович была проведена эта экспериментальная работа с небольшими отклонениями от того описания, которое было дано в § 5. Учащимся было предложено мысленно вообразить куб $ABCD\,(A_1B_1C_1D_1)$, буквенное обозначение которого было записано на доске. Чертеж куба не давался и учащимся было запрещено делать его в своих тетрадях. Далее внимание учащихся было направлено к мысленному представлению тех трех пирамид, о которых было сказано при описании экспериментальной работы № 1. Учащиеся должны были для каждой из этих пирамид ответить на следующие вопросы, не прибегая к чертежу:

1) Сколько граней имеет пирамида?
2) Назвать равные грани данной пирамиды.
3) Назвать равные стороны в каждой грани.
4) Указать равные углы в каждой грани.
5) Указать прямые углы в гранях.

Таким образом в этом опыте не были затронуты двугранные углы. Все вопросы были записаны на классной доске. Учащиеся были опрошены, все ли им ясно в предлагаемой работе. Некоторые ученицы задали вопросы. Например, для чего был дан куб? Нужно ли описать также и куб? Являются ли равные стороны в гранях ребрами куба?

После того, как учащиеся получили исчерпывающие ответы на свои вопросы, они приступили к работе.

На выполнение задания, относящегося к первой из трех пирамид, потребовалось следующее время: 3 ученицам—12 мин., 6 ученицам—15 мин., 7 ученицам—18 мин. и 10 ученицам—20 мин.

Работа проходила напряженно. Лица учащихся были сосредоточенными. Некоторые из учащихся в процессе решения закрывали глаза, другие старались при помощи пальцев построить воображаемые фигуры.

Оценка работы производилась в точном соответствии с теми принципами, которые были описаны в § 5. Результаты могут быть представлены следующей таблицей:

Вопросы	Число граней			Равные грани				Равные стороны в каждой грани				Равные углы в каждой грани				Прямые углы в каждой грани			
Оценки:	1	0	−1	2	1	0	−1	2	1	0	−1	2	1	0	−1	2	1	0	−1
Число учащихся	13	1	12	18	6	1	1	18	4	2	2	10	7	3	6	9	8	3	6

Как видно из этой таблицы, наибольшее число неверных ответов было получено на первый вопрос (12 ответов). Однако, как выяснилось из беседы с учащимися, это явилось в некоторой степени недоразумением. Учащиеся считали, что основание пирамиды не следует включать в число ее граней. Таким образом первая графа должна расцениваться с учетом этой поправки.

Из других вопросов таблицы можно сделать определенный вывод, что учащимся было легче ответить на первые два вопроса, т. е. на вопросы о равенстве граней или сторон в гранях. Значительно труднее для них было ответить на два последних вопроса о равенстве углов в каждой грани или назвать прямые углы. Так средняя оценка на одного учащегося по этим четырем вопросам выразилась следующими числами:

Вопросы	Равные грани	Равные стороны в грани	Равные углы в грани	Прямые углы в грани
Средние оценки	1,6	1,5	0,8	0,7

Эта таблица вполне отчетливо показывает насколько труднее для учащихся вопросы, относящиеся к углам, чем вопросы о равенстве сторон и граней. Интересно также отметить, что наибольшее затруднение для девятиклассниц составило указать прямые углы в том случае, если они не лежали в основных гранях куба.

В IX классах 427-й женской и 525-й мужской средних школ Москвы экспериментальная работа № 1 была проведена аспирантом К. П. Васьковой на уроках черчения. Преподаватели черчения помогали в проведении работы, наблюдая за ее организацией и самостоятельной работой учащихся.

К. П. Васькова объяснила учащимся какая цель ставится при проведении эксперимента, а также, что они должны выполнять задание самостоятельно, как умеют, тем более, что эта работа совершенно не будет приниматься во внимание при оценке их успеваемости. Было сделано указание о запрещении пользоваться какими бы то ни было чертежами, рисунками или черновиками. После этого на доске были записаны условия задания, сформулированные лишь для первой пирамиды, которая по нашей схеме (см. стр. 24) считалась второй. При этом в отличие от практики других школ К. П. Васькова предложила учащимся, сидящим слева, рассмотреть пирамиду с вершиной *A*, учащимся, сидящим справа, — пирамиду с вершиной *D*. Это было сделано с целью обеспечить самостоятельность их работы.

Вопросы были сформулированы следующим образом:

1) Как следует назвать данную пирамиду?
2) Указать число граней, включая основание.
3) Какую фигуру представляет собою каждая грань?
4) Имеются ли равные углы? (Назвать их.)
5) Имеются ли равные стороны? (Назвать их.)
6) Назвать прямые углы.

После разъяснений преподавателя на вопросы учащихся последние приступили к работе. В течение всего времени работы можно было наблюдать напряжение пространственного мышления учащихся, которое выражалось у них различным образом. Некоторые ученицы закрывали глаза и прикладывали руку ко лбу. Другие водили по воздуху пальцами и т. п.

Результаты работы показали, что учащиеся затрудняются представить себе прямые углы, если они не лежат в гранях куба. Некоторые сочли их тупыми. На вопрос о прямых углах было получено лишь три верных ответа. Остальные из 23 учащихся либо не ответили на этот вопрос, либо дали неверный ответ. На втором месте по трудности оказалось определение равных сторон в гранях пирамиды. Из 23 человек 10 дали верные ответы, 12 не ответили и 1 ответ был неверным. Остальные вопросы оказались сравнительно легкими, вполне доступными для учащихся и большинство ответов были правильными. Так, на вопрос о числе граней только две ученицы дали неверные ответы (8 граней!?)[1].

После выполнения первого задания были написаны условия второго задания — по нашей схеме третья пирамида (см. стр. 24). Постановка и условия проведения работы были те же, что и в предыдущем задании. Результаты показали примерно те же самые трудности, что и в предыдущем случае. Однако следует отметить, что при выполнении второго задания было больше верных ответов, чем при выполнении первого.

Та же экспериментальная работа была повторена К. П. Васьковой в IX классе мужской школы. Итоги работы показали, что наибольший процент неверных ответов, как и в других школах, падает на определение прямых углов, не лежащих в гранях куба, и определение равных сторон треугольников, плоскости которых не совпадают с гранями куба. Что же касается до числа граней и других вопросов, то большею частью они были разрешены правильно. Полностью верные решения (на все вопросы) по первому заданию из 16 учеников дали 5.

В отличие от учащихся 427-й женской школы ученики 525-й школы много внимания уделяли тому, чтобы обосновать каждый ответ своей работы, чего не было в работах учениц 427-й школы.

Переходим к описанию проведения той же экспериментальной работы № 1 в X классе „А“ 29-й школы Фрунзенского района под руководством преподавательницы М. Х. Кекчеевой. Работа была организована совершенно таким же образом, как и в школе № 113, причем от учащихся было потребовано дать ответы на такие же пять вопросов, какие были перечислены на стр. 30.

Учащиеся дали ответы на эти вопросы для каждой из трех пирамид. А именно, пирамиды $B(A_1B_1C_1)$, $A(A_1B_1C_1D_1)$ и $S(A_1B_1C_1D_1)$.

Результаты работы были оценены по той же системе, о которой было уже неоднократно рассказано. Следует отметить прежде всего общий высокий уровень выполнения учащимися предложенной им экспериментальной работы. Так, 27 учениц этого класса набрали по первой и второй пирамидам одинаковую итоговую цифру — 202 очка (из 270 возможных) и по третьей пирамиде 180 очков (из 270 возможных). Это прежде всего указывает на то, что третья пирамида, в которой вершина находится на середине ребра, а не совпадает с вершиной куба, как у других двух пирамид, была труднее для представления учащихся, и в их ответах оказалось больше ошибок. В частности, учащиеся ошибались в определении равных граней такой пирамиды. Для характеристики результатов экспериментальной работы в X классе „А“ 29-й школы полезно еще привести цифры, показывающие число совершенно безупречных ответов, а также число совершенно неудовлетворительных.

По первому заданию получили полную оценку (10 очков из 10 возможных) 8 человек.

[1] Наиболее вероятным является следующее объяснение этого ответа: ученицы принимали ребра пирамиды (их у пирамиды 8) за грани.

По второму заданию — 7 человек.
По третьему заданию — 12 человек.
Неудовлетворительные оценки (не выше 2 очков) получили:
по первому заданию — 1 ученица,
по второму заданию — 1 ученица,
по третьему заданию — 6 учениц.

Отметим также, что в отдельных случаях, являющихся исключением, были работы, обнаруживающие совершенно недостаточные пространственные представления. Так, например, ученица Г. набрала по всем трем заданиям лишь 6 очков (из 30 возможных).

Из отдельных затруднений следует еще раз отметить, как это обнаружилось и в 113-й школе, трудность представления углов, не лежащих в гранях основного куба, а также сравнение сторон треугольников, несимметрично расположенных по отношению к основному кубу.

Экспериментальная работа № 2

Описание экспериментальной работы № 2, равно как и необходимые чертежи, были даны в предшествующем параграфе. Теперь мы расскажем, как эта работа проходила в 125-й женской средней школе и 135-й мужской средней школе Советского района Москвы.

В обеих школах учащимся был сообщен текст задачи и сделан чертеж мелом на доске, изображенный на рисунке 25. Читатель уже знает, что работа заключалась в изображении (в натуральном виде) четырех сечений куба и вписанного в него шара. При этом предлагалось, приняв за ребро куба произвольно выбранный отрезок, построить в натуральную величину каждое из четырех сечений. Учащимся были даны следующие указания:

1) Сделать чертеж куба с показанными на нем четырьмя сечениями, копируя его с того чертежа, который был сделан учителем на доске.

2) Шар, вписанный в куб, следует вообразить лишь мысленно, но не изображать.

3) Размеры и формы сечений определяются графически без каких бы то ни было вычислений и формул.

4) Вся работа должна быть закончена в течение одного урока.

Руководившая проведением работы заслуженная учительница РСФСР Л. В. Федорович применила следующие нормативы оценок: за верное решение давалась оценка 1 (для первого и третьего сечения) и 2 (для второго и четвертого сечения). За отсутствие решения или неясное решение — 0 (во всех случаях). За неверное решение давалась оценка —1 (во всех случаях).

Результаты работы представлены следующей таблицей (см. стр. 34).

Приведенная таблица показывает, что первое сечение было выполнено учащимися обеих школ вполне успешно, причем только 3 человека из 41 допустили ошибки. Наибольшее число ошибок было допущено при построении второго сечения (рис. 26). Учащиеся почти всегда ошибочно полагали, что радиус круга в этом сечении равен половине радиуса шара. Значительное число неверных ответов падает также на третье и четвертое сечение. Здесь ошибки касались как формы сечения прямоугольника, так и радиуса круга сечения.

Средняя оценка по всем вопросам, приходящаяся на каждую ученицу 125-й школы, равна 2,16. Аналогичная оценка, приходящаяся на каждого ученика 135-й мужской школы, равна 3,9. Таким образом учащиеся мужской школы показали лучшие успехи.

Оценки / Школы	Кол. учащихся	1-е сечение			2-е сечение			3-е сечение			4-е сечение		
		1	0	−1	2	0	−1	1	0	−1	2	0	−1
125 женск. сред. школа	17	16	—	1	6	—	11	10	—	7	10	2	5
135 муж. сред. школа	24	22	—	2	15	2	7	17	—	7	15	4	5
Итого . . .	41	38	—	3	21	2	18	27	—	14	25	6	10

В связи с проведением экспериментальной работы на сечения в средних школах можно сделать некоторые выводы:

1) Следует отметить, что самый метод выполнения задания чисто графическим путем, без вывода формул и вычислений, вызвал затруднения у учащихся и казался для них необычным. Дело в том, что при обычном преподавании стереометрии в наших школах преобладают задачи вычислительного характера, в которых в готовые формулы подставляются данные значения. Неумение учащихся пользоваться пространственным представлением фигур и весьма простыми графическими приемами решения задач было причиной многих ошибок учащихся в экспериментальной работе № 2.

2) Решение задач вызвало большой интерес среди учащихся старших классов, и они по окончании работы в классе и в коридоре обсуждали предложенные вопросы и спорили о правильности тех или других решений.

Экспериментальная работа № 3

Эта работа, как помнит читатель, состояла в изображении сечений кольца (§ 5, стр. 28). Ее назначение заключалось в испытании пространственных представлений учащихся и определении порога их пространственного воображения. Поэтому сечения кольца были задуманы таким образом, чтобы потребовать от исполнителя все увеличивающейся трудности пространственного воображения.

Работы были проведены в 113-й женской школе и 126-й мужской школе.

Хотя работы были проведены для учащихся разных возрастных групп (в VIII, IX и X классах), тем не менее, задание было формулировано во всех классах одинаковым образом. Было интересно судить о развитии пространственных представлений в соответствии с повышением возраста и года обучения учащихся. Напомним, что требовалось построить четыре сечения кольца, из которых первое проходило через ось его; второе — через середину внутреннего радиуса кольца; третье — через конец внутреннего радиуса; и четвертое — на таком же расстоянии от конца большого радиуса (рисунок 28 на стр. 29).

В VIII классе „А" 113-й женской школы результаты работы показали, что значительное количество учащихся смогло дать удовлетворительные изображения первого, второго и четвертого сечений. Около половины всех учащихся дали неверное изображение третьего сечения. Наиболее характерным из таких ответов был помещаемый здесь снимок с работы ученицы П. этого класса (рис. 29).

Наиболее удовлетворительные ответы были даны ученицей К. (рис. 30).

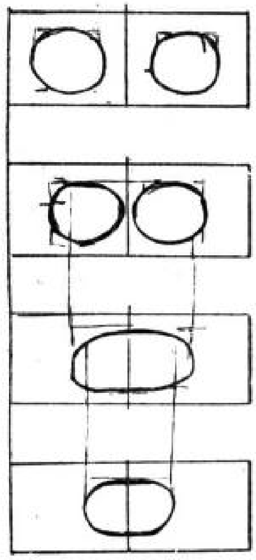


Рис. 29

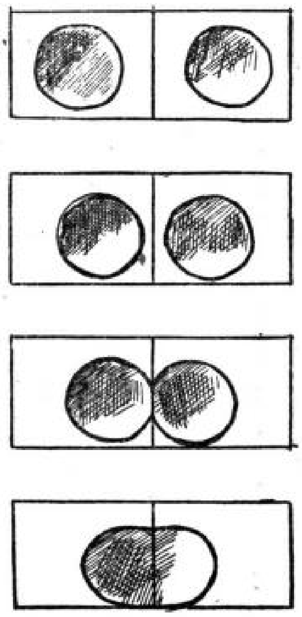


Рис. 30

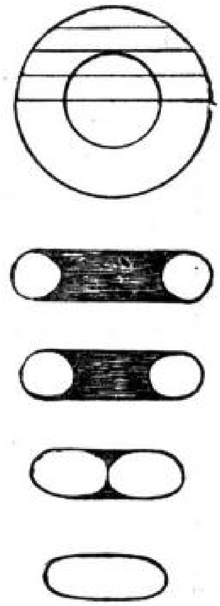


Рис. 31

Таким образом, довольно отчетливо выяснилось, что большинство учениц VIII класса оказалось в состоянии довольно верно вообразить форму первого, второго и четвертого сечений. Форму третьего сечения большая часть учащихся не могла себе представить.

Кроме того, многие работы показали, что учащиеся неправильно поняли преподавателя и пытались вместо требуемых сечений кольца в их натуральном виде, нарисовать само кольцо с указанием линий сечений.

Отметим, что, помимо объяснения учителя и чертежа (мелом на доске) кольца (тора), в классе демонстрировалась модель кольца, изготовленная преподавателем из ваты.

В X классе „А" 113-й женской школы эта работа дала уже значительно лучшие результаты. Было несколько работ, которые можно было признать вполне удовлетворительными и оценить полной оценкой (4 очка согласно принятой системе оценок). Такой, например, работой является изображенная на рисунке 31 работа ученицы А. Она показала ту часть кольца, которую отсекает от него каждая из проведенных плоскостей сечений. Однако все же таких работ было лишь две. Интересна работа ученицы Ф., которая не вполне правильно поняла задание и дала вместо сечений наглядные изображения отсеченной части кольца (рис. 32). При этом форма последнего сечения изображена не совсем правильно. Тем не менее, нельзя отказать этой ученице в том, что она неплохо владеет пространственным воображением и в общем довольно верно представила себе форму сечений. Наиболее распространенной ошибкой во всех работах было неправильное изображение третьего сечения. Таким образом можно было установить, что почти для всех учениц X класса „А" 113-й школы отчетливое представление этого сечения было недоступно.

Типичную ошибку в изображении сечения № 3 можно видеть в работе ученицы В. (рис. 33).

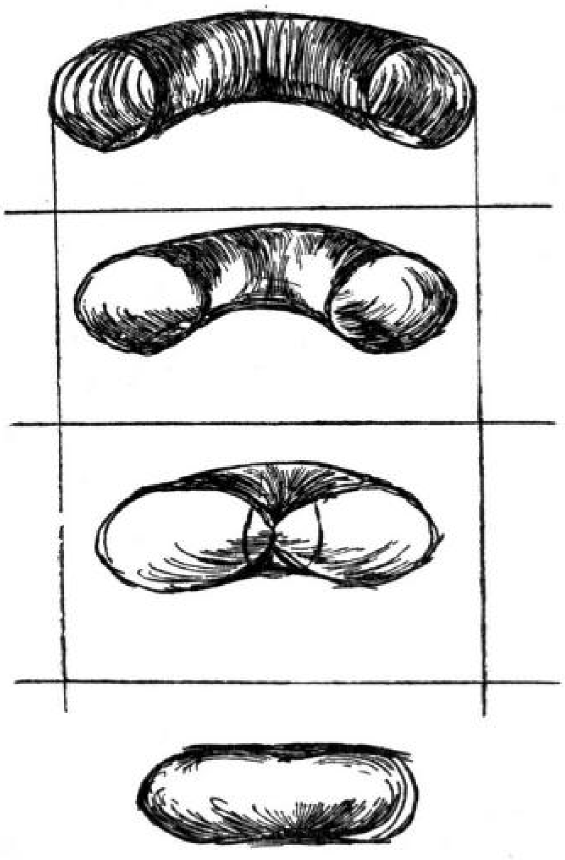


Рис. 32

В 126-й мужской школе были проведены аналогичные эксперименты в десятых классах „А" и „Б". Результаты работ, проведенных в классах мальчиков, не дали значительного отличия от того, что мы имели в женской школе. В X классе „А" можно было указать лишь несколько вполне удовлетворительных работ, получивших полную оценку, 4 очка. Одна из них представлена на рисунке 34.

В то же время и в этом классе большая часть учеников не смогла дать верного изображения третьего сечения кольца. Отсутствие правильного представления этого сечения отчетливо видно в работе ученика Щ. (рис 35).

Работа этого ученика показывает, что он вполне правильно понял задание и верно показал построение каждого сечения кольца. Таким образом его пространственное представление не ниже среднего уровня. Однако здесь обнаружился порог его возможности ясно представить форму каждого сечения. Таким порогом является упомянутое сечение № 3.

Аналогичные выводы можно сделать из результатов работы учащихся X класса „Б". Следует отметить, что кольцо является одним из простейших тел вращения, имеющим большое распространение в практической жизни. Однако пространственные представления учащихся, даже и в X классе, где учащиеся уже заканчивают курс стереометрии и должны иметь значительный опыт в черчении, не были доведены до такого состояния, когда они могли бы верно вообразить форму сечений кольца.

Итоги и выводы

В связи с выполнением экспериментальной работы № 3 в VIII, IX и X классах средней школы полезно отметить следующее.

1. В VIII классах учащиеся еще не проходили стереометрии, они не имеют, следовательно, понятия о телах вращения. Но они уже знакомы с методами изображения пространственных фигур в курсе черчения. Таким образом в этом классе их подготовка весьма невелика. Примерно то же самое можно сказать и о IX классе, так как работа проводилась у них еще до начала курса стереометрии. В X

классах учащиеся уже изучают стереометрию, однако, в это время понятие о телах вращения, а тем более о кольце, им не дается.

2. Для выполнения работы № 3 учащиеся могли бы не обладать знаниями курса геометрии, так как в этой работе они не могли бы применить этих знаний для построения искомых сечений кольца. Вопрос решался лишь в зависимости от развития пространственных представлений у учащихся.

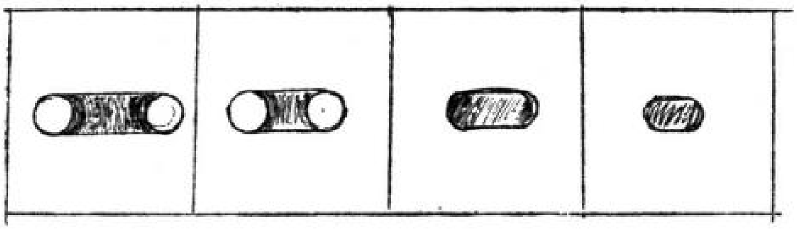


Рис. 33

3. Проведенные работы показали, что большинство учащихся, даже в VIII классе, правильно понимали, в чем заключалось требуемое от них при выполнении задания № 3. Бо̀льшая часть учащихся старших классов смогла представить себе форму кольца и дать верное изображение простейших сечений. Однако более трудное сечение № 3 было неясно даже для большинства учащихся X класса, и это определило примерный порог в развитии их пространственных представлений.

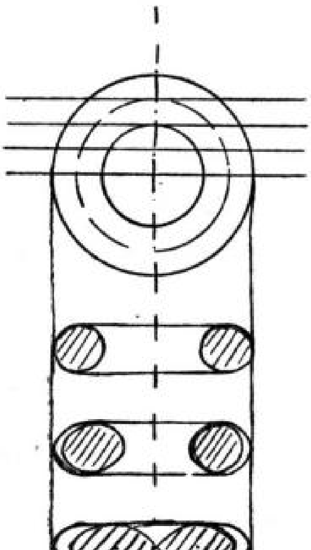


Рис. 34

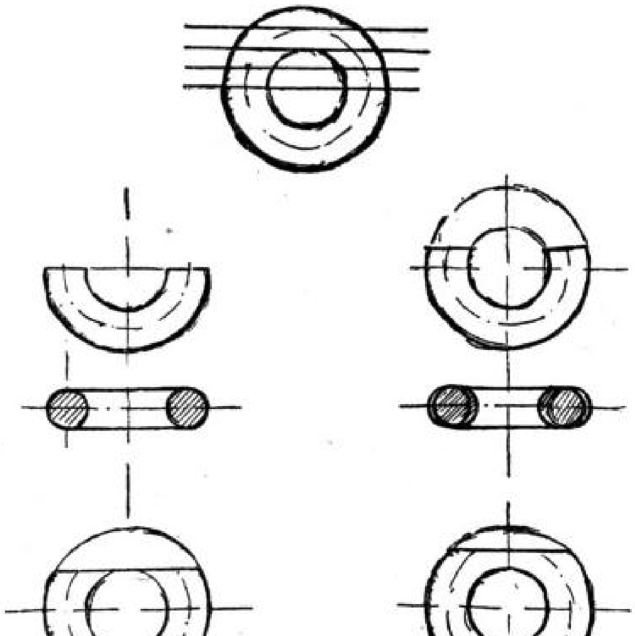


Рис. 35

Бо̀льшее разнообразие в выборе геометрических фигур и упражнений с пространственными фигурами могло бы содействовать дальнейшему развитию пространственного воображения учащихся.

§ 7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ РАБОТА ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ У СТУДЕНТОВ НЕКОТОРЫХ ВУЗОВ

Все три опыта (описанные выше в § 5) были проведены также в некоторых московских вузах, в полном соответствии с перечисленными ранее условиями.

Опыты были проведены на первом курсе Авиационного института — МАИ (исполнители: проф. Н. Ф. Четверухин, асп. Тевлин, ст. лаборант Никитенко), Пищевого института — МГИПП (исполнитель преподаватель Е. В. Амиянц) и на первых двух курсах художественно-графического факультета Московского городского педагогического института — МГПИ (исполнители: доц. Зеленин Е. В., доц. Владимирский Г. А. и преп. Марченко)[1].

Сравнение работ показано, что студенты МАИ обладают лучшими пространственными представлениями по сравнению со студентами остальных двух институтов. Это, повидимому, объясняется большой требовательностью со стороны приемной комиссии к поступающим в институт, а так же и тем, что в МГПИ при приеме на художественно-графический факультет нет испытаний по геометрии. С другой стороны, в МАИ подавали заявления лица по большей части хорошо успевающие по математике, а, следовательно, и по стереометрии.

Рассмотрение работ показывает, что огромное большинство студентов обладает некоторым комплексом вполне определенных пространственных представлений[2]. Лишь в отдельных случаях мы наблюдаем, полное их отсутствие и неумение ответить подчас на почти простой вопрос. Все же и в этих случаях на некоторые самые элементарные вопросы даются вполне правильные ответы. Большинство студентов может сделать сравнительно несложные заключения о свойствах граней пирамиды, ее двухгранных углов и т. п., не прибегая к модели или чертежу.

Следует отметить, что обучение геометрии в средней школе прививает учащимся некоторые трафаретные представления. К этим представлениям за время обучения они настолько привыкают, что это ограничивает их способность анализа пространственных форм. К этому вопросу мы вернемся при детальном рассмотрении каждого опыта в отдельности. Кроме того, интересно определить те пороги пространственных представлений и пространственного воображения, которые имеются у различных групп учащихся.

Анализ опытов позволяет разбить все свойства, которые должны быть описаны, на несколько групп. Некоторые свойства легко обнаруживаются большинством, а другие — проходят почти незаметно для всех. Во втором и третьем опытах, помимо этих заключений, очень интересен анализ ошибок. В первом опыте ошибочных заключений не так уже много. Главными недочетами большинства работ являются пропущенные свойства. Во втором и третьем опытах количество вопросов очень невелико. Сами вопросы очень точно сформулированы. Поэтому, как правило, большинство дает ответы на все вопросы. И вот тогда и следует выяснить, какие именно ошибки являются наиболее распространенными, какие ошибки вообще возможны. Интересно выяснить, почему была сделана та или иная ошибка.

[1] Материал обработан доцентом Е. В. Зелениным.

[2] Полученных ими еще в средней школе, так как экспериментальная работа проводилась на I курсе в начале учебного года и лишь в одном случае на втором курсе (художественно-графический фак-т МГПИ им. Потемкина).

В МАИ все три опыта выполнялись в течение двух академических часов. Студенты обратили особое внимание на второй и третий опыты и очень невнимательно отнеслись к первому.

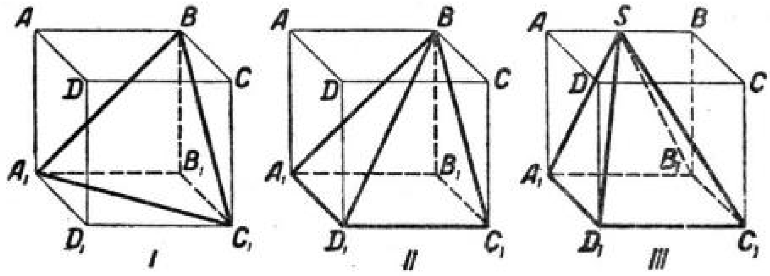


Рис. 36

В МГИПП первый опыт выполнялся в течение одного академического часа. Но и этого материала оказалось слишком много для одного часа.

Опыт 1

Учащиеся должны были ответить на 7 вопросов, относящихся последовательно к следующим трем пирамидам (рис. 36): I — $B(A_1B_1C_1)$, II — $B(A_1B_1C_1D_1)$ и III — $S(A_1B_1C_1D_1)$, где S — середина ребра AB. А именно:

1. Сколько граней имеет пирамида?
2. Назовите равные грани данной пирамиды.
3. Укажите, какие двугранные углы равны между собой.
4. Перечислите прямые двугранные углы.
5. Назовите равные стороны в каждой грани пирамиды.
6. Назовите равные углы в каждой грани пирамиды.
7. Перечислите плоские прямые углы в гранях пирамиды.

Целесообразно сначала выписать эти вопросы, после чего разъяснить все недоумения, которые могут возникнуть у учащихся. Обычно возникают вопросы, касающиеся способа записи ответов на поставленные вопросы. Наибольшее число пояснений требует обозначение двугранных углов. Не всегда учащимся ясно, следует ли основание считать гранью. После того как уточнены характер задаваемых вопросов и форма записи ответов, выписываются буквенные обозначения трех пирамид.

Условия опыта, состоящие из 7 вопросов, являются результатом неоднократного обсуждения, дополнения, уточнения формулировок способов записи и т. д. Поэтому, часть опытов, которые были выполнены различными участками семинара, не всегда охватывают полностью все 7 вопросов. Так, например, вопрос о двугранных углах долгое время не ставился и поэтому большинство опытов не охватило третьего и четвертого вопросов.

В некоторых случаях неточность формулировки привела к тому, что учащиеся не описывали свойств оснований. Если большинство учащихся, по вине производящего опыт, пропускало тот или иной вопрос, то он отбрасывался, и его случайные результаты не анализировались.

После того как условия записаны, следует отметить время. При получении законченной работы от учащихся на каждой работе также следует отметить время ее выполнения. Если учащиеся обратят внимание на этот факт регистрации времени, надо попросить их не спешить, и быть возможно внимательнее и добросовестнее.

Примерный подсчет времени, необходимого на весь первый опыт, показывает, что для детального описания всех свойств трех пирамид одного академического часа недостаточно. Поэтому в тех группах, где опыт был проведен полностью (МГИПП), описание третьей пирамиды многими учащимися было не закончено.

Оценка ответов в баллах дает возможность сравнивать степень развития пространственных представлений различных групп студентов, а также выяснить степень трудности отдельных вопросов в целом. Не трудно видеть, что огромное большинство студентов обладает некоторыми вполне определенными пространственными представлениями. Хотелось бы узнать, какие случаи являются особо трудными для представления их в уме. Чтобы постараться ответить на этот вопрос, можно обратиться к нижеследующим таблицам[1].

Эти таблицы составлены следующим образом:

В соответствии с семью вопросами, каждая таблица разбита на 7 столбцов различной ширины.

Первый вопрос о количестве граней допускает лишь один числовой ответ (верный или неверный). Поэтому, этому вопросу отведен только один столбец.

Вверху этого столбца написан искомый верный ответ.

Второй вопрос о равных гранях для пирамиды $B(A_1B_1C_1)$ должен содержать перечисление трех граней: A_1B_1B, BB_1C_1 и $A_1B_1C_1$.

Соответственно этим трем граням выделено три столбца, а вверху каждого помещено наименование соответствующей грани.

Третий вопрос о равных двугранных углах представляет особый интерес для анализа. В пирамиде $B(A_1B_1C_1)$ имеются две тройки равных двугранных углов:

1) A_1B_1, B_1C_1 и BB_1;
2) A_1B, BC_1 и A_1C_1.

При этом углы первой тройки являются также прямыми.

Для каждой тройки равных углов выделено три столбца. Вверху каждого столбца записывается наименование соответствующего двугранного угла.

Особый интерес представляют равные двугранные углы в пирамиде $B(A_1B_1C_1D_1)$. В этой пирамиде пять прямых двугранных углов: A_1B_1, B_1C_1, BB_1, A_1B и BC_1 и еще два равных угла A_1D_1 и D_1C_1.

Поэтому для этих 7 двугранных углов отведено 7 столбцов.

В пирамиде $S(A_1B_1C_1D_1)$ имеются три прямых двугранных угла:

$$A_1B_1,\ SA_1 \text{ и } SB_1$$

и еще две пары равных углов

$$A_1D_1 \text{ и } B_1C_1,\ SD_1 \text{ и } SC_1.$$

Для первой тройки отведено три столбца, а для каждой из остальных пар только по одному столбцу.

Вообще, в тех случаях, когда возможен только один правильный ответ и отсутствует возможность дать неполный ответ, достаточно одного столбца.

Четвертый вопрос о прямых двугранных углах повторяет столбцы из третьего вопроса, в которых помещались прямые углы. Это повторение совершенно необходимо, так как учащийся может

[1] Таблицы составлены Е. В. Зелениным.

заметить или не заметить, что равные углы являются также прямыми.

Нам кажется, что на этом можно прекратить дальнейшее описание способа составления таблицы, так как оно выполняется аналогично.

Составление таблицы. Мы заполнили таблицы, поместив в них сводные результаты по всем группам студентов. В каждом столбце помещается количество правильных ответов, вычисленное в процентах по отношению ко всему числу ответов. Если какой-либо вопрос не предлагался студентам данной группы, то в соответствующем столбце осталось пустое место.

Анализ

Все ответы можно разбить на две основных группы:
А. Вопросы, относящиеся к свойствам граней, и
Б. Равенство и прямоугольность двугранных углов.

А. Анализ описания свойств граней

1. Самым легким вопросом является первый — о числе граней. Неправильные ответы в этом случае свидетельствуют или о полном отсутствии пространственных представлений или о непонимании условий, так как некоторые учащиеся исключали основание пирамиды при подсчете числа граней.

Конечно, совершенно очевидными являются свойства квадрата $A_1B_1C_1D_1$ у второй и третьей пирамиды.

2. Немного более трудным вопросом является определение плоских прямых углов, расположенных на поверхности какой-либо боковой грани куба. Это будут углы

$$\left.\begin{matrix} A_1B_1B \\ BB_1C_1 \end{matrix}\right\} \text{ в пирамиде } B(A_1B_1C_1)$$

и углы

$$\left.\begin{matrix} A_1B_1B \\ BB_1C_1 \end{matrix}\right\} \text{ в пирамиде } B(A_1B_1C_1D_1).$$

Эти углы замечают все учащиеся.

3. Следующая группа вопросов — это определение равных граней (вопрос № 2) и определение равных сторон в гранях (вопрос № 5). Верных ответов около 60%.

В ответах на вопрос № 5 большие затруднения доставляли равносторонний треугольник A_1BC_1 в пирамиде $B\,(A_1B_1C_1)$. Только 40% студентов нашли его. Этот равносторонний треугольник по трудности надо отнести к следующей группе.

4. В последнюю группу попадают прямые углы, стороны которых принадлежат различным граням куба

$$\left.\begin{matrix} BC_1D_1 \\ BA_1D_1 \end{matrix}\right\} \text{ в пирамиде } B(A_1B_1C_1D_1) \text{ и}$$

$$\left.\begin{matrix} SA_1D_1 \\ SB_1C_1 \end{matrix}\right\} \text{ в пирамиде } S(A_1B_1C_1D_1)$$

Б. Анализ описания двугранных углов

1. Быстрее всего узнаются двугранные углы

$$A_1B_1 \text{ и } B_1C_1$$

ТАБЛИЦЫ, СОДЕРЖАЩИЕ

I. Пирамида

Группы и вузы	Число граней	Равные грани (какие именно)			Равные двугранные углы (какие именно)					
	4	A_1B_1B	BB_1C_1	$A_1B_1C_1$	A_1B_1	B_1C_1	BB_1	A_1B	BC_1	A_1C_1
МГПИ — 1 гр.	—	69	69	—	75	75	50	56	56	6
„ веч. гр.	—	42	42	—	—	—	—	—	—	—
„ 2 гр.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
„ 3 гр.	100	47	47	41	—	—	—	—	—	—
МАИ — 1 гр.	68	86	57	18	54	50	36	54	54	18
„ 2 гр.	50	66	56	9	31	31	13	19	19	9
МГИПП 1 гр.	100	92	100	69	92	92	61	76	84	38
„ 2 гр.	92	84	84	54	84	84	38	69	69	23

II. Пирамида

Вузы и группы	Число граней	Равные грани (какие именно)		Равные двугранные углы						
	5	A_1B_1B C_1B_1B	C_1D_1B A_1D_1B	A_1B_1	B_1C_1	BB_1	=	BA_1	BC_1	A_1D_1 D_1C_1
МГПИ — 1 гр.	—	69	56	63	63	31	—	44	44	69
„ веч. гр.	—	42	42	—	—	—	—	—	—	—
„ 2 гр.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
„ 3 гр.	100	82	71	—	—	—	—	—	—	—
МАИ — 1 гр.	68	89	75	39	36	21	—	50	50	39
„ 2 гр.	69	84	78	34	38	6	—	34	38	38
МГИПП 1 гр.	100	69	69	69	69	46	8	61	61	54
„ 2 гр.	84	46	46	38	54	31		38	46	31

III. Пирамида

Вузы и группы	Число граней	Равные грани	Равные двугранные углы					Прямые двугранные углы		
	5	SA_1D_1 SB_1C_1	A_1B_1	SA_1	SB_1	A_1D_1 B_1C_1	SD_1 SC_1	A_1B_1	SA_1	SB_1
МГПИ — 1 гр.	—	63	0	25	25	31	31	38	6	6
„ веч. гр.	—	50	—	—	—	—	—	—	—	—
„ 2 гр.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
„ 3 гр.	100	71	—	—	—	—	—	—	—	—
МАИ — 1 гр.	57	75	4	50	46	43	61	11	25	14
„ 2 гр.	25	38	3	16	13	16	19	3	6	6
МГИПП 1 гр.	61	54	23	46	46	46	38	46	31	23
„ 2 гр.	61	31	15	23	15	38	15	23	0	0

ПРОЦЕНТЫ ВЕРНЫХ ОТВЕТОВ

$B(A_1B_1C_1)$

Прямые двугран. углы			Равные стороны в гранях				Равные углы в гранях				Прямые углы в гранях		
A_1B_1	B_1C_1	BB_1	A_1B_1 BB_1	B_1B B_1C_1	A_1B_1 B_1C_1	A_1B BC_1 C_1A_1	BA_1B_1 B_1BA_1	B_1C_1B B_1BC_1	$B_1A_1C_1$ $B_1C_1A_1$	A_1BC_1 — равност.	A_1B_1 B	C_1B_1 B	A_1B_1 C_1
75	75	44	75	75	—	63	—	—	—	—	88	94	—
—	—	—	42	42	—	17	—	—	—	—	83	83	—
—	—	—	48	48	44	36	—	—	—	36	84	84	48
—	—	—	76	71	65	—	—	—	—	—	94	88	53
11	11	11	39	29	25	18	50	46	32	4	4	0	0
6	6	0	38	19	13	22	22	22	13	22	13	16	6
100	100	76	100	100	100	76	100	100	100	76	84	84	84
54	46	46	76	76	61	31	69	61	61	15	84	84	69

$B(A_1B_1C_1D_1)$

Прямые двугранные углы					Равные стороны в гранях			Равные углы в гранях			Прямые углы в гранях				
A_1B_1	B_1C_1	BB_1	BA_1	BC_1	A_1B_1 BB_1	BB_1 B_1C_1	A_1B_1 C_1D_1 квадрат	AB_1B_1 B_1AB_1	BC_1B_1 C_1BB_1	$A_1B_1C_1D_1$ квадрат	A_1B_1B	BB_1C_1	BC_1D_1	BA_1D_1	A_1B_1 C_1D_1 квадрат
63	56	38	0	0	69	75	—	—	—	—	81	88	25	19	—
—	—	—	—	—	25	42	—	—	—	—	83	83	25	17	—
—	—	—	—	—	40	24	—	—	—	—	84	92	60	64	—
—	—	—	—	—	94	94	—	—	—	—	100	100	65	71	—
14	18	14	4	0	43	50	54	61	57	32	4	4	0	0	0
6	6	6	6	6	53	50	38	41	38	9	16	22	0	0	0
76	76	31	23	15	76	69	54	69	69	69	69	69	54	46	31
31	38	31	8	8	23	46	54	38	46	46	31	31	15	15	46

$S(A_1B_1C_1D_1)$, где S — середина ребра AB

Равные стороны в гранях			Равные углы в гранях			Прямые углы в гранях		
SA_1 SB_1	SD_1 SC_1	$A_1B_1C_1D_1$ — квадрат	SA_1B_1 SB_1A_1	SD_1C_1 SCD_1	$A_1B_1C_1D_1$ — квадрат	SA_1D_1	SB_1C_1	$A_1B_1C_1D_1$ — квадрат
69	69	—	—	—	—	38	44	—
58	75	—	—	—	—	58	58	—
80	72	—	—	—	—	68	64	—
71	76	—	—	—	—	76	76	—
46	46	21	46	43	25	4	4	18
13	9	13	3	3	3	3	0	0
46	46	23	46	38	38	31	31	46
23	31	38	23	23	38	8	8	46

в первых двух пирамидах. Большинство учащихся замечают не только их равенство, но и прямоугольность.

Примерно таким же количеством учащихся узнается равенство углов A_1D_1 и D_1C_1 в пирамиде $B(A_1B_1C_1D_1)$.

2. Значительно меньше учащихся замечают, что в пирамидах $B(A_1B_1C_1)$ и $B(A_1B_1C_1D_1)$ угол BB_1 равен первым двум.

Можно отметить, что углы A_1B_1 и B_1C_1 в первых двух пирамидах занимают сходное положение. Поэтому учащиеся легко узнаю их равенство и прямоугольность. Кроме того, они совпадают с двугранными углами куба. Это тоже облегчает их рассмотрение.

Хотя угол BB_1 тоже совпадает с двугранным углом куба, но его положение в пирамиде иное, по сравнению с углами A_1B_1 и B_1C_1. Изучение таблиц показывает, что ряд учащихся пропускает в своих ответах угол BB_1.

3. Остановим некоторое внимание на тройке углов

$$A_1B,\ BC_1 \text{ и } A_1C_1$$

в пирамиде $B(A_1B_1C_1)$. Равенство углов A_1B и BC_1 обнаружило больше половины учащихся и гораздо меньше лиц заметили, что угол A_1C_1 также равен им.

Углы A_1B и BC_1 занимают в пирамиде одинаковое положение, но иное по сравнению с углом A_1C_1.

Учащиеся в огромном большинстве не признают пирамиду $B(A_1B_1C_1)$ за правильную. Им трудно взглянуть на нее с основания A_1BC_1. Отсюда вытекает и неполный анализ свойств этой пирамиды. Если бы учащиеся в уме поставили эту пирамиду на основание A_1BC_1, то, признав ее за правильную, не упустили бы ни одного свойства.

В этом вопросе мы сталкиваемся с теми трафаретными привычными представлениями, которые учащиеся получают в средней школе. Они привыкают всегда ставить пирамиду в такое положение, которое подчеркивает ее особенности. И поэтому стоит положить на бок правильную пирамиду, как почти никто из них уже не видит в ней правильную пирамиду со всеми вытекающими отсюда ошибками и недочетами.

4. Довольно большой процент учащихся заметил равенство и прямоугольность углов

$$A_1B_1,\ B_1C_1 \text{ и } BB_1$$

в пирамиде $B(A_1B_1C_1D_1)$. Часть из них отметила равенство углов A_1B и BC_1. Но даже самые лучшие студенты не заметили, что и последняя пара углов тоже прямые.

Первая тройка углов совпадает с углами куба. Это облегчает их обозрение. Обнаружить равенство углов A_1B и BC_1 не очень трудно, ввиду сходного их расположения. Но узнать их прямоугольность уже труднее. Непосредственно из воображаемой формы это не видно. Надо сообразить, что одна из граней этих углов содержит перпендикуляр к другой. Это уже не пространственное представление, а воображение, которое у большинства учащихся оказалось недостаточным.

5. Обращаясь к третьей пирамиде $S(A_1B_1C_1D_1)$, мы видим, что большинство не считает угол A_1B_1 равным углам A_1S и B_1S.

Это особенно ясно становится при рассмотрении столбца, относящегося к прямым углам. Те из учащихся, которые признают угол A_1B_1 прямым (их большинство), не считают остальные два угла за прямые.

Только незначительное количество учащихся видит равенство углов A_1S и B_1S, в то же время замечая, что они прямые. Напротив того, многие хорошие студенты указывают:

$$A_1S = B_1S \text{ и } A_1B_1 = 90°.$$

Таким образом мы видим, что прямые углы, совпадающие с углами куба, легко узнаются учащимися (случай тривиальный). А более произвольное положение угла вызывает почти непреодолимые трудности.

Опыт 2[1]

Первое сечение, как вполне очевидное, всеми учащимися изображается правильно. Число правильных ответов на второй вопрос достигает 70%. Большинство всех неправильных изображений имеет следующий вид (рис. 37).

Третье сечение большинством учащихся показывается правильно. Ошибки единичны. Почти в каждой группе обязательно хоть один студент дает сечение в виде эллипса (рис. 38). Это тем более странно, что всем из школьного курса геометрии должно быть известно, что любое сечение шара плоскостью — окружность.

Следует также отметить, что, повидимому, большинство студентов мысленно представляет себе не реальный куб, а его кабинетную проекцию (что подтверждается беседой со студентами), которую они в лучшем случае наделяют некоторой объемностью представления.

Отсутствие привычки к вдумчивому наблюдению окружающего мира приводит к тому, что у учащихся создаются трафаретные представления о геометрических телах: о кубе, пирамиде, паралеллепипеде, шаре и др. В этом отношении традиционное преподавание геометрии не расширяет возможности пространственного воображения, т. е. работы с геометрическими телами в уме, без чертежа, а, наоборот, изображая все предметы в кабинетной проекции, создает ограниченные представления у учащихся.

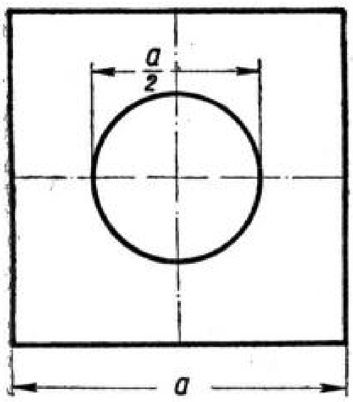


Рис. 37

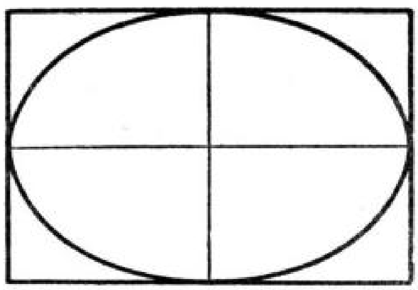


Рис. 38

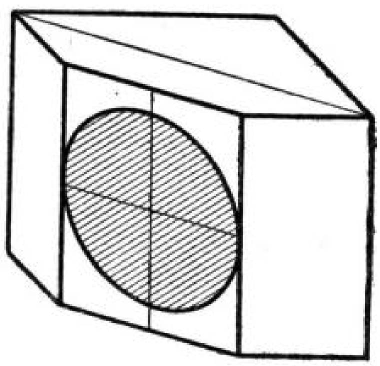


Рис. 39

Аналогичными соображениями можно попытаться объснить появление эллипса в третьем и четвертом сечениях. Если мы посмотрим на куб, изображенный на рисунке 39, то четвертое сечение представится нам эллипсом. Вот эта привычка видеть куб в кабинетной проекции привела, повидимому, к этой, правда, мало распространенной, ошибке.

[1] См. стр. 26.

С другой стороны, окружность представляется нам окружностью только при некотором вполне определенном положении. В обычных же случаях окружность представляется нам эллипсом. Посмотрите на края стакана, стоящего на столе; часы, которые лежат перед вами, и т. д.

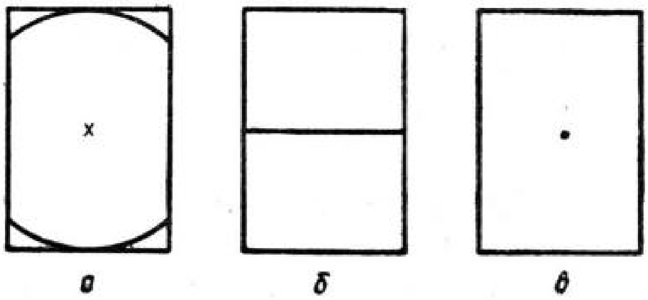


Рис. 40

Эта привычка видеть окружность как эллипс может так же отчасти объяснить появление эллипса при изображении сечений шара плоскостью.

Четвертое сечение процентов на 70 изображается правильно. В этом случае нет какой-либо характерной ошибки, подобно той, которую мы наблюдаем во втором сечении (рис. 37). В этом случае каждый ошибается по-своему. Опять встречается эллипс (почти в каждой группе).

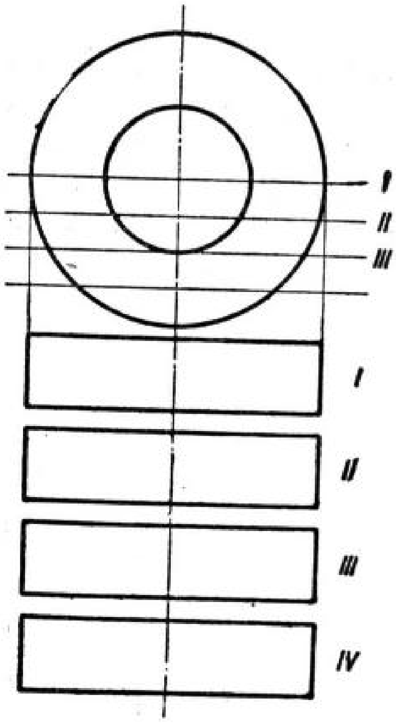


Рис. 41

Наиболее слабые студенты дают иногда совершенно невероятные ответы. Мы приведем некоторые из них. В первом случае (рис. 40*а*) сечение шара представляет собой части большого круга. Каким образом во втором случае (рис. 40*б*) получился отрезок, неясно и самому автору, с которым потом беседовали. „Показалось, что так", вот и все объяснение. Точка, т. е. касание шара, это уже лучше, чем первые два (рис. 40*в*).

Но все эти три примера иллюстрируют редкие случаи почти полного отсутствия пространственных представлений.

Опыт 3[1]

В этом опыте было допущено небольшое отклонение от описания, данного в § 5. Условия были сформулированы примерно так:

Пустое кольцо помещено в некоторый ящик. Нарисуйте четыре сечения этого ящика и покажите, как в нем расположатся сечения кольца. Рисунок 41 был воспроизведен на доске. Сечения ящика предложено изображать тонкими линиями, а сечения кольца потолще.

Только отдельные студенты дали исчерпывающие ответы, показав на чертеже правильно не только форму, но ширину и высоту каждого сечения.

Первое сечение настолько очевидно, что подавляющим большинством оно показано верно. Из 5 групп студентов только три

[1] См. стр. 28.

человека сделали его неправильно. Эти ошибки характеризуют крайне плохое развитие пространственных представлений.

Студентка Н. (МГИПП) дала следующее его изображение (рис. 42). Вместо двух окружностей приведены овалы, у которых ширина равна диаметру искомой окружности, а ее высота в два раза меньше. Два студента МГПИ заменили круги квадратами (рис. 43).

Второе сечение выполнено правильно только у 11 человек. Из них МАИ—9 человек, МГИПП—1 человек, МГПИ — 1 человек.

Большинство остальных студентов, изображая второе сечение, или дают два сблизившихся круга (МАИ — около 6%, МГИПП—около 50%, МГПИ—около 68%), или два овала (МАИ—около 75%, МГИПП—около 50%, МГПИ—около 14%).

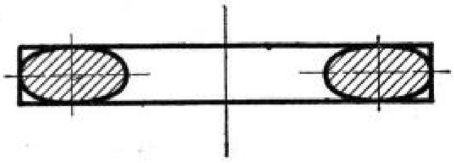


Рис. 42

Две студентки МГПИ, превратившие первое сечение в два квадрата, сохраняют свой стиль и в этом случае (рис. 43).

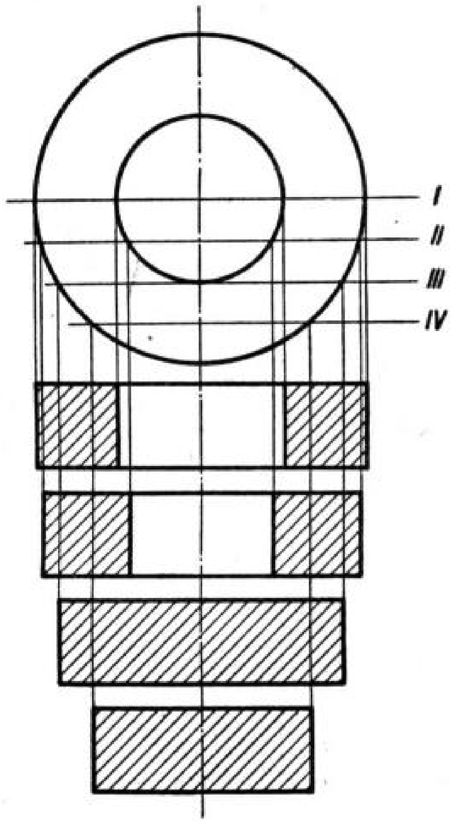


Рис. 43

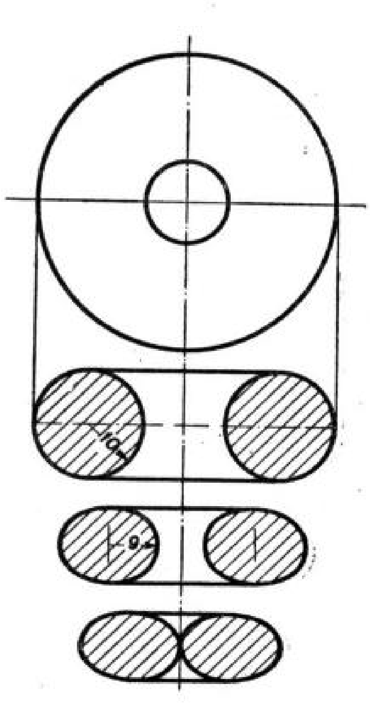


Рис. 44

Интересно отметить, что у некоторых студентов, по мере удаления секущей плоскости от центра кольца, высота сечения уменьшается.

На рисунке 44 студенткой Л. (МГИПП) приведены три сечения, четвертое сечение в ее работе отсутствует. Из рассмотрения ее работы видно также, что студентка неправильно поняла основные пропорции кольца и в два раза уменьшила внутренний диаметр.

Студентка П. (МГИПП) делала каждое следующее сечение, из первых трех, больше предыдущего и притом состоящее только из кругов (рис. 45). Эта работа явно указывает на отсутствие самых элементарных пространственных представлений.

Третье сечение представляет наибольший интерес. Лишь некоторые студенты показывают не только форму, но ширину и высоту восьмерки.

Общее количество восьмерок (независимо от их качества) занимает среди всех работ следующее место: МАИ—около 48%, МГИПП—около 35%, МГПИ—около 14%.

Кроме восьмерок к сравнительно правильным ответам можно отнести два сблизившихся овала (МАИ—30%; МГИПП—2%; МГПИ—22%) или два сблизившихся круга (МАИ—1 студент, МГИПП—2 студента).

Итак, довольно удовлетворительные ответы на третий вопрос распределяются следующим образом:

МАИ—около 80%, МГИПП—около 42%, МГПИ—около 36%.

Остальные изображения, за исключением двух, сходных со вторым сечением (МГИПП и МГПИ), представляют собой овалы той или иной формы.

В некоторых случаях ширина овала была равна ширине восьмерки. В отдельных случаях высота овала была значительно меньше высоты восьмерки.

Несколько странное впечатление производят овалы (а в одном случае и восьмерка—МГИПП) с прямолинейными горизонтальными

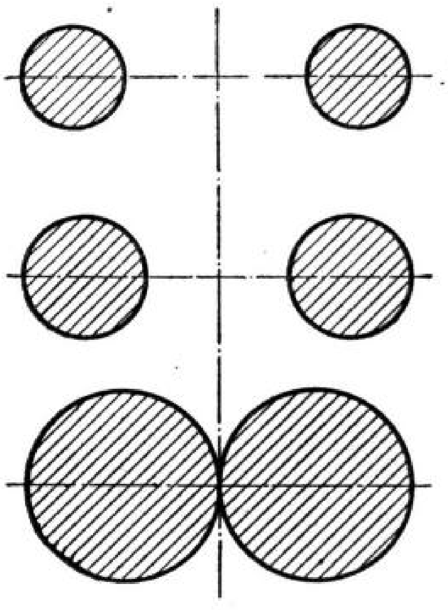


Рис. 45

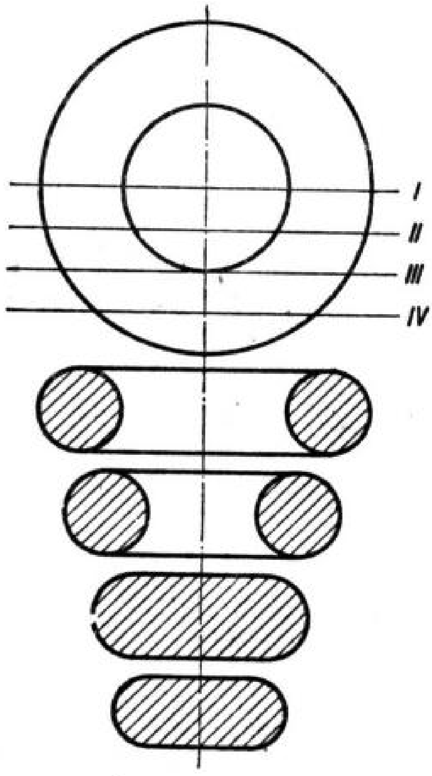


Рис. 46

отрезками, входящими в состав контура (рис. 46). Овалы с прямолинейными частями встречаются у студентов: МАИ—10%, МГИПП—12%, МГПИ—17%.

Кроме того, 4 студента МГПИ изобразили третье сечение в виде прямоугольника (рис. 43).

Четвертое сечение не представляет особого интереса. Большинство учащихся изобразило овал. В отдельных случаях (около 15%) этот овал содержал в себе прямолинейные отрезки (рис. 46). Четыре студента МГПИ и один студент МАИ вместо овала изобразили прямоугольник.

Если бы во всех случаях студенты давали также сечение ящика, содержащего кольцо, то было бы интересно проанализировать неверно указанную ширину и высоту этого овала. Очень многие студенты, повидимому, считают высоту овала меньшей, чем она является на самом деле. Но большая неточность, а во многих случаях и небрежность работ делают затруднительным исчерпывающий ответ на этот вопрос.

Стоит привести еще одну работу в качестве примера очень плохих пространственных представлений (рис. 47). Если первые два сечения удовлетворительны, то последние два выдают автора (МГПИ) с головой. Всем становится ясно, что он очень плохо представляет себе кольцо в натуре.

Также особняком стоит работа студента Н. (МАИ). Самые сечения (рис. 48) в общем правильны. Но что изображает маленький круг, помещенный внутри контура, неизвестно. Может быть, студент представлял себе кольцо полым. Тогда непонятно, почему это во всех случаях только круг.

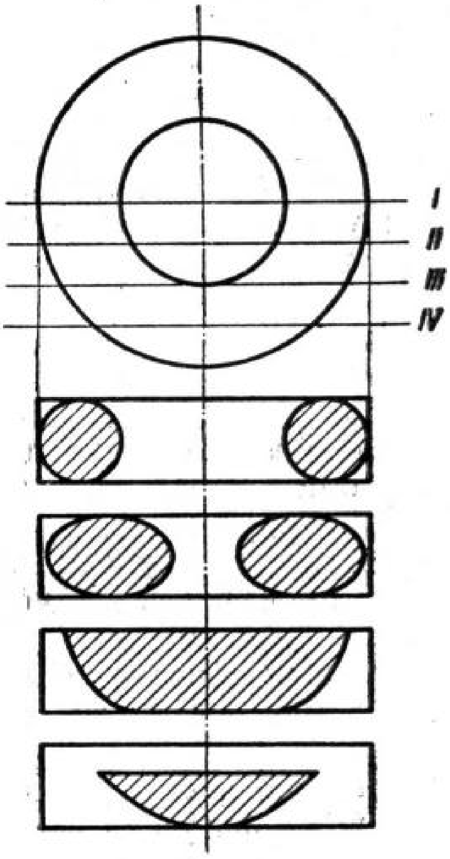


Рис. 47

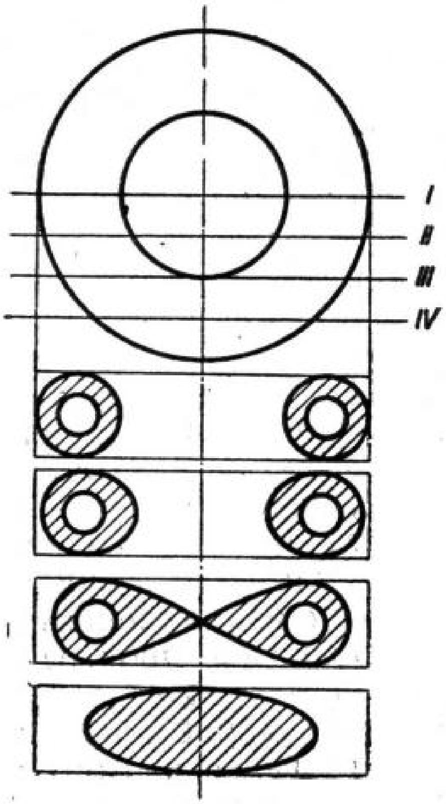


Рис. 48

Некоторые выводы в преподавании геометрии

Проведенные нами экспериментальные работы в ряде средних школ и на первых курсах некоторых вузов позволяют сделать следующие выводы по интересующему нас вопросу.

1. Учащиеся старших классов школы имеют достаточно отчетливые пространственные представления основных геометрических элементов и фигур (простейшие многогранники, цилиндры и конусы вращения, шар и его части).

В отдельных случаях пространственное воображение учащихся очень ограничено, что затрудняет для них прохождение таких предметов, как стереометрия и черчение, и требует особого внимания и дополнительной работы с ними преподавателя.

2. На первом курсе вузов студенты обнаруживают, примерно, такое же развитие пространственных представлений. Однако конкурс-

ные испытания при наборе студентов во втузы производят отбор тех из поступающих, которые обладают более высоким уровнем пространственных представлений и пространственного воображения (см. результаты экспериментальной работы на первом курсе Московского авиационного института тотчас после начала учебного года).

3. Недостатком в развитии пространственных представлений учащихся средней школы является их привычка к шаблонам (изучаются шаблонные наборы геометрических образов и фигур; почти всегда фигуры расположены привычным шаблонным образом в пространстве). Отсутствует разнообразие выбираемых положений фигур, не рассматривается более разнообразный набор поверхностей и тел, например, некоторые тела вращения (кольцо и др.). Такое (традиционное) преподавание школьного курса геометрии мало содействует развитию и обогащению пространственного воображения учащихся. Экспериментальные работы с достаточной ясностью показали границы (пороги) последнего.

4. Обнаруживается привычка учащихся мыслить планиметрические фигуры лишь в плоскости чертежа, а не в произвольных положениях в пространстве. Вследствие этого учащиеся не умеют применять теоремы планиметрии к плоским фигурам в пространстве, особенно, если они не занимают шаблонного положения (например, в гранях куба).

5. Преподавание геометрии часто не устанавливает живой связи между зрительным восприятием формы предметов и их натуральными формами. Этим объясняется тот факт, что учащиеся иногда представляют себе фигуры такими, какими они их видят. Например, прямые углы — как не прямые, равносторонний треугольник — как разносторонний, сечение шара — как эллипс и т. д.

Отсутствует геометрическая работа на проекционных чертежах, в которой учащиеся изучали бы свойства геометрических фигур, пользуясь их изображениями, и решали бы пространственные задачи.

6. Изображение пространственных фигур применяется в преподавании лишь для иллюстрации и по большей части ограничивается применением кабинетной проекции. Это не является лучшим методом использования чертежей пространственных фигур.

7. Учащиеся почти не применяют графических (конструктивных) методов решения задач, основанных на пространственном воображении. Они стремятся (и приучены к этому) заменять эти методы вычислениями и выводом формул, даже в тех случаях, когда графические приемы значительно упрощают решение (см. построение сечений в экспериментальной работе № 2).

8. В школьном курсе не разработана методика решения задач на построение в пространстве [в частности, а) решение стереометрических задач на проекционном чертеже и б) решение стереометрических задач в воображении].

9. Преподавание геометрии в старших классах средней школы особенно нуждается в прочной опоре на пространственном представлении геометрических фигур и всех геометрических соотношений. К этому должна быть направлена методика преподавания геометрии. Она должна дать естественный плодотворный выход отвлеченному изучению предмета к многочисленным конкретным применениям. Наконец, она должна быть хорошо согласована с преподаванием курса черчения.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 21 · 1949

РОЛЬ НАГЛЯДНЫХ ПОСОБИИ В РАЗВИТИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВООБРАЖЕНИЯ

П. Я. ДОРФ

ВВЕДЕНИЕ

В конце XIX и начале XX в. выработались определенные взгляды на содержание принципа наглядности и на его роль в преподавании геометрии. Это не замедлило сказаться на развитии конструирования геометрических моделей и разработке дидактических вопросов по применению наглядных пособий.

В сборнике Русского технического общества „Устройство и оборудование школ" (1914 г.) справедливо отмечается, что понадобилось много сил и времени, пока осознанные принципы наглядности стали проводиться в жизнь. Например, сильно задержалось положительное разрешение вопроса о самодельных пособиях и оборудовании школ наглядными пособиями по геометрии.

В конце прошлого столетия мы находим в высшей школе (например, Московский университет) учебный кабинет с богатым оборудованием по геометрии; встречаются кабинеты (правда, как редкое явление) в гимназиях и реальных училищах.

К семидесятым годам XIX в. относят организацию первой в России мастерской пособий, где изготовлялись модели геометрических тел.

Однако эти начинания носили характер робких и неуверенных шагов: не было твердых установок руководящих органов народного образования, а творческой инициативе отдельных педагогов или даже коллективов не уделялось должного внимания; слишком уже давил престиж „заграницы". Закупка там пособий тормозила развитие собственной инициативы.

Наконец, в девяностых годах, под давлением передовых учителей и общественных групп, интересовавшихся вопросами формирования пространственных представлений, Вятское и Курское земства открывают мастерские пособий, в которых разрабатываются оригинальные образцы, главным образом, для начальной школы. В частности, по геометрии это были чертежные принадлежности (для классной доски) и геометрические (простейшие) тела.

В 1893 г. Русское техническое общество организует Петербургский подвижной музей с довольно богатыми наборами иллюстраций и моделей.

Почин Общества нашел широкий отклик в других городах, где при „городских" и „подвижных" музеях шло коллекционирование и разработка новых образцов. Деятельность музеев сопровождалась просмотром пособий, обсуждением их назначения и составлением описаний.

Параллельно подымались споры за и против использования моделей. Одни видели в результате работы с ними более прочное и ясное формирование пространственных представлений, указывали на повышение интереса и внимания учащихся к предмету изучения; другие — в применении пособий видели акт „овеществления", из-за которого тормозится развитие отвлеченного мышления ученика.

Особо следует выделить роль военного ведомства в деле оборудования своих учебных заведений наглядными пособиями.

Еще в 1866 г. оно организует Музей школьного оборудования, в дальнейшем развивает это дело, а в 1912 г. на Всероссийском съезде преподавателей математики Музей представляет блестящую выставку моделей по геометрии для всех классов средней школы. Наглядному обучению был посвящен специальный доклад Выставка вызвала многочисленные диспуты среди практиков-учителей, методистов, ученых. В центре внимания — значение наглядных пособий при формировании пространственного воображения.

Некоторые положения о наглядных пособиях

Обучение математике — чрезвычайно сложная проблема методики. Приходится учитывать особенности предмета (арифметики, алгебры, геометрии, тригонометрии, элементов высшей математики), отдельной темы, вопроса, психологии учащегося, требований дидактики. Современная педагогика устанавливает наиболее совершенные методы обучения и воспитания. Среди них достойное место отводится принципу наглядности.

Данная работа посвящена только исследованию роли наглядных пособий при изучении геометрии, выработке наиболее совершенных методов их применения. Главным образом, имеется в виду, на фоне общих целей школьного обучения, осветить лишь один специальный вопрос: роль наглядных пособий в развитии пространственного воображения.

Предлагаемые выводы сделаны на основании специальных экспериментов и многолетних наблюдений школьной работы.

В среднюю школу ученик приходит с некоторым запасом представлений, полученных из опыта и математического образования.

Задачей школы ставится углубление сформировавшихся представлений относительно простейших образов и ознакомление с более сложными формами. Иными словами, наглядно иллюстрировать придется только новое, трудное, сложное. Все то в геометрии, что связывается в сознании ученика многими ассоциациями, изучается отвлеченно и оформляется лишь эскизом или чертежом. Например, такие понятия, как угол прямой с плоскостью, угол между скрещивающимися прямыми, сложное построение общего перпендикуляра между ними, нуждаются в иллюстрациях пособиями.

В начальных классах с помощью моделей знакомят учащихся с геометрическими формами и их характерными особенностями; в старшем возрасте ученик не только знаком с образами куба, пирамиды, шара и другими фигурами по виду построек, различных предметов, технических деталей и т. п., но он уже свыкся с ними, и модели этих тел для знакомства ему не нужны. К такому выводу приводят многократные наблюдения за работой девятых классов московских школ №№ 204 и 110 (1933 — 40 — 44 годы). Наличие предметов даже отвлекало мышление ученика.

В 1940 г. (школа № 204 Октябрьского района) те же модели были привлечены для практических работ: определения размеров тела, изготовления в некотором масштабе эскизов и вычисления объема тела. Комплекс работ, связанных со свойствами данного геометрического тела, создавал более точные и углубленные представления.

При повторении этих работ в 1944 г. в IX классе школы № 110, были внесены дополнительные приемы изучения сложных форм как по моделям, так и с натуры.

Всем учащимся было предложено рассмотреть формы Кремлевских башен, различных колонн станций метро (на них имеются колонны, начиная с четырехугольного сечения и кончая двенадцатиугольным) и изобразить их на бумаге частью по наброскам, а частью *по памяти*, по воображению. Эта работа протекала чрезвычайно живо, остро и эффективно.

Приведенные наблюдения убеждают в том, что применение наглядных пособий требует пристального учета возрастных особенностей школьника: на некоторые модели можно во время урока просто сослаться, другие использовать ограниченно с отдельными группами учащихся; наконец, есть пособия и конкретные предметы, которые подробно рассматриваются при решении относительно сложных вопросов, задач.

Пусть, например, приведено условие: „Дана пирамида". Невольно как-то видишь треугольную или четырехугольную пирамиду, обычно правильную. Она чаще встречается в учебной и жизненной практике, к ней привыкают. Однако из условия отнюдь не следует такого рода пирамида; необходимо вызвать представление пирамиды произвольной формы.

Подлинное геометрическое развитие состоит, в частности, в создании абстрактного понятия фигуры, например, пирамиды: понятия общего, понятия произвольной пирамиды, вне конкретных условий, модели, чертежа.

Школьный опыт показывает, что наблюдение различных пирамид (трех четырех пятиугольных и др., правильных и неправильных) обогащает представления ученика и формирует его воображение в этом направлении.

Естественным и наиболее рациональным путем к установлению такого понятия следует признать рассмотрение шарнирной модели пирамиды с последующими зарисовками ее с натуры.

Так как в преподавании геометрии, в качестве конечной цели, стоит задача развить у учащихся абстрактные представления и понятия, отображающие предметы окружающего мира, то на этих путях — модель, картина, таблица — необходимые звенья методики обучения.

Вывод этот основан на том, что психические силы ученика растут с возрастом, что у него увеличивается запас представлений, знаний, наблюдений из опыта и предшествующего обучения, а со всем этим растет и крепнет способность отвлеченного мышления. Специальные исследования в школах показали, что математическая модель, отображающая геометрический образ, должна быть сделана точной и простой, ибо это соответствует ее назначению: в таком виде модель не противоречит представлениям ученика о математических образах.

Глава I

ПЛАНИМЕТРИЯ

Изучение плоских фигур представляет ряд трудностей в силу того, что в окружающей действительности ученик имеет дело с телами, с пространственными формами; плоскую фигуру ему приходится выделять как составную часть тела.

В то же время планиметрия играет особую роль в развитии пространственных представлений, ибо ее образы проще себе представить, их легче вообразить как совокупность уже существующих представлений.

Эта определенность и простота конструкции планиметрического образа позволяют вести почти все изучение, опираясь на интуицию, на имеющееся развитие и логическую систему рассуждений. Вещественное оформление большинства фигур производится только чертежом. Упражнения состоят, главным образом, в решении задач (на построение, доказательство и вычисление) и в выполнении специально подобранных чертежей.

Однако в отдельных случаях целесообразно, в качестве вспомогательного средства, использовать наглядные пособия. Далее мы рассмотрим эти случаи.

При изучении геометрии многим учащимся трудно даются представления, связанные с преобразованием фигур и построением относительно сложных образов.

В то же время работа с моделями не только обогащает сознание ученика представлениями формы, но и развивает необходимые умения представлять фигуру в своем воображении, преобразовывать ее. После моделей учащиеся свободно конструируют и строят на плоскости и в пространстве, обходясь только чертежом. Интересно, что при изучении стереометрии учащиеся охотно пользуются образами планиметрии, которые они узнают в гранях и сечениях тел.

Наглядные пособия значительно помогают укреплять подобные навыки.

Рассмотрим этот вопрос на отдельных темах курса геометрии.

§ 1. Изучение углов

При знакомстве с углом существенным является правильно представить себе, что эта фигура характеризует степень отклонения одного луча от другого. В частности, такого отклонения не может быть вовсе, тогда лучи совпадают и тогда угол равен нулю.

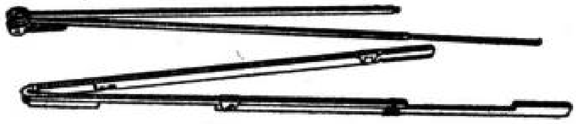
Однажды мы наблюдали безрезультатную попытку учителя дать несколько своеобразное определение угла: „Угол есть совокупность двух лучей, выходящих из одной точки".

Так же трудно ученику VI класса представить себе без опыта процесс непрерывного изменения угла.

Оказывается, с помощью раздвижной шарнирной модели, перечисленные затруднения исчезают, и содержание вопроса становится ясным, образуются четкие представления, которые затем восстанавливаются учеником даже без чертежа.

Кроме углов на моделях многогранников, на окружающих предметах, полезной иллюстрацией являются углы направлений, например, на географических картах, планах. Если показать или начертить необходимые лучи, характеризующие направление на Север и направление заданного движения или магнитного склонения, то у учащихся от рассмотрения подобных примеров сложатся более четкие представления об угле.

Действительно, сперва учитель показывает на модели (фиг. 1) некоторый угол, медленно уменьшает его до нуля, затем увеличивает до $2d$.



Фиг. 1

Учащиеся во время демонстрации делают несколько зарисовок и правильно выясняют новое понятие — угол: они *представляют* множество углов, среди которых каждый является частным случаем.

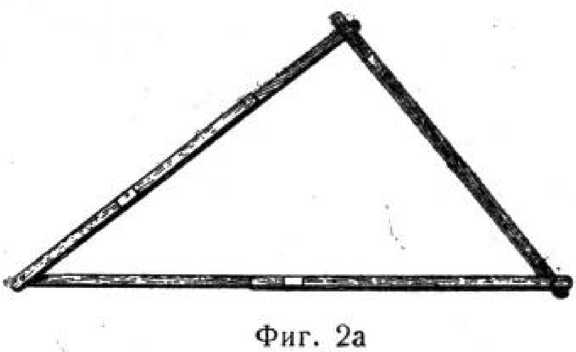
Окончательное закрепление сложится в процессе дальнейшего изучения планиметрии, но первая установка, требующая сосредоточенного внимания и обобщения новых представлений, благодаря наглядным пособиям, произойдет в наиболее интересной и доступной форме.

§ 2. Изучение треугольников

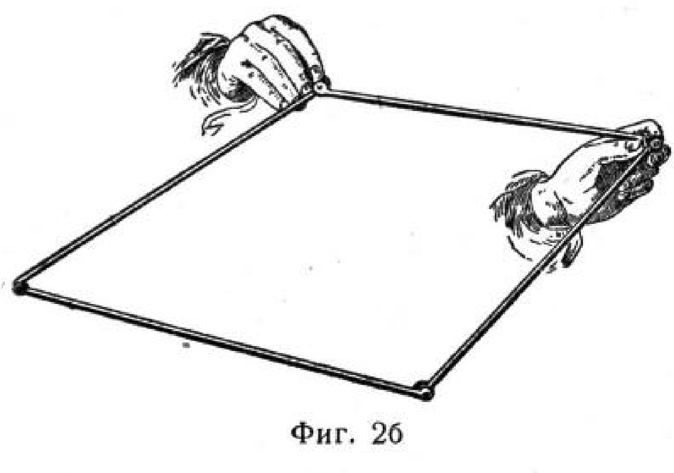
Фигура треугольника настолько проста для представления и настолько знакома учащимся из окружающей обстановки, что не нуждается ни в каком другом изображении, кроме чертежа. Речь может итти об иллюстрации преобразования треугольника из одного вида в другой.

В этом отношении несколько чертежей на доске указывают лишь небольшое количество образов; один вид переходит в другой разрывно, скачкообразно. На шарнирной модели форма треугольника изменяется непрерывно: перед глазами зрителей-учащихся проходит неограниченное множество видов треугольников.

Такого рода упражнения приучат школьников производить описанные преобразования только в своем воображении, без модели и без чертежа.



Фиг. 2а

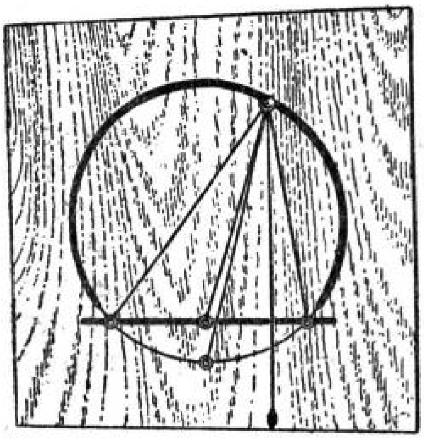


Фиг. 2б

Кроме того, шестикласснику трудно установить одно из характерных различий треугольника от многоугольника, например, четырехугольника: первая фигура жесткая, лежащая всегда в одной плоскости; со второй возможны отступления от плоского многоугольника. Это свойство наглядно демонстрируется на моделях (фиг. 2а и б).

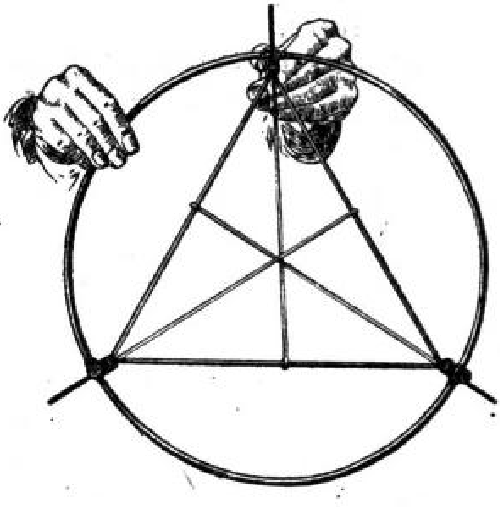
Вместе с углами и сторонами в треугольнике приходится изучать такие элементы, как медиана, высота и биссектриса. Было бы недостаточно выучить их определения и построить эти линии в одном-двух треугольниках; необходимо выяснить на подвижной модели, как расположится каждая из них в равнобедренном, правильном, прямоугольном, тупоугольном треугольнике и как будут располагаться они друг относительно друга (фиг. 3).

Наблюдения „замечательных" точек в треугольнике. Выводы существования точек пересечения медиан, пересечения биссектрис и пересечения перпендикуляров из середин сторон проводятся по отношению к некоторому треугольнику; далее из того, что треугольник берется произвольным, следует, что полученные свойства присущи треугольникам всех видов. Такого рода обобщение учащиеся иногда принимают на веру, не будучи до конца в этом убеждены. Оказывается, если после логического доказательства подтвердить вывод демонстрацией модели, представления получаются более осмысленными и прочными (фиг 4 и 5). На этих моделях форма треугольника изменяется, и каждый раз имеем центр описанного круга (точка пересечения перпендикуляров из середин сторон, фиг. 4) и центр вписанного круга (точка пересечения биссектрис, фиг. 5).

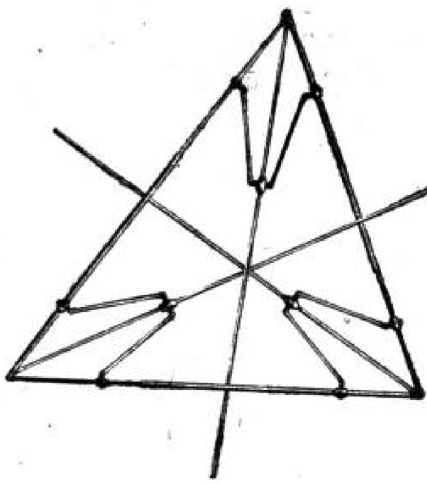


Фиг. 3

Равенство и равновеликость треугольников. Названные понятия затрудняют учащихся относительно тонким различием между ними. Для полного и отчетливого усвоения необходимо задержать внимание ученика на примерах, последовательно иллюстрирующих эти



Фиг. 4



Фиг. 5

понятия. Так, в проводимом нами опыте (школа № 110) треугольники рассматривались в такой последовательности (VI; VIII; IX классы):

1) треугольники, имеющие по одной соответственно равной стороне;

2) треугольники, имеющие по две соответственно равных сторон и неравному углу между ними,

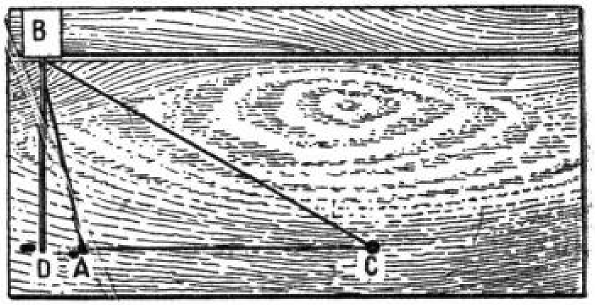
и другие варианты.

Таким путем нетрудно было подготовить необходимые и достаточные признаки равенства треугольников, т. е. треугольников, которые представляют в сущности один и тот же треугольник. Выяснение существенных моментов этого вопроса проходит лучше всего, если сопровождать беседу демонстрацией картонных моделей с соответственно равными и неравными элементами.

Таким образом, в данном случае речь идет не о запасе геометрических образов, а о силе геометрических иллюстраций в процессе сопоставления фигур при установлении относительно сложных понятий.

Позднее изучались равновеликие треугольники.

В качестве примера берутся равнобедренные треугольники, разделяются по оси симметрии и складываются различным образом. Получаются фигуры, явно неравные, но равносоставленные, равновеликие.

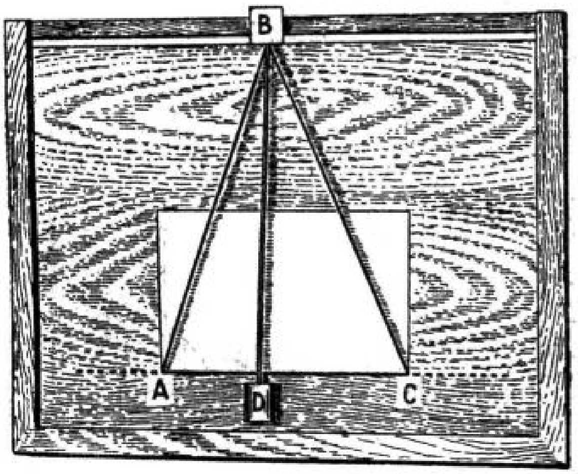


Фиг. 6

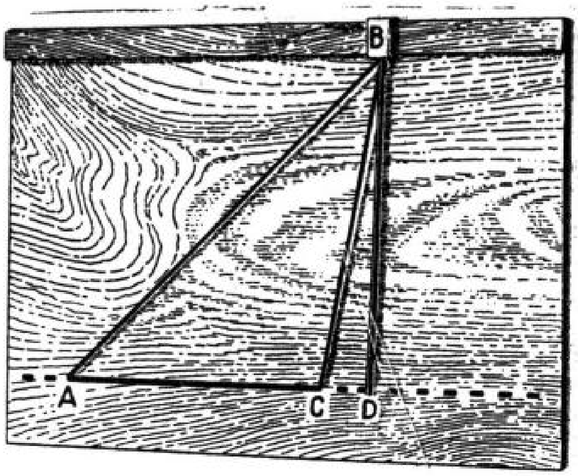
Равновеликость треугольников можно иллюстрировать и на другом пособии (фиг. 6). На планшете показан треугольник. Основание его начерчено тушью параллельно верхнему краю щита, по которому скользит ползун *B*. Модели боковых сторон показаны резиновым шнуром, а металлический стержень (или отвес) изображает высоту треугольника.

Описанная конструкция позволяет построить бесчисленное множество равновеликих треугольников различного вида (фиг. 7 и 8).

Попутно модель иллюстрирует различные положения высоты в треугольнике, в частности, для случаев прямоугольного и тупоугольного треугольников. Ни на каком чертеже нельзя показать



Фиг. 7



Фиг. 8

непрерывного перехода высоты из одного положения в другое (высота внутри треугольника, высота—катет, высота вне треугольника), между тем как подобная демонстрация раз навсегда освободит учащихся от затруднений и от ошибок в этом вопросе.

Треугольник на модели изменяется так, что основание и высота его остаются неизменными. Далее приходится делать заключение:

так как площадь $S=\frac{ah}{2}$, основание a и высота h не меняются, то и площадь S остается также постоянной.

Геометрически эта равновеликость — равенство площадей — подтверждается равносоставленностью треугольников и прямоугольника с основанием, равным основанию треугольника, и высотой, вдвое меньшей, чем у треугольника (фиг. 7).

Эта же модель может быть использована в IX классе при выяснении понятий о переменных и постоянных величинах: учащиеся наблюдают изменяющиеся элементы фигур, а также элементы, остающиеся неизменными. Благодаря этому выясняется суть каждого понятия.

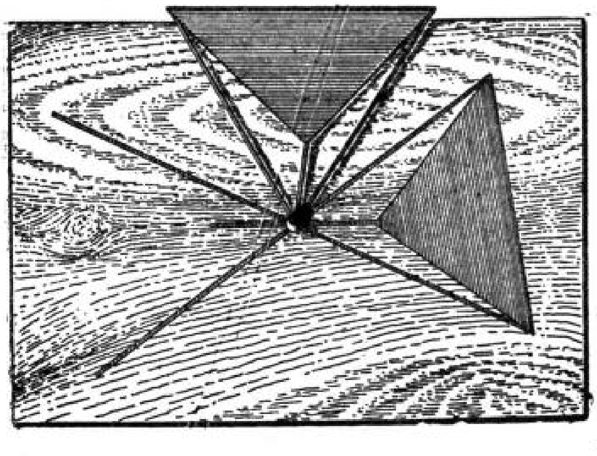
§ 3. Симметрия относительно точки, относительно оси

Из области учения о симметрии в средней школе даются лишь отдельные положения. С целью достичь наибольшей четкости в этих представлениях полезно использовать наглядные пособия.

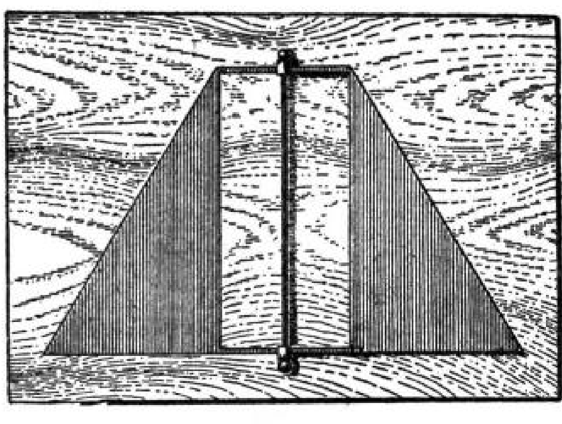
Обычно учащиеся довольно легко усваивают построение симметричной точки проведением луча, соединяющего точку с центром симметрии и продолжением его на такое же расстояние.

Труднее дается учащимся кинематическое образование симметричной точки — поворотом луча на угол в 180°. То же можно сказать и относительно симметричного отрезка прямой. Из опыта работы можно установить следующий порядок: чертежом, при помощи цветных мелков на доске (цветными карандашами в тетради) необходимо добиться исчерпывающей ясности в построении элементарных образов.

После этого образование симметричной фигуры, например, треугольника, следует продемонстрировать на подвижной модели (фиг. 9 и 10) и снова завершить работу построениями в тетрадях.



Фиг. 9



Фиг. 10

§ 4. Изучение круга

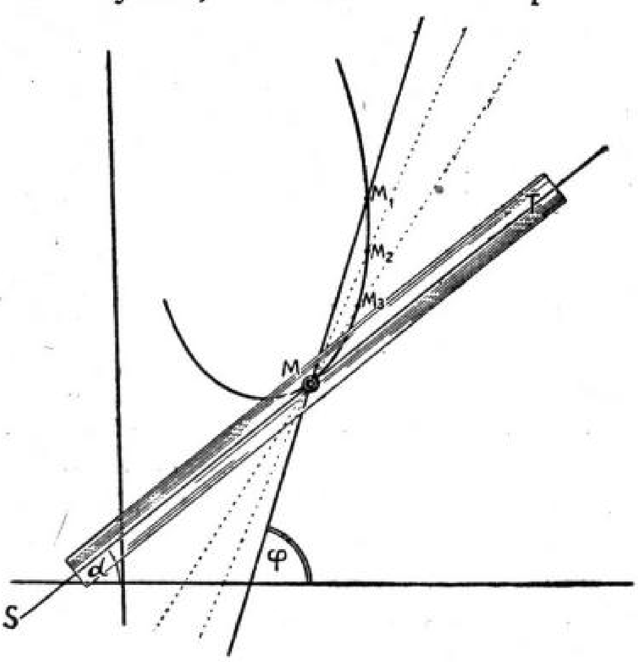
Превращение секущей в касательную. На простой модели можно наглядно показать важный геометрический факт возможности непрерывного сближения точек пересечения прямой и кривой и, в заключение, совпадение этих точек. Соответственно секущая приобретает новое качество — становится касательной.

На фиг. 11 показано, как поворотом целлулоидовой линейки, на которой цветной тушью проведен отрезок прямой, секущая превращается в касательную.

На картонном или деревянном щите нанесена произвольная (для общности) кривая, в одной из точек которой прикреплена подвижная линейка.

Никаким объяснением учителя, никаким искусным чертежом не создать такого четкого представления процесса перехода секущей в касательную, как при наблюдении описанной модели. Медленное движение линейки и постепенное сближение (до слияния) общих точек привлекает внимание учащихся, вызывает у них интерес и глубокое впечатление. Окончившие школу через несколько лет вспоминают об этой демонстрации и о том, как позднее многие новые понятия они невольно связывали и усваивали, опираясь на впечатление от превращения секущей в касательную.

Удвоение числа сторон вписанного многоугольника. Вывод формул длины окружности и площади круга опирается на характеристику величины числом, выбранным иным путем, чем это было принято в практике непосредственного измерения. Установив для периметров вписанных и описанных многоугольников существование единственного предела, принимают последний за длину кривой.



Фиг. 11

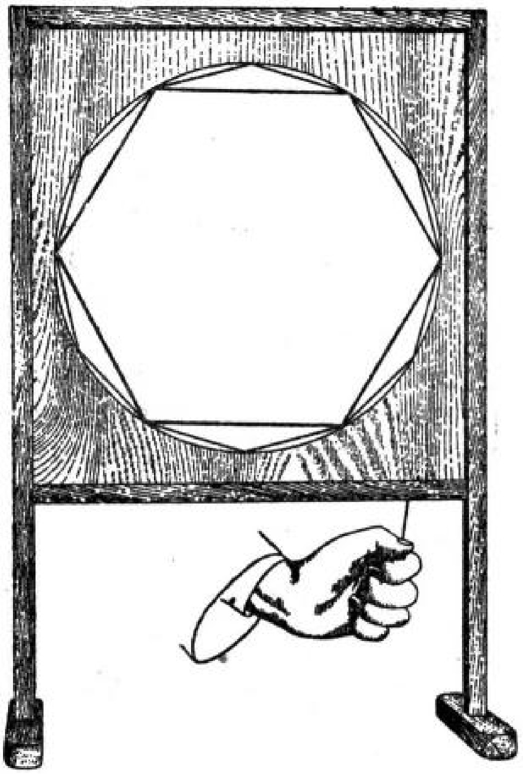
Вопрос о длине окружности изучается в IX классе и связан с рядом обобщений и определений. К этому времени развитие учащихся служит основанием к тому, чтобы вести все рассуждения, пользуясь лишь чертежом. Но есть одна вещь, которая нуждается в зрительной иллюстрации,—это процесс удвоения числа сторон многоугольника. При выводе формулы длины окружности учащемуся необходимо свободно представлять себе, как, например, шестиугольник переходит в двенадцатиугольник, двадцатичетырехугольник, сорокавосьмиугольник в девяностошестиугольник, как, вообще, n-угольник преобразуется в $2n$-угольник. Разумеется, никакая конкретизация здесь невозможна по техническим соображениям, но она будет и не нужна, если у учащегося перед глазами будет хоть один пример удвоения числа сторон многоугольника. Обратимся к практике.

Обычно учитель чертит окружность, в ней 2—3 звена ломаной и показывает на них процесс удвоения.

Далеко не все учащиеся четко представляют себе по такому чертежу существо дела. Многие готовы просто согласиться с учителем и затем повторить за ним не вполне осознанные суждения.

Опытные учителя иногда терпеливо чертят полностью шестиугольник и двенадцатиугольник, но медлительность такой работы тормозит течение урока, ослабляет внимание учащихся.

Нам представляется, что, *сохраняя весь стиль логического построения вывода,* полезно простой динамической моделью помочь учащимся в создании зрительного образа многоугольника с двойным числом сторон. В этом нас убеждают многократные наблюдения над учащимися девятых классов опытной школы им. Горького (№ 204) и школы № 110, а также суждения многочисленных посетителей выставки пособий Методического института школ (Наркомпроса) и Института методов АПН. Особенно тщательно обсуждался предлагаемый прибор при посещении чешских педагогов и в комиссии наглядных пособий при Министерстве просвещения под председательством проф. Н. А. Глаголева.



Фиг. 12

Прибор состоит из фанерного щита на подставке (фиг. 12). На щите начерчен круг; правильный шестиугольник показан резиновыми шнурами. К серединам хорд привязаны белые нити (на белом фоне), концы которых объединены в общую тягу под фанерным щитом и выведены в виде небольшой державки (12). По той же схеме сконструировано приспособление для преобразования двенадцатиугольника в двадцатичетырехугольник. Державка с пометкой (24) выведена с другой стороны щита.

Медленным натяжением державки (12) следует преобразовать шестиугольник в двенадцатиугольник. При опускании державки упругостью резины шестиугольник восстанавливается. Далее то же проделывается со второй державкой (24). Процесс раза два повторяется, и после этого можно быть уверенным, что зрительное впечатление от него поможет учащемуся иметь полное представление о безграничном удвоении числа сторон многоугольника. Учащихся чрезвычайно увлекает сила их воображения, например; „тысячеугольник преобразовался в многоугольник с числом сторон в две тысячи“, и так бесконечно. Им это представляется простым и ясным потому, что сам процесс удвоения стал наглядным.

Прибор больше не нужен, и все дальнейшие рассуждения ведутся абстрактно.

Глава II

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Изучение стереометрии приходится на вторую половину девятого и десятый классы. Несмотря на то, что это период наибольшего развития учащихся, применение пособий в стереометрии частое явление. Объясняется это сложностью вопросов пространственной геометрии и трудностями условного изображения трехмерных фигур на плоскости.

Это отнюдь не обозначает, что применение наглядных пособий единственная или даже основная форма педагогического воздействия. Исходные и конечные цели изучения стереометрии, весь сложный комплекс приемов этого изучения сохраняют силу и при использовании наглядных пособий. Их роль вспомогательная. При помощи моделей, таблиц, подвижных приборов, кинофильмов поставленные цели достигаются легче, быстрее; представления получаются более глубокие и устойчивые; знания освобождаются от целого ряда проявлений формализма, оторванности от живых образов.

В дальнейшем изложении как раз указываются те случаи, где полезно применить наглядные пособия, выясняется методика обращения с ними. Техническое описание приборов приводится из тех соображений, что без него становится неясной роль наглядного пособия в деле формирования и развития пространственных представлений и воображения, а сами суждения об их использовании—слишком общими и беспредметными.

В частности, необходимо учесть, что большинство конструкций математических пособий настолько просты, что их можно изготовить силами школы. Сам процесс изготовления имеет значительную педагогическую ценность: учащийся углубленно представляет себе существо дела, длительно воспринимает геометрический образ, знакомится на практике с его свойствами. Прежде чем делать пособие, приходится составить эскиз проекта, исправить его, защитить перед учителем и товарищами, а это возможно только при наличии четких представлений и при работе пространственного воображения. Автор конструкции пользуется имеющимися в его распоряжении представлениями, преобразовывает их, выдумывает новые комбинации, наносит их на бумагу, исправляет, строит, совершенствует.

По отзывам учителей и из наблюдений в работах опытной школы им. Горького и школы № 110 выясняется, что рассматривание модели тела, конструкции фигуры дает учащемуся четкое пространственное представление образа и позволяет делать зарисовки с натуры, т. е. развивает навыки в сопоставлении подлинной формы с условным ее изображением.

Наибольшую ценность имеют модели тел, их элементов (высота, диагональное сечение и т. п.) и аппараты, на которых можно собирать перед учащимися геометрические конструкции. Чрезвычайно полезны модели и установки, на которых демонстрируется движение.

Этот процесс при отсутствии привычки „видеть“ движение фигуры, вообразить фигуру, полученную, например, при вращении, — очень затрудняет учащихся. Часто они повторяют суждение о телах вращения, о построении симметричной фигуры без всякого представления существа явлений. В то же время просмотр в течение 20 мин. фильма „Образование поверхности вращения“ (автор проф. Н. Ф. Четверухин) вызывает определенный круг представлений и стремлений самим воображать, выдумывать, даже фантазировать. Мы уже не говорим о том, насколько велик бывает интерес у зрителей, как приковано их внимание к динамике явлений, к красоте правильной геометрической формы.

Речь идет не о замене работы по развитию абстрактного математического мышления и пространственных представлений, а об усовершенствовании педагогического процесса этого развития через использование наглядных пособий. С их помощью можно легче достигнуть поставленной цели.

Как общее правило, необходимость обращения к модели уменьшается по мере развития у учащихся пространственных представлений. Сперва, действительно, учащиеся набрасывают эскизы с натуры, затем чертят, опираясь лишь на свое воображение. В дальнейшем только в сложных случаях встречается нужда снова обратиться к модели. Поэтому пользование пособиями требует от учителя индивидуального подхода к классу и к ученику.

Иногда учащийся так хорошо видит взаимное расположение элементов фигур, так ярко изображает их на плоскости, что никакого облегчения при помощи моделирования ему не нужно. В его чертеже удачно показано расположение частей конструкции, оттенены видимые и невидимые части, словом, налицо полная ясность в представлении исследуемого образа. По такому изображению нетрудно установить и обосновать необходимую закономерность и обобщить ее на все множество однородных фигур. Иными словами, *глядя* на полученную фигуру, при желании можно *видеть* только ее и представлять ее свойства во всем многообразии форм того же семейства. Позднее такому ученику удается свободно размышлять по поводу геометрического образа, возникающего с достаточной полнотой в его воображении.

Однако описанная схема восприятия встречается лишь у отдельных учащихся. Основная масса оперирует образами, показанными на чертеже учителя или учебника. Это крайне сужает развитие ученика, делает его беспомощным при решении задач и в будущей практической работе.

Таковы выводы многолетних наблюдений преподавания математики.

В тех случаях, когда относительно сложный образ собирается на глазах учащихся или анализируется по готовой модели, он воспринимается более осмысленно и глубоко.

Кроме того, сам процесс конструирования вызывает у учащихся интерес, привлекает их пристальное внимание. Зарисовки с натуры гораздо полезнее, чем срисовывание с доски: от них развивается глазомер, умение наносить пространственные фигуры на бумагу.

Оказалось, что *упражнение* в такого рода рассматривании пространственных фигур и их эскизов *развивает* воображение зрителя и *приучает* его в дальнейшем пользоваться только чертежом или представлять себе фигуру даже без него, как говорят школьники, „в уме“.

Словом, применение наглядных пособий по стереометрии приближает среднего ученика к приемам мышления его сильного товарища, а слабому—делает труд посильным и интересным.

Характерно, что развитые и одаренные учащиеся также с интересом рассматривают объемные конструкции, находя в них вещественное подтверждение своим помыслам и догадкам.

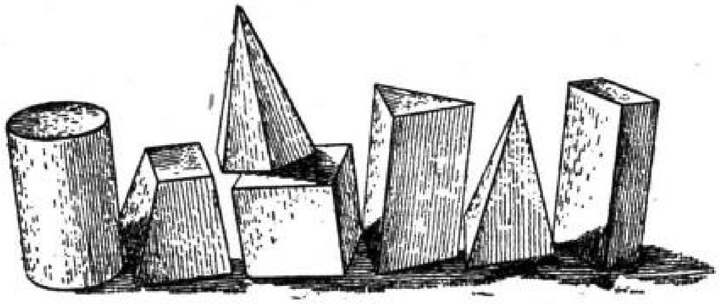
Недаром передовые учителя посвящают конструированию на приборах специальные уроки, или части их.

В первых главах стереометрии разбираются взаимные положения плоскостей, прямых и плоскостей и прямых между собой. Моделирование при изучении этих вопросов крайне необходимо, ибо здесь для ученика много нового, непривычного, много такого, что ему известно из жизненного опыта, но не оформлено, не осознано; наконец, полезно еще и потому, что пространственные фигуры трудно изображать на плоскости.

В частности, важно уметь отыскивать и указывать различные положения прямых и плоскостей на моделях тел: параллелепипедах (кубах), призмах, пирамидах и цилиндрах, усеченных пирамидах, конусах, частях сферы и др. Такое практическое упражнение приучает выбирать нужные сведения, видеть знакомые сочетания элементов в другой обстановке и готовит ученика к будущей работе с многогранниками и телами вращения.

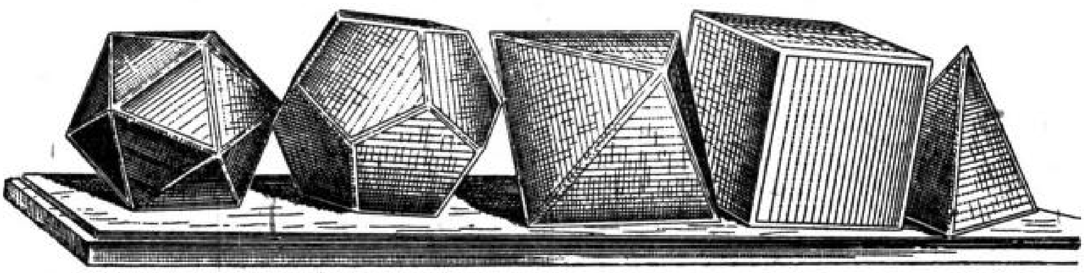
§ 1. Модели геометрических тел

В каждом отдельном случае приходится отбирать для демонстрации такое пособие, которое делает решение поставленной задачи наглядным, соответствует содержанию изучаемого вопроса, возрасту и развитию ученика. Так, оказалось, что сплошные модели тел, непрозрачные (деревянные, картонные) (фиг. 13) на первых порах дают



Фиг. 13

более четкие представления, чем, скажем, каркасные модели. В то же время эти последние являются наилучшими для последующего построения в них линейных элементов. Модели из стекла или плексиглаза хорошо иллюстрируют плоскости граней и очень удобны для наблюдений внутреннего пространства тел (фиг. 14 и 15).



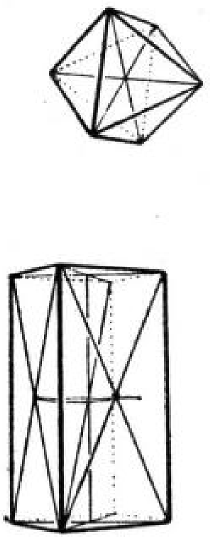
Фиг. 14

Среди наборов геометрических тел полезно указать набор, характерный тем, что в нем, помимо изолированных моделей, имеются комбинации фигур, например, подобные призмы (фиг. 16).

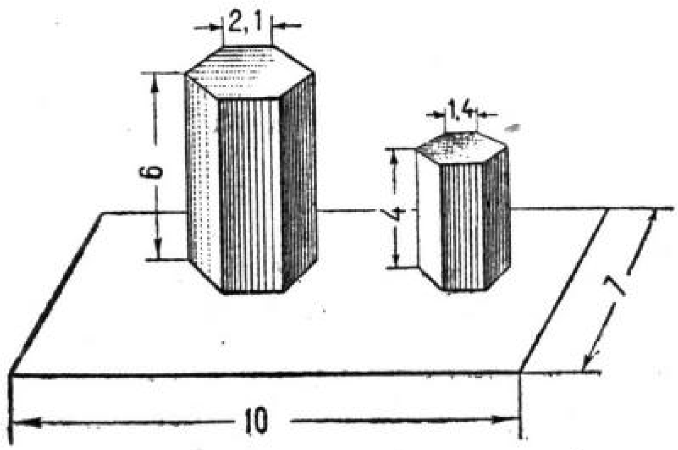
Следует отметить, что подобие плоских фигур весьма основательно изучается в школьном курсе геометрии, подобным же пространственным фигурам не уделяется должного внимания. Поэтому оказалось полезным показать эти модели. Кроме того, учащимся поручалось проверить пропорциональные соотношения линейных размеров моделей. Эта работа задерживала внимание учеников на представлении подобных тел и тем углубляла его.

В средних школах до революции чаще всего встречались каркасные модели, т. е. проволочные „скелеты" фигур. Модели эти не имели большого значения в педагогическом деле, ибо зрители с трудом составляли себе представление о форме тела: модели делались большого размера, и видны были, главным образом, просветы между ребрами.

В советской школе была изменена методика использования каркасных моделей. Наблюдения и изучение опыта школ (Институт школ Наркомпроса) показали, что к таким моделям следует обращаться в момент изучения элементов внутри тела, сечений в нем

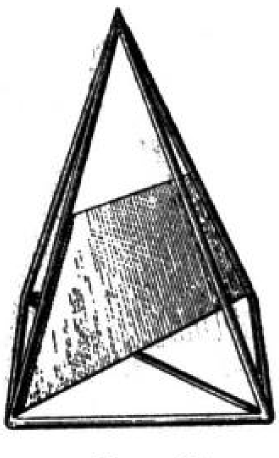


Фиг. 15

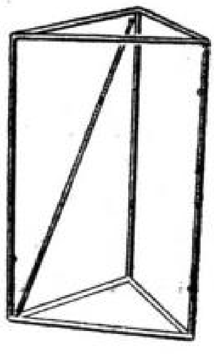


Фиг. 16

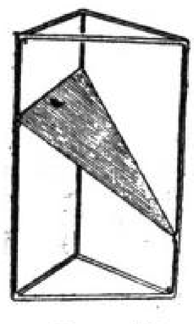
и т. п. Для этой цели сотрудник института Р. Н. Богданов разработал к моделям набор резиновых шнуров, плоскостей-вкладышей и с их помощью иллюстрировал конструкции внутри тела (фиг. 17, 18 и 19).



Фиг. 17



Фиг. 18



Фиг. 19

В этих предложениях правильно учтен характер работы с пособиями; для первого знакомства с формой каркасные модели непригодны; для анализа элементов и построений в пространственных фигурах—они незаменимы.

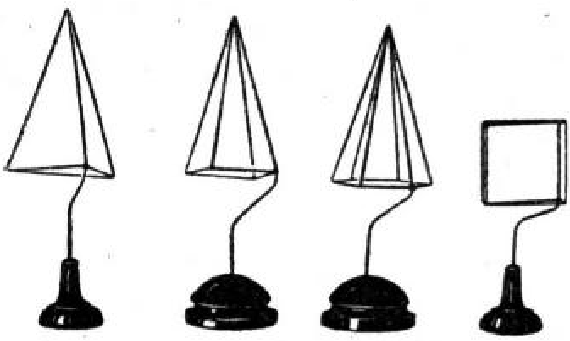
Институт школ разработал также более полный комплект каркасных моделей, чем обычно встречается в школах, а именно: кроме правильных и прямых фигур, сконструированы 18 типов моделей, главным образом, наклонных многогранных, т. е. таких, которые реже встречаются на практике. Для общего развития это крайне необходимо. Каркарс делался небольшим, чтобы целая фигура была легко обозрима. Проволока окрашивалась в белый цвет, и модель укреплялась на подставке. В таком виде, на фоне черной классной доски модель давала четкий образ фигуры.

В этом наборе, разумеется, возможны все построения, которые были предложены Р. Н. Богдановым (фиг. 20).

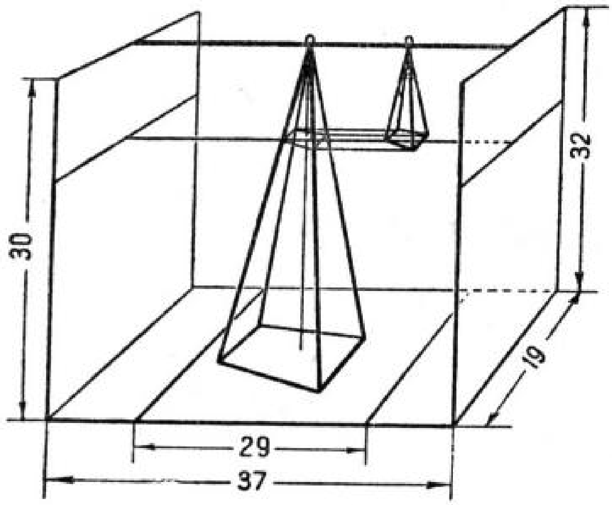
При изучении высшей математики часто пользуются моделями нитяных поверхностей. Не меньшую ценность они представляют и для средней школы. На „станке" легко собрать различные фигуры, в частности, подобные. Этим же целям служат коллекции готовых нитяных моделей, например, модель Ожаровского (фиг. 21).

Наибольший зрительный эффект производят очень простые, в конструктивном отношении, модели проф. Кулишера (фиг. 22).

Мы готовы всячески поддержать положительные отзывы учителей, о которых нам рассказывал автор и которые мы не раз слышали сами.



Фиг. 20



Фиг. 21

Поверхности образуются натянутыми цветными нитями. В приборе имеются шестиугольная призма, шестиугольная пирамида, четырехугольная пирамида, цилиндр, конус. На моделях призмы и цилиндра небольшим выдвижением крышки можно показать образование наклонных фигур.

Описанные модели, ввиду их демонстрационных достоинств и простоты сборки, следует рекомендовать каждой школе. Пользоваться ими можно при первом знакомстве с геометрическими образами (нитяные модели создают полную иллюзию тела) и при выяснении понятия поверхности как геометрического места прямых.

При зарисовках с таких моделей учащемуся легче выяснить, какие линии давать жирными, какие тонкими или пунктиром Элементарная техника изображения пространственных фигур на плоскости чрезвычайно помогает формированию геометрических представлений.

§ 2. Модели образования поверхности движением прямой[1]

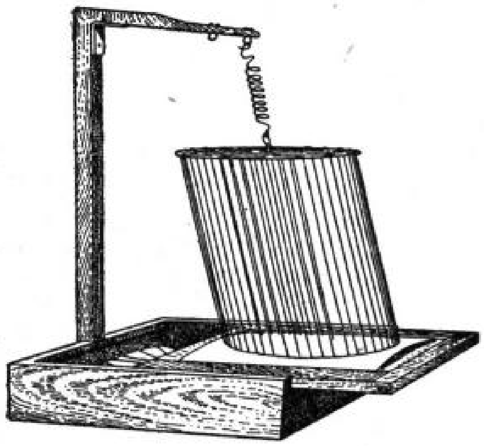
Изображенная на фигуре 23 модель, конструктивно несложная, позволяет выявить ряд интересных геометрических свойств, связанных с процессом движения.

На модели деревянный штабик AB перемещается параллельно самому себе, увлекая за собой поверхность плотной ткани. Вид поверхности будет зависеть от направляющей движения: на участке

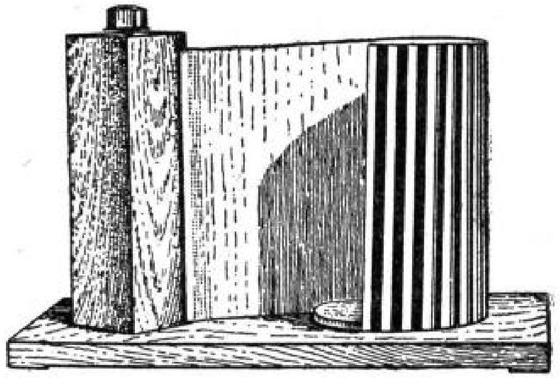
[1] Авторы П. Я. Дорф, В. П. Кардашев.

прямой направляющей образуется плоскость, на окружности—круговой цилиндр, на эллипсе—эллиптический и т. п. Для большей наглядности на поверхности ткани наклеены штабики, параллельные первому *(AB)*, чтобы иллюстрировать его различные положения.

Модель демонстрируется в момент рассказа об образовании поверхности движением прямой. Значение пособия в его динамичности и в разнообразии получаемых форм. И то и другое только по эскизу на доске представить себе трудно.



Фиг. 22

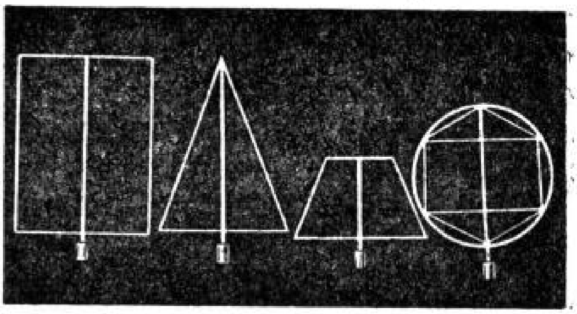


Фиг. 23

Определенная последовательность в демонстрации пособия поможет выделить значение элементов—образующей и направляющей. После анализа процесса образования поверхности движением учащиеся набрасывают небольшие эскизы с натуры.

Приходится пожалеть, что конструктивные затруднения не позволяют до сих пор построить подобную модель для ломаной направляющей. Наличие такой модели дало бы возможность обобщить такие тела, как цилиндр и призму, ибо они отличаются в своем образовании лишь характером направляющей.

Фиг. 24



Фиг. 25

§ 3. Модели для образования поверхностей вращения

Образование поверхности геометрического тела полезно проиллюстрировать круговым движением плоской фигуры (фиг. 24 и 25).

Металлические контуры закрепляются в центробежной машине и могут быть приведены в быстрое вращение. У зрителя должно получиться полное впечатление поверхности вращения.

Описанная установка общеизвестна, но не имеет распространения по школам. Объясняется это тем, что при демонстрации не всегда получается должный эффект. Если контур плохо центрирован, т. е. ось вращения не совпадает с осью симметрии, то получается впечатление размытой поверхности, ибо сама ось, при своем движении, описывает коническую поверхность.

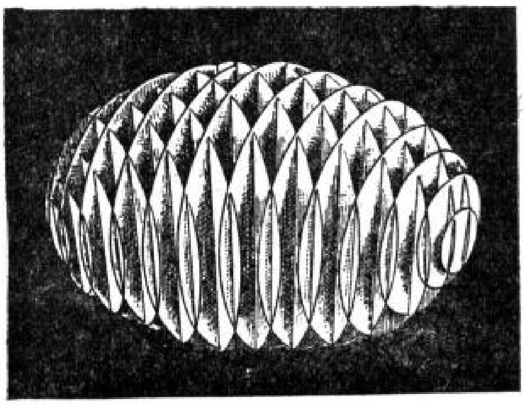
Институтом школ были проведены следующие усовершенствования этой полезной модели[1]:

1) контуры делать деревянными, придав штабикам несколько большее сечение;

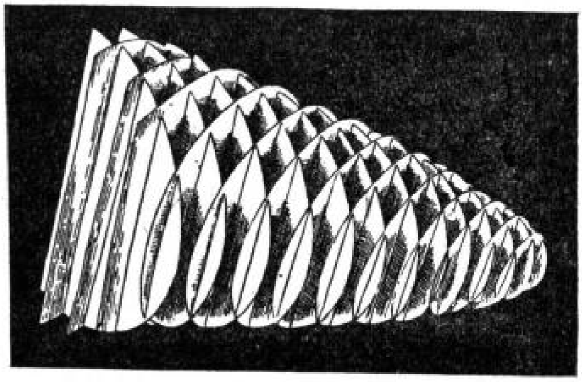
2) удвоить число штабиков для образующих;

3) окрасить их в яркожелтый цвет и демонстрировать на темном фоне;

4) осветить вращающий контур электролампочкой, помещенной в параболический рефлектор.

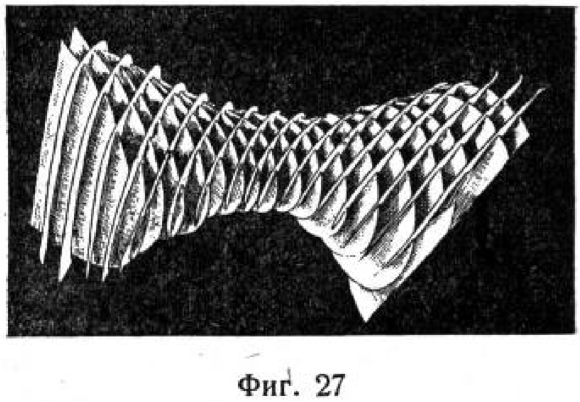


Фиг. 26

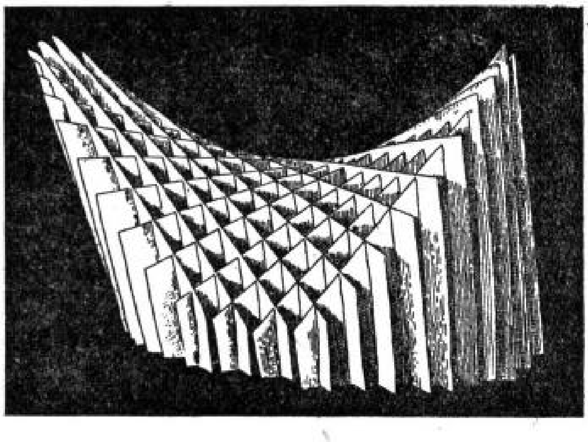


Фиг. 26а

Здесь уместно указать приспособление, предложенное лаборантом Московского городского педагогического ин-та Е. И. Красичковой. Вращающаяся модель освещается пучком света проекционного фонаря, куда вставляется поворачивающаяся щель цветного экрана. Это создает яркое впечатление и самой поверхности вращения и теневых сечений внутри ее.



Фиг. 27



Фиг. 28

Большим недостатком школьного обучения является отсутствие у учащихся перспективы в вопросах, изучение которых выходит за рамки программы. Так, например, в области пространственных фигур поверхность сферы служит пределом горизонта. В связи с этим следует отметить у учащихся большой интерес и живую ра-

[1] Авторы П. Я. Дорф, В. П. Кардашев.

боту воображения, когда им показываешь (с краткими пояснениями) поверхности второго порядка. Для этого могут быть использованы модели, состоящие из картонных плоскостей (типа „гармоник“) (фиг. 26, 27 и 28). На них хорошо видно, как из кругов получаются модели эллипсоида, параболоида и гиперболоида, а из прямолинейных образующих — модель гиперболического параболоида.

Более яркое впечатление оставляет кинофильм под заголовком: „Образование поверхностей“ (автор проф. Н. Ф. Четверухин).

В картине детально показано движение точки, прямой и весь процесс образования цилиндрической, конической и сферической поверхностей. Хорошо выяснена роль образующей и направляющей. Геометрические фигуры, благодаря художественному оформлению тенями и яркими светлыми полосами, не только полно и верно дают представление о форме, но и удовлетворяют эстетические запросы зрителей.

Просмотр фильма, его обсуждение в классе и зарисовки в тетрадях вполне подготовляют воображение учащихся к решению задач на тела вращения, где основная трудность состоит, обычно, в построении фигуры вращения.

Мы много раз демонстрировали этот фильм на уроке и иногда на математических вечерах, после докладов. Интересно, что процессом образования фигуры были заняты и старшие учащиеся (X класс), которые изучали эти вопросы в курсе геометрии, и ученики VIII—IX классов, которые были захвачены процессом движения, появления тела и красотой формы. Словом, всем учащимся фильм нравится, у всех вызывает интерес.

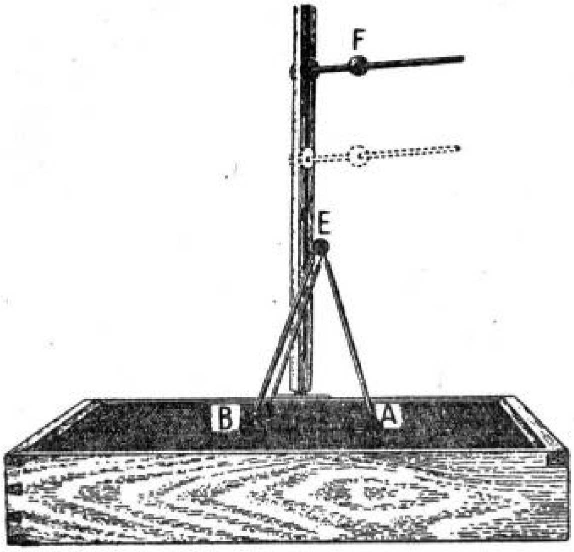
К сожалению, немногие школы используют это ценное наглядное пособие; мало того, не все учителя знают о нем, хотя в каждой районной фильмотеке пособие имеется.

§ 4. Стереометрические ящики

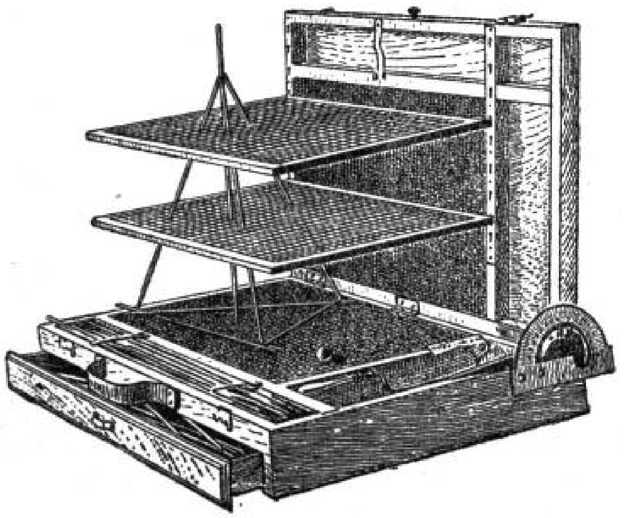
В Институте школ и в Институте методов обучения Академии педагогических наук проводились многочисленные исследования роли непосредственного конструирования при обучении стереометрии. Выяснилось, что высокая методическая ценность пособий типа стереометрических ящиков объясняется богатством иллюстраций, которые могут быть сконструированы на приборе. Большинство моделей к теоремам и задачам из раздела „взаимное положение прямых и плоскостей в пространстве“ собирается на глазах учащихся. Характерной чертой стереометрического ящика является также большая возможность варьировать построения на нем в зависимости от сложности вопроса и степени развития учащихся.

На фигуре 29 показано, как на приборе петербургского педагога Блюммеля легко можно конструировать различные сочетания точек, прямых и плоскостей. Моделями точек служат изящные пробковые шарики, которые производят такое же впечатление, как „точки“ на чертежах некоторых лекторов. От такой „выпуклости“ и самый чертеж выглядит трехмерным. Стальные стержни — модели отрезков прямых, фанерные и металлические пластины с иглами для крепления — модели плоскостей. Основание — пробковый мат — для крепления стальных стержней различной длины, плоскостей. Подвижной кронштейн (F) позволяет изображать точку (вершину пирамиды и др.)

на различной высоте. Ящик демонстративен по размерам, очень удобен благодаря пробковому основанию. Зарисовки с такой натуры западают в сознание полно и надолго. Мало того, так проработанные представления служат отправными пунктами при самостоятельной работе воображения.

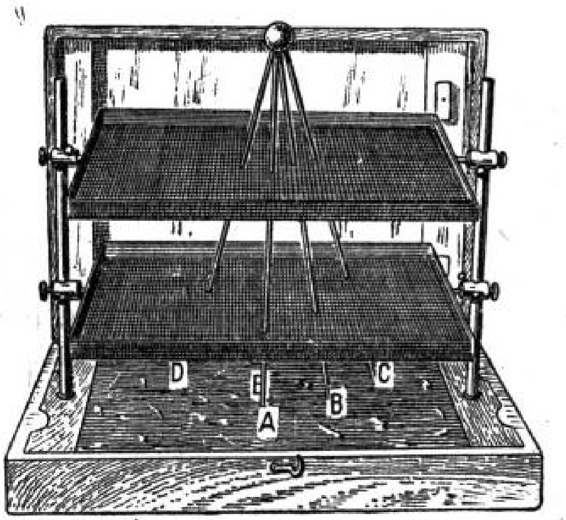


Фиг. 29

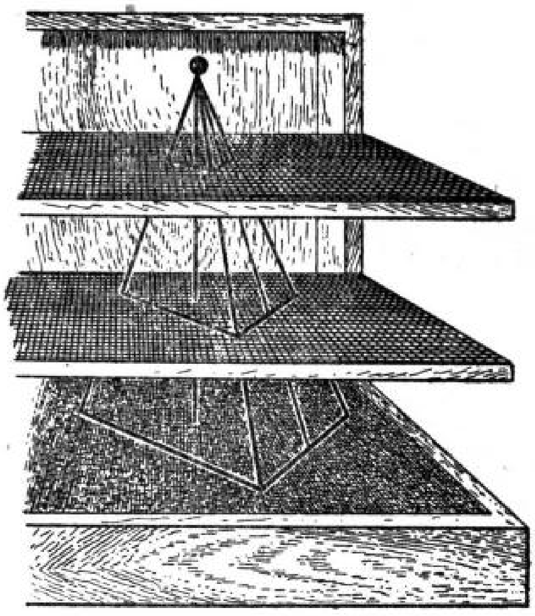


Фиг. 30

Стереометрические ящики Теннера[1], Гурвица и Гангнуса[2] (фиг. 30, 31 и 32) отличаются техничностью своей конструкции; в них имеется три сетчатые плоскости для образования сечений тел, все крепления сделаны солидно, детали никелированы, штабиков много, окрашены они в различные цвета. В этих условиях возможны различные построения.



Фиг. 31



Фиг. 32

Немало возражений приходится слышать от учителей и методистов против этих „сложных" приборов. Основное возражение — громоздкость модели отвлекает внимание от непосредственной сущности вопроса: привходящие, дополнительные факторы домини-

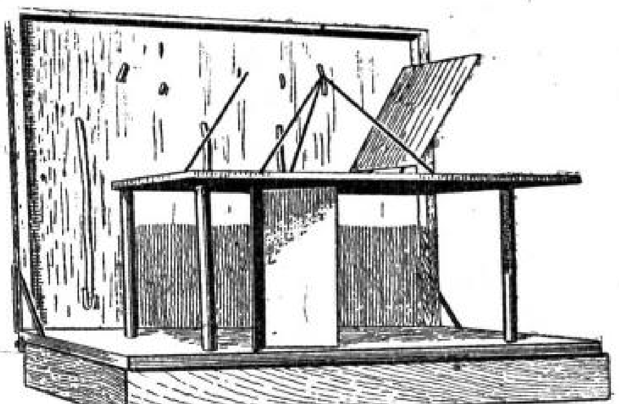
[1] Петербургский педагог, докладчик на Всероссийском съезде препод. математики, 1912 г.
[2] Московские педагоги, методисты.

руют над основным геометрическим образом. Высказанные соображения необходимо учесть. К техническому прибору стоит обращаться для иллюстрации сложного образа, процесса. К стереометрическому ящику учащиеся должны привыкнуть, тогда внешнее не будет отвлекать их внимания. Для этого они должны не только видеть его, но и конструировать на нем, должны овладеть техникой аппарата. Организационных возможностей к тому немало. Демонстрации к уроку готовят и показывают „лаборанты" из учащихся (лаборанты сменяются); кроме того, сроком на неделю, скажем, задается практическая работа на приборе: собрать то-то, исследовать решение, занести конструкцию в тетрадь.

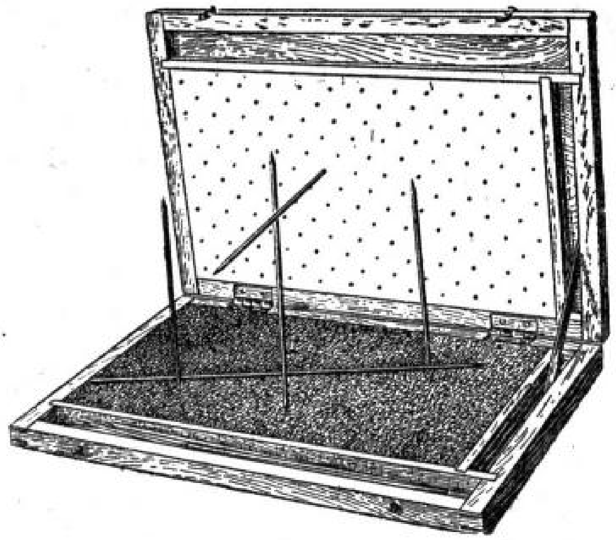
Такими приемами мы добивались полного внимания только к вопросам геометрии.

Техничным и сложным приборам следует противопоставить чрезвычайно простой и в то же время богатый деталями ящик талантливого русского преподавателя-конструктора С. П. Острейко (фиг. 33).

С другой стороны, простые вещи, которые ученик представит себе без модели, ни в коем случае не следует иллюстрировать на приборе: это тормозит, мешает восприятию, противоречит задачам геометрического развития, порождает у зрителя отрицательное отношение к наглядным пособиям и к демонстрации их.



Фиг. 33



Фиг. 34

Индивидуальный стереометрический ящик. Стремление дать возможность каждому ученику обратиться к конструкции нашло интересное воплощение у преподавателя московской школы А. А. Стражевского (фиг. 34).

Перед каждым учеником (или один прибор на парту) ставится небольшой ящичек с пробковым основанием и небольшим комплектом спиц. Крышка ящика закрепляется под острым, прямым или тупым углом; в ней большое количество отверстий для крепления спиц (или она тоже пробковая). В особом отделении ящика находится комплект металлических стержней (спиц) разной длины.

На таком приборе учащийся монтирует необходимую модель, конструкцию, например, к задаче о прямой, перпендикулярной к двум скрещивающимся прямым. Учитель ставит задачу. Учащиеся, решая ее, собирают модель. При этом: разнообразие положений у товарищей; медленность процесса, задерживающая внимание; наглядность—все это черты, воспитывающие пространственное воображение.

Уместно вспомнить суждение В. И. Ленина („Философские тетради", т. XIII, стр. 41).

„Ощущения есть действительно непосредственная связь сознания с внешним миром, есть превращение энергии внешнего раздражения в факты сознания".

Иногда учитель наносит на доску с помощью цветных мелков эскиз к теореме. Учащиеся разбирают построения. Большинство ясно представляет себе вспомогательные треугольники прямо по чертежу. Некоторые учащиеся обращаются к прибору.

На вопрос к ним: „Зачем они это делают?", ответы были такие: 1) яснее; 2) интересно. Значит, строить интересно, это позволяет представлять, воображать.

Важно только, чтобы все эти виды развития давались в нормальных гармоничных дозах; тогда наш ученик будет силен и в области абстрактных представлений и в условиях реальной действительности.

Описанное пособие доступно всякой школе.

§ 5. Наборы пособий по геометрии

При изучении опыта работы школы среди комплектов пособий встречались наборы, включающие конструкции как по планиметрии, так и по стереометрии. В авторских объяснительных записках такие коллекции именуются „универсальными". Мы опускаем этот эпитет как тенденциозный, но считаем необходимым выделить такой вид пособий в особую группу.

Конструированием наборов по геометрии занимаются многие учителя, методисты, инженеры. Приходится поражаться разнообразию и находчивости авторов.

Опишем один из таких наборов[1].

В основе конструкции и содержания „Набора" лежит ряд принципиальных положений, изложенных во введении. Целесообразно, однако, здесь привести некоторые дополнительные соображения.

1. В коллекцию набора следует включать детали, материалы, инструменты, с помощью которых учитель может собрать собственную модель, а не только предусмотренную конструкторами.

2. Показ моделей необходимо производить в условиях, дающих наибольшее зрительное воздействие на ученика. В этих целях ящик для хранения деталей набора полезно сконструировать так, чтобы крышка его служила демонстрационной площадкой.

3. Многочисленность объектов набора и небольшие размеры ящика требуют строгой рационализации в размещении и хранении содержания набора. Для этого весь комплект рассортирован по особым отделениям, футлярам, гнездам.

4. Включение всех деталей и материалов в один ящик позволяет переносить набор из одного класса в другой.

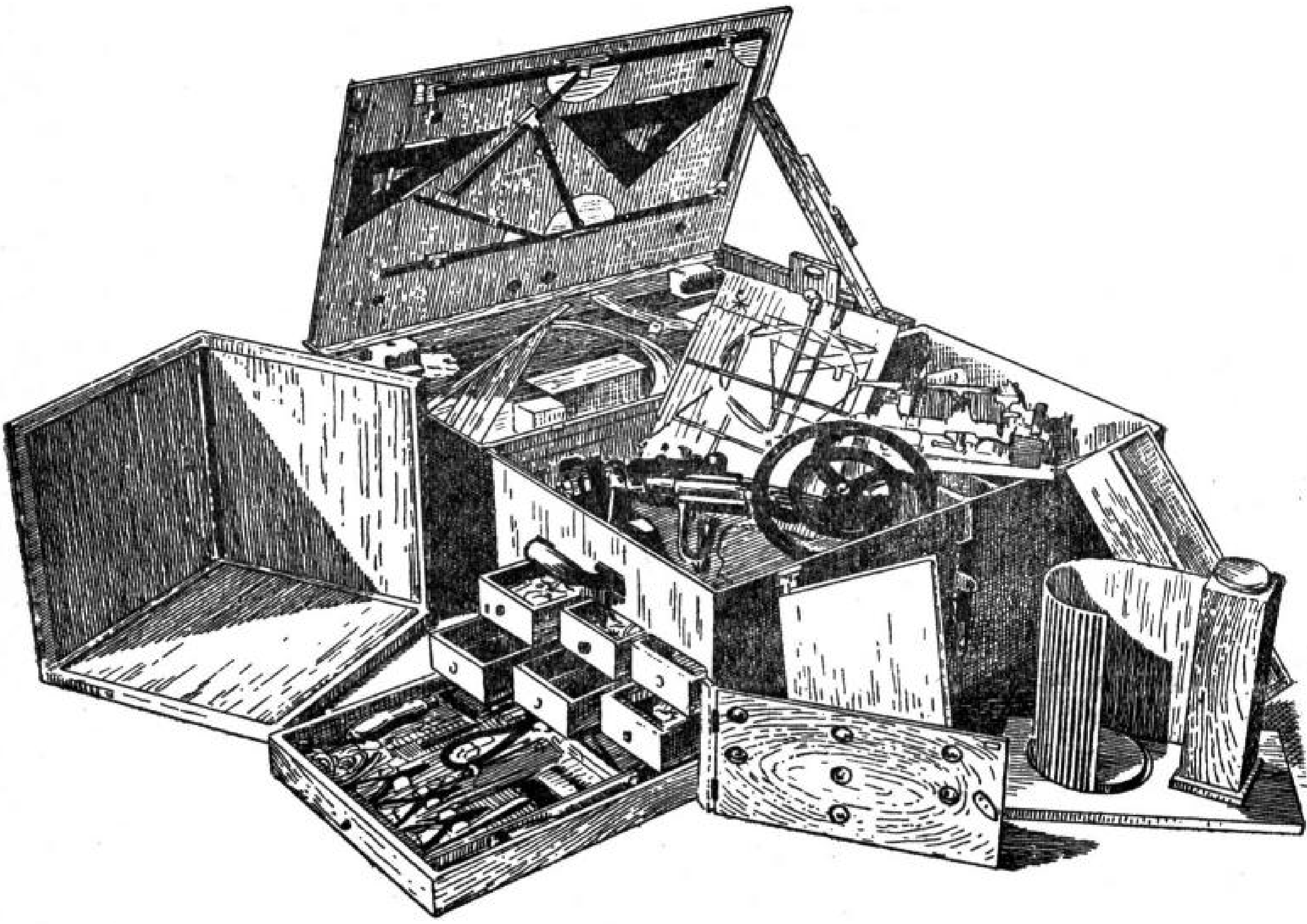
5. Набор рассчитан для демонстрации некоторых образов планиметрии и взаимных положений точек, прямых и плоскостей, а также отдельных пространственных фигур.

---

[1] **Авторы П. Я. Дорф и В. П. Кардашев. Набор утвержден кабинетом математики Ин-та средних школ.**

Вся коллекция набора помещена в деревянный ящик (размером 70×40×30 *см*), который одновременно служит местом для хранения деталей и площадкой для монтирования моделей.

На снимке дан общий вид и содержание основного набора деталей ящика (фиг. 35).



Фиг. 35

Предлагаемый набор не ставит себе задачи—дать тот или иной комплект пособий; его назначение — предоставить возможность педагогу или учащемуся сконструировать всякую нужную модель для иллюстрации геометрического образа. Из этих соображений в наборе имеется большое количество деталей, из которых можно монтировать пособия, постоянно варьируя комбинации и соотношения этих деталей.

§ 6. Изучение параллельности в пространстве

Прежде всего на уроках выясняется, что речь идет о параллельности прямой и плоскости, прямых между собой и параллельности плоскостей[1]. Затем устанавливаются определения и признаки параллельности; там, где это возможно, анализируемые факты сопоставляются с предложениями планиметрии; все это или иллюстрируется деталями стереометрического ящика или показывается на готовых моделях. Приведем несколько конкретных примеров.

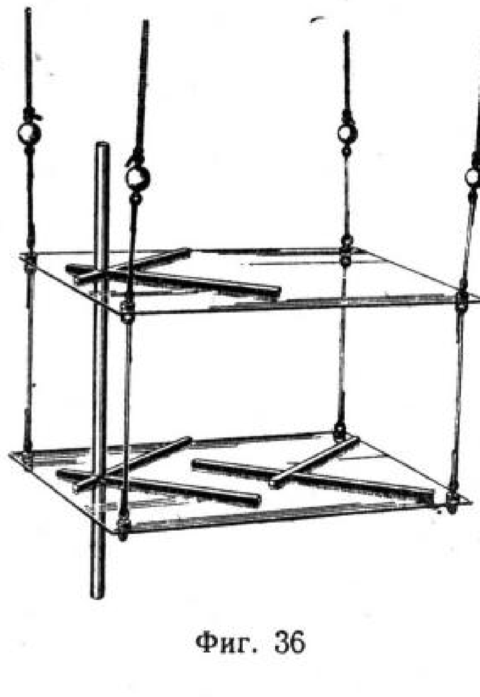
[1] В последний год автор пользовался учебником: Н. А. Глаголев, Элементарная геометрия, части I и II для VI—VIII и IX—X классов средней школы, Учпедгиз, 1945.

П р и м е р 1. З а д а ч а. *Точка вне плоскости; провести через нее прямую, параллельную заданной плоскости.*

После некоторых размышлений и зарисовки пробных эскизов, вопрос выясняется в общей беседе класса. Направление дается либо сообщением ученика, либо объяснением учителя. В общих случаях используются наглядные пособия: упругий (вязкий) мат изображает основную плоскость; в ней укрепляется стержень с шариком на конце; в отверстия шарика продеваются два стержня, которые располагаются как раз параллельно заданной плоскости (так просверлены отверстия). Здесь становится ясным, что искомых прямых бесчисленное множество, и все они лежат в плоскости, параллельной данной. Последний факт иллюстрируется пластиной, которая надевается на шарик и располагается на стержнях. Предложение, что всякая прямая, вне этой плоскости, не параллельна основной плоскости, доказывается применением чертежа. В заключение редактируются все необходимые выводы и обобщения. На чертежах и б е з н и х разбираются различные случаи решенной задачи.

П р и м е р 2. *Если две пересекающиеся прямые, лежащие на одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим на другой плоскости, то данные плоскости параллельны* (фиг. 36).

На двух параллельных плоскостях стереометрического ящика нетрудно разнообразить условия теоремы, а именно: взять две пересекающиеся прямые; два непараллельных отрезка, но не имеющих точки пересечения; отрезки под разными углами (острый, прямой, тупой); наконец, отрезки как раз те, которые изображают плоскость в виде параллелограмма и т. п. Такое многообразие страхует учащихся от шаблона представлять себе теорему в изображении учебника или чертежа учителя. По этому же поводу крайне удачны были построения на гранях куба, призмы и т. п.



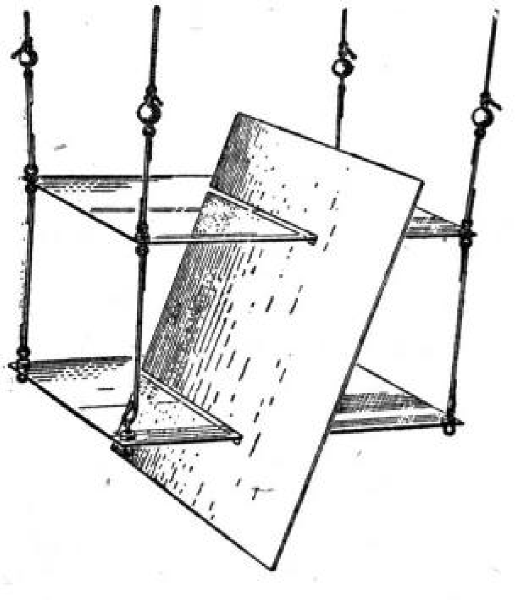
Фиг. 36

Далее оказывается, что условие теоремы: „пересекающиеся прямые на одной плоскости соответственно параллельны...“ запоминается и произносится учащимися часто недостаточно осмысленно, они не понимают смысл ограничения в условии „пересекающиеся“ и не видят, что параллельные прямые на плоскости могут быть соответственно параллельны прямым на другой плоскости, а сами плоскости в это время пересекаются. Для выработки общих представлений зрительные образы моделей, подкрепленные чертежом, оказывают незаменимую услугу. Опыт показывает, что иллюстрации только рисунками слишком однообразны и для стереометрии недостаточны.

П р и м е р 3. *Две параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым.*

Это предложение хорошо иллюстрируется тремя моделями плоскостей, из которых одна имеет два параллельных прореза. В них вставляются другие плоскости. Линии сечения хорошо видимы.

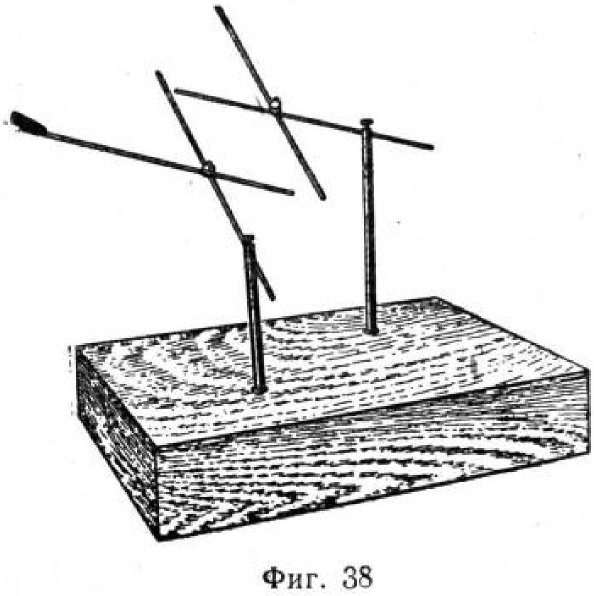
Здесь можно воспользоваться и двумя подвешенными стеклянными моделями (фиг. 37), на которые с помощью прорезов надвигается секущая плоскость. Число иллюстраций зависит от развития и подготовки учащихся: оно может быть умножено и сокращено. В частности, в сильном классе при повторении или опросе мы иногда требовали от ученика не чертежа, а построения на модели. Конструирование по поводу теоремы или задачи вызывало оживление, выдумку и находчивость.



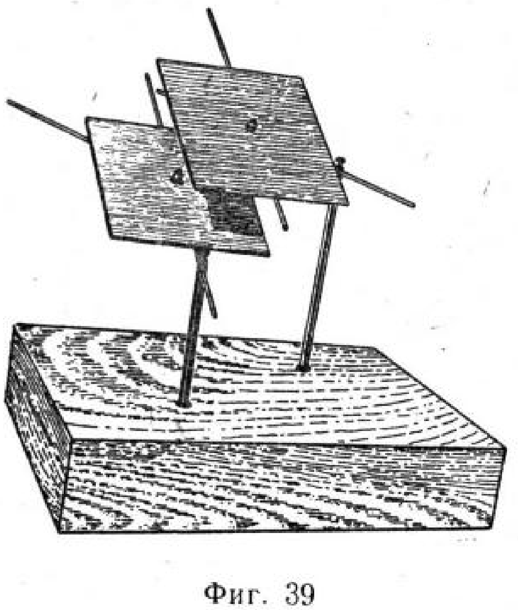
Фиг. 37

Пример 4. Наиболее эффективными оказываются построения моделей при решении задач, представляющих значительные конструктивные трудности. Например, пусть надо провести параллельные плоскости через две скрещивающиеся прямые. На приборе последовательным креплением стержней производится все построение. Заключительный шаг— на модели прямых кладутся две пластины, их параллельность зрительно вполне очевидна (фиг. 38 и 39).

Этим можно ограничиться в использовании наглядных пособий при изучении вопроса о параллельных. Действительно, параллельность прямых в пространстве легко выяснилась непосредственными рассуждениями, опираясь лишь на воображение и на чертеж. Учащиеся самостоятельно сводили вопрос к планиметрии и обобщали его на пространство. В заключение редактировалась аксиома параллельности.



Фиг. 38



Фиг. 39

При изучении параллельности плоскостей также все проходится быстро, схватывается с первого взгляда, по некоторым намекам. Наблюдения над учащимися убедили нас, что у них, благодаря работе с наглядными пособиями, накопились опыт, навыки видеть, схватывать, рисовать. Поэтому все построения ведутся сразу на чертеже.

§ 7. Изучение перпендикулярности в пространстве

Прежде всего необходимо пояснить самое понятие перпендикулярности в пространстве, ибо определение планиметрии может быть использовано лишь косвенно, после некоторых дополнительных условий. Для этого на стереометрическом ящике укреплялся стержень, перпендикулярный ко всем лучам, которые постепенно располагались веером на плоскости; так иллюстрировалось понятие перпендикуляра к плоскости. Далее делается чертеж. Ограничение: „ко всякой прямой, проходящей через след...“ позднее, когда появятся углы между скрещивающимися прямыми, будет снято. Затем так естественно было установить признак перпендикулярности прямой к плоскости, сведя требование „ко всякой прямой...“ к требованию „к двум прямым“. Применение модели при доказательстве данной теоремы варьировалось в самых разнообразных формах.

В 1940 г. директор Львовского института усовершенствования учителей т. Вайнштейн присутствовал на уроке IX класса школы № 204, где разбиралась теорема о двух перпендикулярах. После урока в интересной беседе выяснилось, что сперва гость решительно возражал против отклонения от распространенного приема собирать модель во время доказательства теоремы, но позднее согласился, что учащиеся настолько свободно представили себе все построение только по чертежу, что совершенно достаточно было продемонстрировать изящную готовую модель только после доказательств. Ее роль свелась к подкреплению образов, созданных на уроке.

Еще меньше оснований пользоваться объемными пособиями при доказательстве теоремы о трех перпендикулярах — обоснование связи между прямой на плоскости, перпендикулярной к ней наклонной и ее проекцией. Для этого совершенно достаточно хорошего чертежа цветными мелками. В отдельном случае модель можно собрать из деталей стереометрического ящика.

Также легко школьники усваивают соотношение между наклонными и их проекциями, поэтому все рассуждения здесь можно вести, опираясь только на чертеж. Теорема о них известна из планиметрии; в пространстве появляются наклонные в различных плоскостях, поэтому бывает иногда полезно на подвижной модели (фиг. 40) свести их в одну плоскость, после чего вывод становится очевидным.

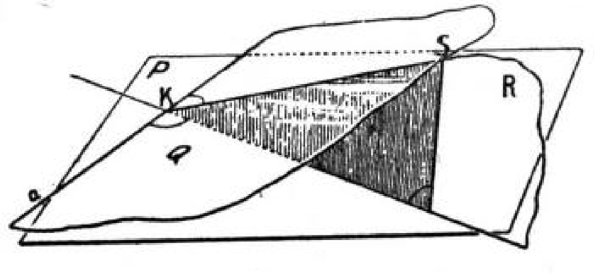
При изучении первых предложений стереометрии учащиеся отмечают, что теоремы и свойства несложны каждая в отдельности и трудны все вместе: они недостаточно характеризуются какими-либо различиями. Поэтому так настоятельны и многообразны стремления учителей, методистов, авторов руководств, статей — выработать наиболее удобную для усвоения систему.


Фиг. 40

Из опыта своей работы и наблюдения уроков вообще мы пришли к выводу, что здесь дело зависит во многом от задержки внимания ученика на построении, на внешнем виде конструкции, на варьировании положений, на изображении фигуры на плоскости. Эти моменты и дают возможность, пользуясь пособиями и чертежами, выяснить более глубоко черты сходства и различия. Зритель (слушатель) невольно обобщает, сопоставляет их, запоминает и усваивает. Например, как убедительна демонстрация вращающейся плоскости, заключающей в себе перпендикуляр к другой заданной плоскости. Недаром после этого не бывает сомнений в том, что плоскостей, проходящих через перпендикуляр к основной плоскости, бесчисленное множество, и все они образуют прямые углы с нею. Особенно сложной кажется обратная теорема о том, что перпендикуляр к плоскости весь лежит в плоскости, перпендикулярной заданной, если у него с второй плоскостью имеется общая точка. Этих затруднений не бывает, если элементы чертежа одновременно собирать на модели и чертить на доске. Кроме того, бесспорно, что научить видеть, пространственно воображать, обобщать представления можно не только упражнениями в рисовании, но и в лепке, в моделировании. В этих целях мы иногда целый урок посвящали конструированию. Опишем один из них.

В класс приносится из математического кабинета 30 малых стереометрических ящиков; каждый из учащихся получает отдельный прибор (индивидуальный стереометрический ящик, фиг. 43).

Предлагается из точки вне плоскости опустить на нее перпендикуляр. Одни строят фигуру по образцу учебника, другие предлагают иной прием, который особенно эффектен на приборе. Берутся модели плоскости и точки вне ее (фиг. 41).



Фиг. 41

На плоскости проводится произвольная прямая a; через a и S проводится плоскость Q, в которой опускается перпендикуляр SK из точки S на прямую a; перпендикуляр SK и его проекция в плоскости P определяют новую плоскость R, в которой уже не сложно провести искомый перпендикуляр.

Один ученик строит модель на демонстрационном стереометрическом ящике, остальные на своих малых.

После критического анализа отобранные конструкции зарисовываются каждым учеником в том виде, как это ему представляется. В заключение учащимся предлагается представить себе весь ход построения без модели, без чертежа, закрыв глаза.

К такого рода упражнениям было отнесено решение задач:

в точке на прямой построить плоскость, перпендикулярную к прямой; через точку провести плоскость, образующую линейный угол данного двугранного угла (рассмотреть различие положения точек) и др.

В планиметрии из точки вне прямой можно опустить на нее единственный перпендикуляр, а в пространстве? Довольно быстро и единодушно „устанавливается", что в пространстве такой перпендикуляр тоже один. Тем интереснее убедиться, что после введения скрещивающихся прямых, таких перпендикуляров сколько угодно. Это подтверждается на модели.

Последние два года, по инициативе проф. Н. Ф. Четверухина в средних школах были поставлены задачи на построение в стереометрии, отличные от указанных выше и от принятых в школе. Если прежде выяснялись в о з м о ж н о с т ь построения, с у щ е с т в о в а н и е решения, то новые задачи ставили себе целью, кроме того, п р о и з в е с т и с а м о е п о с т р о е н и е. Названы они были з а д а ч а м и н а проекционном чертеже. Для их решения потребовалось введение некоторых условий: основная плоскость, направление проектирования и задание всякой точки A (A_1) вместе с ее проекцией на основную плоскость (см. статью Л. В. Федорович и М. Х. Кекчеевой).

В 1945/46 уч. г. опыт решения этих задач проводился (в частности) в IX классе школы № 110. Оказалось, что учащихся затрудняют:

1) особенности метода построения, его отличия;
2) анализ условий;
3) само построение на проекционном чертеже.

Работа значительно облегчилась, прояснилась при использовании стереометрического ящика, состоящего из моделей
плоскости (торфяной мат),
прямых (металлические стержни),
точек (бузиновые шарики).

Благодаря пособию, на котором построение производилось в натуре, получились вполне осознанные представления[1].

При дальнейшем решении такого рода задач мы старались видеть построение без чертежа, затем наносить его на плоскость; в более трудных случаях решение искалось на самом чертеже или предварительно собиралась модель и с нее делались зарисовки.

§ 8. Симметрия пространственных фигур

Иногда приходится слышать, что доказательство теорем методом симметрии приводит ученика к результату слишком просто, отчасти формально: „фигуры симметричны, следовательно они...“. Таким образом, все дело сводится к установлению симметрии фигур. Слов нет, что для получения необходимых выводов этот метод чрезвычайно силен, но при нем выпадает из учебного процесса целый ряд ценных размышлений. Возьмем простой пример о равенстве дуг, заключенных между параллельными хордами. Действительно, соответствующие точки дуг симметричны относительно диаметра перпендикулярного к хордам, следовательно дуги равны. Однако наряду с этим можно показать равенство дуг вращением соответствующего сектора и совпадением его с другим сектором. Приемы движения частей фигуры, совмещение их чрезвычайно полезны в педагогическом отношении.

Поэтому мы рассматривали метод симметрии как один из методов построения математических доказательств. В частности, если на уроке применялся один метод, то на дом поручалось придти к выводу, самостоятельно, использовав другой метод, и знать оба варианта рассуждений. При этом необходимо, однако, помнить, что в средней школе следует дать достаточно глубокое знакомство учащихся с видами симметрии.

В нашей практике это связывалось с группой представлений, живых образов из наблюдений пространства, с использованием подходящих конструкций и моделей.

На фигуре 42 приведен образец стеклянной модели плоскости, и симметричных относительно нее прямых и точек. Конструкция

---

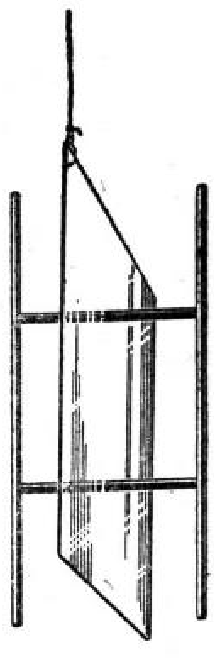
[1] Проф. Н. Ф. Четверухин провел урок в школе № 110. Для выяснения существа метода построения удачно был использован прибор.

собирается на глазах учащихся. Здесь также полезны установки, позволяющие иллюстрировать совпадение симметричных фигур при помощи вращения.

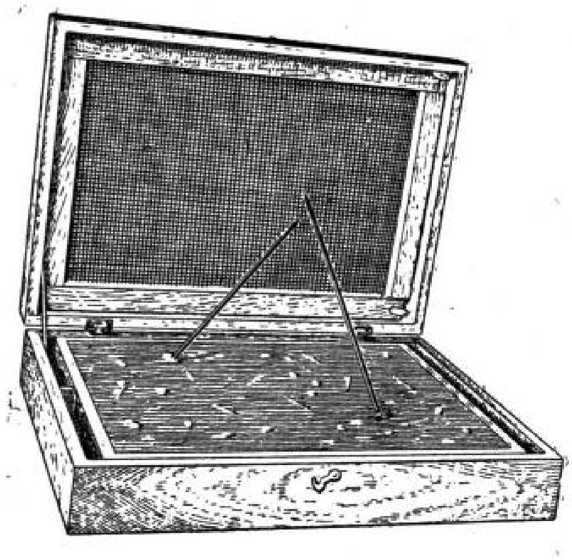
Показывалось обычно то, на чем развивались необходимые навыки, что было трудно без модели; а остальное выводилось при помощи чертежа, а иногда и без него. Например, предлагалась задача: „Даны две точки и прямая вне их. Найти на прямой точку, сумма расстояний от которой до двух заданных точек наименьшая“ (предполагается, что в исследовании решения будут разобраны различные положения точек). Необходимо было решить задачу только по чертежу (частный случай, когда точки лежат по разные стороны от прямой, рассматривался в уме). Поводы для демонстрации и количество их зависели от развития и степени подготовки учащихся.

Вопросы симметрии, которые мы моделировали, можно записать так:

Симметрия точки	**Относительно плоскости**	**Относительно оси**	**Относительно центра**
Симметрия прямой	„	„	„
Симметрия плоскости	„	„	„
Симметрия фигуры	„	„	„



Фиг. 42



Фиг. 43

Симметричные элементы полезно было определить в каркасных моделях тел (фиг. 43). Эта работа служит прекрасным упражнением, которое помогает усвоить понятие симметрии.

§ 9. Скрещивающиеся прямые

Образ скрещивающихся прямых и самый термин настолько непривычны учащимся, что они их плохо понимают и смешивают скрещивающиеся прямые с пересекающимися прямыми.

Без конструкции на стереометрическом ящике (или подобном приспособлении) трудно установить понятие угла между скрещивающимися прямыми и способы его построения. Так же для большинства учащихся полезно собрать на модели решение задач о параллельных плоскостях, проходящих через скрещивающиеся прямые, и об общем перпендикуляре между ними. Обычный небрежный показ карандаша и ручки (плохие модели отрезков) или единственная ссылка на ребра параллелепипеда комнаты, разумеется, недостаточны для создания полного впечатления. Здесь, кроме этого, уместно просмотреть и *зарисовать* различные положения стержней, штабиков на приборе.

§ 10. Изучение углов в пространстве

Описание угла в планиметрии как фигуры, образованной двумя лучами, не может быть перенесено на понятие угла прямой с плоскостью.

С другой стороны, это понятие чрезвычайно важно и нужно, ибо прямая действительно может быть по-разному наклонена к плоскости. Прямых на плоскости бесчисленное множество, и все они образуют различные углы с заданной прямой. Поэтому естественно введение условия, которое определит угол прямой с плоскостью. Все эти соображения недостаточно просто рассказать или показать на чертеже. Зато мы не знаем ни одного случая затруднений у учащихся по этому поводу, если понятие было выяснено на изящном и конструктивно простом пособии.

§ 11. Модель „Угол прямой с плоскостью"

На полированном планшете укреплен наклонный металлический никелированный стержень. Второй такой же стержень вращается в плоскости планшета (фиг. 44). Предлагаемая конструкция позволяет получить угол данной наклонной с *любой* прямой на плоскости.

Демонстрация этой подвижной модели приводит к необходимости введения понятия угла прямой с плоскостью как угла прямой с ее проекцией на плоскости. Двусторонний транспортир, прикрепленный к стержню на плоскости, наглядно показывает *переменность* угла наклонной с прямыми на плоскости и позволяет подметить, что угол наклонной с ее проекцией — будет наименьшим углом.

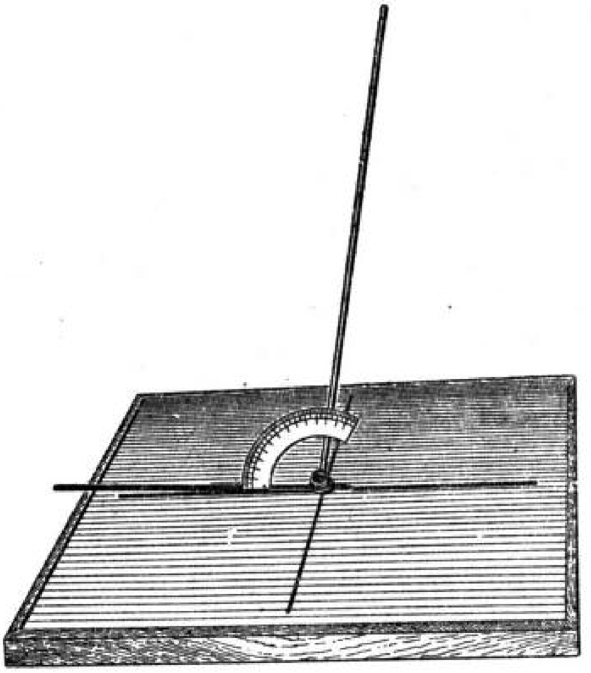
§ 12. Модель двугранного угла с линейным углом[1]

Единственный вопрос об изучении двугранных углов, нуждающийся в иллюстрации,— это установление связи между двугранными углами и их линейными. Для этого мы обычно пользовались стек-

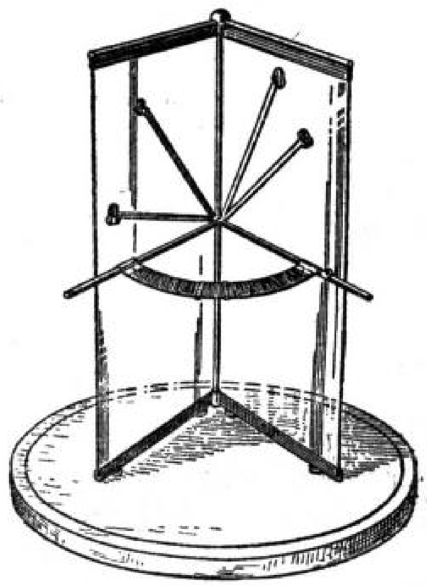
[1] Автор Д. Майергоз, конструктор О. Василенко, Киев.

лянной моделью двугранного угла с подвижным линейным (фиг. 45)

Основная часть модели — двугранный угол, образованный стеклянными пластинами. Угол закреплен на подставке. В некоторой точке ребра шарнирно прикреплены два металлических никелированных стержня, которые составляют линейный угол. Стороны этого угла связаны раздвижным целлулоидовым транспортиром. Для фиксации стержней (перпендикулярно или наклонно к ребру двугранного угла) на стеклянных гранях имеются небольшие запонки (крючки).



Фиг. 44



Фиг. 45

Описанная конструкция позволяет наглядно выяснить и установить ряд основных положений, которые без модели затрудняют учащихся. Обычно учащиеся считают линейный угол, образованный перпендикулярами к ребру, наименьшим среди других углов между лучами, а также неосознанно принимают и заучивают определение линейного угла как угла между перпендикулярами к ребру Для устранения указанных недоумений вырабатывается следующая методика демонстрации модели:

1) Строится линейный угол, наблюдателем производится отсчет и записывается на доске результат.

2) Сохраняя положение одного стержня, другой поднимается; при этом легко увидеть, что транспортир раздвигается, т. е. угол растет. Подтверждается это и записью отсчета.

3) Если теперь поднимать первый стержень, то угол, уменьшаясь, может стать равным первоначальному.

4) Перемещая оба стержня, получаем уменьшение угла до 0°, когда стержни совпадают с ребром.

Такими передвижениями стержней демонстрируется изменение величины угла, образованного прямыми в гранях двугранного угла с вершиной на ребре его. Назначение линейного угла — служить мерой двугранного — обязывает выбрать за таковую постоянную величину, а именно: линейный угол в плоскости, перпендикулярной к ребру. Его величина считается величиной двугранного угла.

§ 13. Многогранные углы

Представление о трехгранном угле вырабатывается у учащихся не сразу и в неполном виде. Это чаще всего трехгранный угол, состоящий из плоских прямых углов. Конкретизация вопроса сводится обычно к показу трехгранного угла в комнате (пол и стены), вследствие чего учащиеся не узнают трехгранных углов общего вида, ибо они не похожи на показанные в классе. Предлагается при объяснении и зарисовках на доске (в тетрадях) иметь перед глазами трехгранные углы, которые будут играть роль натуры.

Следует показать металлический трехгранный угол, который надевается на угол каркасной модели призмы. Такая демонстрация знакомит с образом угла и связывает его с конструкцией фигуры, призмы.

В этом же направлении проходило обычно и знакомство с формой многогранных углов.

Приведем еще пример того, как упрощается постановка вопроса, как легко выясняется существо дела, как ускоряется усвоение понятия трехгранного угла при демонстрации простой модели — набора склеенных плоских углов, образующих многогранный угол.

Вот первая модель: многогранный угол с разрезом по одному ребру. Простая развертка угла показывает, что сумма плоских углов обязательно меньше $4d$. После этого логическое доказательство теоремы, обобщающее наблюдение, занимает свое нужное место.

Далее берутся развертки, где сумма плоских углов или равна $4d$ или больше $4d$; оказывается, что при этом сложить выпуклый многогранный угол невозможно. Далее выясняется, что условие $\Sigma\alpha_n < 4d$ необходимо, но недостаточно. Если взять один плоский угол большим, а несколько остальных малыми настолько, что их сумма меньше первого, то многогранный угол построить невозможно.

Действительно, пусть дан четырехгранный угол с плоскими углами: α, β, γ, δ, тогда $\alpha+\beta>\xi$ (угол сечения)

$\xi+\gamma>\delta$ „ „

Или после замены получим $\alpha+\beta+\gamma>\delta$.

На опыте школы № 103 нам довелось наблюдать, как живо, интересно, эффективно прошел этот урок в классе, где применялись пособия, и насколько формальны знания, полученные в параллельном классе, где моделей не было.

§ 14. Изучение многогранников и тел вращения

Первый урок стереометрии в X классе посвящается многогранникам и телам вращения. Этот день бывает (и должен быть) событием, ибо наступает момент, когда будет изучаться форма, положение, размеры, построение пространственных фигур, с которыми ученик встречается в учебной практике и в жизни.

Кроме того, работа с многогранниками является для школьников экзаменом знаний всего предыдущего материала по планиметрии и началам стереометрии.

Частой ошибкой преподавания бывает прием последовательного и детального анализа отдельной фигуры, например, призмы, без предварительного ознакомления с разнообразием форм и их классификацией. Перед учащимися на нескольких столах расставлены призмы и цилиндры, шар и более сложные формы, эллипсоид и др., пирамиды и конусы, правильные многогранники, усеченные тела, производственные детали, предметы быта (спичечная коробка) и др.

Само здание, мебель, оборудование класса на этот день становятся наглядными пособиями.

В живой беседе учитель, опираясь не опыт и знания учащихся, распределяет тела на группы, в зависимости от их формы и свойств. Выводы и необходимые эскизы заносятся в тетради.

Далее рассматриваются различные положения тела. В пространстве для этого берутся (в качестве примера) два одинаковых шара; один находится на горизонтальном столе, а другой положен на наклонную плоскость. Разница в поведении шаров зависит от положения плоскостей в пространстве.

Затем из сравнения двух шаров с разными диаметрами выясняется роль размеров тела при подсчетах поверхности или объема.

Такого рода примерами можно подготовить учащихся к установлению основных целей геометрии: представлению формы тела, определению положения и размеров его, умению изображать его (строить, чертить), представлять геометрический образ без наглядных изображений.

Благодаря применению наглядных пособий для учащихся все становится яснее, все ими лучше усваивается, внимание длительно задержано на особенностях фигуры. На уроке привлечены элементы самодеятельности учащихся: в зарисовках, догадке, обобщениях, формулировках; урок проходит интересно, а овладение прочными знаниями дается легко и быстро.

Далее идет подробное изучение призм. В новом учебнике стереометрии Н. А. Глаголева первые параграфы посвящены наблюдению и установлению связи между числом вершин, ребер и граней, а в заключение выводится теорема Эйлера. Опытные учителя строили свой курс именно так, перенося некоторые из этих вопросов на занятия в кружках. В классе на этих уроках много разнообразных моделей из дерева и картона (стеклянные, оказывается, отвлекают внимание учащихся своей прозрачностью).

В частности, мы рекомендуем одно построение сделать из деталей стереометрического ящика. На плоскость кладется металлическая (картонная) модель многоугольника с необходимым числом сторон. В отверстиях его вершин укрепляются стержни — модели ребер; сверху на них надевается верхнее основание призмы. Постепенное конструирование фигуры из ее частей вызывает у учащихся четкие представления. Кроме того, можно сделать призму наклонной и показать дополнительными стержнями высоту, перпендикулярное сечение и др. Полезны здесь шарнирные модели параллелепипеда и куба.

§ 15. Изучение пирамиды

Дать определение пирамиды, начертить один образец ее (чаще всего правильной пирамиды), показать одну модель и затем перейти к доказательству теорем,— это такое начало изучения вопроса, при котором нарождается много неясностей, шаблонных и неглубоких представлений и несерьезных суждений.

На деле сначала следует сосредоточить пристальное внимание на ознакомлении с формой пирамиды, ее элементами и видоизменениями.

Для этого наилучшим приемом является работа с шарнирной моделью пирамиды.

Наблюдения за изменяющейся фигурой и зарисовки делают сложный образ знакомым и привычным. Многократный опыт в различных школах безусловно подтверждает, что такого рода преобразования фигуры подготовляют сознание ученика к тому, что он при слове „пирамида" (при желании) может воображать бесчисленное множество пирамид, что он, глядя на чертеж одной пирамиды, размышляет обо всех фигурах этого семейства.

Ученик подготовлен к тому, чтобы выделить из общего семейства их отдельные виды в соответствии с условиями задачи или теоремы.

§ 16. Модели при решении задач

Трудную задачу, например, случай сложного сечения тела, средний ученик сам может не решить; ему нужно объяснить, как следует подходить к такого рода задачам, как решать их. При объяснении основная трудность заключается в построении искомой фигуры; часто бывает, что по чертежу не получается полной ясности. Тогда необходимо обратиться к модели, которую последовательно строят перед учащимися или показывают ее в собранном виде; иногда модель представляет искомую фигуру с иным расположением деталей. Из обмена мнений по этому поводу у учащихся складываются четкие представления. После таких объяснений на модели и зарисовок с нее, учащиеся овладевают методом решения задач настолько, что в дальнейшем ограничиваются только чертежом в подобных задачах и задачах другого рода.

Не раз мы давали условие не в виде текста задачника, а в виде модели, предлагая выбрать и снять необходимые размеры с натуры или обозначить их буквенными символами. Ученику, например, задается вопрос — что нужно знать для определения показанного на модели сечения? Это бывает неожиданным после задач, где все нужное дано и так удобно расставлено, что даже вырабатывается „метод" решения — включать все заданные элементы, ибо в задачнике условия не могут быть переопределенными или неопределенными. Отсюда та беспомощность учащихся в вузе или на практической работе, где задачи и числа не подобраны под „круглый ответ".

§ 17. Стеклянные модели к задачам по стереометрии

При изучении стереометрии наибольшие затруднения вызывают построения сечений, образование поверхности движением линии и анализ положений одной фигуры относительно другой. Происходит это потому, что в запасе знаний и представлений учащегося нет подобных образов; мало дает для этого и небольшой опыт его практической жизни.

Отсюда возникает острая нужда в моделировании сюжетов стереометрии, встречающихся, главным образом, в задачах.

Лучшим материалом для моделей такого рода следует признать стекло, которому легко придать правильную форму, оно прозрачно. Среди опытов по изготовлению стеклянных моделей назовем работы Украинского научно-исследовательского института педагогики, который дал интересный по содержанию и прекрасный по оформлению набор.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В нашей стране наглядность признана одним из основных принципов современной педагогики. С исчерпывающей полнотой и ясностью это выражено в постановлении ЦК ВКП(б) о школе (1931 — 1932 гг.), где указаны направляющие идеи для непосредственной работы в школе.

К 1941 г. Советский Союз обладал рядом педагогических музеев, где достаточно полно были представлены все разделы математики (Москва, Ленинград, Курск, Воронеж и др.). Большинство педагогических институтов заботилось о накоплении наглядных пособий и изучало методику их использования.

В русской методической литературе появился целый ряд печатных и рукописных работ, посвященных вопросу наглядных пособий.

На различных конференциях методика применения наглядных пособий не сходит с повестки. В 1939 г. с большим успехом происходило республиканское совещание работников, интересующихся конструированием и методикой наглядных пособий.

К сожалению, война нанесла тяжелый удар делу: разрушены многие коллекции, еще мало производится пособий, нет новых литературных работ и т. д.

Но интерес и инициатива к наглядным пособиям живы. Так, проф. Н. А. Глаголев в 1945 г. предложил две новых модели о равновеликости, проф. Д. И. Перепелкин разработал уникальный набор полуправильных многогранников (Московский ин-т усовершенствования учителей); зав. кабинетом Московского городского педагогического ин-та Е. И. Красичкова приготовила интересные теневые модели на поверхности вращения; учителя Михайлов (Выкса), Безматерный (Чита), Капралов (Горький), Голищук (Таганрог), Лобанов (Ростов), Кожеуров (Москва) и многие другие выдвигают проекты новых пособий, изготовленных ими и проверенных в школе.

Восстанавливаются школьные математические кабинеты (школа № 422 Москвы и др).

Таким образом можно констатировать, что в области конструирования и изготовления наглядных пособий у нас:

1) есть оригинальные идеи и конструкции, отражающие их;

2) есть инициатива у практических работников и у представителей науки;

3) есть государственные указания к осуществлению этих идей;

4) наконец, есть организации (и средства), которым поручается проведение этого дела в жизнь.

Словом, налицо все условия, при которых будут развиваться теория и практика замечательного и большого дела дальнейшего усовершенствования наглядного обучения.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 21 · 1949

ОПЫТ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВООБРАЖЕНИЯ УЧАЩИХСЯ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ НАГЛЯДНЫХ ПОСОБИЙ

А. Д. ЗЕМЛЯНАЯ

Программа по черчению указывает, что одной из целей преподавания черчения является развитие пространственного воображения учащихся. Хорошо развитое пространственное воображение необходимо для освоения многих профессий; поэтому перед учителем черчения средней школы стоит важная задача — развивать у учащихся в процессе обучения черчению пространственное мышление, умение оперировать воображаемыми пространственными образами.

Ученик, пришедший в среднюю школу, имеет уже некоторый запас пространственных представлений. Задачей средней школы является дальнейшее обогащение и развитие этого запаса. Ученик, начинающий в VII классе изучать черчение, должен прежде всего научиться представлять в пространстве простейшие геометрические формы: параллелепипед, куб, призму, конус, цилиндр, шар. Мы начинаем с этих простых форм потому, что сложные по форме предметы обычно можно рассматривать как сочетание указанных простых геометрических фигур.

Для того чтобы хорошо изучить форму простейших геометрических фигур, ученику очень полезно самому делать их модели. Изготовление учащимися моделей не только обогащает запас их пространственных представлений, но и развивает их воображение.

К сожалению эффективность этого метода (моделирования) не дооценивается многими педагогами. К тому же и методика применения моделирования в процессе обучения черчению в должной степени еще не разработана и многим педагогам неясно, как и в каких случаях применять моделирование.

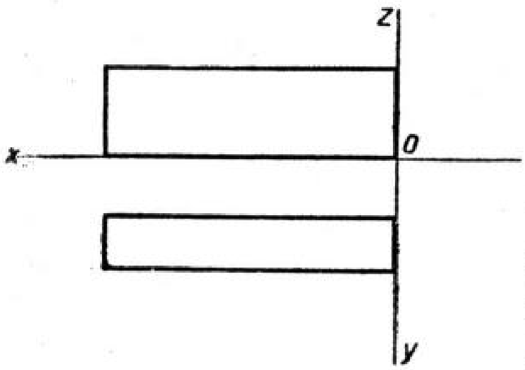
Я опишу свой опыт применения моделирования при прохождении некоторых наиболее трудных разделов курса черчения средней школы. В результате нескольких лет работы в школе я убедилась, что учениками VII классов особенно трудно воспринимается проекционное черчение, так как учащиеся, не имея еще должных сведений по стереометрии, впервые знакомятся с пространственными геометрическими соотношениями. Например, построение третьей проекции и кабинетной проекции по двум заданным ортогональным проекциям фигуры особенно затрудняло учащихся VII классов школы № 47 Фрунзенского района Москвы.

После предварительного объяснения, как получается в натуре и строится на чертеже третья проекция фигуры по двум заданным ее проекциям, учащимся было дано задание (черт. 1).

Правильный ответ изображен на чертеже 2.

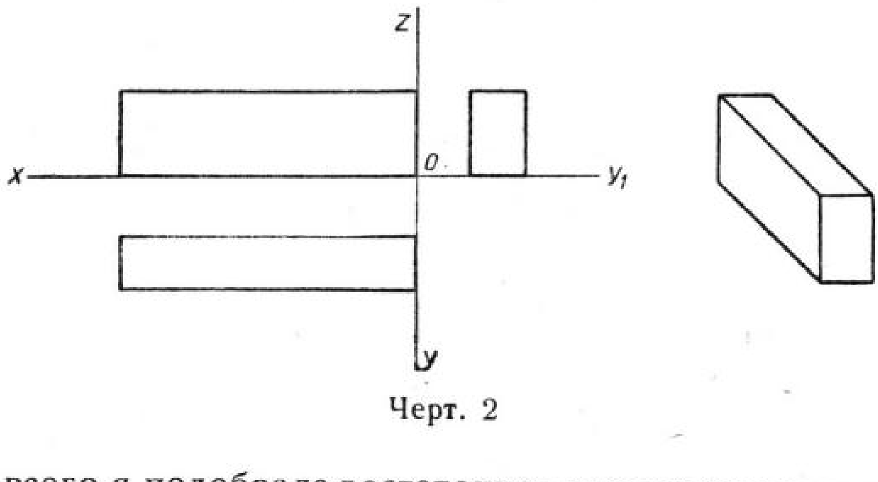
Однако многие учащиеся чертили, допуская грубые ошибки (черт. 3). Эти ошибки говорят не столько о незнании правил построения третьей проекции и наглядного изображения в кабинетной проекции, сколько о неумении представить в пространстве тот предмет, который задан двумя проекциями на чертеже 1.

Я решила в виде опыта провести в VII классах 47-й школы несколько упражнений, направленных к тому, чтобы дать учащимся навыки в осмысленном сопоставлении заданного проекционного чертежа с той пространственной фигурой, изображением которой он служит. В намеченных мною упражнениях требовалось по заданной кабинетной проекции некоторого предмета выполнить чертеж предмета в ортогональных проекциях на три плоскости, построить по этому чертежу развертку поверхности предмета, вырезать из плотной бумаги эту развертку, склеить модель заданного на чертеже предмета и сопоставить отдельные части предмета с соответствующими частями проекционного чертежа. Составляя такого рода упражнения, я опиралась на предположение, что навыки, приобретенные в результате указанной мной последовательной работы по выполнению задания, облегчат учащимся „чтение чертежа", т. е. отчетливое, детальное представление пространственной фигуры, изображенной на чертеже.



Черт. 1

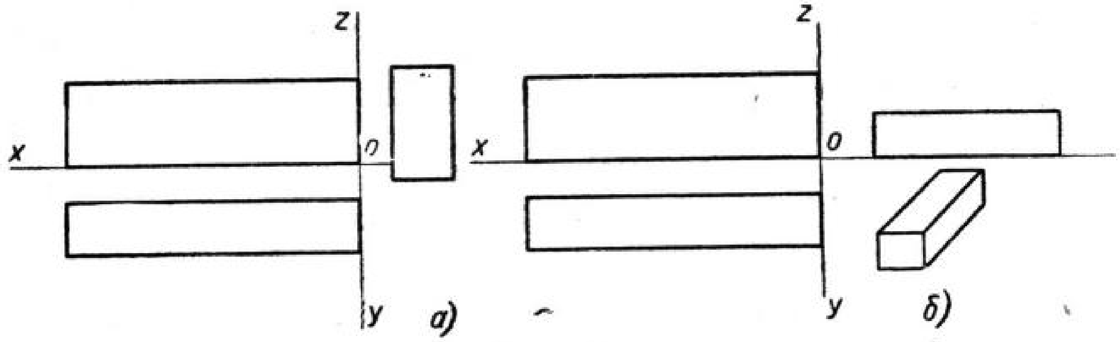
Перехожу к описанию подготовки и проведения самого опыта.



Черт. 2

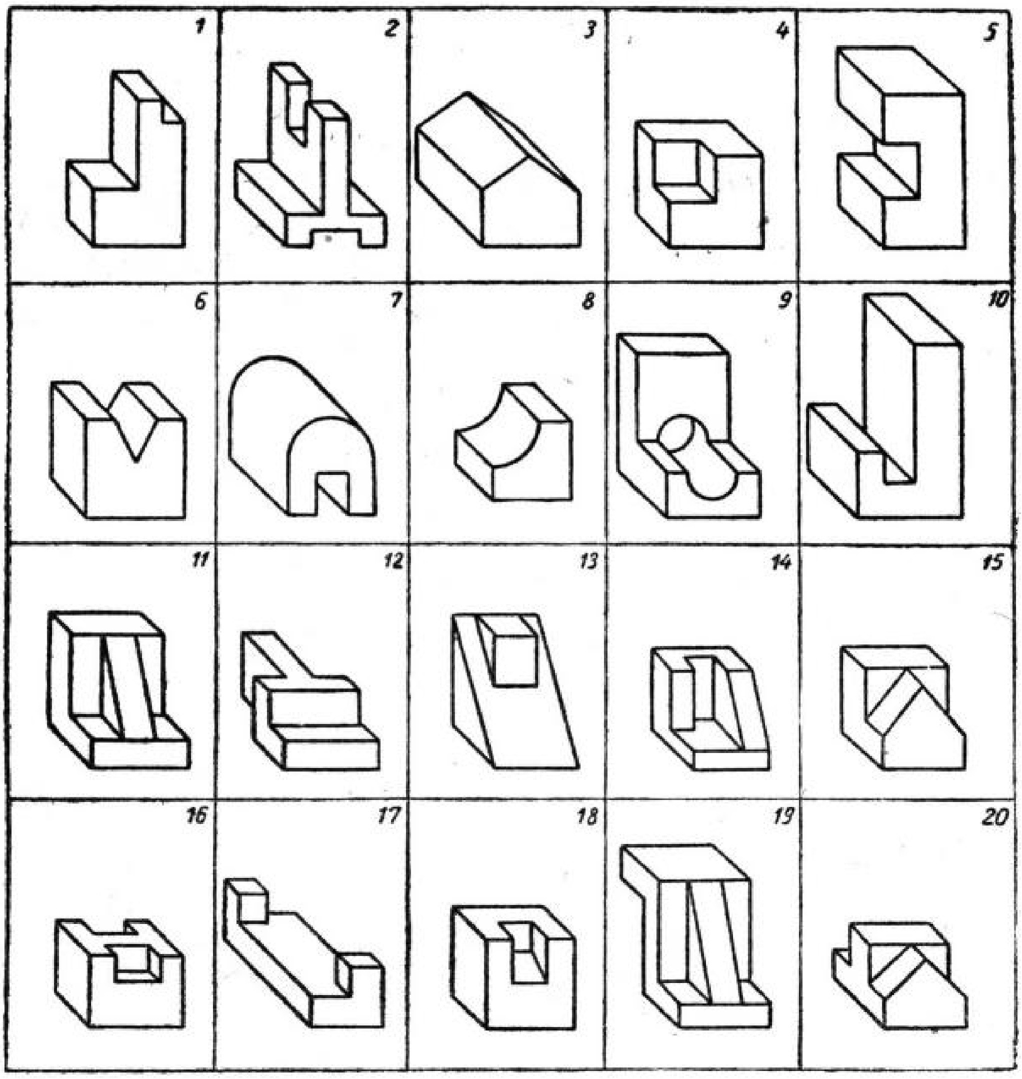
Прежде всего я подобрала достаточное число различных несложных по форме тел так, чтобы все они содержали в себе сочетания формы куба, параллелепипеда, призмы и цилиндра. Пирамиду и конус, как более сложные геометрические формы, я решила не вводить. Ниже (черт. 4) привожу примеры приготовленных для опыта карточек с изображением на них кабинетных проекций выбранных мною тел. Эти тела были вычерчены мною на карточках из плотной бумаги, размером 70 *мм* $\times$ 100 *мм*. На чертежах я проставила все необходимые размеры и раскрасила каждую карточку так, что вид данной фигуры спереди, вид сбоку и вид сверху имели разные оттенки одного и того же цвета.

Эту раскраску я сделала по тем соображениям, что оттененное указанным образом изображение воспринимается легче, чем однотонное, так как учащимся легче отличать переднюю часть фигуры от верхней и боковой. Позже, когда учащиеся научатся читать чертежи, необходимость в такой раскраске отпадет.



Черт. 3

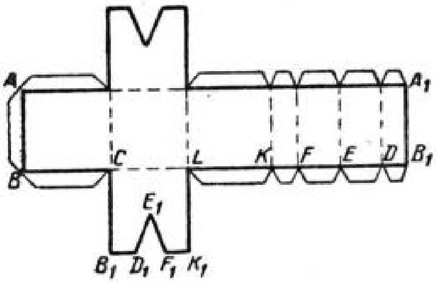
При изготовлении этих карточек я учла один важный для начинающих изучать проекционное черчение момент, изобразив фигуры в кабинетной проекции так, чтобы они казались видимыми с левой стороны. Такой методический прием облегчает построение третьей проекции и предупреждает часто встречающиеся ошибки.



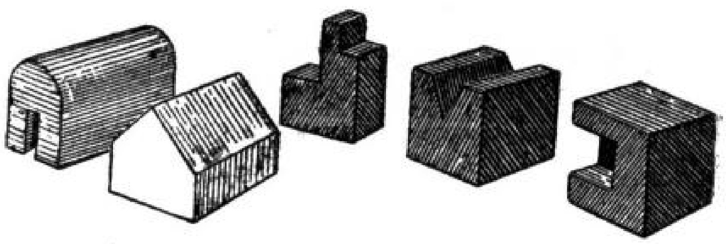
Черт. 4

Наконец, еще одно условие, на которое я считала необходимым обратить внимание, — это качество оформления карточек: как раздаточный материал они должны быть выполнены чисто, аккуратно, красиво. Это есть одно из обязательных требований, предъявляемых к любому методическому пособию.

После такой предварительной работы я приступила к проведению самого опыта. В школе было два седьмых класса. Из них я выделила один класс в качестве опытного и другой как контрольный (классы приблизительно равны по развитию). В опытном классе я раздала 18 карточек (присутствовало 36 учениц). Все чертили на форматках a-4 (203×288), имея весь необходимый чертежный инструмент. Давая задание, я предупредила учащихся, что они должны вычертить на своих форматках заданную деталь в ортогональных проекциях и в кабинетной в течение двух уроков. После первого урока все чертежи были мною собраны, а на следующий урок вновь розданы для продолжения работы. После второго урока, проверив и исправив ошибки, я вернула учащимся их работы и объяснила им их ошибки. Затем подробно рассказала на примере двух чертежей, как нужно строить полную развертку поверхности тела. Например, чтобы построить развертку фигуры № 6 (черт. 4), мы должны мысленно представить себе изображенный предмет пустотелым и разрезать его по ребрам AB, BC, BD, DE, EF, FK и KL и далее с задней стороны по ребрам, параллельным всем перечисленным. Развернув разрезанную поверхность предмета в одну плоскость, получим его полную развертку (черт. 5).



Черт. 5

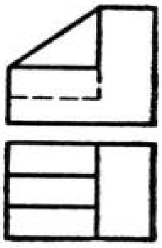

Черт. 6

После таких разъяснений мы построили развертку фигуры № 6, вырезали ее и, сложив по штриховым линиям перегиба, склеили и получили модель заданной фигуры. При этом я указала, что для того, чтобы иметь возможность склеить развертку, необходимо на чертеже развертки вычертить еще припуски в виде трапеций. Как и где вычерчивать эти припуски, полезно предоставить подумать и попробовать самим учащимся.

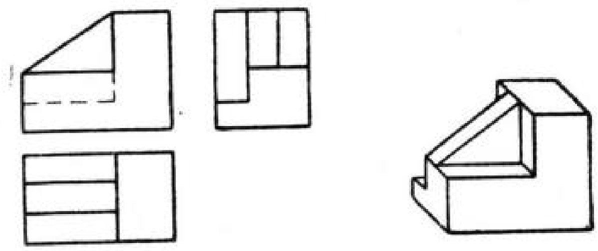
Учащиеся вычерчивали развертки на форматках a-3 в масштабе 2:1, т. е. в два раза увеличивали все размеры по сравнению с размерами чертежа. Это делалось по тем соображениям, что, во-первых, более крупные модели клеить удобнее, а во-вторых, я поставила целью использовать впоследствии все сделанные модели как наглядные пособия. В классе учащиеся только вычертили развертки, а вырезали и склеили модели дома. На следующий урок модели были принесены в школу (черт. 6).

В контрольном классе задание было несколько иное. Здесь учащиеся получили те же карточки (черт. 4) и по ним чертили ортогональные и кабинетную проекции, как и в опытном классе. Но развертку они не строили и модели не клеили. Поэтому они не имели возможности осязать и видеть в натуре то, что чертили. Следовательно, согласно моему предположению, им попрежнему должно было быть трудно представить себе в пространстве то, что они чертили, попрежнему было трудно читать чертеж. Для проверки этого предположения, я дала учащимся опытного и контрольного классов второе задание: „По двум видам некоторой фигуры построить третий вид ее и кабинетную проекцию". Задание в обоих классах было одинаковое при равных остальных условиях. Этот чертеж учащиеся выполняли на двух уроках только в классе (задание на черт. 7).

Правильный ответ изображен на чертеже 8.



Черт. 7

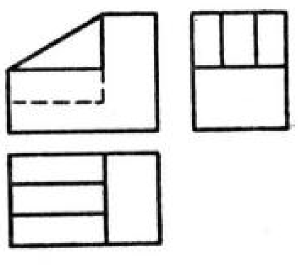


Черт. 8

Результаты проверки работ учащихся того и другого классов были следующие.

В контрольном классе, в результате работы только с чертежом, сдвига в развитии пространственного мышления почти не произошло. Из 34 работ только 17 были выполнены без серьезных ошибок (если не считать ошибок в простановке размеров, шрифте, в типах линий). До этой же опытной работы правильных чертежей было немного меньше: 12—14. Остальные учащиеся допускали такие серьезные ошибки (черт. 9), которые ясно говорили о том, что учащиеся плохо представляют фигуру в пространстве. Они еще не умеют пространственно мыслить.

А вот результаты опытного класса. В работе приняли участие 36 человек учащихся. До проведенного опыта с изготовлением моделей правильных чертежей было 15—18; после опыта таких работ оказалось 31. Целый ряд учащихся, по их собственному признанию, ясно почувствовал, что после изготовления моделей им стало легче чертить и разбираться в чертежах.



Черт. 9

Итак, я описала опыт, который провела в VII классах с целью развития пространственного воображения учащихся. Из вышесказанного можно сделать вывод, что изготовление моделей самими учащимися дает положительный результат; это дает право утверждать, что для развития пространственного воображения учащихся на первом этапе обучения черчению недостаточны только теория и чертеж, а необходимы наглядные пособия в виде моделей, причем модели должны быть сделаны самими учащимися.

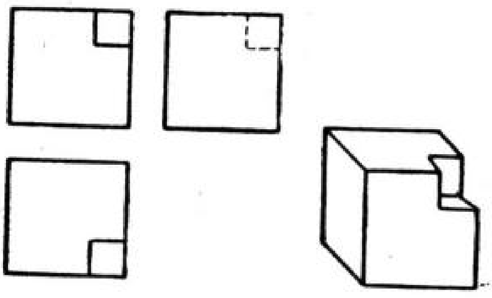
После первой описанной работы я продолжала дальше развивать пространственное воображение учащихся на решении ряда задач, все более и более усложняя их. Ученикам, которые хорошо читают чертежи, полезно давать условия задачи в словесной форме, чтобы они по условию составляли чертежи.

Примером может служить такая задача: „Дан куб с ребром, равным 50 *мм*. В верхнем ближнем к нам правом углу куба сделан вырез в форме куба, ребро которого равно $^1/_4$ ребра заданного куба. Требуется построить ортогональные проекции и кабинетную проекцию полученного геометрического тела".

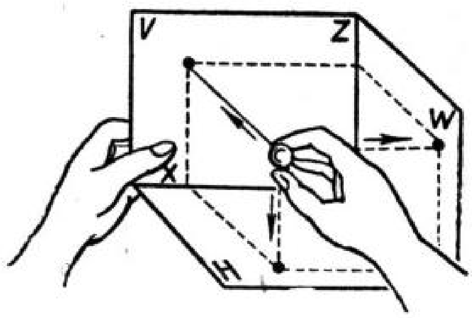
По этому условию учащимся, изготовлявшим модели, не трудно представить себе искомое тело в пространстве и выполнить чертеж.

Правильный ответ на эту задачу изображен на чертеже 10.

В VIII классах основное внимание уделяется геометрическому черчению, теоретическая сторона которого хорошо знакома учащимся из курса планиметрии. Вместе с тем этот раздел черчения не связан непосредственным образом с задачей развития пространственного воображения. Но в IX классе начинается изучение нового и довольно сложного материала — элементов начертательной геометрии. Прорабатывая этот материал с учащимися, я видела, что наиболее трудным для них является усвоение начальных сведений, т. е. освоение самого метода получения эпюра, в частности метода изображения на эпюре точки и прямолинейного отрезка, заданных в пространстве. Большая часть учащихся механически выполняет задания такого рода, когда же дело касается более сложного — решения задач с плоскостями, — то здесь выясняется, что все затруднения зависят от неусвоенного начального материала. Ясно, что для успешного изучения указанного раздела курса черчения необходимо достаточное развитие пространственного воображения учащихся, а следовательно, необходимы соответствующие упражнения с моделями. Это мое предположение я проверила на следующем опыте.



Черт. 10



Черт. 11

Было предложено каждому учащемуся опытного класса к первому уроку темы об эпюре точки принести трехгранный угол небольших размеров, сделанный из картона, который можно было бы, разворачивая, совмещать в одну плоскость, и маленький шарик, обозначающий точку. Учащиеся контрольного класса не должны были пользоваться указанным пособием. Когда я рассказывала о различных положениях точки в пространстве, сопровождая свое объяснение только чертежом и рисунком на доске, контрольный класс имел возможность только слушать и зачерчивать в тетради все, что дано было на доске, в то время, как опытный класс сопровождал все мои объяснения и чертежи соответствующей постановкой и рассмотрением своих моделей (черт. 11).

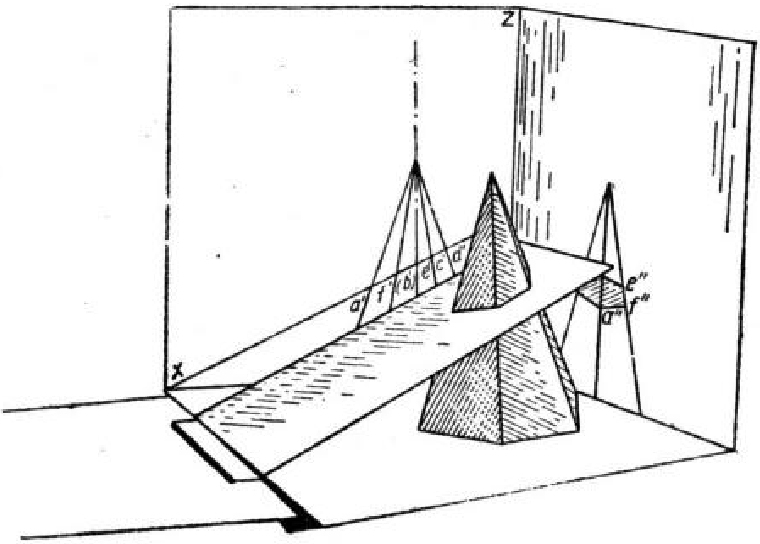
Для выяснения вопроса о том, какова разница в усвоении материала учащимися того и другого класса, я объяснила следующий раздел: „Отрезок в пространстве и его изображение на эпюре" — при одинаковых условиях в том и другом классе, т. е. без моделей. Когда приступили к решению задач у доски, то выяснилось, что учащиеся опытного класса заметно лучше ориентировались в вопросах и давали более четкие ответы, чем учащиеся контрольного класса. Они могли правильно по эпюру сделать рисунок, показать в пространстве положение отрезка и, обратно, по рисунку построить эпюр или по заданному мною отрезку в пространстве вычертить эпюр и сделать рисунок. Учащимся же контрольного класса все это давалось труднее; особенно трудно было им устанавливать связь между эпюром и положением отрезка в пространстве. Связь рисунка с эпюром осуществлялась легче.

Таким образом, мы видим, что именно слабое пространственное представление является тормозом при решении этих задач и что развивать пространственные представления можно упражнениями с моделями, о которых только что говорилось. Эти модели очень просты, и изготовление их доступно каждому ученику. Первые, основные темы начертательной геометрии—точка, прямая и плоскость—являются той основой элементов начертательной геометрии, без которой мы не сможем в дальнейшем, в IX и X классах, решать задачи на пересечение геометрических тел. Поэтому я считаю, что указанные первые темы начертательной геометрии нужно разрабатывать с учащимися, сопровождая изучение основных случаев моделями. Только после такой подготовки, в результате которой учащиеся приобретают надлежащие навыки пространственного воображения фигур, изображенных на чертеже, они могут более или менее свободно и правильно решать сложные задачи X класса, а в дальнейшем переходить к чтению чертежей технических деталей, состоящих по существу из сочетания фигур простых геометрических форм.

В IX классе мы изучаем тему: „Пересечение геометрических тел наклонной плоскостью, перпендикулярной к одной из плоскостей проекций, и нахождение натурального вида сечения".

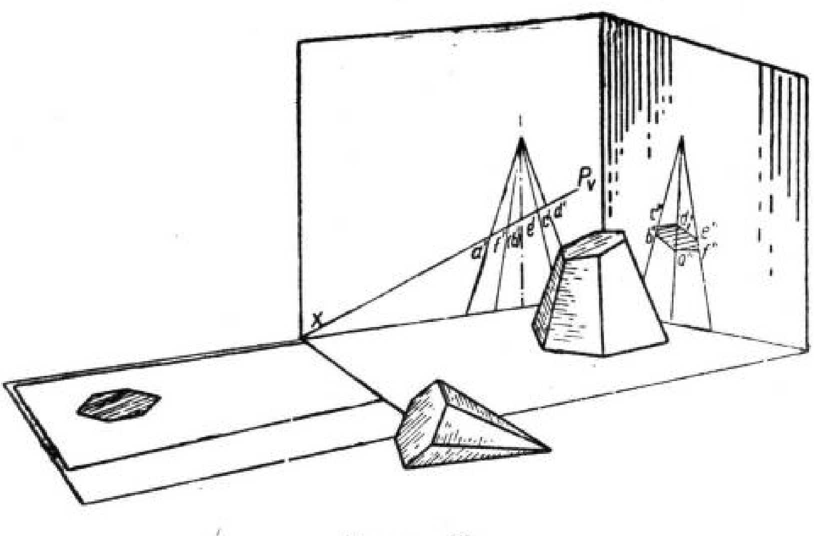
В этом классе учащимся уже не трудно построить как проекции того или иного геометрического тела, так и проекции сечения этого геометрического тела плоскостью. Так как плоскость сечения не параллельна ни одной из плоскостей проекций, то нужно уметь найти и построить натуральную величину сечения. И вот тут я обнаружила, что многие учащиеся не могут по чертежу представить в пространстве весь процесс нахождения натуральной величины сечения и выполняют чертеж механически по заученным правилам. Допустить такое механическое выполнение чертежа я считала невозможным и поэтому предложила отдельным учащимся сделать модель: „Пересечение шестиугольной пирамиды наклонной вертикально-проектирующей плоскостью P и нахождение натуральной величины сечения". Как сделать эту модель мы обсудили вместе с учащимися. Решили сделать ее так, чтобы на модели можно было проследить в натуре процесс нахождения натуральной величины сечения методом совмещения секущей плоскости с одной из плоскостей проекций. Кроме того, при изготовлении этой модели учащиеся должны были учесть размеры модели: она должна была служить нам демонстрационным наглядным пособием.

На чертеже 12 мы видим, что эта модель, сделанная ученицей Кузиной, представляет собой шестиугольную пирамиду, помещенную в трехгранный угол и пересеченную проектирующей плоскостью P. Вся модель сделана из плотной бумаги и картона. Пирамида состоит из двух частей: срезанной верхней части и усеченной нижней. Секущая плоскость P вращается около своего горизонтального следа P_h до совмещения с плоскостью H. На всех трех плоскостях проекций (H, V и W) изображены проекции пирамиды с сечением, соответственно ее пространственному положению. Но ни на одной из этих проекций мы не имеем натуральной величины сечения, так как плоскость сечения не параллельна ни одной из плоскостей проекций. Для демонстрации при помощи модели способа определения натуральной величины сечения, с нижней стороны плоскости P наклеен шестиугольник (цвета самой пирамиды), соответ-



Черт. 12

ствующий по форме и положению многоугольнику сечения. Сняв верхнюю срезанную часть пирамиды и вращая плоскость P вокруг ее горизонтального следа справа налево до совмещения с плоскостью H (черт. 13), мы увидим совмещенное изображение натуральной величины сечения. При этом можно наглядно проследить путь, описываемый в пространстве каждой из вершин сечения и проекции пути каждой вершины на плоскости H и V. Такое наблюдение наглядно разъясняет учащимся способ построения натуральной величины сечения поверхности тела плоскостью.

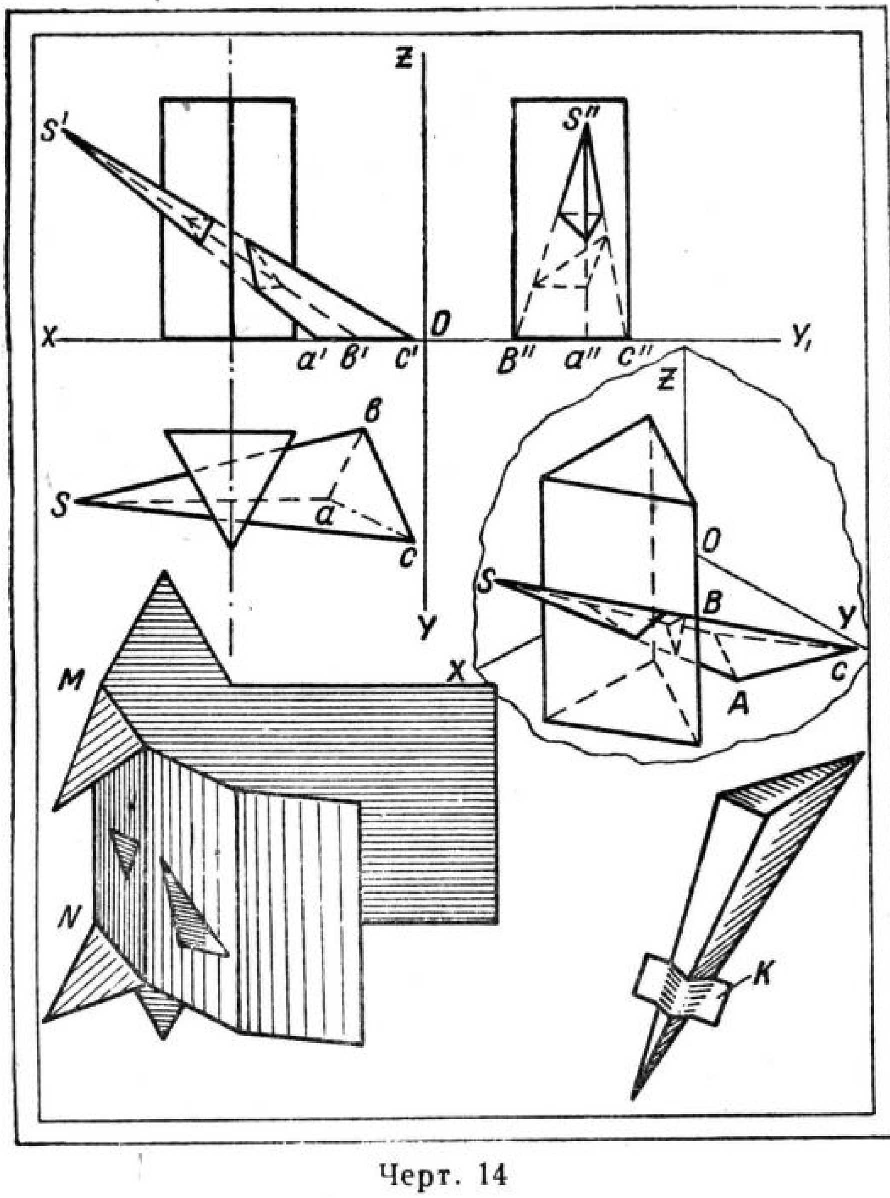


Черт. 13

В дальнейшем все задачи, аналогичные рассмотренной, графически решались учащимися самостоятельно и вполне осмысленно. Таким образом и в этом случае цель была достигнута: работа над моделью привела к надлежащему развитию пространственного воображения учащихся.

Нам приходится наблюдать затруднения учащихся десятых классов при снятии эскизов, при выполнении рабочих чертежей и при изображении технических деталей в изометрической проекции.

При этом они оперируют уже более сложными формами сочетания геометрических тел. Ученики уже умеют строить проекции каждого из составных взаимно пересекающихся геометрических тел заданной технической детали. Но их затрудняет построение линии пересечения поверхностей этого тела, так как они не представляют ее себе в пространстве. Развивать пространственное воображение для решения таких задач более высокой степени трудности полезно на особого рода наглядных пособиях, представляющих соединение модели с чертежом. Я применяла такие модели-чертежи в X классе 126-й школы при прохождении темы: „Взаимное пересечение геометрических тел". Нескольким ученикам я предложила выполнить работу следующим образом. На форматке *a*-4 или



Черт. 14

a-3 учащийся должен был вычертить в ортогональной проекции и в изометрии взаимное пересечение прямой треугольной призмы с наклонной треугольной пирамидой (привожу пример работы ученика X класса „Б" 126-й школы, Квашина Юры). На этой же форматке должна быть вычерчена полная развертка поверхности призмы с линиями пересечения ее с поверхностью пирамиды. Затем развертка вырезывается по всему контуру, кроме линии MN, по которой и отгибается. Также вырезываем на развертке призмы и два треугольника, которые представляют собою линии пересечения (черт. 14).

Теперь мы можем, свернув развертку по линиям сгиба, получить модель призмы. Пирамиду учащийся должен склеить отдельно, построив предварительно по чертежу ее развертку. Эта пирамида помещается на форматке рядом с призмой в приклеенном кармашке „K". Для соединения чертежа с моделью мы складываем призму и вставляем в нее пирамиду. Очень полезно окрасить призму и пирамиду в различные цвета.

После изготовления таких моделей-чертежей ученики лучше представляют в пространстве смысл и значение графических операций, выполняемых при построении чертежа, и для них значительно облегчается задача чтения более сложных чертежей технических деталей.

Наша школа должна обратить серьезное внимание на развитие у советских юношей и девушек пространственного воображения на уроках черчения и геометрии, где ощущается наибольшая необходимость в этом и где мы имеем наибольшую возможность его совершенствовать. Чем внимательнее педагог будет изучать процесс освоения учениками учебного материала, видеть трудности и выяснять, в чем они заключаются, тем легче будет находить пути к устранению этих трудностей, тем продуктивнее будет протекать работа в интересующем нас направлении.

В этой статье я поделилась своим опытом работы. Многие учителя черчения занимаются этими же вопросами. Хотелось бы, чтобы и они рассказали о своей работе, о своих методах преподавания. Это поможет правильно подойти к решению вопроса о методах развития пространственного воображения учащихся.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 21 · 1949

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДИКИ УПРАЖНЕНИЙ В РАЗВИТИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВООБРАЖЕНИЯ

Г. А. ВЛАДИМИРСКИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержанием настоящей статьи служит материал, полученный в результате работы автора над вопросом о методах использования чертежа в процессе преподавания геометрии в целях развития пространственного воображения и формирования геометрических понятий учащихся. Эта работа проводилась автором в Научно-исследовательском институте школ НКП и затем в Научно-исследовательском институте методов обучения АПН, где результаты и выводы работы ставились на обсуждение семинара по вопросам „формирования и развития пространственных представлений“ (под руководством проф. Н. Ф. Четверухина) и были одобрены Сектором методики математики.

Экспериментальная часть работы проводилась автором совместно с Е. Н. Меллер—старшим научным сотрудником Лаборатории педагогической психологии Московского городского педагогического института им. В. П. Потемкина. Задача исследования Е. Н. Меллер заключалась в выяснении психологической стороны вопроса о роли чертежа в усвоении геометрического материала. При разработке принципов, положенных в основу описанных в настоящей статье упражнений, автор опирался на психологический анализ и выводы из наблюдений, полученные Е. Н. Меллер в результате ее участия в указанном экспериментальном исследовании.

Вместе с тем автор использовал материал своего предшествующего педагогического опыта, опубликованный частично в журнале „Математика в школе“ (№ 3, 1941 г. и № 4, 1946 г.), а также послуживший содержанием составленных автором „Таблиц по геометрии“ (Главучтехпром, 1944 г.).

Указанная экспериментальная работа проводилась в течение 1943/1946 уч. гг. в 122-й, 125-й и 135-й школах Москвы. В дальнейшем автор имел возможность проверить ряд упражнений, составленных на основе разработанных принципов, в 29-й, 90-й и 113-й школах Москвы при содействии учителей этих школ М. Х. Кекчеевой, П. И. Игумновой, Д. И. Даниленко и Л. В. Федорович.

Москва, 1948 *Г. Владимирский*

ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей преподавания геометрии является развитие геометрического мышления учащихся и той его существенной стороны, которая выражается в умении применять теоретические знания к решению задач. В соответствии с этим одна из задач преподавания состоит в развитии пространственных представлений, как опоры геометрической мысли[1].

В современной методической литературе имеются многочисленные указания на то, что практика преподавания геометрии в школе достигает поставленной цели в недостаточной степени. Авторы отмечают ряд недостатков в знаниях и в развитии учащихся. Наиболее существенными из них являются следующие.

Запас геометрических представлений учащихся весьма ограничен; возникающие в воображении учащихся геометрические образы обладают инертностью и неподатливостью к каким-либо конструктивным видоизменениям [2].

Изучаемый геометрический материал не обобщается и не приводится в умах учащихся в ясно осознанную систему понятий[3]. Нередко можно обнаружить у учащихся неправильные геометрические представления. Часто при анализе геометрических соотношений и распознавании геометрических образов ученики обнаруживают неумение отличать существенные признаки от второстепенных, не понимают значения необходимых признаков и признаков достаточных[4].

Учащиеся не научаются применять приобретенные знания на новом материале. Они с трудом решают геометрические задачи[5] и, умея правильно доказывать теорему при привычном расположении чертежа, не могут повторить доказательства при другом его расположении[6].

Перечисленные недостатки в знаниях учащихся по геометрии представляют проявление одного общего недостатка в школьной педагогической работе, именуемого формализмом в знаниях учащихся.

В методической литературе многие авторы отмечают, что одна из причин формализма лежит в недостатках методики преподавания предмета; это та причина, борьбу с которой можно вести в самой практике школьной работы.

Недостатки методики преподавания геометрии прежде всего обнаруживаются в характере изложения предмета в школьном учебнике. Изложение курса отличается абстрактностью и в значительной своей части не соответствует возрасту и общему развитию учащихся. При отсутствии в учебном плане наглядного пропедевтического курса геометрии, в учебнике недостает иллюстративного материала, способствующего расширению запаса геометрических представлений уча-

---

[1] Программы средней школы. Математика, Учпедгиз, 1948.

[2] Т. Песков, Пространственные представления учащихся средней школы. „Математика в школе", 1940, № 1.

[3] К. Шевченко, Вопросы элементарной математики, способствующие развитию математически обобщающего мышления. „Математика в школе", 1937, № 1.

[4] К. Краевский, Трудности при прохождении курса стереометрии. „Математика в школе", 1937, № 4.

[5] М. Астряб, Почему трудно решать геометрические задачи на вычисление. „Математика и физика в средней школе", 1935, № 5.

[6] А. Хинчин, О формализме в школьном преподавании математики. „Советская педагогика", 1944, № 11—12.

щихся. В силу этого изучение предмета сводится на практике лишь к заучиванию и воспроизведению доказательства теорем, в то время как общие положения, устанавливаемые в теоремах, не осознаются в надлежащей мере. Обобщению свойств геометрических фигур и формированию понятий в учебнике не уделяется должного внимания. Теорема усваивается как частный случай, применительно к данному в учебнике чертежу.

Указанные недостатки учебника не выправляются и дополнительными пособиями в виде сборников задач, упражнений, наглядных пособий и пр. В задачах, преимущественно вычислительных, не всегда в достаточной мере представлен конструктивный элемент, вследствие чего роль задач в развитии пространственного мышления оказывается весьма незначительной. Наглядные пособия в виде чертежей и моделей, применяемые в практике преподавания, предназначены главным образом для того, чтобы облегчить учащимся получение представления изучаемой фигуры. Ознакомление учащихся с такого рода наглядными пособиями часто носит характер пассивного созерцания и не побуждает их к активному пространственному мышлению.

1. ВОПРОС О РОЛИ ЧЕРТЕЖА В РАЗВИТИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВООБРАЖЕНИЯ

Чертеж как наглядное пособие в преподавании геометрии

Перечисленные в введении недостатки методики преподавания геометрии требуют своего исправления. Одной из мер такого исправления может служить улучшение методов применения наглядного материала в преподавании геометрии. В практике школьного преподавания имеется весьма большое число различных видов наглядных пособий по геометрии. Каждый из этих видов имеет свое учебное назначение, многие обладают весьма ценными педагогическими качествами и заслуживают должного внимания. Можно, однако, заметить, что наиболее доступным по простоте изготовления и наиболее распространенным и употребительным в школьной практике видом наглядных пособий по геометрии является графический наглядный материал, т. е. чертеж.

Обзор графического материала наиболее распространенных учебных пособий (учебников, задачников, стенных таблиц), вышедших в свет на протяжении нескольких последних десятилетий, показывает, что внимание составителей к чертежу, как вспомогательному учебному средству, неуклонно возрастает. На это указывает увеличение числа чертежей, иллюстрирующих курс геометрии в учебниках, введение иллюстративного материала в условия геометрических задач, выпуск отдельных таблиц, дополняющих учебники разнообразными иллюстрациями фигур, изучаемых в курсе геометрии, повышение внешних качеств—четкости, наглядности, выразительности чертежа и т. п. Общей методической чертой указанных мероприятий по использованию чертежа является стремление облегчить понимание учебного материала и обогатить запас геометрических представлений учащихся.

Вместе с тем в методической литературе последних лет была весьма успешно разработана идея использования закономерностей проекционного чертежа с целью его применения в процессе преподавания как вспомогательного инструмента для „эффективного" решения стереометрических задач на построение[1].

Отсутствие разработанной системы приемов применения чертежа в преподавании геометрии

Однако изучение опыта школьной работы обнаруживает, что графический материал не используется в процессе преподавания в полной мере. Не определено с надлежащей отчетливостью значение чертежа как методического средства; не освещена с полной ясностью роль чертежа в достижении основных задач преподавания геометрии, т. е. в развитии геометрического мышления и пространственных представлений; отсутствует планомерно разработанная система приемов применения чертежа в курсе геометрии в связи с изучением теоретического материала, а также в связи с применением других наглядных пособий.

Для выяснения указанных вопросов нами была проведена экспериментальная работа, основными совместными целями которой были, во-первых, выяснение психологической стороны вопроса о роли чертежа в усвоении геометрического материала и, во-вторых, на основе полученных результатов, разработка методики использования чертежа в процессе преподавания геометрии.

2. ОРГАНИЗАЦИЯ И МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Постановка вопроса исследования

Вся работа была разделена на две серии экспериментов в соответствии с содержанием вопросов, поставленных для исследования. Первая серия экспериментов в психологической своей части имела целью выяснить роль чертежа в развитии геометрических представлений и пространственного воображения; в методической части цель эксперимента состояла в том, чтобы на основе полученных выводов разработать методы применения соответствующих упражнений в практике преподавания.

Вторая серия экспериментов ставила своей психологической задачей выявление роли чертежа в формировании правильных геометрических понятий и в развитии навыков применения приобретенных знаний к решению задач. Равным образом педагогической целью эксперимента была разработка и проверка упражнений, направленных на развитие соответствующих интеллектуальных качеств учащихся.

Этапы экспериментальной работы

Обе серии экспериментов состояли из трех частей.

В первой части проводились контрольные опыты, которые имели целью выявить, как оперируют учащиеся чертежом в процессе усвоения геометрии. Выводы, полученные после психологического

---

[1] Эта работа с исчерпывающей полнотой завершена проф. Четверухиным в книге „Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии", Учпедгиз, 1946.

анализа результатов первой части экспериментов, послужили основой для разработки специальных упражнений, соответствующих методическим задачам, поставленным в каждой серии экспериментов.

Вторая часть каждой серии исследований заключалась в экспериментальной проверке (на основе психологических наблюдений) и в окончательной разработке указанных упражнений, проводимых с теми же испытуемыми.

Третья часть исследования состояла в заключительном контрольном опыте с целью анализа качественных сдвигов в развитии испытуемых в интересующем нас направлении.

Выбор учебного материала и подбор учащихся

В качестве экспериментального учебного материала по курсу планиметрии были взяты чертежи к теоремам о равенстве треугольников (третий случай), о внешнем угле треугольника и о треугольниках с двумя соответственно равными сторонами; по курсу стереометрии был выбран материал, связанный с теоремами о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

Работа проводилась в форме индивидуального эксперимента, для которого были привлечены учащиеся VI и IX классов 122-й, 125-й и 135-й средних школ Москвы. Выбор указанных классов мотивировался тем, что в этих классах учащиеся знакомятся с основными геометрическими образами и понятиями, надлежащее освоение которых обусловливает успешность дальнейшего изучения планиметрии (VI класс) и стереометрии (IX класс).

Через первый, контрольный эксперимент обеих серий прошли все указанные учащиеся. После контрольного эксперимента в группе каждого класса среди испытуемых, которые неудовлетворительно выполнили контрольные задания, были выделены по две подгруппы. С одной из этих подгрупп каждого класса были проведены эксперименты на упражнение, после чего в заключительном контрольном эксперименте участвовали испытуемые, прошедшие через упражнение, и испытуемые второй подгруппы каждого класса, участвовавшие только в предварительном контрольном испытании, но не принимавшие участия в упражнении. Таким образом вторая подгруппа каждого класса являлась контрольной с целью выявления результатов упражнения.

Подготовительные мероприятия

Чтобы исключить влияние на результаты исследования простого забывания пройденного материала, всем испытуемым, приступающим к эксперименту, предлагалось вспомнить по учебнику (под пассивным наблюдением экспериментатора) тот учебный материал, который составлял содержание дальнейших экспериментальных заданий. Для учащихся шестых классов этот учебный материал содержался в § 42, 43, 44 и 52, I части учебника Киселева; для учащихся IX классов—§ 9, 10, 11, 14, 15, 16, 23, 24 и 28, II части учебника Киселева.

Кроме того, учащиеся IX класса перед тем, как приступить к выполнению контрольных заданий были ознакомлены в наглядной форме с элементарными правилами условного изображения пространственных геометрических фигур.

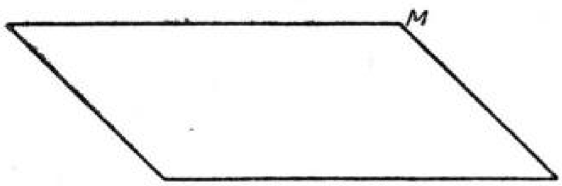
Основанием для такой меры послужили следующие соображения.

Изучая курс планиметрии, учащиеся привыкают оперировать с чертежом геометрической фигуры, как с самой фигурой, непосредственно заключающей в себе присущие ей геометрические свойства. Правильный чертеж плоской фигуры позволяет непосредственно выполнять на нем необходимые исследования и получать выводы, графически соответствующие действительным свойствам фигуры.

В стереометрии для целей исследования свойств фигуры невозможно такое отождествление чертежа с изображенной на нем фигурой. Всякое плоское изображение трехмерной фигуры содержит в себе ряд графических условностей. Правильное представление изображенной фигуры или, как говорят, чтение чертежа возможно лишь при освоении некоторых основных правил условного изображения пространственных фигур на плоскости. Лишь при выполнении этого требования стереометрический чертеж может служить полноценным учебным пособием и позволяет при решении задач получать на самом себе графические ответы в условной, но вполне определенной форме, соответствующие действительности.

В школьном учебнике[1] об условностях стереометрического чертежа сказано лишь, что „пространственные фигуры изображаются на чертеже при помощи рисунков, которые производят на-глаз приблизительно такое же впечатление, как сама фигура. Эти рисунки выполняются по определенным правилам...“ „Многие предметы имеют форму прямоугольника...“, „...при этом, если смотреть на эти предметы под углом с большого расстояния, то они представляются нам имеющими форму параллелограма. Поэтому принято изображать плоскость на чертеже в виде параллелограма“ (черт. 1).

В дальнейшем изложении курса в учебнике, а также в общепринятом задачнике не дается никаких указаний по поводу правильного построения наглядных изображений трехмерных фигур. Учащиеся воспроизводят изучаемые геометрические фигуры путем подражания иллюстрациям учебника и образцам учителя на классной доске и испытывают большие трудности при необходимости изобразить какую-нибудь фигуру в новых условиях, отличных от имеющихся у них образцов. Школьный опыт показывает, что многие учащиеся не только с трудом изображают, но нередко и плохо понимают чертежи пространственных фигур. Таким образом в школьной практике часто стереометрический чертеж превращается из наглядного пособия в дополнительное затруднение при изучении геометрического материала.



Черт. 1

Чтобы устранить влияние на результаты нашей экспериментальной работы указанных затруднений в построении и в чтении чертежей пространственных фигур, мы провели с учащимися IX класса до контрольного эксперимента следующие упражнения.

[1] Киселев, ч. II, стр. 3, черт. 1.

Предварительные упражнения

Упражнение 1. Чертеж изображает куб (черт. 2).

В таком виде в геометрии изображают куб, если он поставлен на горизонтальную плоскость слева перед глазами, ниже уровня глаз. Передняя грань куба занимает фронтальное положение.

Видимые очертания передней грани не искажаются, т. е. сохраняют форму квадрата. Направление и размеры ребер этой грани не изменяются по сравнению с действительными (например, AB, AA_1).

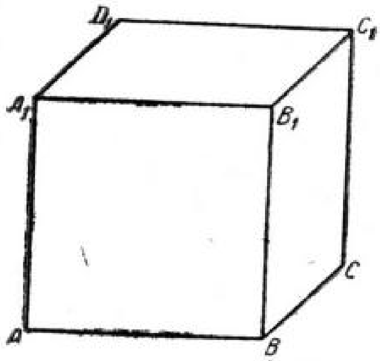
Видимые очертания двух других граней, не совпадающих с фронтальной плоскостью, искажаются и принимают форму параллелограмов. Направление и размеры ребер, непараллельных фронтальной плоскости, изменяются по сравнению с действительными (например, BC, A_1D_1).

1. Поставьте модель куба на столе так, чтобы фигура куба по своему виду представлялась похожей на данное изображение. Скопируйте данное изображение куба.

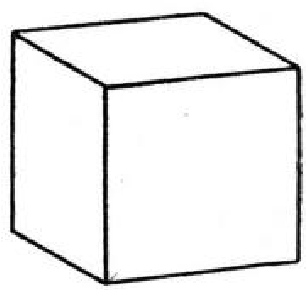
2. Представьте мысленно куб, поставленный справа перед глазами ниже уровня глаз, и начертите его изображение. Поставьте на столе модель куба в соответствующее положение.

3. Начертите отдельно только одну горизонтальную грань куба в двух положениях: слева от глаз и справа от глаз.

Упражнение 2. Чертеж изображает куб (черт. 3.)



Черт. 2



Черт. 3

В таком виде изображают куб, поставленный на горизонтальную плоскость прямо перед глазами ниже уровня глаз. Ни одна из граней куба не совпадает с фронтальной плоскостью; поэтому видимые очертания всех граней куба, поставленного в такое положение, искажаются.

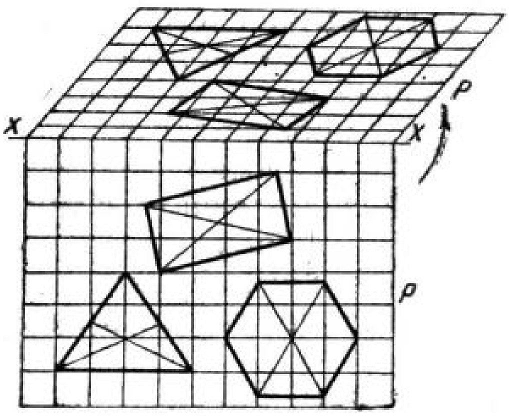
1. Поставьте на столе прямо перед глазами модель куба так, чтобы фигура куба представлялась похожей на данное изображение.

2. Скопируйте данное изображение куба.

Упражнение 3. На плоской сетке прямоугольника P, расположенной фронтально, изображены три фигуры: 1) равнобедренный треугольник, 2) прямоугольник и 3) правильный шестиугольник (черт. 4).

Чертеж показывает, что очертания изображений этих фигур изменятся, если плоскость P наклонить под произвольным углом к фронтальному положению.

Из чертежа видно, что при повороте плоскости на изображении не изменяются длины отрезков, оставшихся параллельными фронтальной плоскости (например, основание треугольника) и сохраняются следующие соотношения между элементами фигур: параллельность прямых (например, параллельность сторон шестиугольника) и отношение отрезков, лежащих на одной прямой (например, отношение отрезков медиан треугольника).



Черт. 4

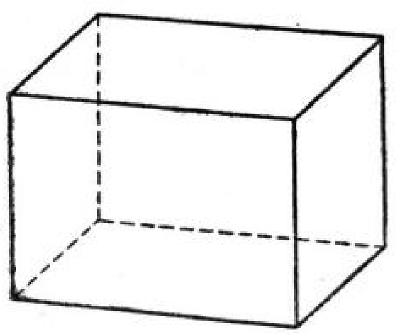
Укажите на чертеже 4 все отрезки, которые при повороте плоскости P вокруг оси XX: 1) не изменят на чертеже свою длину, 2) останутся на чертеже взаимно параллельными, 3) сохранят на чертеже отношение длин.

Упражнение 4. Части фигуры, расположенные за непрозрачной поверхностью, принято изображать штриховыми линиями.

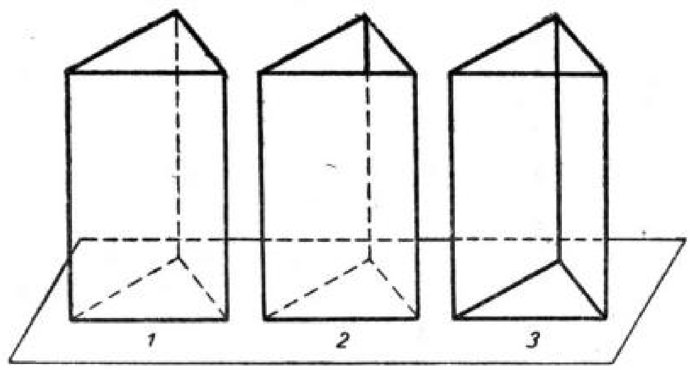
На чертеже изображен параллелепипед. Три задних ребра параллелепипеда закрыты от глаз гранями параллелепипеда, поэтому они изображены на чертеже штриховыми линиями (черт. 5).

Начертите фигуру параллелепипеда, помещенного справа ниже уровня глаз при фронтальном положении передней грани; примените штриховые линии для изображения закрытых от глаз ребер.

Упражнение 5. Фигура 1, изображенная на чертеже, представляет геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскостями (треугольная призма) (черт. 6).



Черт. 5



Черт. 6

1. В чем состоит различие в изображении второй и третьей фигур сравнительно с первой? Какое различие в действительном строении трех фигур указывается штриховыми линиями?

2. Какую форму имеют плоские фигуры, ограничивающие пространство, занимаемое фигурой 1?

3. Какую форму имеют плоские фигуры, из которых составлена пространственная фигура 2?

Упражнение 6. На чертеже изображена одна и та же фигура в двух различных положениях (черт. 7).

1. Покажите на модели, как надо поместить перед глазами фигуру, представленную на чертеже, чтобы она была видна соответственно изображению 1; соответственно изображению 2.

2. Какие признаки на чертеже должны указывать правильный ответ на заданный вопрос?

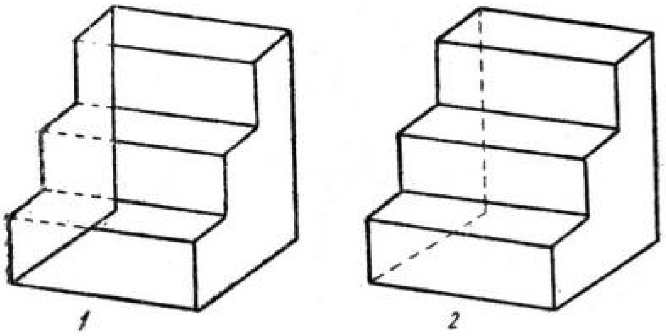
Упражнение 7. Изображенная на чертеже плоскость M, расположена в пространстве горизонтально (черт. 8).

1. Укажите на чертеже все прямые, расположенные в пространстве горизонтально и наклонно.

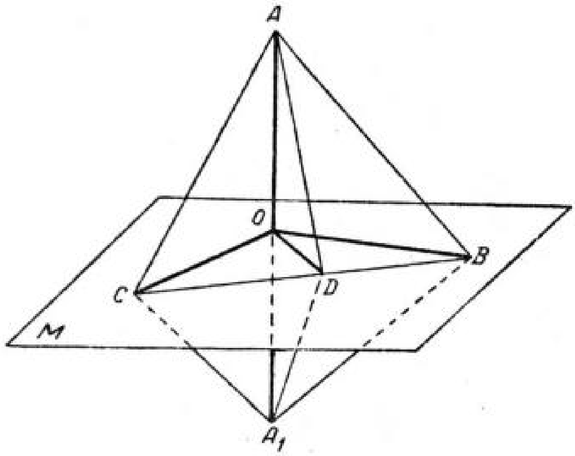
2. Укажите прямолинейный отрезок, пересекающий плоскость M.

Дайте обоснование ваших ответов. Скопируйте данную фигуру.

Упражнение 8. На чертеже показано перемещение прямоугольника из положения P_1 в положение P_2 посредством поступательного движения (черт. 9).



Черт. 7



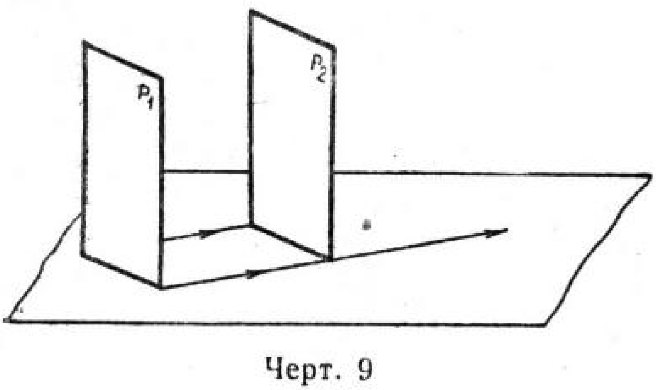
Черт. 8

Движение фигуры называется **поступательным**, если при перемещении всякая прямая, принадлежащая фигуре, остается параллельной сама себе.

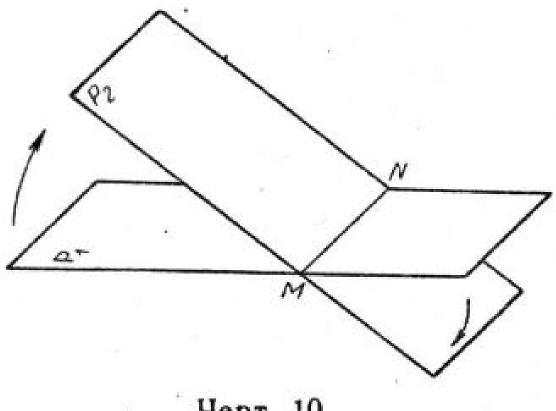
Видимые очертания фигуры на чертеже при поступательном перемещении не изменяются.

Скопируйте чертеж и изобразите на нем данный прямоугольник в каких-нибудь новых положениях, которые он займет при дальнейшем поступательном движении в том же направлении.

Упражнение 9. На чертеже показано перемещение прямоугольника из положения P_1 в положение P_2 посредством вращательного движения вокруг оси MN (черт.10).



Черт. 9



Черт. 10

Движение фигуры называется **вращательным** вокруг оси, если все точки фигуры описывают окружности. Центры этих окружностей лежат на одной прямой — оси вращения. При вращательном движении положение оси вращения в пространстве не изменяется.

На изображении все прямолинейные отрезки, параллельные оси вращения, сохраняют свою параллельность и размеры и в новом положении фигуры.

Скопируйте чертеж и изобразите на нем данный прямоугольник в каком-нибудь новом положении, которое он займет при вращении вокруг оси MN.

Описанные упражнения проводились под руководством экспериментатора при непосредственном его содействии в устранении трудностей и ошибок учащихся.

Методические обоснования предварительных упражнений

При разработке содержания и методики этих упражнений мы считали наиболее целесообразным начинать упражнения в понимании стереометрического чертежа с рассмотрения геометрических фигур в целом и лишь после усвоения условностей чертежа на таких изображениях переходить к изображениям изолированных элементов пространственных фигур. С простейшими геометрическими телами, с кубом, прямоугольным параллелепипедом учащиеся знакомы из повседневного обихода и из курса начальной школы. Первые изображения этих тел мы сопровождаем показом объемных моделей.

Показывая в первом упражнении (черт. 2) изображение куба и одновременно его модель, мы обращали внимание учащихся на то, что очертания изображения соответствуют (приближенно) видимым очертаниям модели только при положении этой модели перед глазами в некоторой определенной зоне пространства (например, на нашем чертеже слева перед глазами ниже уровня глаз). Глядя на изображение модели, учащиеся находили ее положение в пространстве в приближенном соответствии с данным изображением.

Одновременно, пользуясь гранями модели куба, мы знакомили учащихся с так называемым фронтальным положением плоскости, как положением, связанным с направлением взора наблюдателя, смотрящего „прямо“ перед собой (понятие взаимной перпендикулярности прямой и плоскости еще не было известно учащимся).

Затем учащиеся анализировали на изображении форму очертаний отдельных граней фигуры; эта форма сопоставлялась с действительной формой этих граней и их расположением относительно фронтальной плоскости.

Наконец, учащимся предлагалось изобразить куб, сохранив фронтальное положение передней грани, но расположив его в новом положении перед глазами, именно справа ниже уровня глаз. Мы стремились к тому, чтобы учащиеся не только умели узнавать форму фигуры по ее изображению, но и научились по определенным условностям изображения мысленно ориентировать фигуру перед своими глазами.

Такого рода сопоставление видимого очертания модели с ее изображением, равносильное приближенному отождествлению глаза наблюдателя с проектирующим аппаратом, мы считаем единственно возможным (на данном этапе обучения) приемом объективного обоснования условностей стереометрического чертежа. Мы полагаем, что наглядность чертежа в значительной степени облегчает геометрическое исследование изображенной фигуры. Поэтому в методическом отношении весьма полезно развивать умение надлежащим образом ориентировать фигуру перед глазами для получения наиболее наглядного изображения. Вместе с тем мы полагаем, что навыки в мысленном отнесении фигуры в пространстве (перед глазами) в соответствии с ее изображением так же, как и умение выполнять обратную задачу, свидетельствуют о положительных сдвигах в развитии пространственного воображения учащихся.

Проделав указанный анализ изображения фигуры в целом, учащиеся заканчивают первое упражнение построением изображений изолированных частей фигуры, например, отдельно верхней или боковой грани при заданном положении куба в пространстве.

В упражнении 2 (черт. 3) учащиеся знакомились с изображением куба, расположенного так, что он не имел ни одной грани в фронтальной плоскости. Это упражнение являлось дополнением к предыдущему в развитии той же методической задачи, которая была поставлена в первом упражнении.

Упражнение 3 (черт. 4) имело своей целью познакомить учащихся в наглядной форме с основными свойствами параллельных проекций В этом упражнении приводились в систему те наглядные сведения о правилах изображения пространственных фигур, которые учащиеся получили в первых двух упражнениях.

Заметим, что геометрическое обоснование свойств параллельных проекций на первых уроках стереометрии в IX классе невозможно из-за недостатка необходимых знаний у учащихся.

Упражнения 4, 5, 6 и 7 (черт. 5, 6, 7 и 8) знакомили учащихся с некоторыми условностями внешнего, чисто графического характера, придающими чертежу большую удобочитаемость и выразительность. К таким условностям мы относим, во-первых, различную толщину линий для выделения на чертеже заданных и искомых по условию задачи частей фигуры (линиями наибольшей толщины) и вспомогательных построений (тонкими линиями) и, во-вторых, штриховые линии (прерывистые) для обозначения частей фигуры, закрытых какой-либо поверхностью, входящей в состав фигуры. Специфической условностью стереометрического чертежа являются штриховые линии в указанном их значении.

Анализируя под руководством экспериментатора чертежи 5, 6, 7 и 8, учащиеся получили представление о том, как условные линии чертежа помогают выявить различие в структуре геометрических фигур и в пространственном их положении без дополнительных словесных пояснений. Так, например, на чертеже 6 при указанном понимании штриховых линий первая фигура может быть принята за геометрическое тело (призма) в то время, как вторая фигура может изображать только призматическую поверхность (призму, „открытую“ сверху); на том же основании третью фигуру нужно понимать, как составленную из девяти прямолинейных отрезков и не ограниченную плоскостями. Равным образом из анализа чертежа 8 можно усмотреть, что отрезки OB, OC, OD и CB лежат в плоскости M, в то время, как отрезок AA_1 проницает плоскость M в точке O и т. д.

В упражнениях 8 и 9 учащимся было показано на чертежах 9 и 10, как изображаются заданные фигуры в результате простейшего перемещения их в пространстве путем поступательного движения (черт. 9) или вращения вокруг оси (черт. 10).

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Первая серия контрольных экспериментов

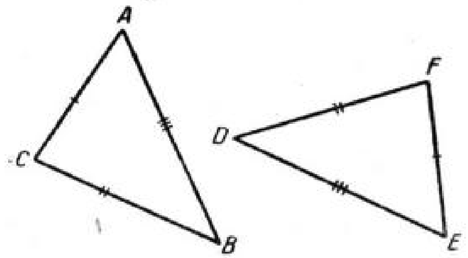
Как было указано, цель контрольных экспериментов первой серии состояла в том, чтобы выяснить, какую роль играет чертеж при выполнении учащимися мысленных конструктивных операций над фигурой, изображенной на чертеже.

Испытуемым VI класса были предложены следующие два задания.

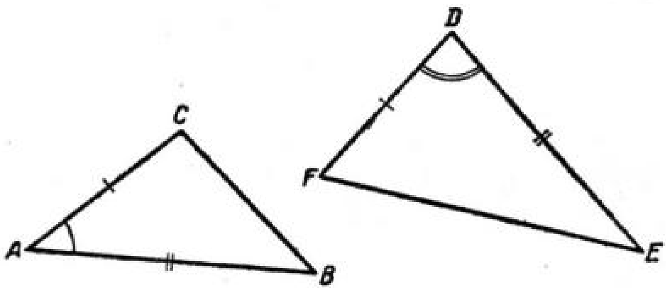
Задание 1. На чертеже даны два треугольника с соответственно равными сторонами (черт. 11).

Докажите равенство этих треугольников, приложив для этого треугольник ABC к треугольнику DEF так, чтобы совпали равные стороны BC и DF.

Задание 2. На чертеже даны два треугольника, имеющие по две соответственно равные стороны, углы между которыми не равны (черт. 12).



Черт. 11



Черт. 12

Для доказательства известной вам теоремы о таких треугольниках, наложите треугольник ABC на треугольник DEF так, чтобы совпали стороны AC и DF.

В соответствии с целью нашего эксперимента мы ограничивали наблюдения тем моментом, когда в ходе доказательства испытуемый, правильно приложив треугольники друг к другу (или наложив друг на друга), получал на чертеже фигуру, необходимую для дальнейших рассуждений, или, если после некоторых тщетных попыток испытуемый отказывался выполнить указанную операцию.

Учащиеся IX класса были привлечены к первой серии экспериментов до знакомства с теоретическим материалом курса стереометрии. Поэтому требования к выполнению заданий первой серии базируются на навыках, полученных учащимися в результате проведенных предварительных упражнений, на наглядности материала и на анализе геометрических соотношений в пределах курса планиметрии.

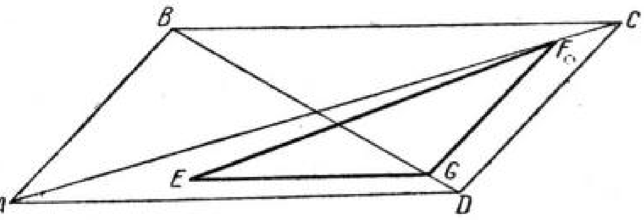
Испытуемым IX класса были предложены следующие два задания.

Задание 1. Фигура $ABCD$ изображает квадрат, произвольно расположенный в пространстве. Фигура EFG лежит в плоскости квадрата (черт. 13).

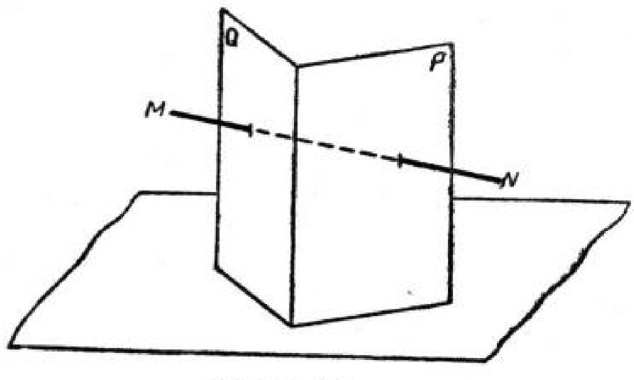
Расположите мысленно квадрат $ABCD$ в фронтальной плоскости и начертите его вместе с изображенной фигурой EFG.

Задание 2. Две прямоугольные пластинки P и Q приставлены друг к другу своими сторонами и пересечены прямой линией MN (черт. 14).

Изобразите данную фигуру, поставив ее мысленно так, чтобы угол между пластинками был виден с внутренней стороны.



Черт. 13



Черт. 14

Анализ наблюдений по первой серии контрольных экспериментов

Из наблюдений выяснилось, что для успевающих учеников VI класса мысленный процесс перемещения фигуры для надлежащего расположения ее в другом месте плоскости не представлял затруднений.

Точно так же и успевающих учащихся IX класса не затрудняло мысленное перемещение заданных фигур и представление их в новом положении в пространстве, равно как и обоснование правильности начерченного ими нового изображения фигуры.

Психологический анализ[1] выполнения заданий показал, что путь решения заданий успевающими испытуемыми характеризуется тесной взаимной связью процесса восприятия с анализом условия задачи, сопровождающего чертеж. Прочитывая условие, испытуемые сразу осознавали те геометрические соотношения в чертеже, которые необходимы для решения задания. В случае отсутствия соответствующих указаний в условии (например, указания о параллельности EG и GF сторонам квадрата на чертеже 13), они обращались с вопросом к экспериментатору.

Наблюдения над выполнением заданий слабыми учащимися (и частью средними) как в VI, так и в IX классе обнаружили, что в процессе мысленного перемещения фигур у этих испытуемых возникали различные трудности.

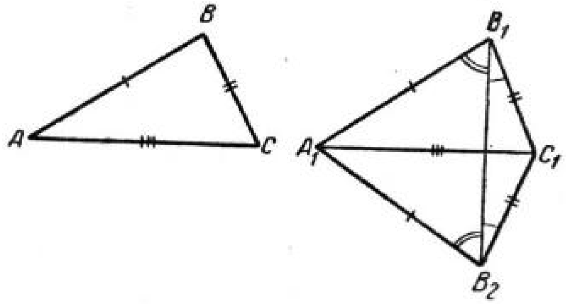
Они не могли мысленно вывести фигуру из того положения, в котором видели ее на чертеже, и вместе с тем не усматривали в чертеже тех геометрических соотношений, на которые надлежит опираться для правильного выполнения нового чертежа.

В некоторых случаях малоуспевающие испытуемые VI класса пытались выполнить задание механически, не представляя в уме необходимых по условию перемещений треугольника, но стараясь по памяти

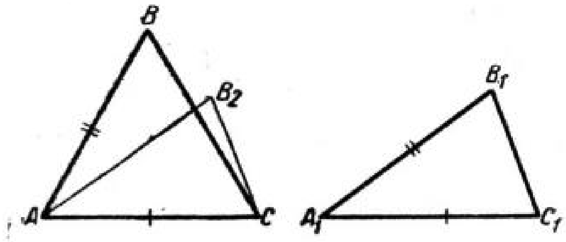
[1] При ссылках на психологический анализ наблюдений во всем дальнейшем изложении мы пользовались выводами Е. Н. Меллер, полученными ею в результате участия в описываемой экспериментальной работе и изложенными в ее статье „Роль чертежа в усвоении геометрического материала". (Указанная статья Е. Н. Меллер подготовлена к опубликованию в ученых записках Лаборатории педагогической психологии.)

построигь фигуру, похожую на соответствующие чертежи учебника (черт. 15 и 16)[1].

Однако такое формальное, лишенное осмысленной цели выполнение заданий или явно приводило к неверным решениям (например, черт. 17 и 18) или обнаруживалось из более детального опроса экспериментатором.



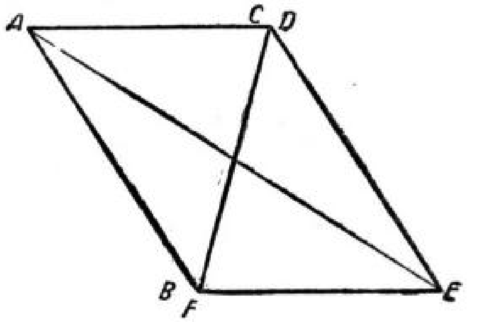
Черт. 15



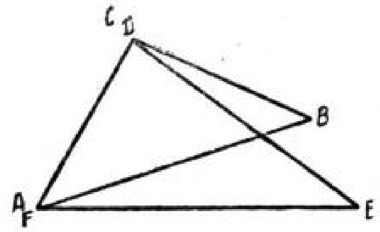
Черт. 16

Малоуспевающие испытуемые IX класса при попытках дать решение задачи нередко опирались на общее впечатление, фактически получаемое от данного чертежа как плоской фигуры.

Так, например, испытуемая З. непосредственно восприняла фигуру EFG (черт. 13), как равнобедренный треугольник и начертила его равнобедренным после мысленного поворота квадрата в фронтальную плоскость. Чтобы сторона EF не совпадала с диагональю AC, она удлинила стороны AD и BC, придав фигуре $ABCD$ форму прямоугольника (черт. 19).



Черт. 17



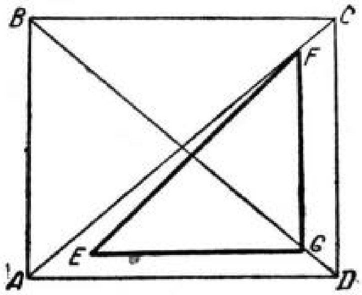
Черт. 18

Испытуемые Э., З., А. и другие в задании 2 мысленно повернули двугранный угол и правильно зарисовали его, но наклон прямой, пересекающей грани P и Q, они оставили таким же, каким он фактически задан на плоскости чертежа (черт. 20). Вследствие этого изображение точек встречи прямой с гранями P и Q отличалось на чертежах испытуемых грубым искажением по сравнению с действительным их наложением относительно контуров граней (черт. 21).

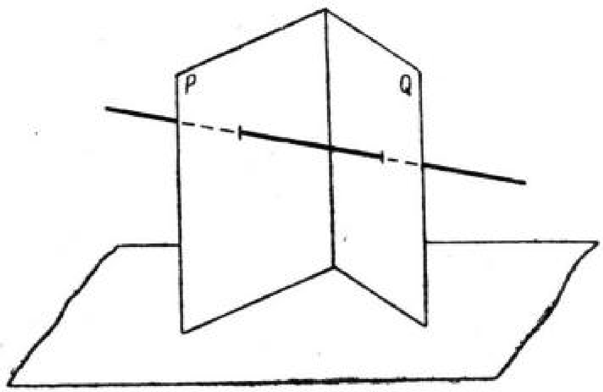
Психологический анализ выполнения заданий неуспевающими учащимися VI и IX классов показал, что характерной чертой в процессе выполнения испытуемыми заданий на мысленное перемещение фигур являлась связанность воображения чертежом, предложенным в задаче. Трудности мысленного перемещения фигур малоуспевающие характеризовали словами: „треугольник не двигается“, „его трудно повернуть“, „фигура не поворачивается“, „не удается увидеть ее поверну-

[1] Киселев, ч. I, § 42, черт. 47 и § 52, черт. 57.

той", „она исчезает при попытках перенесения" и т. п. Таким образом испытуемые, будучи не в состоянии преодолеть инертность зрительного образа, отказывались от выполнения задания или давали неправильные ответы.



Черт. 19



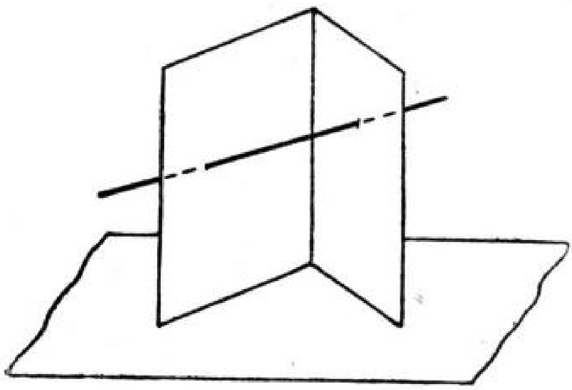
Черт. 20

Вторая серия контрольных экспериментов

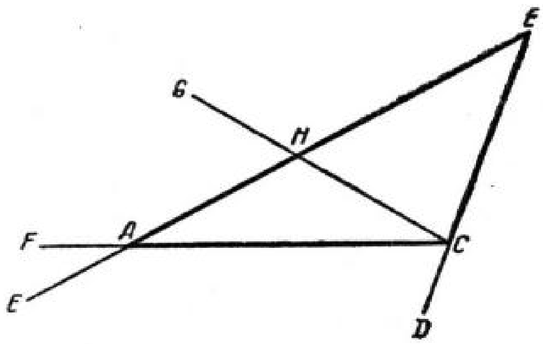
Цель контрольных экспериментов второй серии состояла в том, чтобы выявить роль чертежа в формировании геометрических понятий и в процессе применения усвоенных геометрических положений в новых условиях.

Испытуемые VI класса должны были решить в контрольном эксперименте следующие два задания:

Задание 1. Отметьте (дугой) внешние углы треугольника ABC, изображенные на данном чертеже (черт. 22). Постройте недостающие внешние углы треугольника ABC.



Черт. 21



Черт. 22

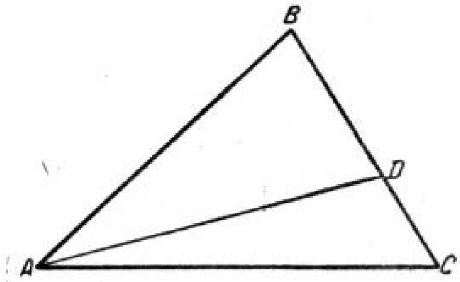
Задание 2. В треугольнике ABC проведена произвольная прямая AD (черт. 23).

На основании какой теоремы можно утверждать, что $\angle BDA > \angle BCA$?

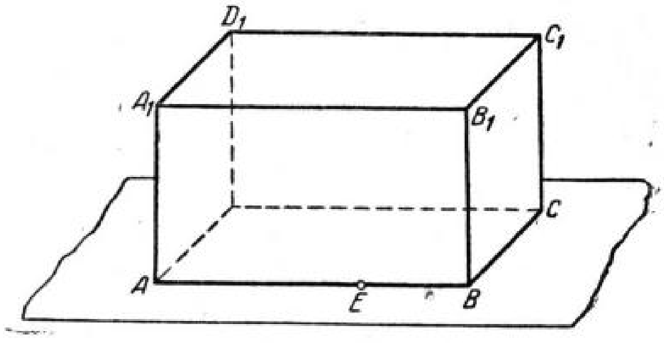
При выполнении первого задания испытуемые должны были применить к заданной фигуре признак внешнего угла треугольника и найти на чертеже все углы, удовлетворяющие этому признаку. Ошибки в решении задания обнаруживали неправильно сложившееся понятие внешнего угла треугольника,—наличие в этом понятии неверных признаков данного геометрического соотношения.

Выполнение второго задания должно было показать умение использовать усвоенное геометрическое положение (о внешнем угле треугольника) в применении к геометрической фигуре, отличающейся от привычного чертежа учебника и содержащей геометрические соотношения, маскирующие признак внешнего угла.

Испытуемым IX класса были предложены следующие задания:



Черт. 23



Черт. 24

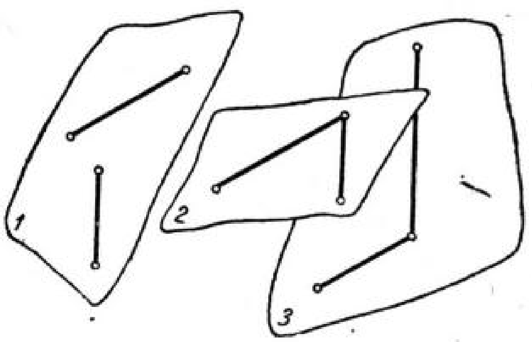
З а д а н и е 1. На чертеже изображен параллелепипед (черт. 24). Все грани этого параллелепипеда—прямоугольники.

1. Представьте мысленно плоскость, проходящую через прямую CC_1 и через точку E. В каком направлении пройдет линия пересечения этой плоскости с плоскостью передней грани?

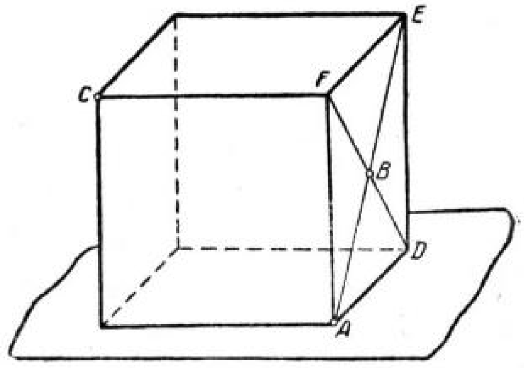
На основании какой теоремы можно определить положение этой линии на указанной грани?

2. Скопируйте чертеж и постройте на поверхности параллелепипеда линии сечения заданной плоскостью.

З а д а н и е 2. Прямые, начерченные на плоскостях 1, 2 и 3, соответственно параллельны между собой (черт. 25).



Черт. 25



Черт. 26

1. Имеется ли в заданном условии достаточно данных, чтобы установить параллельность плоскостей 1 и 2; параллельность плоскостей 2 и 3; параллельность плоскостей 1 и 3?

З а д а н и е 3. На чертеже изображен куб (черт. 26). Все грани куба — квадраты.

Соедините мысленно вершину C с точками A и B и в треугольнике ABC определите величину угла при вершине B, не делая для этого дополнительных построений.

Дайте геометрическое обоснование вашего ответа.

При выполнении этих заданий испытуемые должны были по условию задачи (выраженному в словесной и графической форме), представить в пространстве заданную фигуру, выделить в фигуре определенные соотношения и подыскать геометрические положения (теоремы), на основании которых можно ответить на вопрос задания. Геометрические положения, лежащие в основе решения предложенных заданий, выражены в теоремах о прямой параллельной плоскости (задание 1), о двух параллельных плоскостях (задание 2), о перпендикуляре к плоскости и перпендикуляре к прямой, лежащей в плоскости (задание 3)[1]. Геометрические соотношения, составляющие содержание указанных теорем, по своему оформлению отличаются от соответствующих чертежей учебника, во-первых, своего рода замаскированностью элементов, составляющих соотношение и, во-вторых, взаимным пространственным расположением этих элементов. В то время как чертеж учебника представляет некоторое явное изолированное изображение только тех элементов и соотношений, о которых трактует теорема, в предложенных нами заданиях (задания 1 и 3) эти же элементы являются составными частями некоторой сложной фигуры, содержащей, кроме рассматриваемых в задании соотношений, ряд других, не имеющих отношения к поставленному в задании вопросу. Поэтому решение предложенных заданий заключает в себе некоторую трудность, состоящую в необходимости выделить в данной фигуре именно те соотношения, которые при сопоставлении с искомыми составят основные компоненты (условие и заключение) одной из знакомых учащимся теорем. Указанная трудность усугубляется (во всех трех заданиях) необходимостью „узнать“ надлежащее геометрическое соотношение при таком взаимном пространственном расположении элементов, которое не сходно с расположением на знакомом чертеже учебника.

Отметим, что в условия заданий 1 и 3 нами введены геометрические тела, изучение которых не входит в учебную программу IX класса. Мы считаем, однако, что отсутствие у учащихся IX класса систематических сведений о строении и свойствах параллелепипеда, не служит препятствием для вполне обоснованного решения предложенных заданий. Решение должно опираться на данное в тексте указание о форме граней, на наглядное изображение параллелепипеда и на то общее представление формы этого тела, которое учащиеся имеют из окружающего опыта.

Решение задания 1 распадается на следующие этапы. Прежде всего испытуемые должны определить положение ребра CC_1 относительно грани AA_1B_1B (черт. 24). Для этого нужно „усмотреть“ в ребре BB_1 прямую, лежащую в плоскости грани AA_1B_1B, а в ребре CC_1 — п р я м у ю, п а р а л л е л ь н у ю п р я м о й BB_1, р а с п о л о ж е н н о й в э т о й п л о с к о с т и. В усмотренных соотношениях испытуемые должны „узнать“ первую часть (условие) знакомой теоремы[2] и сформулировать надлежащий вывод (заключение) о параллельности ребра CC_1 грани AA_1B_1B. Далее требуется сопоставить с искомой линией пересечения с е к у щ у ю п л о с к о с т ь, кото-

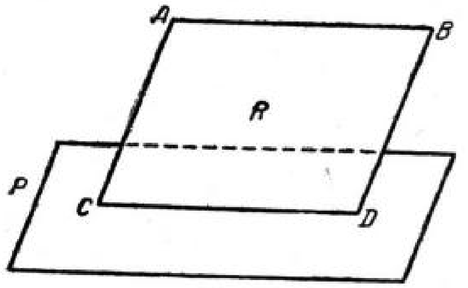
---

[1] К и с е л е в, ч. II, § 10, 11, 15, 23, 28.

[2] Т е о р е м а. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, расположенной в плоскости, то она параллельна самой плоскости (Киселев, ч. II, § 10).

рая проходит через прямую CC_1, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, и усмотреть в этом геометрическом соотношении содержание другой знакомой теоремы[1]. Такое сопоставление должно привести к формулировке соответствующего вывода.

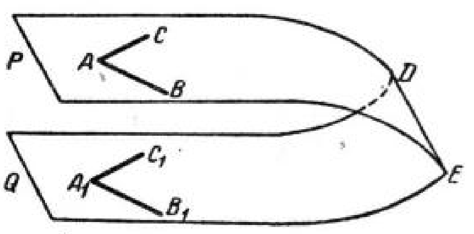
В качестве наглядного ориентира к указанной цепи узнаваний и сопоставлений учащимся служит чертеж учебника (черт. 27).



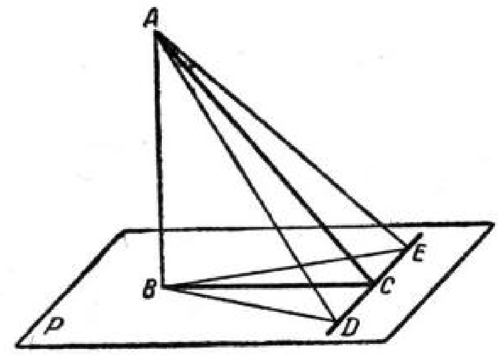
Черт. 27

В задании 2 испытуемые должны, сопоставляя вопрос задания с теми данными, которые имеются в условии этого задания, вспомнить формулировку теоремы, устанавливающей признаки параллельности двух плоскостей[2], и усмотреть в заданных на чертеже соотношениях наличие необходимых признаков для обоснованного ответа на поставленный вопрос. Чертеж учебника (черт. 28), на который учащиеся могут опираться (по памяти) при решении задания 2, отличается от чертежа задания следующими особенностями. В то время как на чертеже учебника каждая пара отрезков, лежащих в одной плоскости, выходит из одной точки и образует равные углы, на чертеже задания эти отрезки образуют неравные углы (плоскости 2 и 3) или совсем не составляют угла (плоскость 1).

При выполнении задания 3 испытуемые должны прежде всего по указанию—„все грани куба—квадраты"—заключить, что $AE \perp FD$ и что $CF \perp$ пл. $AFED$. После этого для решения основного вопроса задания нужно усмотреть в соотношении прямых AE, CB и BF компоненты условия, так называемой, „теоремы о трех перпендикулярах", т. е. прямую (AE), проведенную в плоскости ($AFED$) через основание наклонной (CB) перпендикулярно к ее проекции[3] (BF), и сделать отсюда соответствующий вывод о перпендикулярности прямых CB и AB. В качестве опорного наглядного образа для указанных сопоставлений и узнаваний учащимся служит (по памяти) чертеж учебника (черт. 29).



Черт. 28



Черт. 29

[1] Теорема. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения параллельна первой прямой (Киселев, ч. II, § 11).

[2] Теорема. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (Киселев, ч. II, § 15).

[3] Теорема. Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции, перпендикулярна и к самой наклонной (Киселев, ч. II, § 28).

Отличие заданного чертежа (черт. 26) от чертежа учебника (черт. 29) состоит, во-первых, во взаимном расположении прямых, составляющих предмет исследования, и, во-вторых, в замаскированности этих прямых в заданной фигуре куба в то время, как в фигуре учебника они представлены в явном, изолированном виде.

Анализ наблюдений по второй серии контрольных экспериментов

Наблюдения над успевающими учащимися выявили, что эти испытуемые выполняли задания без существенных затруднений.

Психологический анализ выполнения заданий показал, что успевающие учащиеся при усвоении геометрических положений (теорем) по учебнику правильно осознавали в наглядном образе книжного чертежа объективно существенные признаки рассматриваемого соотношения. Эти признаки были четко отделены в сознании испытуемых от вторичных, случайных признаков, связанных с частными особенностями в форме и положении фигуры, изображенной на чертеже задания. При решении заданий учащиеся проявляли умение анализировать чертеж, используя условия задания, и сознательно применяли существенные признаки рассматриваемых соотношений для решения поставленного в задании вопроса.

Путь решения более сложных заданий (предложенных испытуемым IX класса) характеризовался следующими чертами. Используя условия задания, успевающие испытуемые правильно выбирали необходимые для решения теоремы и выделяли в заданной фигуре именно те элементы, которые соответствовали выбранной теореме. Признаки, по которым испытуемые выделяли необходимые элементы, являлись *существенными* признаками рассматриваемого геометрического соотношения. Наглядный образ книжного чертежа являлся для успевающих учащихся носителем *правильно обобщенных положений*, и при его применении испытуемые использовали в нем *смысловые соотношения*. Они осознавали в чертеже учебника не только существенные признаки соотношения, устанавливаемого теоремой, но и принцип, по которому могут изменяться форма и положение геометрических элементов, составляющих это соотношение.

Учащиеся VI класса, решая задание 1, искали в заданной фигуре только углы, смежные с внутренними углами треугольника. Это соотношение было совершенно отчетливо осознано ими, как существенный признак внешнего угла, и их внимание при решении задания не отвлекали другие свойства рассматриваемых углов: величина, расположение вершины и т. п.

Ученик VI класса Г. при решении задания 2 сразу выделил треугольник *ADC* (черт. 23), рассмотрел угол *ADC*, как смежный с внутренним углом треугольника, и применил теорему о внешнем угле треугольника.

Испытуемая IX класса М. при решении задания 1 (черт. 24) на предложение экспериментатора изобразить на отдельном чертеже, как она себе представляет условие параллельности прямой и плоскости, нарисовала чертеж 27 и пояснила: „Прямую на плоскости можно расположить по-разному, и прямую, которая над плоскостью, я могла бы поместить под плоскостью или сбоку—важно, чтобы она была вне этой плоскости и параллельна первой прямой“.

Та же испытуемая, при решении задания 2 (черт. 25), в ответ на вопрос экспериментатора о том, как она использовала для решения чертеж учебника (черт. 28), объясняет: „В задаче прямые расположены не как в книге; там они образуют два равных угла (испытуемая делает набросок книжного чертежа), а здесь углы неравные и расположены иначе, и необязательно прямые должны пересекаться на чертеже,—они могут пересекаться при мысленном продолжении“. Как видно из объяснений испытуемой, она не только ясно сознавала существенный признак каждого из рассматриваемых соотношений, но и отчетливо понимала принцип возможных вариаций элементов, соответствующих каждому из признаков.

Процесс выполнения заданий слабыми учащимися существенным образом отличался от решения заданий сильными учащимися. Наблюдения показали, что слабые учащиеся решали задания с значительными затруднениями. Психологический анализ наблюдений выявил следующие характерные особенности в процессе решения заданий неуспевающими учащимися.

Свои суждения о фигуре они основывали на непосредственном впечатлении, полученном от чертежа задания, не используя надлежащим образом условия задания. При анализе заданного чертежа для выделения признаков, определяющих наличие искомого геометрического соотношения, они проявляли неумение правильно переносить на заданную фигуру существенные соотношения элементов из соответствующего чертежа учебника. В наглядном образе книжного чертежа, наряду с существенными элементами рассматриваемого соотношения они придавали решающее значение различным частным моментам (форме, расположению частей фигуры и т. п.), внося тем самым незакономерные изменения в понятие рассматриваемого соотношения. Испытуемые обнаруживали таким образом связанность суждений или заданным чертежом или чертежом учебника.

Покажем примеры неправильных решений заданий.

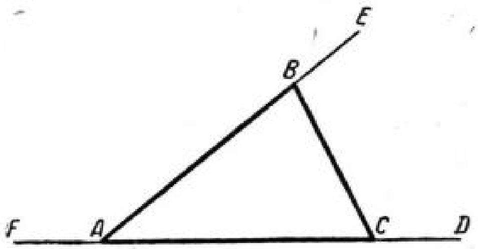
В VI классе ученик П. при решении задания 2 обнаружил в своих суждениях связанность заданным чертежом. Наличие в фигуре двух треугольников *ADC* и *BCD* отвлекло его внимание к теореме о треугольниках с неравными углами, заключенными между соответственно равными сторонами. Усмотрев в чертеже по непосредственному впечатлению, что стороны *AD* и *BC* равны между собой, а сторона *AC* больше стороны *DB*, и не приняв во внимание отсутствия этих данных в условии задания, испытуемый П. пытался доказать, что угол *ADC* больше угла *DCB*, „так как он лежит против бо́льшей стороны“. Как видно из хода решения, этот испытуемый проявил помимо связанности суждений заданным чертежом также и неумение руководствоваться условием задания.

Ученица VI класса В. в задании 1 (черт. 22) не считала угол *ACD* внешним, указывая на то, что он „острый, а по чертежу учебника[1] (черт. 30) внешние углы все тупые“.

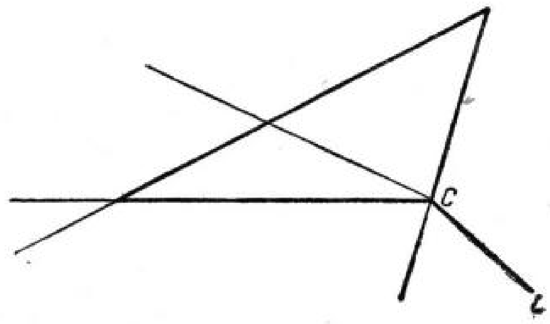
Ученица З. также принимала величину угла („тупой“) за существенный признак внешнего угла треугольника, и на предложение построить на чертеже 22 внешний угол при вершине *C* она провела произвольную прямую *CL*, образующую тупой угол со сторонами треугольника (черт. 31). В своем стремлении сохранить необходимый по ее мнению признак—тупой угол, она потеряла в построенной

[1] Киселев, ч. I, черт. 48.

ею фигуре объективно существенный признак внешнего угла. Эта же ученица, как выяснилось из вопросов экспериментатора, не считала возможным построить внешний угол при „верхней“ вершине треугольника, ссылаясь на то, что на уроках, при объяснениях на доске, угол всегда строился у „правой“ вершины.



Черт. 30



Черт. 31

Многие испытуемые VI класса, решая задание 2, не усматривали в угле ADC (черт. 23) внешнего угла треугольника BCD, так как они считали, что „внешний“ угол треугольника должен быть „открытым“ углом, как на чертеже учебника. Если, после отказа испытуемого решить задание, экспериментатор закрывал полоской бумаги сторону AC, задание тотчас легко выполнялось испытуемым.

В рассмотренных случаях характерной причиной ошибок и затруднений испытуемых является „связанность“ суждений чертежом учебника. Учащиеся, пытаясь перенести на предложенные им в заданиях чертежи те случайные соотношения в чертеже учебника, которые они приняли за существенные, неверно решали задания.

В некоторых случаях, например, испытуемые Б., К., Е. обнаружили незакономерно расширенное понятие внешнего угла, называя внешним угол EAF, угол GHB (черт. 22), т. е. углы, расположенные вне треугольника. В этом примере существенный признак рассматриваемого соотношения оказался совсем не осознанным; он заменен произвольным другим признаком, связанным с обиходным значением слова „внешний“.

В IX классе связанность заданным чертежом можно иллюстрировать следующими примерами.

При решении задания 1 (черт. 24) многих испытуемых затрудняло требование мысленно представить по заданному чертежу положение секущей плоскости в изображенной фигуре. Чтобы представить себе, как пойдет искомое сечение, они делали попытки непосредственно, по общему впечатлению, фактически нарисовать на заданном чертеже линию сечения.

В задании 3 (черт. 26) испытуемая Ш., рассматривая чертеж, сразу по общему впечатлению „представила“ себе, что „CB перпендикулярна к боковой грани“, и на этом обосновала свой ответ на основной вопрос задания. Из опроса экспериментатора выяснилось, что испытуемая „не обратила внимания“ на то, что ребро CF перпендикулярно к той же грани, хотя это свойство куба, равно как и невозможность провести из точки C двух различных прямых, перпендикулярных к плоскости $AEFD$, испытуемая хорошо знала. Свое неумение сознательно использовать условия задания эта же испытуемая проявила также и в том, что „не заметила“, что диагонали правой грани взаимно перпендикулярны, тогда как это соотношение значительно помогло бы ей встать на правильный путь решения.

В приведенных примерах так же, как в вышерассмотренных опытах с учащимися VI класса, связанность суждений заданным чертежом соединяется с неумением использовать условие задания для правильного анализа чертежа и для усмотрения в фигуре тех соотношений, которые даны в условии или вытекают из него.

Связанность чертежом учебника сказалась в следующих случаях.

При решении задания 2 испытуемые IX класса делали для себя набросок чертежа учебника (черт. 28), сопоставляя его с заданным чертежом (черт. 25) и пытаясь найти в последнем сходство в расположении частей фигуры с элементами книжного чертежа. Эти попытки оказывались неудачными, так как учащиеся искали сходства не в смысловых соотношениях, а во внешнем пространственном расположении элементов.

Многие испытуемые при решении задания 2 отрицали параллельность заданных плоскостей на том основании, что прямые, расположенные на плоскостях, хотя и параллельны по условию, но не образуют равных, „одинаковых“ углов и даже совсем не пересекаются. Эти испытуемые придали в чертеже учебника (черт. 28) решающее значение частному моменту в расположении параллельных прямых на плоскостях, и при решении задания считали, что для суждения о параллельности плоскостей наличие этого частного признака (равенства углов) так же необходимо, как и наличие объективно существенного признака, т. е. параллельности прямых, взятых попарно.

Некоторые из испытуемых, не сумевшие решить задание 3, легко решали его, если экспериментатор поворачивал заданный чертеж (черт. 26) на 90° так, чтобы сделать правую грань куба нижней гранью. При таком положении фигуры испытуемые находили в ней сходство с чертежом учебника (черт. 29): „Это похоже, как в книге“,—заявила испытуемая Ц.

Необходимо отметить, что во всех случаях проявления связанности чертежом учебника учащиеся давали правильную формулировку теорем, на которых было основано решение заданий. Их неумение решить задание обусловливалось тем, что за этой правильной формулировкой скрывалось неправильное понимание существенных признаков, характеризующих геометрическое положение, устанавливаемое теоремой.

Большинство испытуемых, не решивших задания, обнаружило слабое развитие пространственных представлений и затруднялось мысленно представить те дополнительные построения, которые требовались по заданию.

4. ПРИНЦИПЫ, ПОЛОЖЕННЫЕ В ОСНОВУ УПРАЖНЕНИЙ НА ГРАФИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ В ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ

Выводы из контрольных экспериментов

Результаты контрольного эксперимента могут быть выражены в следующих выводах:

1. В практике школьного преподавания чертеж, сопровождающий изложение какого-нибудь геометрического положения (выраженного в условии теоремы, задачи), не всегда является помощью

в ходе рассуждений. В некоторых случаях чертеж может оказывать связывающее влияние на мысль учащихся.

При усвоении учебного материала это связывающее влияние проявляется в том, что учащиеся принимают частные особенности чертежа учебника за существенные признаки изучаемого геометрического соотношения и не научаются отделять существенные признаки от вторичных и случайных.

При решении задач связывающее влияние чертежа, сопровождающего задачу, выражается в трудности мысленной реконструкции фигуры или изменения ее положения по заданному изображению.

2. Указанное отрицательное влияние чертежа приводит к тому, что в геометрические понятия вносятся незакономерные моменты, а наглядные образы, соответствующие изучаемым соотношениям, приобретают инертность, неподатливость к преобразованиям.

3. Не располагая закономерной и ясно осознанной системой признаков какого-либо понятия, учащиеся не могут узнавать в новых условиях, на измененных и усложненных чертежах, изученные геометрические соотношения, и вследствие этого не научаются применять усвоенные знания при решении задач.

4. Вместе с тем контрольные эксперименты определили путь для разработки методов эффективного применения чертежа в процессе усвоения геометрии.

Основной мерой, освобождающей геометрическое мышление от связанности восприятием заданного чертежа, является метод вариации формы и положения изучаемой по чертежу фигуры совместно с анализом и обобщением содержащихся в фигуре геометрических соотношений.

В преподавании стереометрии необходимой предпосылкой для применения этого метода является ознакомление учащихся с элементарными правилами условного изображения пространственных фигур.

Принципы, положенные в основу упражнений

Выводы, полученные нами в результате проведения предварительных контрольных экспериментов, послужили базой для разработки положений, которыми мы руководились при составлении заданий для дальнейших экспериментов и на основе которых, после экспериментальной психологической и методической проверки этих положений, нами разработан сборник упражнений к курсу геометрии.

Принципы, положенные в основу наших упражнений, можно выразить следующим образом:

1. Система упражнений на графическом материале в преподавании геометрии имеет две цели: она должна развивать пространственные представления и способствовать образованию геометрических понятий.

2. Система упражнений построена так, что выполнение задания связано с логическим анализом заданного графического материала. Этот анализ помогает правильно понять заданное изображенне фигуры через условие задачи, правильно изобразить необходимые по заданию дополнительные части фигуры и в результате приводит к правильному представлению изучаемой фигуры.

3. Система упражнений направляет на активную выработку представлений и понятий. Графический материал упражнений является

не только иллюстративным средством, но должен заключать в себе конструктивный элемент. В то время как чисто иллюстративный материал освобождает учащихся от трудностей в создании новых представлений, конструктивный элемент в наших упражнениях побуждает к преодолению этих трудностей.

4. Степень сложности упражнений возрастает по мере конструктивного усложнения фигуры, содержащей изучаемые геометрические соотношения, и по мере того, как в геометрических фигурах, несущих указанные соотношения, уменьшается сходство с теми изображениями, которые учащиеся привыкли видеть в учебнике.

Все упражнения содержат в себе в различном сочетании три типа заданий, которые заключаются: 1) в узнавании фигур и их основных частей; 2) в разложении и составлении фигур с внесением элемента движения и 3) в узнавании и объяснении изученных геометрических соотношений на новом геометрическом материале в новых конкретных формах.

Значительное внимание в упражнениях уделяется такой форме задания условия, при которой предлагаемый для исследования геометрический объект задается (частично или полностью) только в виде словесного описания без сопровождающих иллюстраций. Необходимые умозаключения должны производиться на основании мысленного исследования объекта и мысленных дополнительных построений в нем, после чего должные выводы оформляются графически.

Все упражнения требуют от учащихся словесного обобщения материала.

Мы считаем, что упражнения, удовлетворяющие изложенным требованиям, должны обогащать запас геометрических представлений, формировать правильные геометрические понятия и способствовать накоплению определенного геометрического опыта как базы для развития навыков в практическом приложении геометрических знаний. Этот геометрический опыт, по мере накопления, дает возможность непосредственно схватывать все более сложные геометрические соотношения и обусловливает ускорение процессов геометрического мышления.

5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА СИСТЕМЫ УПРАЖНЕНИЙ

На основе изложенных положений были составлены задания, которые мы применили во второй части каждой из двух серий наших экспериментов, т. е. в экспериментах на упражнение.

При проведении этих экспериментов экспериментатор, ведя наблюдения за выполнением заданий испытуемыми, вместе с тем при помощи вопросов или указаний направлял учащихся на правильный путь решения с целью выяснить возникающие затруднения и найти способы к устранению их. Только последнее задание, служившее в качестве заключительного контрольного, выполнялось испытуемыми совершенно самостоятельно.

Первая серия экспериментов на упражнение

В первой серии экспериментов на упражнение, как уже было указано выше, преследовались две цели.

Первая цель состояла в том, чтобы выяснить возможность развития пространственного воображения в применении к решению задач на мысленное перемещение и реконструкцию геометрических фигур, заданных на чертеже. Вторая цель состояла в разработке, на основе полученных экспериментальных выводов, наиболее целесообразных методов развития навыков в решении указанных задач.

Учебный материал экспериментальных заданий соответствовал тем же темам учебной программы, которые были использованы для предварительных контрольных заданий.

Упражнения для учащихся VI класса

Испытуемым VI класса были предложены следующие задания.

Задание 1. На чертеже изображены начальное и конечное положения треугольника, перемещенного поступательным движением (черт. 32).

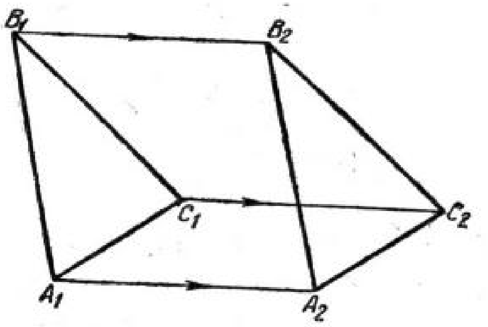
При поступательном движении всякая прямая, принадлежащая фигуре, перемещается параллельно самой себе. Все точки фигуры можно переместить из начального положения в конечное по прямолинейным, параллельным и равным между собой путям.

Фигура перемещается из положения $A_1B_1C_1$ в положение $A_2B_2C_2$, не выходя из плоскости чертежа.

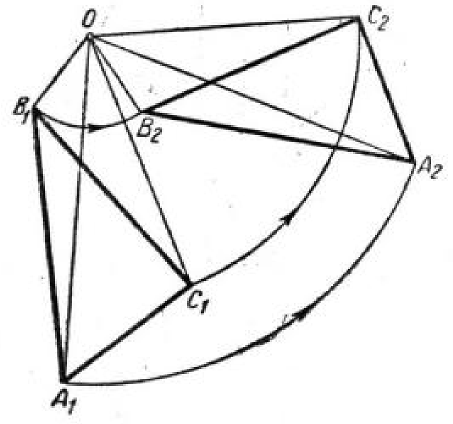
1. Положите на лист бумаги линейку и чертежный угольник, приставленный к линейке одной из своих сторон. Передвиньте угольник вдоль линейки в новое положение.

2. Посредством какого способа перемещения вы передвинули угольник на плоскости бумаги?

Задание 2. На чертеже изображены начальное и конечное положения треугольника, перемещенного вращательным движением (черт. 33).



Черт. 32



Черт. 33

Все точки фигуры движутся вокруг общего центра O по дугам, которым соответствуют равные центральные углы. Фигура перемещается из положения $A_1B_1C_1$ в положение $A_2B_2C_2$, не выходя из плоскости чертежа.

1. Начертите на листе бумаги произвольный треугольник, приколите булавкой бумагу в какой-нибудь точке к столу и поверните чертеж вокруг булавки на некоторый угол.

2. Посредством какого способа перемещения вы передвинули треугольник на плоскости стола?

Задание 3. На чертеже изображены начальное и конечное положения треугольника, перемещенного посредством поворота вокруг прямой (черт. 34).

Такое перемещение можно получить, если согнуть чертеж по линии MN и повернуть вокруг линии сгиба правую часть листа бумаги так, чтобы она совпала с левой частью листа. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ займет на бумаге положение $A_2B_2C_2$.

При повороте вокруг оси MN все точки фигуры движутся по дугам окружностей, центры которых расположены на оси вращения NN. Фигура $A_1B_1C_1$ перемещается вне плоскости чертежа и располагается в положении $A_2B_2C_2$ обратной стороной своей плоскости.

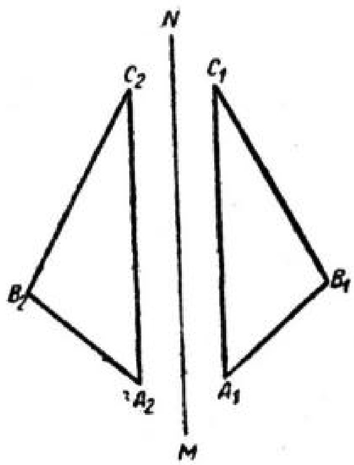
Расположение фигур $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 является симметричным относительно оси MN.

1. Начертите карандашом на листе бумаги прямую MN и треугольник $A_1B_1C_1$, расположенный по одну сторону от MN.

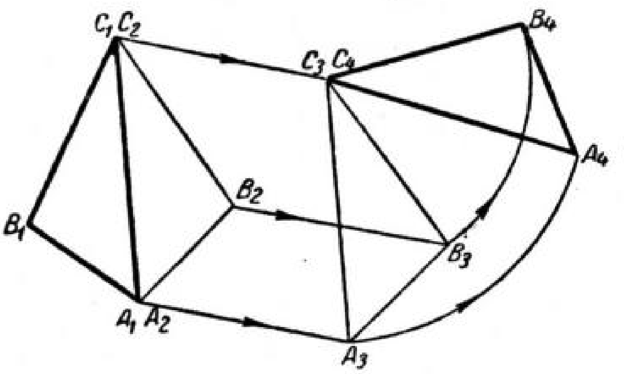
2. Перегните чертеж по прямой MN и сделайте оттиск треугольника по другую сторону прямой MN; обведите полученную фигуру $A_2B_2C_2$.

3. Посредством какого способа перемещения вы перенесли треугольник в новое положение?

Задание 4. На чертеже изображены начальное и конечное положения треугольника, перемещающегося из положения $A_1B_1C_1$ в положение $A_4B_4C_4$ при помощи последовательного применения способов: 1) поворота ($A_2B_2C_2$), 2) поступательного движения ($A_3B_3C_3$) и 3) вращения ($A_4B_4C_4$) (черт. 35).



Черт. 34



Черт. 35

Задание 5. На изображенных треугольниках отмечены черточками соответственно равные стороны (черт. 36).

1. Переместите мысленно треугольник ABC в плоскости чертежа и приложите его к другому треугольнику так, чтобы совпали равные стороны AB и DE и вершины A и D. Начертите полученную фигуру (от руки на-глаз).

2. Вырежьте из бумаги модели данных треугольников и, прикладывая один к другому указанными сторонами и вершинами, проверьте правильность начерченной вами фигуры.

При помощи каких простейших способов перемещения можно перенести треугольник ABC в указанное положение?

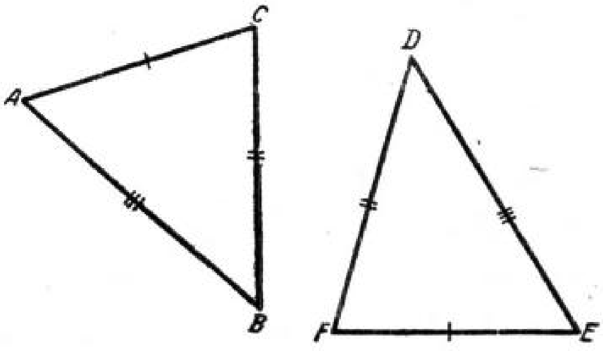
3. Приложите мысленно треугольник ABC к треугольнику DEF, совместив те же стороны так, чтобы совпали вершины A и E. Начертите полученную фигуру.

4. Проверьте чертеж при помощи треугольников-моделей.

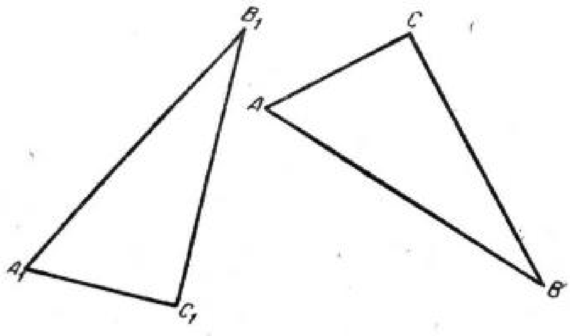
Какими простейшими способами можно перенести треугольник ABC в этом случае?

5. Проведите в каждом из полученных четырехугольников диагональ, соединяющую две несовпавшие вершины треугольников. Рассмотрите тот из четырехугольников, который диагональ разделила на два равнобедренных треугольника.

Как нужно, прикладывая треугольники друг к другу, расположить равные стороны и вершины равных углов, чтобы получился четырехугольник, состоящий из двух равнобедренных треугольников?



Черт. 36



Черт. 37

6. Составьте мысленно и начертите такие же четырехугольники, прикладывая треугольники ABC и DEF другими попарно равными сторонами.

Проверьте правильность ваших чертежей при помощи бумажных моделей.

Задание 6. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ прямоугольные с соответственно равными сторонами (черт. 37).

1. Приложите мысленно треугольники друг к другу сторонами AC и A_1C_1 так, чтобы попарно совпали вершины A и C_1, C и A_1. Можно ли разделить полученный четырехугольник на два равнобедренных треугольника?

2. Приложите мысленно треугольники друг к другу сторонами AC и A_1C_1 так, чтобы совпали вершины A и A_1, C и C_1. Начертите полученную фигуру и объясните, почему ее нельзя считать четырехугольником. Докажите, что составленная фигура — равнобедренный треугольник.

3. Как нужно приложить друг к другу треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, чтобы доказать, что $\angle A = \angle A_1$?

Задание 7. В треугольниках ABC и DEF равные стороны отмечены черточками (черт. 38).

1. Приложите мысленно треугольники друг к другу равными сторонами AB и EF так, чтобы при помощи вспомогательной прямой получить на фигуре два равнобедренных треугольника.

Начертите полученную фигуру.

2. Сделайте то же самое, прикладывая треугольники друг к другу сторонами BC и DF; AC и ED.

3. Проверьте ваши ответы при помощи бумажных моделей.

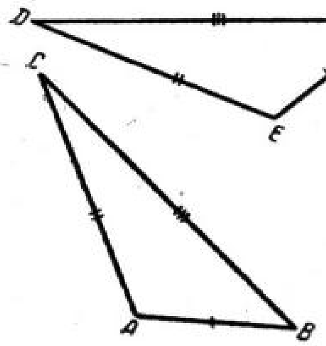
Задание 8. На чертеже даны две пары треугольников, имеющие по две соответственно равные стороны, углы между которыми неравны (черт. 39).

1. Наложите мысленно треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы попарно совместились вершины A с A_1 и B с B_1. На-

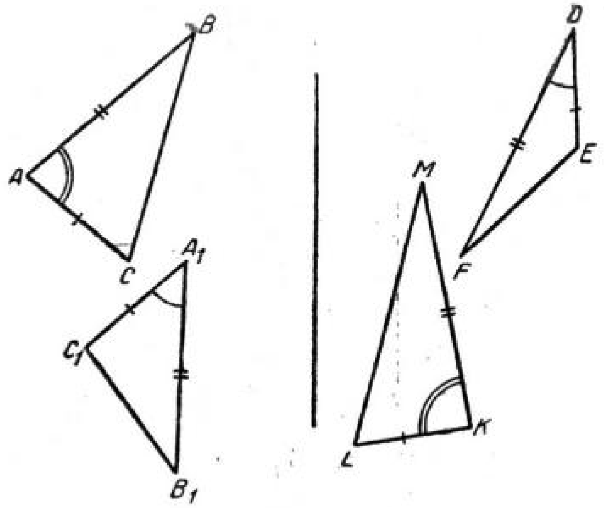
чертите (от руки на-глаз) фигуру, образовавшуюся после указанного наложения.

Указание. Чтобы сделать правильный чертеж на-глаз, нужно обратить внимание на величины углов при вершинах A и A_1.

2. Начертите фигуру, которая получится, если наложить треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$, совместив вершины A с A_1 и C с C_1.



Черт. 38



Черт. 39

Какими простейшими способами можно переместить треугольник ABC в указанное положение?

3. Начертите такие же фигуры, накладывая треугольник KLM на треугольник DEF.

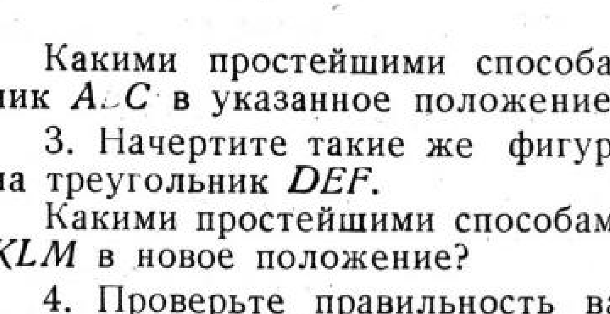
Какими простейшими способами можно переместить треугольник KLM в новое положение?

4. Проверьте правильность ваших чертежей и ответов при помощи бумажных моделей.

Заключительное контрольное задание

Для заключительного контрольного эксперимента в VI классе послужило следующее задание.

Задание 1. Треугольники ABC и DEF имеют по две соответственно равные стороны, углы между которыми неравны (черт. 40).



Черт. 40

1. Приложите мысленно треугольник DEF к треугольнику ABC так, чтобы совпали стороны EF и AB и вершины F и A. Начертите полученную фигуру. Объясните, какими простейшими способами можно переместить треугольник DEF в указанное положение.

2. Наложите мысленно треугольник ABC на треугольник DEF так, чтобы совпали стороны DF и AC и вершины F и A. Начертите полученную фигуру.

Объясните, какими способами можно переместить треугольник DEF в указанное положение.

Методические обоснования упражнений

В первых четырех заданиях на упражнение учащиеся получали в наглядной форме по чертежам и на моделях представление о простейших способах упорядоченного перемещения плоской фигуры из одного положения на занимаемой ею плоскости в другое. Такими способами перемещения являются: 1) поступательное движение, 2) вращательное движение вокруг точки, лежащей в плоскости фигуры и 3) поворот вокруг прямой, лежащей в той же плоскости. Упражнения 1, 2 и 3 представляют иллюстрации перечисленных способов перемещения в применении к треугольнику. Упражнение 4 дает пример комбинированного перемещения. После наглядного ознакомления по чертежу и сопроводительному тексту с каждым из описанных видов перемещения, учащимся предлагалось практически осуществить такое перемещение на моделях. При задании этих упражнений мы не могли требовать от учащихся графического воспроизведения заданных чертежей при помощи чертежных инструментов, так как ко времени изучения теорем о равенстве треугольников учащиеся еще не знакомы с приемами геометрических построений.

Задания 5, 6 и 7 являются упражнениями в целенаправленном мысленном перенесении треугольников. Вместе с тем методическое назначение этих упражнений состоит в подготовке учащихся к осмысленному выполнению операции приложения треугольников друг к другу при доказательстве теоремы о равенстве по третьему признаку. При отмеченном нами в контрольном эксперименте формальном выполнении построения для доказательства от внимания учащихся ускользает, что для целей доказательства применим лишь один способ приложения треугольников из двух возможных. Предлагаемые упражнения не допускают выпадения из цепи рассуждений, на которых основано доказательство теоремы, этого весьма существенного звена, и тем самым в понимании учащихся полнее раскрывается геометрическая сущность метода доказательства.

Кроме того, задание 6 и 7 имели целью освободить учащихся от связанности формой треугольников. В процессе выполнения заданий учащиеся убеждались, что доказательство теоремы осуществимо при совмещении любых равных сторон треугольников, независимо от формы последних.

Задание 8 является упражнением в мысленном перенесении треугольников для наложения их друг на друга. Вместе с тем это задание направлено на подготовку учащихся к выполнению наложения треугольников при доказательстве теоремы о треугольниках, имеющих неравные углы между соответственно равными сторонами.

В заключительном контрольном задании мы имели в виду соответствующим выбором формы треугольников устранить облегчающее влияние симметрии, которое мы наблюдали (как это будет указано ниже) в экспериментах на упражнение в случаях приложения друг к другу равных между собой треугольников.

Упражнения для учащихся IX класса

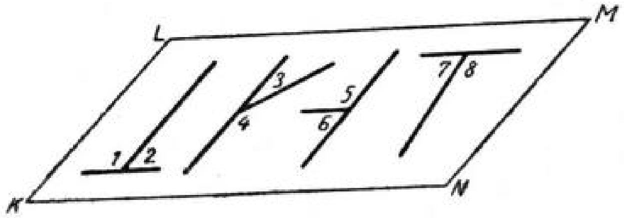
Испытуемым IX класса были предложены следующие задания.

З а д а н и е 1. В плоскости прямоугольника *KLMN* начерчены четыре пары смежных углов (черт. 41).

1. Представьте мысленно прямоугольник $KLMN$ расположенным в фронтальной плоскости и определите, какие из данных на нем углов изображают острые, прямые и тупые углы.

2. Дайте обоснование вашим ответам.

Задание 2. Фигура $ABCD$ изображает квадрат, произвольно расположенный в пространстве. Фигура STV расположена в плоскости квадрата (черт. 42).



Черт. 41

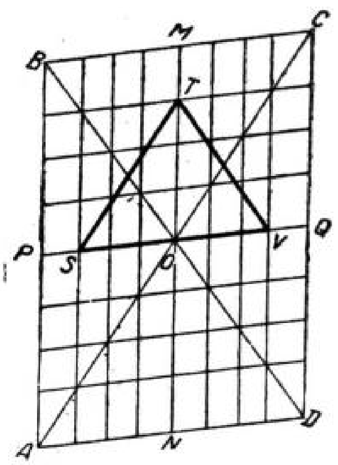
1. Представьте мысленно квадрат $ABCD$ расположенным в фронтальной плоскости и определите, какой вид имеет фигура STV в действительности. Укажите на ней равные элементы (стороны, углы), а также углы прямые, острые, тупые (если они есть).

2. Дайте обоснование вашим ответам.

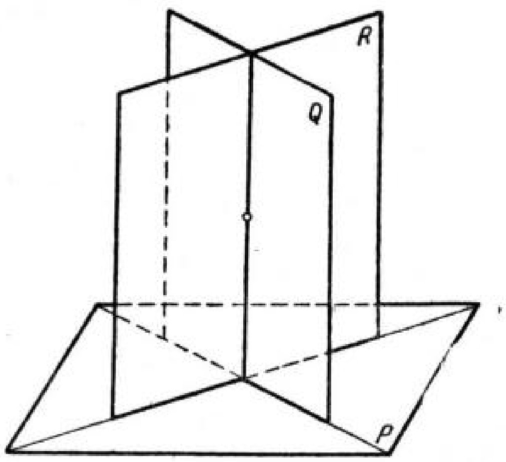
3. Скопируйте чертеж и затем начертите действительный вид фигуры, расположив квадрат $ABCD$ в фронтальной плоскости и считая, что сторона AB изображена на чертеже в натуральную величину.

Задание 3. Пересекающиеся плоскости Q и R поставлены на плоскость P (черт. 43).

1. Представьте мысленно и изобразите фигуру, которую составят данные плоскости, если поднять плоскость P поступательным движением до середины линии пересечения плоскостей Q и R, оставляя эти плоскости в прежнем положении.



Черт. 42



Черт. 43

Указание. Чертеж удобно выполнить, изобразив в последовательном порядке:

1) линию пересечения плоскостей Q и R,
2) плоскости Q и R,
3) линии пересечения плоскости P с плоскостями Q и R,
4) плоскость P.

2. Дайте обоснование вашим ответам.

Задание 4. На чертеже изображена фигура, составленная из двух пересекающихся плоскостей (черт. 44).

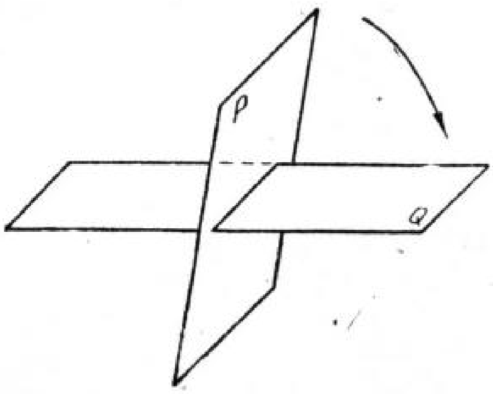
1. Изобразите эту фигуру, повернув ее мысленно по направлению стрелки вокруг линии пересечения плоскостей так, чтобы плоскость P заняла положение плоскости Q.

2. Дайте обоснования сделанным построениям.

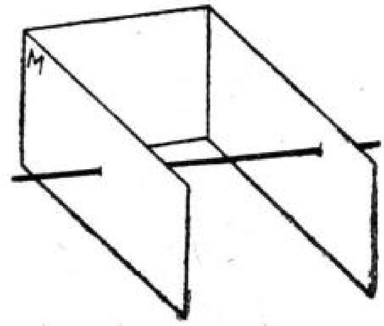
Задание 5. 1. Опишите фигуру, изображенную на чертеже 45.

2. Мысленно поверните фигуру так, чтобы задняя стенка была видна снаружи; поставьте перед собой фигуру так, чтобы буква M на левой стенке была видна в новом положении. Изобразите фигуру после указанного поворота.

3. Дайте обоснования вашим ответам.



Черт. 44



Черт. 45

Заключительное контрольное задание

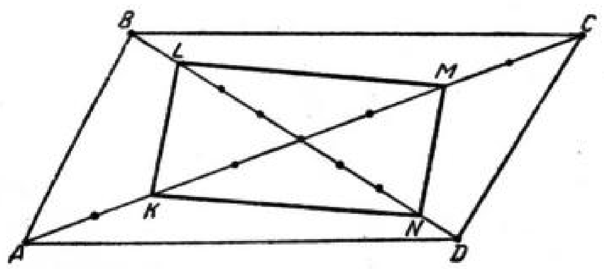
Для заключительного контрольного эксперимента в IX классе были предложены следующие задания.

Задание 1. Фигура $ABCD$ изображает квадрат, произвольно расположенный в пространстве. Диагонали крадрата разделены на равные части. Фигура $KLMN$ расположена в плоскости квадрата (черт. 46).

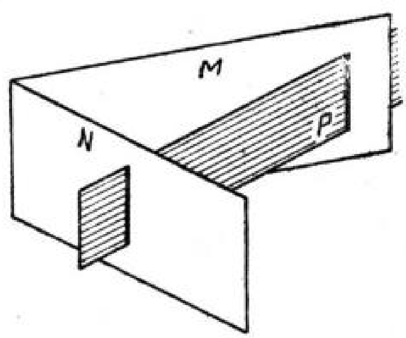
1. Какой вид имеет в действительности фигура $KLMN$?

2. Начертите на-глаз в фронтальной плоскости квадрат $ABCD$ с изображенной на нем фигурой, считая, что сторона AD изображена в натуральную величину.

3. Дайте обоснования вашим ответам.



Черт. 46



Черт. 47

Задание 2. Плоскости M и N пересечены плоскостью P (черт. 47).

1. Поверните мысленно фигуру так, чтобы линия пересечения плоскостей M и N расположилась с правой стороны фигуры.

2. Начертите фигуру в новом положении.

Методические обоснования упражнений

В первых двух заданиях на упражнение (черт. 41 и 42) учащиеся IX класса имели дело с чертежами плоских фигур, контуры которых были искажены на чертеже вследствие несовпадения плоскости фигуры с фронтальной плоскостью. На основании данных о форме фигуры, имеющихся в сопроводительном тексте, и принимая во внимание основные свойства параллельных проекций (предварительное упражнение 3, черт. 4), учащиеся должны были сделать геометрический анализ чертежа и на основе этого анализа представить и начертить действительную форму каждой фигуры.

В заданиях 3, 4 и 5 учащиеся имели дело с чертежами трехмерных фигур. Выполнение каждого задания заключалось в том, чтобы представить строение заданной пространственной фигуры, мысленно выполнить указанную реконструкцию или перемещение фигуры и после произведенных над ней операций воспроизвести ее изображение на чертеже. Правильное решение задачи обусловливалось правильным пониманием условия задачи (в словесной и графической его части), знанием основных свойств параллельных проекций (предварительное упражнение 3, черт. 4) и теми сведениями об условностях изображения пространственных фигур, которые были получены учащимися в предварительных упражнениях 4, 5, 6, 7, 8 и 9 (черт. 5—10). Кроме того, в задании 5 нужно было проявить некоторую наблюдательность по отношению к взаимному расположению прямой и граней, проницаемых ею.

Заключительные контрольные задания для IX класса представляли варианты заданий эксперимента на упражнение.

Анализ наблюдений по первой серии экспериментов на упражнение

Наблюдения над выполнением заданий испытуемыми VI класса (малоуспевающими, не решившими предварительных контрольных заданий) показали, что осознанное решение заданий 5, 6, 7 и 8 достигалось лишь после того, как испытуемые фактически проделывали приложение или наложение треугольников на моделях. После таких предварительных упражнений испытуемые могли выполнять мысленное перенесение фигур, не прибегая к помощи моделей, на повторных вариантах тех же заданий, в которых мы изменяли взаимное расположение задаваемых треугольников. Из наблюдений выяснилось, что в зависимости от характера перемещений наиболее легкими заданиями оказались такие, в которых перемещение фигуры осуществлялось при помощи поступательного движения или мало отличающегося от поступательного, т. е. соединенного с вращением фигуры в плоскости чертежа на небольшой угол. Выполнение задания затруднялось по мере того, как увеличивался угол, на который нужно было повернуть фигуру для надлежащего ее перенесения в новое положение. Наибольшие трудности представило перемещение, связанное с поворотом треугольника обратной стороной его плоскости. Вторым затрудняющим фактором в выполнении заданий являлось несходство фигуры, полученной после составления заданных треугольников (приложения или наложения), с соответствующей фигурой учебника (черт. 15 и 16). При этом выяснилось, что испытуемых меньше затрудняли те случаи, в которых окончательная фигура отличалась от книжного чертежа лишь по своему расположению относительно рамки чертежа; отличия от чертежа учебника в форме фигуры вносили значительно большие затруднения в решение. В этом смысле труднее других оказались задание 7 и второй вариант задания 8. Наконец, наблюдения позволили отметить, что из двух операций—приложения и наложения треугольников, последняя оказалась для испытуемых более трудной. Мы объясняем это большей простотой строения фигуры, получавшейся в наших заданиях в результате приложения,—она всегда была симметрична или относительно оси, или относительно центра, в то время как в структуре фигур, получавшихся при наложении, отсутствовали легко схватываемые закономерности.

Психологический анализ наблюдений показал, что только у троих испытуемых VI класса трудности мысленного перемещения не были полностью сняты упражнением. Недоступными оказались для этих испытуемых мысленные перемещения фигур с поворотом вне плоскости чертежа. Ученица З. объяснила: „Я не могу повернуть треугольник и переместить его, он исчезает". Ученица В. говорила: „На бумажных треугольниках я вижу, как повернуть, а без них не могу, не представляю себе".

Остальные испытуемые в процессе упражнения справились со всеми трудностями предложенных заданий и без особых затруднений выполнили заключительное контрольное задание.

Следует отметить, что связанность исходным положением фигур, заданных на чертеже, разбивалась каждый раз при содействии моделей, на которых учащиеся фактически видели перемещения треугольников и осознавали приемы этих перемещений, необходимые для заданной в условии цели. Таким образом в процессы пространственного представления включался интеллектуальный момент осознавания целесообразных приемов перемещения фигур.

Описанные результаты экспериментов на упражнение и заключительный контрольный эксперимент с испытуемыми VI класса показали, что графический материал, сопутствующий изучению курса планиметрии, может быть эффективно использован для развития пространственного воображения учащихся. Необходимой составной частью упражнений указанного характера должно быть осознавание простейших приемов целенаправленного перемещения фигур с применением для этого в некоторых случаях, в виде подсобной меры, моделей.

Частичный неуспех упражнений с тремя испытуемыми следует отнести к кратковременности этих упражнений. Можно полагать, что у некоторых учащихся пространственное воображение сравнительно трудно поддается упражнению и требует длительного срока для своего развития.

В IX классе устранение трудностей мысленного представления перемещений и реконструкции фигур проводилось в методическом отношении другими путями, чем в VI классе.

Прежде всего, в упражнения не могли быть внесены в качестве вспомогательного средства модели. Помимо чисто технических затруднений с изготовлением моделей, наличие их в упражнениях снимало бы одно из основных требований каждого задания — мысленно представить действительную форму изображенной фигуры.

Вместе с тем, как показал психологический анализ, в процессе решения заданий приобретала основное, решающее значение помогающая роль интеллектуальных моментов. Не обладая достаточно развитым пространственным воображением, учащиеся стремились восполнить этот недостаток, прибегая к анализу и используя в качестве ориентиров знакомые им условности стереометрического чертежа. В силу этого методическая задача упражнений приводилась к тому, чтобы привить учащимся навыки в сознательном применении следующих этапов выполнения задания: 1) через анализ условия задания (выраженного как в словесной, так и в графической форме), и через осознание условностей стереометрического чертежа понять заданное изображение фигуры и мысленно представить фигуру в пространстве; 2) через взаимное помогающее влияние пространственных представлений и осознанных условностей изображения выполнить мысленно необходимые по заданию реконструкции и изобразить на чертеже вновь полученную фигуру.

В соответствии с этим ход рассуждений, сопровождающих, например, решение задания 2 (черт. 42) приобретал (при содействии экспериментатора) такую примерную форму:

„На чертеже квадрат $ABCD$ изображен в виде параллелограма; следовательно, плоскость квадрата не совпадает с фронтальной плоскостью. Поэтому форма треугольника STV искажена по сравнению с действительной".

„Из чертежа видно, что ось симметрии MN делит основание SV треугольника пополам. Вместе с тем по свойству квадрата $MN \perp PQ$; отсюда следует, что медиана треугольника служит вместе с тем его высотой, т. е. треугольник STV—равнобедренный".

„Сопоставляя расположение сторон ST и VT с расположением диагоналей AC и BD, мы видим, что $ST \parallel AC$ и $VT \parallel BD$. Так как диагонали квадрата взаимно перпендикулдрны, то, следовательно, $ST \perp VT$, т. е. мы можем утверждать, что равнобедренный треугольник STV—прямоугольный при вершине T".

„Чтобы яснее представить действительную форму этого треугольника и его расположение в квадрате, начертим его в фронтальной плоскости. Для этого построим квадрат со стороной, равной AB (согласно условию), и, заметив, что отрезок MT составляет $^1/_4$ отрезка MO, отметим точку T и проведем TS и TV параллельно CA и BD до пересечения PQ (черт. 48)".

Черт. 48

Наблюдения показали, что испытуемые IX класса (неуспевающие, не справившиеся с предварительными контрольными заданиями) в процессе упражнений проявили значительные качественные сдвиги в решении предложенных заданий. Ответы по первому впечатлению, которые мы наблюдали у этих испытуемых на предварительном контрольном эксперименте, заменились решениями, в которых основную роль играл анализ чертежа, основанный на данных сопровождающего его словесного условия. Испытуемые научились правильно понимать пространственную форму фигуры по ее чертежу, сопоставляя его с словесным условием задания, и в значительной степени освободились от связывающего влияния заданного чертежа при выполнении построений. Однако задание 3 (черт. 43) и задание 4 (черт. 44) представили для некоторых испытуемых серьезные затруднения в той части, где требовалось выполнить реконструкцию фигуры и начертить новое ее изображенне.

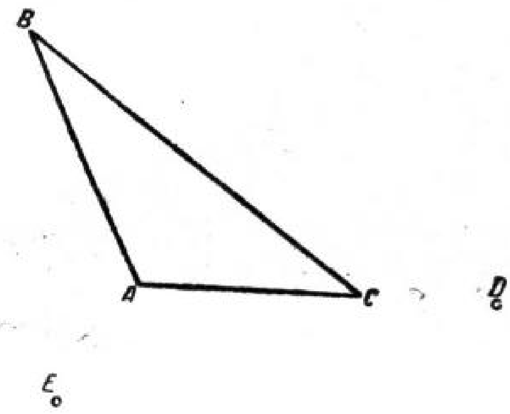
С заключительными контрольным заданиями большинство испытуемых справилось.

Полученные результаты позволяют сделать выводы, что чертежи пространственных фигур могут служить вспомогательным средством для развития пространственного воображения учащихся при указанной методике их использования.

Однако сравнительно невысокие качественные результаты упражнений и вместе с тем непродолжительность периода, в течение которого испытуемые подвергались упражнениям, приводят к заключению, что для развития пространственного воображения требуются систематические упражнения в течение длительного срока.

Вторая серия экспериментов на упражнение

Вторая серия экспериментов, как сказано выше, была проведена для выяснения вопроса о роли чертежа в формировании геометрических понятий и в развитии навыков применения теоретических знаний к решению задач. Назначение экспериментов на упражнение в этой второй серии состояло, во-первых, в том, чтобы выявить возможность использования чертежа как методического средства для указанных выше целей и, во-вторых, чтобы проверить и уточнить на опыте те принципы использования графического материала, на основе которых мы составляли задания упражнений.



Черт. 49

Принимая во внимание результаты контрольных экспериментов, мы строили наши упражнения так, чтобы привести учащихся, во-первых, к восприятию чертежа через правильное понимание условия задачи и, во-вторых, к выделению в изучаемом соотношении существенных признаков через осознавание возможных изменений частных признаков.

Упражнение для учащихся VI класса

Испытуемым VI класса были предложены следующие задания.

Задание 1. Дан треугольник ABC и точки D и E. Точка D лежит на одной прямой с отрезком AC. Точка E взята произвольно (черт. 49).

1. Соедините точки C и D прямой линией.

Почему можно утверждать, что углы ACB и DCB — смежные углы? Какая пара углов называется смежными углами? Можно ли утверждать, что угол DCB есть внешний угол треугольника ABC? Дайте определение внешнего угла треугольника.

Какие общие элементы (стороны, вершина) имеет внешний угол треугольника с самим треугольником?

Как расположена сторона внешнего угла, не принадлежащая треугольнику?

2. Соедините прямой линией точки A и E.

Имеет ли угол BAE общие элементы с треугольником ABC? Можно ли угол BAE назвать внешним углом треугольника ABC? Можно ли назвать углы BAE и BAC смежными?

3. Постройте при вершине A внешний угол треугольника ABC так, чтобы он имел с треугольником общую сторону AB.

Постройте при вершине A другой внешний угол треугольника ABC. Какую общую сторону с треугольником ABC имеет этот второй угол?

В чем состоит построение указанных двух внешних углов, если вы пользовались для этого линейкой?

Задание 2. Три пересекающиеся прямые образовали треугольник (черт. 50).

1. Скопируйте чертеж и отметьте все внутренние углы треугольника.

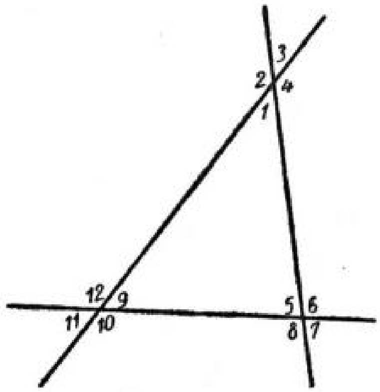
2. Укажите, какие из девяти неотмеченных вами углов являются внешними углами треугольника.

Определите словами, какой угол называется внешним углом треугольника. Сколько внешних углов можно получить при каждой вершине треугольника?

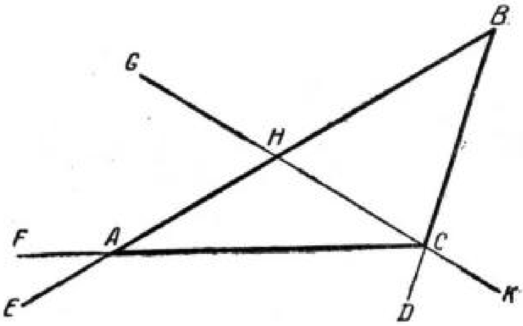
3. Почему углы 3, 7 и 11 нельзя назвать внешними углами треугольника? Как называется каждый из углов 3, 7 и 11 по отношению к внутреннему углу треугольника, имеющему общую с ним вершину?

4. Проведите три пересекающиеся прямые так, чтобы треугольник имел острые внешние углы; прямые внешние углы. Сколько острых, прямых, тупых внешних углов может иметь треугольник?

Задание 3. 1. Отметьте (дугой) внешние углы треугольника ABC, изображенные на данном чертеже (черт. 51).



Черт. 50



Черт. 51

Почему угол BHG, лежащий вне треугольника, нельзя назвать внешним углом треугольника ABC? Можно ли считать угол BCK внешним углом треугольника ABC?

Определите словами, какой угол называется внешним углом треугольника.

2. Скопируйте данную фигуру, постройте и отметьте недостающие внешние углы треугольника ABC. На полученном чертеже отметьте углы, смежные с внутренним углом при вершине A; при вершине B; при вершине C.

Можно ли утверждать: 1) что все углы, смежные с внутренними углами данного треугольника, являются его внешними углами; 2) что внешние углы всякого треугольника являются попарно вертикальными?

Задание 4. 1. Укажите все треугольники, которые можно видеть на данной фигуре (черт. 52). Сколько их?

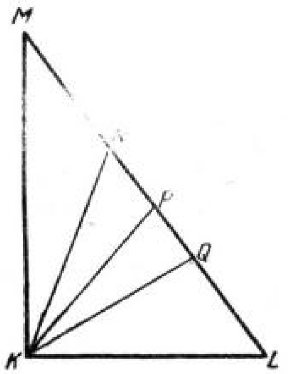
2. Укажите внутренний угол треугольника, который является внешним для нескольких других треугольников, входящих в изображенную фигуру. Найдите все такие углы на чертеже. Дайте обоснование вашим ответам.

3. Проведите в данной фигуре прямую, при помощи которой образовался бы угол, являющийся внешним для четырех треугольников фигуры. Сколько таких прямых можно провести?

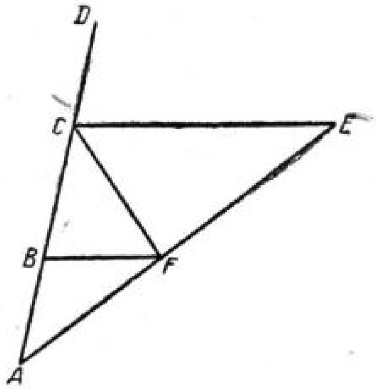
Задание 5. 1. В изображенной фигуре укажите треугольники, для которых можно найти больше одного внешнего угла (черт. 53).

2. Продолжите одну из прямых данной фигуры, чтобы получить третий внешний угол для двух треугольников данной фигуры.

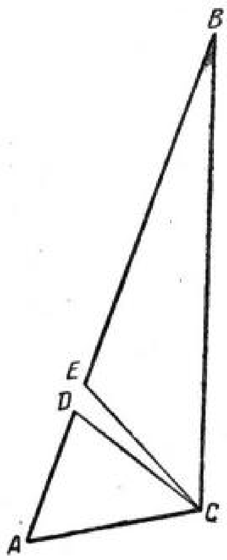
Дайте обоснование вашим ответам.



Черт. 52



Черт. 53



Черт. 54

Задание 6. В треугольной пластинке ABC сделан вырез DCE (черт. 54).

Как доказать, что угол BCE меньше угла ADC?

Заключительное контрольное задание

Для заключительного контрольного эксперимента в VI классе послужило следующее задание.

Задание 1. В треугольнике ABC проведена произвольная прямая BD (черт. 55).

На основании какой теоремы можно утверждать, что

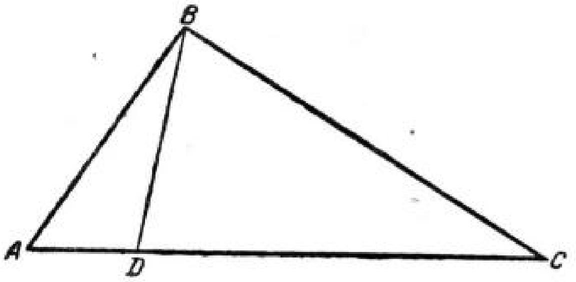
$$\angle BDA > \angle BCA?$$

Методические обоснования упражнений

При составлении заданий на упражнение были приняты во внимание те неправильности в понимании существенного признака внешнего угла треугольника, которые были выявлены в предварительном контрольном эксперименте. Упражнения направлены к тому, чтобы помочь учащимся выделить существенный признак внешнего угла треугольника из ряда свойств, обусловленных частными, случайными соотношениями внешнего угла с другими геометрическими элементами заданной на чертеже фигуры.

В задании 1 внешний угол треугольника сопоставляется с внутренним углом как пара смежных углов, и выявляются конструктивные условия, при которых осуществляется указанное соотношение. Поставленные в задании вопросы направлены к тому, чтобы показать учащимся определенные структурные закономерности в расположении внешнего угла по отношению к треугольнику (общая вершина, общая сторона, две другие—на одной прямой) и вместе с тем привести учащихся к пониманию, что признак внешнего угла треугольника как смежного с одним из внутренних углов является условием не только необходимым, но и достаточным для существования этого соотношения.

Решая задания 2 и 3 (черт. 50 и 51), учащиеся должны были найти и сами построить все шесть внешних углов треугольника. При этом наглядный образ внешнего угла возникает в конструктивной связи с фигурой треугольника как некоторая производная часть последнего. В процессе решения устранялись ошибочные представления о неравноправности вершин треугольника, около которых может быть получен внешний угол, об ограничении размеров внешнего угла и уточнялось понимание самого слова „внешний" в данном его применении.



Черт. 55

В заданиях 4 и 5 (черт. 52 и 53) на новых по форме фигурах, отличных от чертежа учебника, учащиеся имели дело с углом, который одновременно содержал в себе свойства внутреннего угла одного из треугольников и внешнего угла нескольких других треугольников. Анализ заданных фигур устраняет возможность приписывать слову „внешний" значение „открытого" угла в применении к внешнему углу треугольника. Вместе с тем в упражнениях 4 и 5 учащиеся знакомились на наглядном примере со случаем, когда компоненты определенного геометрического соотношения (треугольник и его внешний угол) не являлись взаимно однозначными: один и тот же угол служил внешним углом нескольких треугольников.

Задание 6 (черт. 54) представляет упражнение в применении усвоенных знаний о внешнем угле треугольника к фигуре, в которую внешний угол входит в „замаскированной" форме (заданный чертеж несходен с чертежом учебника). При решении этого задания учащиеся должны были освоить с помощью экспериментатора правильный ход умозаключений, приводящих к верному ответу на поставленный вопрос, т. е. выбрать в качестве опорного положения надлежащую теорему (теорему о внешнем угле треугольника) и найти в заданной фигуре необходимые посылки для применения этой теоремы (мысленно восстановить разрыв стороны AB и „усмотреть" несмежные между собой внутренний и внешний углы треугольника).

Заключительное контрольное задание (черт. 55) представляет вариант задания 6 (черт. 54) и предварительного контрольного задания 2 (черт. 23). При выполнении этого задания испытуемые должны в вопросе, поставленном в задаче, „узнать" одну из посылок теоремы о внешнем угле треугольника, а в заданном чертеже „усмотреть" надлежащее соотношение между углами.

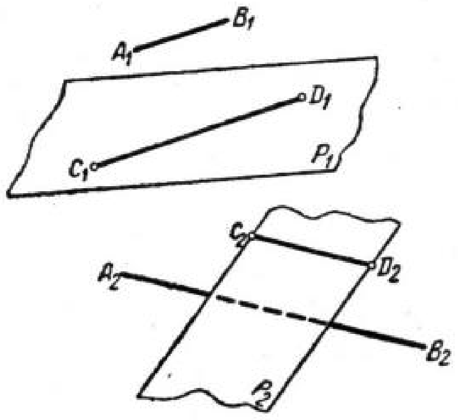
Упражнения для учащихся IX класса

Испытуемые IX класса в виде упражнения решали следующие задания.

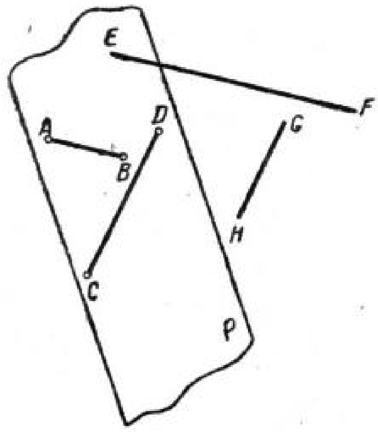
З а д а н и е 1. На чертеже прямая C_1D_1 лежит в плоскости P_1. прямая A_1B_1 — вне плоскости P_1 и параллельна C_1D_1. Прямая C_2D_2 лежит в плоскости P_2; прямая A_2B_2 — вне плоскости P_2 и параллельна C_2D_2 (черт. 56).

Почему можно утверждать, что A_1B_1 и A_2B_2 параллельны соответственно плоскостям P_1 и P_2?

Задание 2. Прямые AB и CD лежат в плоскости P; прямые EF и GH расположены вне плоскости P и соответственно параллельны прямым AB и CD (черт. 57).



Черт. 56



Черт. 57

1. Пересекутся ли с плоскостью P прямая EF и GH при своем продолжении?

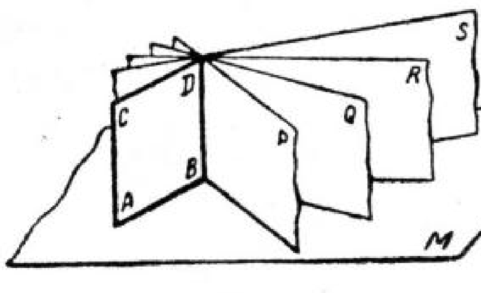
2 Можно ли из чертежа и из условия вывести, что: 1) прямые AB и CD пересекутся между собой при своем продолжении; 2) прямые EF и GH пересекутся между собой?

3. Какие обоснования нужно привести для ответов?

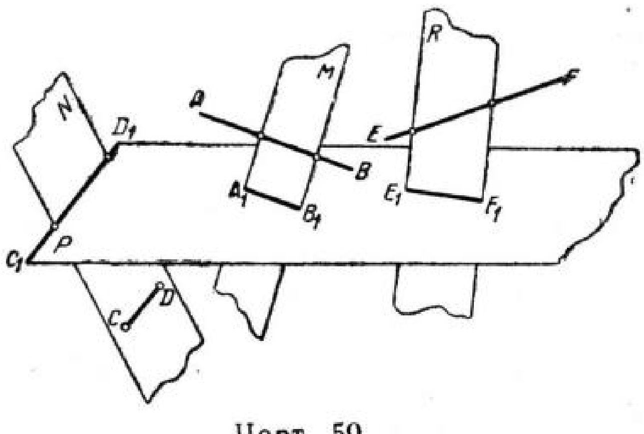
Задание 3. На плоскость M поставлены прямоугольник $ABCD$ и пластинки P, Q, R и S с параллельными краями. Все четыре пластинки проходят через сторону CB (черт. 58).

1. Покажите на изображенной фигуре прямую, параллельную одной плоскости, и прямую, параллельную нескольким плоскостям.

2. Покажите плоскость, параллельную одной прямой, и плоскость, параллельную нескольким прямым.



Черт. 58



Черт. 59

Задание 4. Плоскость M проходит через прямую AB; прямая AB параллельна плоскости P (черт. 59).

1. Почему можно утверждать, что A_1B_1 параллельна AB?

2. Прямая CD лежит в плоскости N; плоскость N проходит через прямую C_1D_1.

Какого указания недостает в этом условии, чтобы утверждать, ссылаясь на теорему, что C_1D_1 параллельна CD?

3. Плоскость R проходит через прямую EF; прямая EF пересекает (при продолжении) плоскость P.

Почему E_1F_1 не может быть параллельна EF? Как доказать, что EF и E_1F_1 пересекаются?

4. Проведите в плоскости P прямую, параллельную плоскости R.

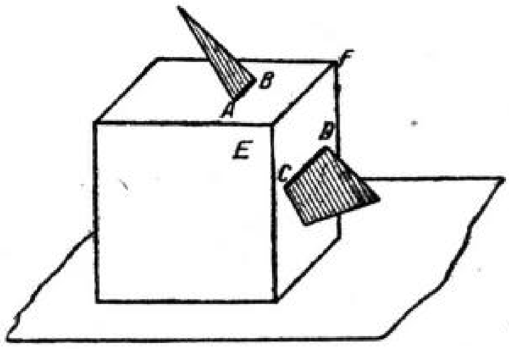
Задание 5. Треугольная пластинка врезана в куб. Линия прореза AB параллельна ребру EF (черт. 60).

Как доказать, что линия пореза CD параллельна линии AB?

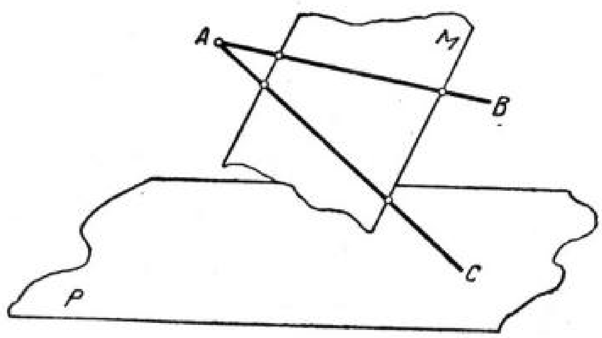
Задание 6. Плоскость M проходит через прямые AB и AC. Прямая AB параллельна плоскости P; прямая AC встречает плоскость P в точке C (черт. 61).

1. Скопируйте чертеж и продолжите плоскость M до пересечения с плоскостью P.

2. Приведите геометрические обоснования, по которым вы построили линию пересечения плоскостей M и P.



Черт. 60



Черт. 61

Задание 7. Пластинки M и N опираются на плоскость P. Прямая CD, проведенная на плоскости N, параллельна прямой AB, лежащей в плоскости M (черт. 62).

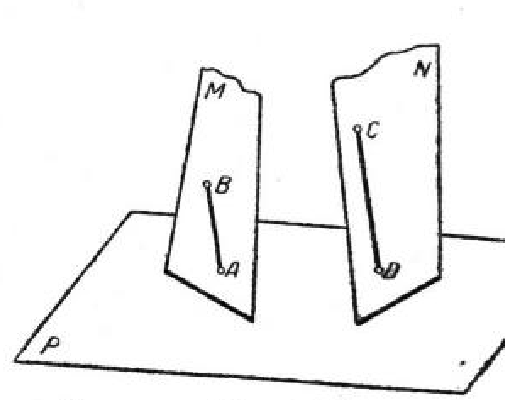
1. Скопируйте чертеж и постройте линию, по которой пересекаются плоскости фигур M и N.

2. Какими теоремами необходимо воспользоваться, чтобы обосновать построение искомой линии?

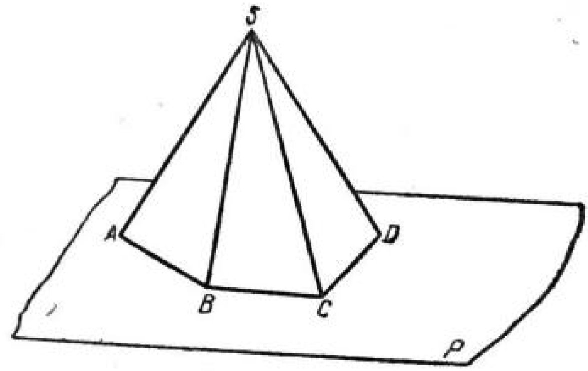
Задание 8. Дана пирамида, поставленная на плоскость P (черт. 63).

1. Проведите через точки B и C в гранях ASB и CSD две параллельные между собой прямые.

2. Какие теоремы вы применили для выполнения заданного построения?



Черт. 62



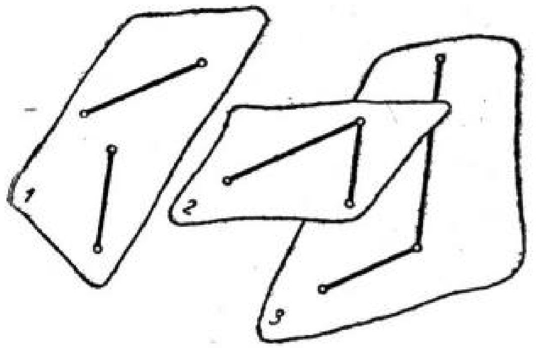
Черт. 63

Задание 9. Прямые, начерченные на плоскостях 1, 2 и 3, соответственно параллельны между собой (черт. 64).

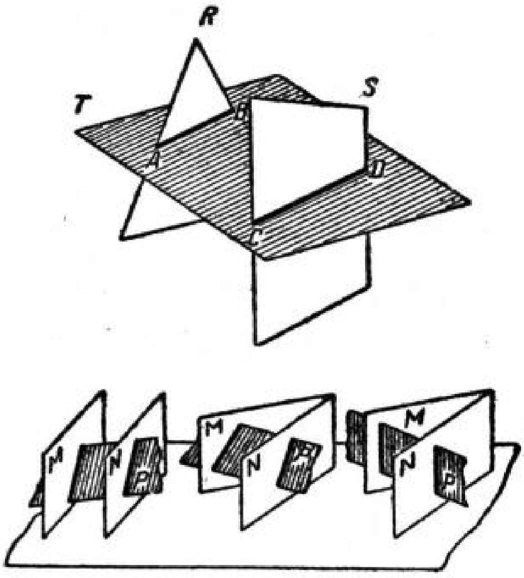
1. Имеются ли в заданном чертеже достаточные данные, чтобы установить параллельность плоскостей 1 и 2; параллельность плоскостей 2 и 3; плоскостей 1 и 3?

2. Сформулируйте признаки параллельности двух плоскостей.

Задание 10. Можно ли на основании параллельности линий *AB* и *CD*, по которым плоскости *R* и *S* пересекаются с плоскостью *T*, утверждать, что плоскости *R* и *S* параллельны между собой? (Черт. 65).



Черт. 64



Черт. 65

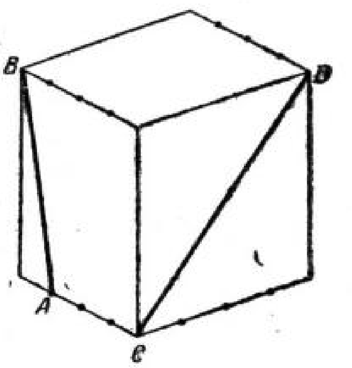
1. Является ли параллельность прямых *AB* и *CD* необходимым условием параллельности плоскостей *R* и *S*? Почему параллельность прямых *AB* и *CD* не является достаточным условием параллельности плоскостей *R* и *S*?

2. Как направлена линия пересечения плоскостей *R* и *S*, если эти плоскости считать пересекающимися?

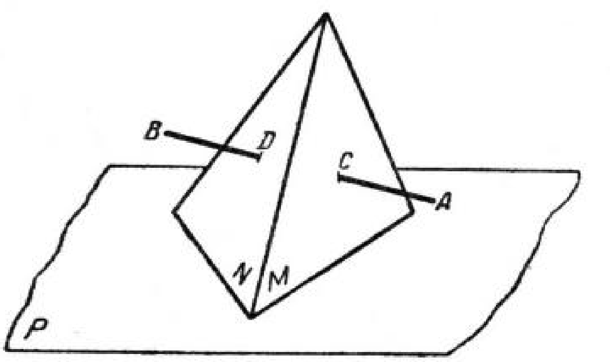
3. Сформулируйте условия, при которых плоскость *P* пересекает плоскости *M* и *N* по параллельным прямым и по пересекающимся прямым.

4. Сформулируйте теоремы, подтверждающие правильность ваших ответов.

Задание 11. Прямые *AB* и *CD* проведены на поверхности куба (черт. 66).



Черт. 66



Черт. 67

1. Разрежьте куб плоскостью, проходящей через прямую *AB* и параллельной прямой *CD*.

2. Определите форму фигуры, полученной в сечении всех граней куба плоскостью.

3. Сформулируйте теоремы, обосновывающие ваши ответы и построения.

Задание 12. Дана пирамида, поставленная на плоскость. Прямая AB пересекает грани M и N в точках C и D (черт. 67).

1. Определите с помощью дополнительных построений, параллельна ли данная прямая AB плоскости P?

2. Какие теоремы вы должны использовать для решения заданного вопроса?

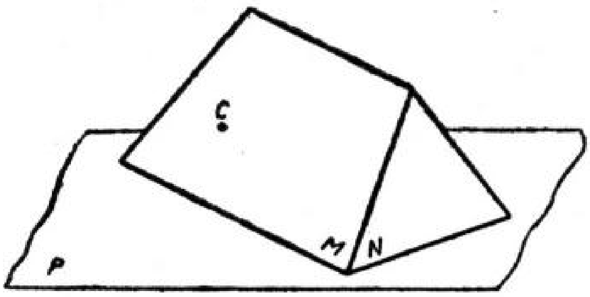
Задание 13. Треугольная призма лежит на плоскости P (черт. 68).

1. Представьте мысленно прямую AB, параллельную плоскости P и проходящую так, что она пересекает плоскость M в точке C и плоскость N в какой-нибудь точке D.

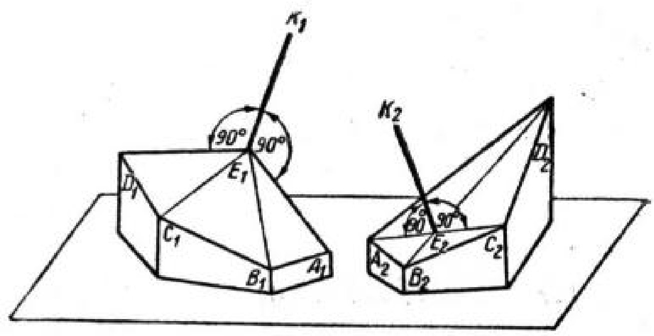
2. Определите с помощью дополнительных построений одно из возможных положений точки D на плоскости N и проведите видимые части прямой AB.

3. Проведите через точку C другую прямую, параллельную плоскости P и пересекающую плоскость N и изобразите ее видимые части.

4. Какие теоремы о параллельности прямых и плоскостей нужно применить для построения искомых линий?



Черт. 68



Черт. 69

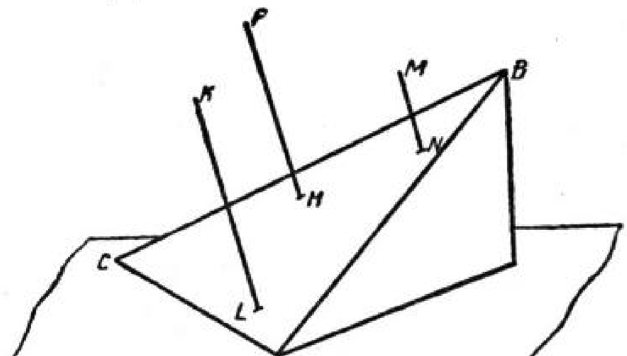
Задание 14. 1. Содержит ли чертеж (черт. 69) достаточные указания, чтобы считать прямую E_1K_1 перпендикуляром к плоскости многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ и прямую E_2K_2 перпендикуляром к плоскости многоугольника $A_2B_2C_2D_2$?

2. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.

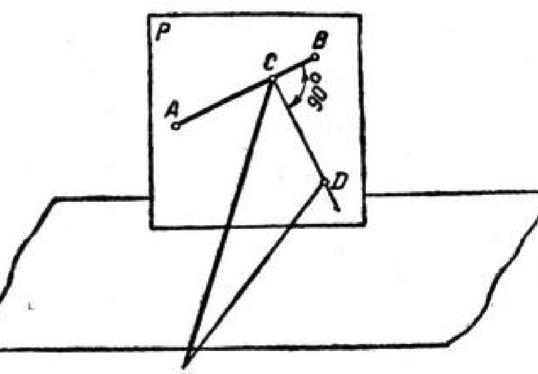
Задание 15. Прямые FH, KL и MN — перпендикулярны к плоскости ABC (черт. 70).

1. Проведите из точки M перпендикуляры к прямым FH и KL.

2. Дайте обоснование вашим построениям.



Черт. 70



Черт. 71

Задание 16. Прямые AB и CD лежат в плоскости P; KD — перпендикуляр к плоскости P (черт. 71).

1. Содержатся ли в данном условии и в чертеже достаточные признаки, чтобы считать прямые KC и AB перпендикулярными друг к другу?

2. Сформулируйте условия перпендикулярности двух прямых, из которых первая лежит в заданной плоскости, а вторая пересекает эту плоскость в точке, лежащей на первой прямой.

Задание 17. Точки B, C и D лежат на плоскости прямоугольника P. Точка A — на перпендикуляре к плоскости P (черт. 72).

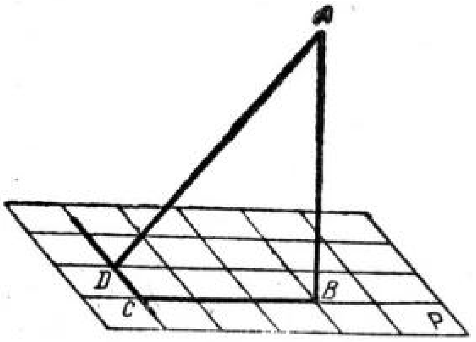
Представьте мысленно изображенную фигуру в пространстве и покажите все острые, прямые и тупые углы между линиями, соединяющими точки A, B, C и D.

Задание 18. Дан квадрат $ABCD$, плоскость которого горизонтальна. Точка E лежит в плоскости этого квадрата (черт. 73).

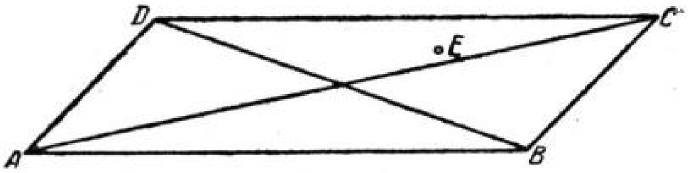
1. Представьте в уме отрезок EF произвольной длины, перпендикулярный к плоскости $ABCD$. Проведите мысленно из конца F прямую, перпендикулярную к BC; не изображая на чертеже эту прямую, найдите точку K ее пересечения с BC.

2. Таким же образом найдите точку L пересечения прямой DB с перпендикуляром к ней из точки F.

3. Дайте геометрическое обоснование вашим ответам.



Черт. 72



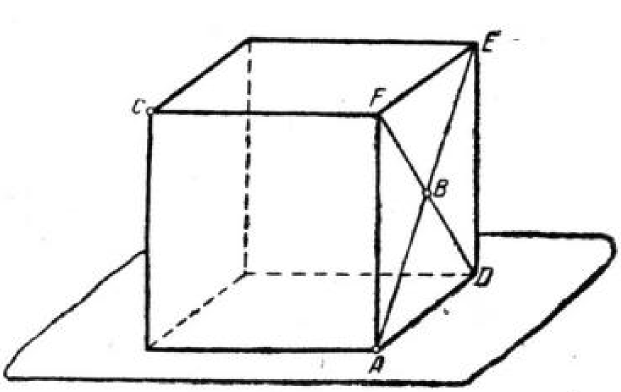
Черт. 73

Задание 19. На чертеже изображен куб (черт. 74).

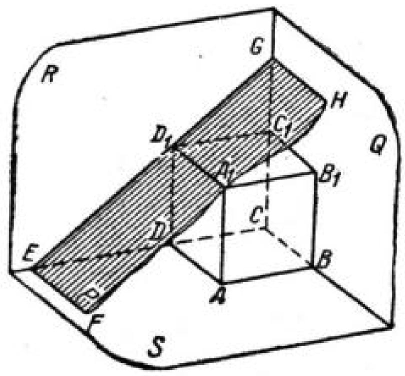
1. Соедините мысленно вершину C с точками A и B и определите форму треугольника ABC.

2. Дайте геометрическое обоснование вашему ответу.

3. Пользуясь циркулем и линейкой, постройте в натуральную величину (в фронтальной плоскости) треугольник ABC.



Черт. 74



Черт. 75

Задание 20. Три грани куба неограниченно продолжены (пл. Q, пл. R и пл. S). Плоскость P наложена на ребро A_1D_1 (черт. 75).

1. На основании какой теоремы можно утверждать, что линии EF и CH параллельны A_1D_1?

2. Покажите все грани куба, параллельные прямой EF. Дайте геометрическое обоснование вашим ответам.

3. Покажите все прямые, перпендикулярные к прямой A_1D_1; все плоскости, перпендикулярные к прямой A_1D_1. Подтвердите справедливость ваших ответов геометрическими обоснованиями.

4. Докажите, что угол D_1EF — прямой.

5. Начертите такую фигуру, какая изображена на чертеже, переложив плоскость P на ребро A_1B_1.

Задание 21. На гранях каждого куба начерчены две пересекающиеся прямые (черт. 76).

1. Проведите мысленно через каждую пару прямых плоскости и определите вид фигуры, которая образуется в сечении поверхности куба плоскостью.

2. Пользуясь циркулем и линейкой, постройте в натуральную величину (в фронтальной плоскости) фигуры, полученные в сечении.

3. Начертите куб и постройте на его поверхности сечение, имеющее в действительности: 1) форму параллелограма; 2) форму ромба; 3) форму квадрата с двумя сторонами, непараллельными ребрам куба; 4) форму трапеции с тремя равными сторонами.

Заключительное контрольное задание

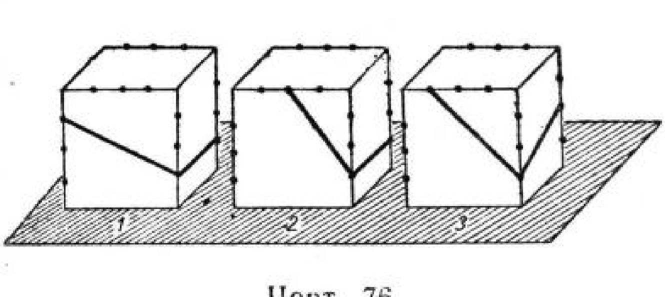
В заключительном контрольном эксперименте были предложены следующие задания.

Задание 1. Представьте, что параллепипед разрезан плоскостью, проходящей через KL и пересекающей четыре его грани (черт. 77).

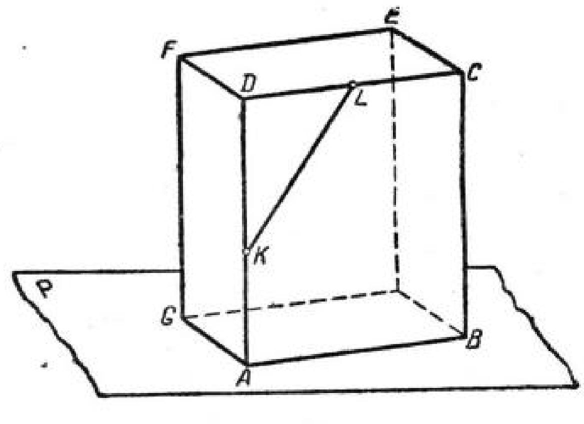
1. Докажите, что при любом направлении разреза через линию KL четырехугольник сечения будет иметь две параллельные стороны.

2. При каком направлении плоскости сечения (через KL) четырехугольник сечения будет иметь две пары параллельных сторон?

3. Скопируйте чертеж и постройте на гранях параллелепипеда линии разреза для рассмотренных случаев. Укажите равные стороны в полученных четырехугольниках сечения и объясните, почему они равны.



Черт. 76

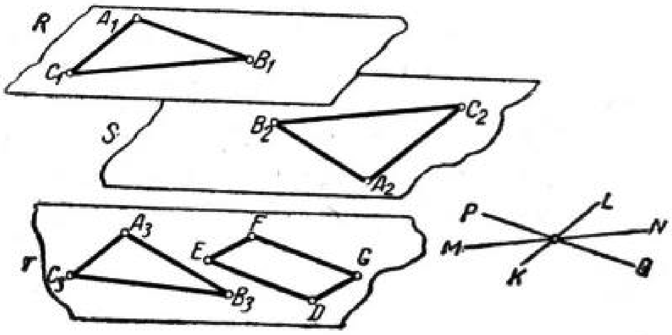


Черт. 77

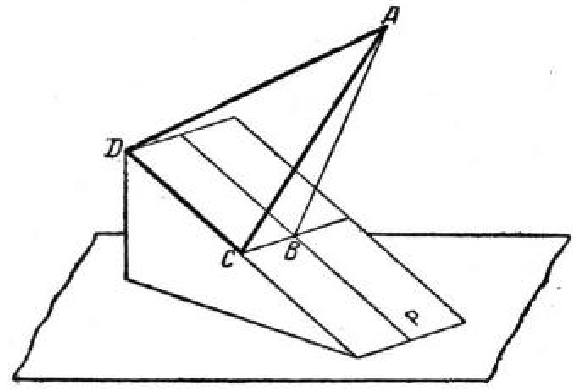
Задание 2. Даны в пространстве: 1) три пересекающиеся между собой прямые KL, MN и PQ и 2) три параллельные друг другу плоскости R, S и T (черт. 78). Фигуры треугольников и параллелограма расположены в этих плоскостях так, что их стороны A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 параллельны KL; стороны B_1C_1 и B_2C_2 параллельны MN; стороны A_1B_1 и DE параллельны PQ.

1. Найдите признаки, подтверждающие параллельность плоскостей R, S и T.

2. Дайте обоснование вашим ответам.



Черт. 78



Черт. 79

З а д а н и е 3. Плоскость P — прямоугольник с проведенными в нем осями симметрии. AB — перпендикуляр к плоскости P (черт. 79).

1. Укажите, какой из углов треугольника ADC наибольший в действительности. Является ли этот угол острым, прямым или тупым в действительности? Изменится ли величина этого угла, если перенести точку A на перпендикуляре AB ближе к точке B или дальше от точки B?

Изменится ли величина двух других углов треугольника ADC при указанном переносе точки A?

2. Дайте обоснование вашим ответам.

Методические обоснования упражнений

З а д а н и я 1 — 8 направлены на формирование правильного понятия параллельности прямой и плоскости. В первых пяти заданиях даются на наглядном материале различные варианты расположения прямой относительно той ограниченной части плоскости, при помощи которой принято изображать плоскость в учебниках геометрии. Текстовое содержание условия, требующее от учащихся анализа фигур, изображенных на чертежах и геометрического обоснования ответов, имеет целью помочь учащимся осознать существенный принцип параллельности прямой и плоскости и устранит те наиболее типичные ошибки в понимании этого соотношения, которые обусловливаются связывающим влиянием чертежа учебника (черт. 27) и недостаточно полным освещением этого вопроса в тексте учебника[1].

Учащиеся приступают к изучению темы о параллельности прямых и плоскостей при наличии у них понятия параллельности прямых, прочно сложившегося при изучении планиметрии. Это понятие устанавливается аксиомой параллельных прямых, выраженной в учебнике словами: „Через одну и ту же точку нельзя провести двух различных прямых, параллельных одной и той же прямой"[2]. В учебнике стереометрии отсутствуют какие-либо указания, устраняющие возможности переноса усвоенного положения на случай параллельности прямой и плоскости. Как показывает опыт, учащиеся нередко делают такое неправильное обобщение; к тому же чертеж учебника (черт. 27) к теореме, устанавливающей признак

[1] К и с е л е в, ч. II, § 10 — 13.
[2] К и с е л е в, ч. I, § 75.

параллельности прямой и плоскости[1], способствует такому ошибочному обобщению, создавая представление, что направление прямой, параллельной плоскости, определяется направлением „краев“ этой плоскости (вернее направлением краев четырехугольной пластинки, изображающей часть рассматриваемой плоскости).

Из предложенных испытуемым вариантов наглядного образа параллельных между собой прямой и плоскости, они должны усмотреть, что прямая может быть параллельна плоскости, будучи расположена „за плоскостью“ или „сбоку от плоскости“, при этом необязательно, чтобы она была параллельна „краю плоскости“ (черт. 56 и 57). Одной и той же плоскости могут быть параллельны несколько прямых, расположенных в разных направлениях относительно друг друга, причем число прямых, проходящих через данную точку пространства и параллельных данной плоскости, неограничено; равным образом неограничено число плоскостей, параллельных одной и той же прямой и пересекающихся между собой (черт. 57 и 58).

В задании 4 (черт. 59) предлагается материал, на котором учащиеся имеют возможность получить навыки правильного анализа фигуры по ее чертежу и по сопроводительному тексту. Решая поставленные в задании вопросы, учащиеся должны притти к выводу, что геометрические суждения нельзя основывать только на восприятии чертежа, не опираясь на данные, выраженные в тексте условия. В силу этих соображений левую фигуру чертежа нужно рассматривать как пример задачи с неполным числом данных для ее решения; при графическом сходстве соотношений между элементами средней и левой фигуры текст задания, относящегося к этой последней фигуре, не содержит в себе достаточных данных для положительного ответа на вопрос, который для средней фигуры решается безоговорочно. На третьей фигуре изображен случай взаимного пересечения прямой и плоскости. Этот случай противопоставляется соотношению параллельности прямой и плоскости для более отчетливого выделения существенных признаков этого последнего соотношения.

Задание 5 (черт. 60) представляет упражнение в применении усвоенных учащимися теорем о параллельности прямой и плоскости в таких условиях, когда это соотношение представлено в непривычном для учащихся сочетании с другими соотношениями частей некоторой пространственной фигуры. Ход решения этого задания анологичен ходу решения предварительного контрольного задания 1 (черт. 24), которое подробно нами описано.

Задания 6, 7 и 8 (черт. 61, 62 и 63) представляют задачи на построение „на незаконченном чертеже“. Требования, предъявляемые к решающему, заключаются, во-первых, в том, чтобы по данному словесному и графическому условию понять заданную пространственную фигуру; во-вторых, в том, чтобы по заданным в условии соотношениям между элементами фигуры подыскать необходимую для решения задачи теорему и, в-третьих, выполнить на заданном чертеже надлежащие дополнительные построения, т. е. оформить ответ задачи графически. Предложенные задания постепенно усложняются путем перехода от изолированного соотношения между параллельными прямыми и плоскостями к „целой“ фигуре, в которую элементы, составляющие рассматриваемое соотношение, входят как некоторая часть этой фигуры.

[1] Киселев, ч. II, § 10, черт. 5 (изд. 1938 г. и ранее).

Вторая группа заданий 9 — 13 (черт. 64 — 68) имеет целью содействовать правильному формированию представлений и понятий, связанных с вопросом о параллельности двух плоскостей. Первое из этих заданий (черт. 64) уже предлагалось испытуемым в предварительном контрольном эксперименте. В эксперименте на упражнение это задание предложено вновь для подробного его разбора с помощью экспериментатора ввиду того, что испытуемые, проходившие через упражнение, не обнаружили ясного понимания поставленных в задании вопросов в контрольном эксперименте.

Задание 10 (черт. 65) в наглядной форме подводит учащихся к пониманию различия между признаками, необходимыми и достаточными для существования определенного геометрического соотношения. Выполняя задание, учащиеся убеждаются, что параллельность линий пересечения двух плоскостей третьей плоскостью не может служить достаточным условием для суждения о параллельности самих плоскостей, т. е. что теорема, обратная изученной, несправедлива.

Задания 11, 12 и 13 (черт. 66, 67 и 68) содержат в себе конструктивный элемент. Выполнение построений связано с применением усвоенных теорем. Назначение этих заданий, как упражнений, аналогично назначению заданий 6, 7 и 8.

Третья группа заданий 14 — 21 (черт. 69 — 76) заключает в себе упражнения, помогающие правильному усвоению теорем о перпендикуляре к плоскости и теоремы „о трех перпендикулярах".

Задание 14 (черт. 69) имеет целью уточнить признак понятия перпендикуляра прямой к плоскости. В задании 15 (черт. 70) теорема о перпендикуляре к плоскости используется для выполнения предлагаемых построений. В заданиях 16, 17, 18 и 19 (черт. 71, 72, 73 и 74) представлены различные варианты наглядного образа, сопровождающего теорему о трех перпендикулярах. Цель этих упражнений состоит в том, чтобы разбить связывающее влияние чертежа учебника и помочь учащимся путем сопоставления и анализа предложенных чертежей выделить существенный признак рассматриваемого соотношения. В заданиях 17, 18 и 19 введен некоторый усложняющий решение момент, состоящий в ограничении необходимых для решения построений только мысленным их выполнением. Задания 20 и 21 для своего выполнения требуют привлечения всех теорем, взятых нами в качестве основного учебного материала для эспериментального исследования.

Анализ наблюдений по второй серии экспериментов на упражнение

Наблюдения над испытуемыми VI класса показали, что в результате упражнения были достигнуты несомненные положительные результаты. В процессе выполнения заданий (под руководством экспериментатора) испытуемые осознали ошибочность своих представлений о внешнем угле треугольника, поняли, в чем заключается существенный признак внешнего угла и научились правильно выделять внешние углы на предлагаемом им графическом материале.

Так, например, ученицы В. и З., которые при решении предварительных контрольных экспериментов включали в число существенных признаков внешнего угла треугольника его величину („тупой угол"), после упражнений освободились от этого неправильного представления. Сравнивая между собой внешние углы в предложенных чертежах, ученица З. пришла к правильному обобщению: „внешний угол может быть разной величины — тупым, прямым, острым — это зависит от того, какой внутренний смежный угол". Эта же ученица выправила и другой недостаток в своем понимании внешнего угла: „внешний угол может быть у каждого угла треугольника; ...около каждого внутреннего угла по два внешних — на продолжении сторон треугольника".

Ученик Б., принимавший в контрольном эксперименте за внешний угол треугольника всякий угол, лежащий „вне" треугольника, проделав упражнения по заданиям 2 и 3, сказал: „теперь я понял чертеж в книжке; раньше я думал, что может быть девять внешних углов треугольника, теперь я знаю, что их шесть — смежных".

Анализ высказываний испытуемых в процессе эксперимента показывает, как изменилась после упражнений роль книжного чертежа, оказывавшего до упражнений связывающее влияние на мышление учащихся.

Ученица З. говорит: „Раньше я думала, что внешний угол, как в книжке, всегда тупой, а теперь я знаю, что может быть и по другому...". Испытуемая В. на вопрос экспериментатора, что она считает самым важным в книжном чертеже внешнего угла, ответила: „Раньше самым важным был тупой угол, который расположен справа, теперь — продолжение стороны треугольника, так как внешний угол — смежный с внутренним". Приведенные выше слова ученика Б. указывают на такое же освобождение от связанности книжным чертежом и перестройку понятия внешнего угла.

Во всех описанных случаях в результате упражнения на предложенном графическом материале книжный чертеж сделался носителем правильных обобщенных представлений. В нем осознаны существенные соотношения и понят принцип возможного изменения соотношений, несущественных для внешнего угла.

Решение заключительного контрольного задания для всех испытуемых VI класса, прошедших через упражнение, не представило каких-либо затруднений.

Существенным образом в процессе упражнений переобразовывались понятия и изменилось понимание книжного чертежа у испытуемых IX класса.

После выполнения заданий 1—8 (черт. 56—63), цель которых состояла в правильном раскрытии понятия параллельности прямой и плоскости, испытуемая Л. сказала: „Прямая, параллельная плоскости, может быть расположена по-разному: над плоскостью, сзади нее, ниже, но главное, чтобы она была параллельна линии, проведенной на плоскости". На вопрос о том, что является наиболее важным в чертеже учебника (черт. 27), иллюстрирующем параллельность прямой и плоскости, Л. ответила: „Я раньше считала, что прямая должна быть параллельна краю плоскости,—теперь я знаю, что в книжке она так нарисована, но может быть расположена по-разному; ...в книжном чертеже теперь стало важным только то, чтобы две линии были параллельными".

Испытуемая К. на тот же вопрос о параллельном понимании чертежа учебника ответила: „Прямая, параллельная плоскости необязательно должна быть такой, как в книге; секущую плоскость можно и не рисовать, она нужна только для доказательства теоремы".

Таким образом для испытуемых Л. и К. чертеж учебника приобрел значение обобщенного наглядного образа рассматриваемого соотношения.

Выполнив первые четыре задания, испытуемая Л., решая задание 5 (черт. 60), рассуждает так: „Линия CD – на правой грани; она лежит вне плоскости верхней грани;... если CD параллельна ребру верхней грани, то она параллельна самой верхней грани и т. д.". В этом рассуждении испытуемая проявила умение правильно выделить в заданной фигуре необходимые для решения задачи элементы, усмотреть между ними надлежащие геометрические соотношения и использовать эти соотношения для применения известной ей теоремы. Таким образом теорема о параллельности прямой и плоскости приобрела для испытуемой более общий смысл; геометрическое положение, устанавливаемое теоремой, испытуемая сумела распространить на фигуру, изображенную на чертеже, не имеющем сходства с книжным.

Выполнение заданий 9 – 13 (черт. 64 – 68) с целью усвоения понятия параллельности двух плоскостей привело к аналогичным результатам.

Как было указано, контрольный эксперимент обнаружил у испытуемых неправильное понимание условия параллельности двух плоскостей. Формулировку условия теоремы — „если две пересекающиеся прямые..." учащиеся истолковывали, как дословное требование фактического пересечения прямых на чертеже; в связи с этим частному взаимному расположению пересекающихся отрезков на чертеже учебника (черт. 28) учащиеся приписывали существенное значение и равенство углов между отрезками, лежащими в одной плоскости, считали обязательным для установления параллельности плоскостей. В процессе упражнения незакономерность этих дополнительных условий была осознана учащимися. Испытуемая Л. сделала следующее обобщение: „Теперь я знаю, я неверно думала, что эти две линии должны быть в виде одинаковых углов; углы могут быть неравны между собой; главное, чтобы стороны углов были попарно параллельны...". На вопрос экспериментатора о возможных изменениях в расположении отрезков, определяющих параллельность плоскостей, испытуемая Л. ответила: „Прямые должны быть обязательно параллельны; каждая пара прямых может пересекаться на чертеже или при мысленном продолжении их; они могут образовать неравные углы...".

Испытуемая К. на вопрос экспериментатора о том, как изменилось у нее понимание чертежа учебника, ответила: „Я думала, что главное в нем два равных угла,... теперь главным стало, что прямые параллельны и каждая пара пересекается, а расположены могут быть они по-разному...".

Таким образом предложенные упражнения достигли своей цели и содействовали обобщенному пониманию чертежа учебника и формированию правильного понятия параллельности двух плоскостей.

Третья группа заданий (задание 14 – 21, черт. 69 – 76) имела своей целью привести учащихся к правильному пониманию геометрического соотношения, устанавливаемого теоремой „о трех перпендикулярах".

Выполнив (с помощью экспериментатора) задания 14 — 18 (черт. 69 — 73), испытуемые без особых затруднений решили задание 19 (черт. 74), бывшее непосильным для них в контрольном эксперименте, и в значительной мере самостоятельно справились со следующими заданиями. Как и предшествующие упражнения, третья группа упражнений привела к определенным положительным результатам в понимании существенного признака рассматриваемого соотношения.

Ученица М., давая на первом контрольном эксперименте пояснения к чертежу учебника (черт. 29), иллюстрирующему теорему „о трех перпендикулярах", считала, что необходимым условием существования рассматриваемого соотношения является положение точки C на середине отрезка DE. Под влиянием книжного чертежа она была склонна при решении задания 18 (черт. 73) поставить искомую точку K в середине отрезка BC. После упражнений она обнаружила уже иное понимание чертежа учебника: „Раньше равенство DC и CE я считала обязательным, а это нужно только для доказательства. Раньше я думала, что наклонная должна быть расположена так, как в книжке. Теперь самое важное здесь—это расположение трех линий: AB перпендикулярна к плоскости P и, следовательно, перпендикулярна к BC; BC перпендикулярна к DE; следовательно AC также перпендикулярна к DE;. . все они идут изломанной цепочкой, а расположены они могут быть по-разному".

Другие испытуемые в своих ответах также выявили измененное отношение к „важным" и „неважным" элементам книжного чертежа.

Все испытуемые IX класса, прошедшие через описанные упражнения, правильно решили заключительные контрольные задания (черт. 77, 78, 79), в то время как слабые учащиеся контрольной группы, не выполнившие заданий первого контрольного эксперимента и не проходившие через упражнение, не справились с заключительным контрольным заданием и обнаружили прежние характерные недостатки в понимании рассматриваемых геометрических положений и в применении их к решению задач.

6. ВЫВОДЫ

Мы описали результаты экспериментального исследования, цель которого в методической его части состояла в том, чтобы разработать и проверить методы применения графического материала в преподавании геометрии.

Побудительной причиной к проведению этой работы послужил критический анализ состояния знаний учащихся и тех методов, при помощи которых эти знания сообщаются учащимся.

В поисках способов усовершенствования методов преподавания геометрии мы пришли к заключению, что можно получить эффективные результаты при разработке метода применения графического материала. Мы остановились на таком заключении, с одной стороны, вследствие непосредственной органической близости графического материала к самому предмету геометрии и доступности его в практическом отношении и, с другой стороны, вследствие малой разработанности вопроса о способах использования графического материала в школьной практике

Принципы, положенные в основу нашего метода, исходят из выводов психологического эксперимента, сопутствовавшего нашей работе. Задания, составленные нами для психологического эксперимента, в процессе этого эксперимента подвергались проверке с методической стороны и послужили основой для нашей системы упражнений.

Основной целью предлагаемой нами системы методических мероприятий является устранение недостатков в применяемых методах преподавания геометрии, приводящих к формализму в знаниях учащихся. В отличие от некоторых других методических средств, преследующих ту же цель, но носящих вспомогательный, эпизодический характер (например, работы по измерению на земле), наша система мероприятий может быть включена в педагогический процесс как часть органического целого при изучении любого раздела курса геометрии.

Как показали экспериментальные данные, применение разработанной нами системы упражнений достигает определенных положительных результатов в развитии пространственных представлений учащихся и в формировании понятий в области изучаемого геометрического материала В этом отношении она дополняет существующие методы преподавания геометрии, в частности учебник геометрии, направленные преимущественно на то, чтобы облегчить наиболее полное усвоение фактического материала, и не уделяющие должного внимания формированию понятий, накоплению многостороннего геометрического опыта и умению применять полученные знания в новых измененных условиях.

Общая характеристика системы упражнений

Основные характерные методические черты нашей системы упражнений выражаются в следующих положениях.

1. В дополнение к материалу учебника, изучение которого сводится на практике к заучиванию доказательств теорем, материал упражнений помогает приводить в логическую связь полученные учащимися знания и формировать понятия, вытекающие из рассмотренных теорем.

2. В дополнение к иллюстрированному материалу, с которым учащиеся знакомятся по чертежам учебника, упражнения дают ряд вариаций изучаемых фигур, расширяющих геометрический кругозор учащихся и способствующих накоплению представлений в области изучаемых геометрических соотношений.

3. Система упражнений дает материал для приложения полученных знаний в новых конкретно заданных условиях и для развития навыков в самостоятельном решении геометрических вопросов.

4. Со стороны последовательности подбора материала упражнения построены так, чтобы каждое вновь изучаемое геометрическое соотношение было рассмотрено сначала изолированно и затем в последовательно усложняющемся сочетании с другими, связанными с ним соотношениями.

5. Со стороны содержания графический материал упражнений имеет своей целью дать достаточное число наглядных вариантов изучаемого пространственного соотношения, чтобы разбить связывающее влияние книжного чертежа при образовании правильного представления.

6. Постепенное усложнение графического и словесного содержания упражнений проводится по следующей схеме.

а) К первой группе упражнений по степени трудности мы относим такие, в которых изучаемая теорема применяется к решению поставленного в упражнении вопроса непосредственно, без каких-либо вспомогательных предпосылок; геометрические соотношения задаются на чертеже в явном или легко обнаруживаемом виде. В простейших из таких упражнений графическое задание геометрических соотношений весьма сходно с чертежом учебника. В качестве примеров можно привести задание 1 (черт. 56), задание 4 (черт. 59 в отношении средней фигуры) и задание 18 (черт. 73 в первой своей части). Некоторым усложнением упражнений этой группы является внесение в чертеж различия, по сравнению с учебником, в расположении геометрических элементов; самый вопрос о заданных соотношениях так же, как и в предыдущем случае, рассматривается изолированно и иллюстрируется фигурами, имеющими лишь необходимые по содержанию задачи геометрические элементы. К таким упражнениям можно отнести задание 4 (черт. 59 в отношении плоскости N и прямой CD), задание 7 (черт. 62) и задание 18 (черт. 73 во второй своей части). Дальнейшей ступенью усложнения является несходство графического задания с книжным чертежом не только в расположении рассматриваемых геометрических элементов, но и в самом способе задания этих элементов. Задаваемые и искомые геометрические соотношения изображаются на чертеже в сочетании с другими соотношениями, как части некоторой целой фигуры или нескольких фигур. Для решения вопроса, поставленного в упражнении, нужно прежде всего узнать и выделить из фигуры те ее части, которые являются элементами, подлежащими рассмотрению. Примером может служить задание 19 (черт. 74).

б) Ко второй группе по степени трудности мы относим такие упражнения, в которых изучаемая теорема применяется к решению вопроса через посредство других теорем. С логической стороны процесс решения распадается на две части: нужно подыскать теорему, на основании которой может быть решен поставленный вопрос, и доказать, что на чертеже имеются геометрические посылки для применения этой теоремы. Очевидно, что в таких упражнениях чертеж должен изображать более или менее сложную фигуру, в которую рассматриваемые геометрические соотношения входят как составные части. Примеры упражнений второй группы мы имеем в задании 5 (черт. 60) и в задании 20 (черт. 75).

7. Каждое упражнение в логической своей части представляет задачу на „узнавание“ теоремы, устанавливающей какое-либо общее положение. По постановке вопроса задачи можно различать упражнения в „узнавании“ заключения теоремы по заданному ее условию и упражнения в „узнавании“ условия по заданному заключению теоремы[1]. В первом случае на графическом материале конкретно задается определенная зависимость между геометрическими элементами и требуется выразить в общей формулировке признаки, устанавливающие наличие некоторого геометрического соотношения, частным выражением которого является заданная на чертеже геометрическая зависимость; во втором случае геометрическое соотношение задается в общей формулировке и требуется конкретизировать на чертеже определенные геометрические признаки, характеризующие данное соотношение. К первому типу относится, например, задание 7 (черт. 62), ко второму типу задание 14 (черт. 69) и задание 16 (черт. 71).

[1] В школьном преподавании эта задача для большей части учебного материала не является неопределенной, так как обратные теоремы включены в программу в весьма незначительном числе.

О применении упражнений в школьной работе

Описанный метод использования графического материала ни в какой мере не исключает и не заменяет другие методические приемы, используемые в процессе преподавания. В частности, применение наглядных пособий в виде моделей и иллюстрированных таблиц имеет цели, совершенно отличные от целей, поставленных перед нашими упражнениями; различие этих целей указано выше в нашем изложении.

Принципы, положенные в основу разработанной нами системы, могут быть применены для составления задач и упражнений по всему курсу геометрии.

В задачу нашей работы не входил вопрос об организации и методике применения описанных упражнений в школьной практике. Введение этих упражнений в обиход школьного преподавания может встретить затруднения в связи с ограниченностью рабочего времени, отведенного учебным планом на проработку курса геометрии. Однако положительные результаты нашего эксперимента позволяют предполагать, что введение описанных упражнений может дать повышение продуктивности работы, вследствие чего затраченное на упражнения время будет компенсировано. С этой точки зрения представляется весьма желательным подвергнуть поставленный вопрос дальнейшей проверке в школьных условиях.

Мы считаем, что введение предлагаемых упражнений осуществимо при учете следующих соображений: необходимо пересмотреть список геометрических задач на вычисление и построение, задаваемых учащимся в течение года, с тем, чтобы заменить в этом списке некоторое число задач, мало полезных по своему методическому значению.

Среди задач на вычисление следует признать подлежащими исключению такие, в которых геометрическое содержание, представленное в словесной форме, лишь в слабой степени содержит в себе конструктивный элемент, и решение задач сводится почти непосредственно к применению некоторых теорем или к арифметическим вычислениям по определенным формулам. В задачнике Рыбкина во всех разделах число таких задач довольно значительно.

Стереометрические задачи на построение предлагаются обычно в такой форме, что решение их, выполняемое путем отвлеченных рассуждений, не может быть эффективно иллюстрировано чертежом. Такие задачи могут быть доступны ученикам лишь после предварительных упражнений на более конкретном материале. Упражнения, составленные по разработанной нами системе, могут отвечать требованиям такой предварительной подготовки.

Некоторая часть наглядного графического материала упражнений, составленных по описанной системе, может быть использована для доказательства теорем на измененном чертеже. Такие упражнения содействуют освобождению учащихся от связанности чертежом учебника, развивают навыки самостоятельного мышления и служат способом проверки усвоения теорем не по формальным признакам памяти и прилежания ученика, но по пониманию сущности изучаемого вопроса. Эта форма применения графического материала легко может быть введена в обиход урока без дополнительной затраты времени, если преподаватель заранее будет давать образцы чертежей, на которых будет спрашивать доказательство теорем.

Многие из наших упражнений могут быть задаваемы в виде „летучих вопросов“ при опросе у доски или с места взамен часто практикуемого на уроке опроса „правил“, определений, формулировок и т. п. Такие вопросы, сопровождаемые соответствующими чертежами, заготовленными на стенных таблицах, мобилизуют внимание учащихся на существе темы и содействуют развитию сообразительности, самостоятельности мышления и активности в работе.

В зависимости от своего содержания, упражнения могут занимать различное место в плане отдельных уроков геометрии. С этой точки зрения можно различать, во-первых, упражнения, подготавливающие учащихся к усвоению новых геометрических понятий, способствующие предварительному накоплению некоторого запаса геометрических представлений, которые будут использованы при доказательстве теорем, и, во-вторых, упражнения, последующие за доказанной теоремой, помогающие формированию новых понятий, вытекающих из этой теоремы и дающие материал для приложения теоремы в новых, конкретных условиях.

При оформлении упражнений для задания их учащимся надлежит иметь в виду следующие соображения.

Если по условию упражнения чертеж должен быть дополнен новыми построениями, то задание упражнения (текст и чертеж) должно быть оформлено в виде небольших карточек, раздаваемых учащимся на руки для самостоятельного решения. Такие карточки с точно выполненным чертежом особенно необходимы в том случае, когда желательные результаты графических преобразований зависят от специально подобранного соотношения между элементами заданной фигуры. В других случаях, при работе со всем классом, при опросе учеников у доски целесообразно изготовлять таблицы крупного масштаба с чертежами, легко видимыми всему классу; текст таких упражнений преподаватель должен читать во всеуслышание. В обоих случаях чертежи упражнений вместе с текстом должны быть перенесены учениками в тетради, предназначенные для выполнения упражнений.

Мы считаем возможным полагать, что наши упражнения, давшие положительные результаты в обстановке индивидуального эксперимента, оправдают свое назначение и в практике классного преподавания. В виде опыта серия упражнений, составленных по изложенной системе, была применена в трех московских школах: в 90-й школе — в VI классе (преподавательница П. И. Игумнова) и в IX классе (преподаватель Д. И. Даниленко), в 29-й школе — в IX классе (преподавательница М. Х. Кекчеева) и в 113-й школе — в VIII классе (преподавательница Л. В. Федорович).

П. И. Игумнова пользовалась в VI классе стенными таблицами[1]. Эти таблицы с задачами, подобранными на текущую тему, преподавательница вывешивала в классе в течение нескольких уроков, на которых изучалась данная тема. В ходе урока преподавательница предлагала отдельные задачи из таблиц при опросе урока у доски или задавала вопросы всему классу для ответа с места. Вместе с тем каждый из учащихся должен был познакомиться со всеми задачами, содержащимися в вывешенной таблице во внеурочное время, перенести чертежи и условие задач в тетрадь и выполнить в этой тетради решение.

[1] Г. А. Владимирский, Таблицы по геометрии, наглядное пособие для VI класса, Главучтехпром, 1944.

Д. И. Даниленко пользовался в IX классе на ряду со стенными таблицами также карточками небольшого формата (оба вида пособий изготовлены силами школы). На таблицах содержались задачи, несложные по выполнению, требующие главным образом устных ответов. Карточки содержали задачи конструктивного характера или с большим числом вопросов в сопроводительном тексте.

Таблицы использовались при опросе у доски или при коллективном решении задачи в классе. Карточки предлагались учащимся для решения задач дома. Каждая задача была заранее размножена на карточках в количестве достаточном, чтобы обеспечить выполнение задач по изучаемому материалу всеми учениками. Решение задач оформлялось в тетрадях, где учащиеся выполняли графическую часть решения и давали ответы на вопросы.

М. Х. Кекчеева применяла в IX классе для большей части задач карточки. Задачи на карточках давались для внеклассного решения. Для решения задач в классе (и для разбора решенных задач) М. Х. Кекчеева пользовалась рисунками на доске, подготовленными ею перед уроком.

Л. В. Федорович пользовалась в своей работе в VIII классе только карточками, давая их учащимся для решения задач в классе и дома, и разбирая выполненные решения в классе у доски.

При выборе задач преподаватели IX класса придавали большое значение упражнениям, помогающим освоить принципы правильного изображения пространственных фигур. Равным образом в широкой мере были использованы упражнения к первым главам стереометрии.

Все преподаватели отмечали интерес, проявленный учащимися к решению предложенных задач и несомненную пользу от упражнения в их решении.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 21 · 1949

ИЗ ОПЫТА ПРОВЕДЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПРОЕКЦИОННОМ ЧЕРТЕЖЕ

Л. В. ФЕДОРОВИЧ и М. Х. КЕКЧЕЕВА

Из объяснительной записки к программе по математике видно, что работа над развитием пространственного воображения является одной из важнейших работ в преподавании геометрии в средней школе.

В объяснительной записке к программе 1948 г. сказано: „Преподавание геометрии имеет целью развить у учащихся пространственное воображение...".

Какими средствами осуществляется эта цель?

Средства могут быть самые разнообразные. Одним из этих средств, считает записка, является: „решение задач вычислительного и конструктивного характера".

Если мы обратимся к практике школьной работы, то следует сказать, что она не осуществляет полностью программных указаний потому, что в школах преобладает работа над вычислительными задачами, и задачи конструктивные почти не ставятся, особенно в стереометрии.

Причин этому много.

Прежде всего учитель опасается того, что конструктивные задачи отнимают много времени, особенно на первых шагах работы с этими задачами. На вычислительные задачи не остается столько времени, чтобы решить весь тот комплект, который учитель привык давать ученикам и который определяется хотя бы стабильным задачником. Учитель часто не имеет под руками стереометрических задач на построение. Их почти нет в стабильном задачнике Рыбкина. Учителю полезно познакомиться с таким опытом, который показал бы примерную систему в подборе таких задач.

Начинать следует с решения конструктивных задач на проекционном чертеже. При этом весь процесс решения становится конкретным, так как операциям в пространстве соответствуют эффективные построения на чертеже.

Те учителя, которые пробовали проводить работу над конструктивными задачами с помощью проекционного чертежа, одобрительно отзываются об ее результатах.

Они говорят, что проекционный чертеж дает возможность решать пространственные задачи путем фактического построения.

В этом отношении проекционный чертеж имеет решающее преимущество перед моделями, на которых невозможно выполнять геометрические построения. Если сравнить построение на проекционном чертеже с построением в воображении, то следует сказать, что проекционный чертеж, благодаря фиксации на бумаге всех производимых операций, вносит в решение конкретность и наглядность. Поэтому задачи на построение в пространстве становятся доступными для большинства учащихся. Решение конструктивных задач по воображению доступно далеко не всем учащимся и требует предварительной подготовки к их решению. Задачи на проекционном чертеже являются одним из таких средств в развитии пространственного воображения учащихся, которое подготавливает учащихся к решению задач по воображению.

К сожалению, не все учителя знают об этом методе. Хотя в последнее время по этому вопросу появилась некоторая литература (см. в приложении), однако, решение пространственных задач на проекционном чертеже является еще для школы делом новым, и поэтому мы хотели бы поделиться опытом своей работы.

Работа эта проводилась нами в течение четырех лет в 29-й и 113-й школах под руководством проф. Н. Ф. Четверухина.

Пособием для учителя были две статьи Н. Ф. Четверухина в журнале „Математика в школе" за 1946 год №№ 2 и 3 и книга того же автора: „Стереометрические задачи на проекционном чертеже" 1 и 2 части. Эти книги вполне доступны учащимся, изучающим стереометрию. Первая часть, по ее выходе, была дана учащимся этих школ в качестве пособия.

В этой первой части учитель совершенно свободно может производить для себя отбор позиционных задач в зависимости от подготовленности класса, расположения учебного материала в плане работы учителя и других методических соображений.

С другой стороны, учитель легко может придумывать варианты задач и этим придавать всей работе значительное разнообразие. Особенно же ценным является вовлечение самих учащихся в составление задач.

В каком отношении находится решение задач на построение с помощью проекционного чертежа к учебному плану по геометрии в курсе IX класса?

Следует сказать, что учебный план по геометрии нами начинался с темы: „Параллельные прямые и плоскости", т. е. так, как это дано в программе и в учебнике „Геометрия" Киселева, часть вторая. Перед вторым параграфом: „Параллельные прямые и плоскости" мы дали учащимся понятие о свойствах чертежа при параллельном проектировании:

1. Проекция точки на плоскость есть точка.

2. Проекция прямой линии есть прямая.

3. Точка, принадлежащая прямой, проектируется точкой, принадлежащей проекции прямой.

4. Параллельные прямые проектируются параллельными прямыми.

Материал об этих свойствах есть в учебнике „Геометрия" Киселева, глава вторая: „Ортогональная проекция точки, отрезка и фигуры".

Материал этот не представил для учащихся никакой трудности, так как они были знакомы с ним по черчению.

Посмотрим, как проводилась эта работа в указанных школах.

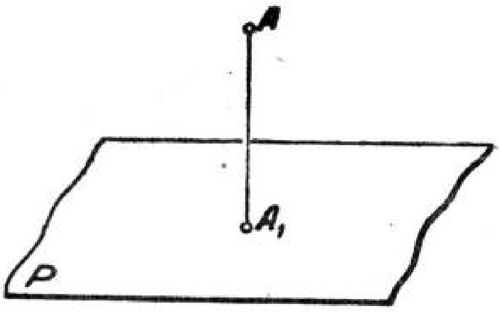
ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ В 113-Й ЖЕНСКОЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ СОВЕТСКОГО РАЙОНА МОСКВЫ

(преподаватель Л. В. Федорович)

В течение четырехлетней работы над задачами на построение с помощью проекционного чертежа школа имела возможность неоднократно проверить свою методику и в результате выработать для себя принципы отбора и расположения задач.

На первых шагах работа ставилась в примерной последовательности расположения материала первой части книги — „Стереометрические задачи на проекционном чертеже"—проф. Н. Ф. Четверухина. Задачи №№ 1—14. Кроме того, придуманы были аналогичные задачи учителем и учащимися.

Прежде, чем приступить к непосредственному решению задач с помощью проекционного чертежа учитель проводил с учащимися беседу, которая вводила учащихся в курс основных понятий и условных обозначений в построениях на проекционном чертеже. Все это давалось на конкретных примерах из окружающей обстановки и фиксировалось в изображениях на доске. Учащиеся узнали, что для определения положения точки на чертеже задают ее проекцию на плоскость. Например, положение точки пространства определяется изображением этой точки A на чертеже с ее проекцией A_1 на плоскость P (черт. 1).



Черт. 1

Это задание точки записывается так: $A\ (A_1)$. Плоскость P называется **основной**, а отрезок AA_1, от изображения точки на чертеже до ее проекции, называется **проектирующим отрезком**. Учащимся подчеркивается, что направление проектирующих отрезков выбирается произвольно, но для всех заданных точек в условиях данной задачи берется одним и тем же. Для простоты условились это направление брать вертикальным.

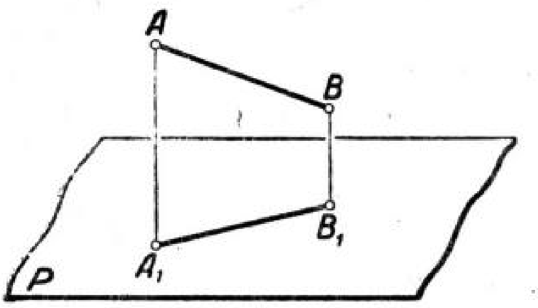
Основная плоскость изображается ограниченной обрезами или обрывами.

Начиная с первого урока, дается понятие о полноте изображения. Понятие о полноте изображения для учащихся вполне доступно, но раскрывается оно постепенно по мере продвижения от урока к уроку. На первом уроке учащиеся узнают о полноте изображения точки, т. е. что для изображения точки на проекционном чертеже достаточно иметь изображение самой точки и ее проекции на какую-нибудь плоскость, обычно на основную плоскость. Для того чтобы с первого урока учащиеся увидели все преимущества построения с помощью проекционного чертежа, решается задача № 1. *Найти точку пересечения прямой $A\ (A_1)\ B\ (B_1)$ с основной плоскостью.*

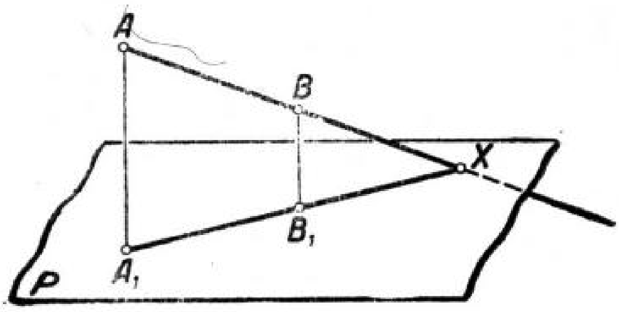
Прежде всего разбирается вопрос об изображении на чертеже условия задачи. Это изображение дается на чертеже 2. На чертеже 3 учащиеся выполняют решение этой задачи.

Если для хороших учеников с первых уроков можно решение задачи выполнять на том же чертеже, где изображено условие задачи, то для слабых учеников первое время легче понимать процесс решения задачи, если показано, какое изменение происходит в чертеже.

Они видят, что в условии задачи заданы две точки, через которые проходит прямая, следовательно, на чертеже дано изображение этих точек с их проекциями и, по свойству параллельного проектирования, на основной плоскости дана проекция отрезка AB, изображенная отрезком $A_1 B_1$.



Черт. 2



Черт. 3

Первая стадия решения задачи начинается проведением проектирующей плоскости через проектирующие прямые AA_1 и BB_1.

Проектирующая плоскость пересекает основную плоскость по прямой A_1B_1.

Вторая стадия решения заключается в определении точки пересечения прямой AB с прямой A_1B_1. Получается точка пересечения прямой AB с основной плоскостью, т. е точка X.

Из такого подробного разбора задачи учащиеся видят, что отрезок прямой фактически продолжается в плоскости.

В дальнейшем это разложение чертежа на стадии отпадает само собой.

Решение задачи заканчивается разбором полноты чертежа, причем разбирается ряд вопросов, связанных с полнотой чертежа:

1) Проекции скольких точек нужно иметь для полноты чертежа плоскости?

Ответ. Чтобы чертеж плоскости обладал полнотой, следует иметь три точки с их проекциями.

2) Что является проекцией точки X, лежащей на основной плоскости?

Ответ. Точка X и ее проекция в данном случае совпадают.

Кроме того, разбираются ошибки, допущенные некоторыми учащимися. Несмотря на то, что учитель говорил учащимся о выполнимости решения задачи на листе, некоторые учащиеся точку пересечения прямой с плоскостью получили за листом. Невозможность фактического размещения решения данной задачи на листе привела к рассмотрению условия решения вопроса: „Выполнимость чертежа в условиях построения".

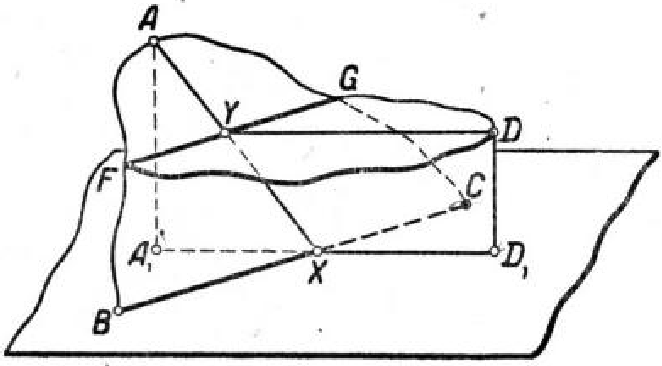
В том же плане, в задаче нахождения линии пересечения плоскости, заданной тремя точками, с основной плоскостью, разбирается вопрос о полноте чертежа плоскости, т. е. для любой точки плоскости может быть построена ее проекция на основную плоскость, если на чертеже указаны три точки и их проекции.

Решение каких задач из книги проф. Н. Ф Четверухина „Стереометрические задачи на проекционном чертеже" затрудняло учащихся?

Решение первых задач никакого затруднения у учащихся не вызывало. Обратимся к задаче № 8—Плоскость задана следом BC и точкой A (A_1). Найти линию пересечения ее (линию уровня) с плоскостью уровня, проходящей через точку $D(D_1)$ (черт. 4).

Для решения этой задачи надо было повторить решение двух предшествующих задач: № 6 и № 7. Задача № 6 — Найти линию пересечения плоскости уровня, проходящей через заданную точку, с проектирующей плоскостью.

В результате повторения решения этой задачи делается сопоставление задач № 6 и № 8. Устанавливается, в чем разница этих задач: в задаче № 6 требовалось найти линию пересечения плоскости уровня с проектирующей плоскостью, в задаче № 8 – треб ется найти линию пересечения плоскости уровня с наклонной плоскостью. Выясняется, что имеется общего в этих задачах: и в той и в другой задаче одна из плоскостей есть плоскость уровня.



Черт. 4

Далее повторяется решение задачи № 7 о пересечении проектирующей плоскости с наклонной плоскостью.

После такого повторения решение задачи № 8 проходит свободно.

Учитель делает для себя вывод: задача № 8 может решаться с учащимися в классе. Затрудняет учащихся вспомогательное построение проектирующей плоскости. В качестве упражнения для самостоятельного решения дома эта задача может вызвать затруднения.

То же самое можно сказать и о задачах № 9, 10, 11. После разбора их в классе на дом дается аналогичная задача.

Задачу № 12 можно рекомендовать учащимся для решения в математическом кружке. Для решения со всем классом к ней можно вернуться в конце года, когда у учащихся накапливается навык решения задач на построение с помощью проекционного чертежа.

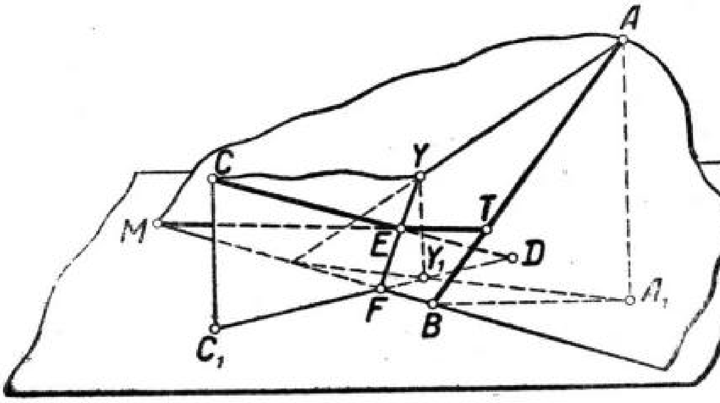
Трудность этой задачи опять заключается в проведении вспомогательного построения. Это обычная трудность для учащихся, которая встречается и в задачах на вычисление, и в задачах на доказательство, и в задачах на построение.

Задача № 12. — Построить прямую, проходящую через данную точку M и пересекающую данные прямые BA и DC.

При решении этой задачи учащиеся в самом начале встречаются с проведением вспомогательного построения, и это их затрудняет.

Поэтому преподавателю приходится наводить учащихся на мысль: заключить точку M и какую-нибудь из данных прямых в одну плоскость. Это сделать всегда можно, так как прямая и точка определяют единственную плоскость. Возникает у учащихся вопрос: какую из прямых взять? Ответ: — Ту, которая в условиях расположения чертежа удобнее может осуществить решение задачи (виднее на чертеже процесс решения и пр.). Берем прямую BA (черт. 5).

Теперь решение задачи сводится к нахождению пересечения прямой DC с проведенной плоскостью и т. д. Построением, таким же, что и при решении задачи № 11, находится точка E, точка пересечения прямой DC с плоскостью MBA. Очевидно, ME есть та прямая, которая пересечет прямую AB, лежащую с ней в одной плоскости, в точке T.



Черт. 5

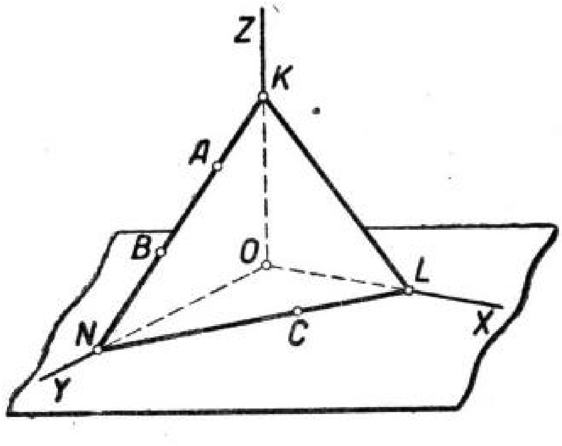
Учащимся предлагается при данном расположении условий начать решение, включив точку M и прямую DC в одну плоскость и т. д.

Первые два года работы над решением задач на построение с помощью проекционного чертежа с учащимися IX классов дали возможность сделать следующие выводы.

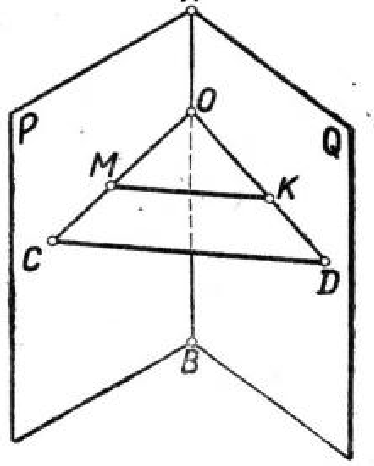
В конце IX класса, т. е. после пяти месяцев работы, учащиеся справляются самостоятельно с решением следующих задач.

Задача № 1. Найти пересечение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой, с гранями трехгранного угла, если точки A и B лежат на грани YOZ и точка C на грани XOY трехгранного угла $OXYZ$.

Задачу решала ученица К. Обычная оценка ее работы по геометрии—три. Иногда бывают двойки. При решении задачи ученица дала такое объяснение: назовем плоскость, которую проводим, буквой α (черт. 6). Плоскость α проходит через точки A и B, значит пересекает OY в точке N и OZ—в точке K. Через N и C проведем прямую NC. Получим в пересечении с OX точку L. Соединим ее с K. Получится плоскость KLN.



Черт. 6



Черт. 7

Ученице К. была предложена задача № 2: Через точку M провести прямую, параллельную CD, и найти точку пересечения этой прямой с гранью Q двугранного угла, если точки M и C лежат на плоскости P и точка D на плоскости Q двугранного угла $PABQ$.

Ученица К. учится на три, иногда имеет четверки. Она дала такое объяснение при решении задачи (черт. 7). Проведем плоскость через три точки, не лежащие на одной прямой. На основании соответствующей аксиомы плоскость будет единственная. Она пересечет ребро AB и точке O и плоскость Q по прямой OD.

Теперь через M проведем прямую, параллельную CD. В точке K будет пересечение с гранью Q.

Ученице М. была предложена задача № 3: Через три точки A, B и C провести плоскость и найти ее след на гранях трехгранного угла $OXYZ$, если точка A лежит на грани YOZ, точка B на грани XOZ и точка C—на грани XOY. Точки A, B и C не лежат на одной прямой.

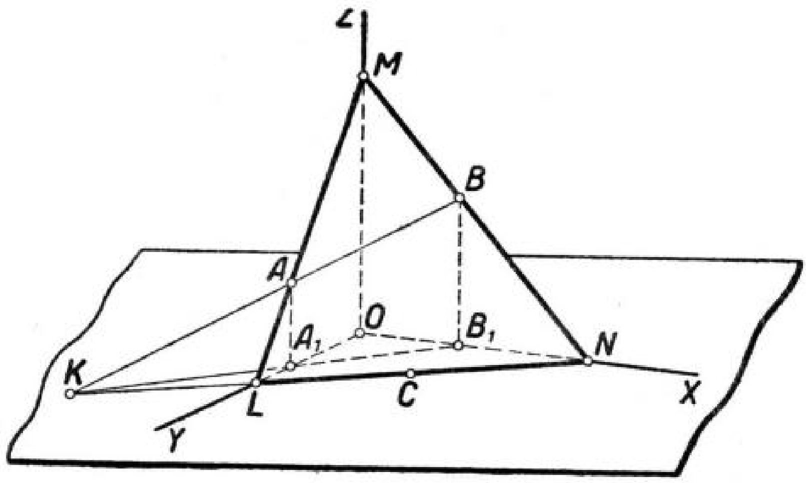
Ученица М. учится на четыре. При решении задачи она сделала следующее объяснение (черт. 8). Точки A и B принадлежат искомой плоскости, следовательно, прямая AB принадлежит искомой плоскости. Если найдем точку K пересечения этой прямой с плоскостью XOY, тогда на этой плоскости будут две точки. Через них проходит прямая пересечения плоскостей. Эта прямая пересечет ребро OX в точке N. Теперь точку N соединяем с точкой B и продолжаем до ребра OZ. Получим точку M. Точку M соединяем с точкой A, получаем третью линию пересечения ML.

Вопрос учителя: Назови линию пересечения искомой плоскости с гранями угла.

Ответ: Линия MNL.

Ученице С. была предложена задача № 4: Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью уровня, проходящей через точку C, если точка A принадлежит грани XOZ, точка B — грани XOY и точка C—грани YOZ трехгранного угла $OXYZ$.

Ученица С. учится на пять. Ученица С. дала следующее объяснение (черт. 9). Плоскость уровня параллельна грани XOY, если эта грань принимается за основную плоскость.



Черт. 8

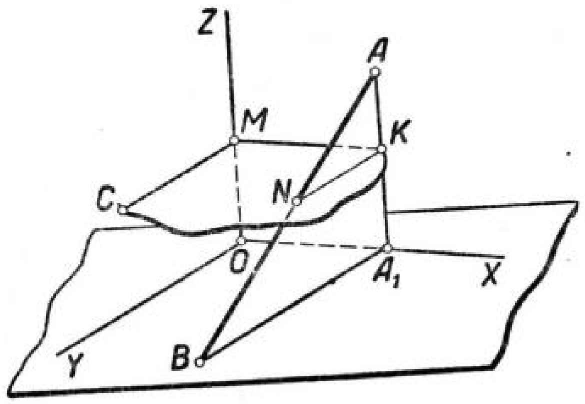
Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны. Следовательно, проводим $CM \parallel OY$ и $MK \parallel OX$.

Теперь задача сводится к пересечению прямой с плоскостью уровня. Проводим проектирующую плоскость через A (A_1) и B. Она пересечет плоскость уровня по прямой KN. Точка пересечения прямой

KN с прямой AB есть точка пересечения прямой AB с плоскостью уровня.

Задачи были эти предложены ученицам IX класса 113-й школы проф. Н. Ф. Четверухиным. Он проводил урок по решению задач с помощью проекционного чертежа и предложил задачи, с которыми ранее ученицы не были знакомы.

Ученицы вызывались к доске для решения задачи. Весь класс так же решал соответствующие задачи. По журналу Н. Ф. Четверухин отобрал фамилии четырех учениц, которые по последней (2-й) четверти имели отметки 3, 4, 4 и 5. Ученицы с задачами справились. Решение задач выполнялось сознательно, чертеж строился грамотно. В итоге двух лет учитель, проводивший работу с учащимися, сделал следующий методический вывод для дальнейшей работы над задачами на построение в стереометрии:



Черт. 9

1. На первых шагах изучения стереометрии не следует задерживать учащихся на трудных для них задачах, поэтому, взяв задачи из книжки проф. Н. Ф. Четверухина, I часть, за основу, учителю следует самому составить промежуточные задачи. Конечно, трудность предлагаемых задач определяется степенью подготовленности класса.

2. При решении задач на построение с помощью проекционного чертежа следует связать тему о взаимном положении прямых и плоскостей в пространстве с темой о многогранниках. Мотивировать этот вывод можно следующими соображениями:

а) В стандартном задачнике Рыбкина, II часть, уже в первых параграфах задачи на многогранники преобладают.

б) Изложение начала стандартного учебника стереометрии Киселева страдает чрезмерной абстрактностью, что затрудняет усвоение его многими учащимися.

Работа над решением задач на построение строилась в последующие годы, исходя из сделанных выводов.

Подбор задач производился так, что сначала давались простейшие задачи из темы: „Взаимное положение прямых и плоскостей в пространстве", а затем приложение их к задачам в многогранниках, как, например:

Пересечение прямой, заданной двумя точками в пространстве, с основной плоскостью.

Пересечение прямой, проходящей через две точки на боковых ребрах призмы, с основной плоскостью.

Пересечение прямой, заданной двумя точками на боковых гранях призмы, с основной плоскостью.

Далее брались всевозможные комбинации точек: на плоскости верхнего основания и на боковом ребре, на плоскости верхнего основания и на боковой грани и пр.

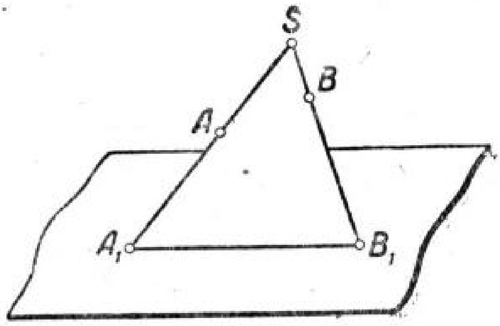
Затем давалось понятие о центральной проекции, выполнялось решение задач на пересечение прямой, проходящей через две точки на боковых ребрах пирамиды, с основной плоскостью, и далее повторялось то, что давалось для призмы. Это разнообразие предлагаемых задач способствует созданию навыка в решении элементарной задачи на пересечение прямой с плоскостью. Натаскивания учащихся не было, так как задачи решались на разнообразных фигурах.

Как вводилось понятие центрального проектирования?

Вопрос о центральном проектировании излагался по книге проф. Н. Ф. Четверухина — „Стереометрические задачи на проекционном чертеже".

Для закрепления понятия центрального проектирования учащимся предлагался ряд упражнений, примерно, следующего вида.

I. Найти центр проекций двух точек, изображенных на чертеже с их основаниями на основной плоскости (черт. 10). Нахождение центра проекции сводилось к нахождению точки пересечения двух проектирующих прямых: AA_1 и BB_1.



Черт. 10

II. В задачах на сечения учащимся было предложено два способа решения на проекционном чертеже:

1) Решение задач с помощью построения следа искомой плоскости на основной плоскости.

2) Решение задач с помощью внутреннего проектирования.

Сначала был отработан первый способ — построение следа. Далее изучили решение задач способом внутреннего проектирования.

В заключение учащиеся должны были делать выбор в пользовании тем или иным способом, обосновывая применение этого способа.

III. В подборе задач для решения тем и другим способом руководствовались преемственностью в решении.

1. Решение задач способом построения следа

Мы начали решение задач с помощью построения следа искомой плоскости на основной, но это совершенно не обязательно. В книге проф. Н. Ф. Четверухина, 1 часть, проведена лишь одна позиционная задача на решение этим способом.

Следует отметить, что не всегда по заданному условию можно производить построение этим способом.

Это была одна из причин, остановившая наше внимание прежде всего на этом способе. Перед учащимися на первых шагах был поставлен вопрос: можно ли в условиях чертежа решать задачу этим способом, или изменить взаимное положение точек так, чтобы искомое сечение не было параллельно основной плоскости и соблюдалось вообще условие выполнимости решения на данном чертеже? Это учащимися было усвоено легко.

Второй причиной, и самой главной, было то, что чертеж при решении получается проще, так как все построения идут вне многогранников, когда решаются задачи на сечение многогранников. (Если учащиеся не подготовлены к оценке расположения чертежа, то начинать целесообразнее со способа внутреннего проектирования, во избежание невыполнимости решения в условиях данного положения точек).

Для это приема решения задач на построение руководящей была задача № 1 о пересечении прямой с плоскостью. Решение этой задачи хорошо было закреплено решением целой серии задач на пересечение прямой, пересекающей многогранник, с основной плоскостью.

Задача № 2. Провести плоскость через три точки $A(A_1)$, $B(B_1)$ и $C(C_1)$, не лежащие на одной прямой, и найти линию ее пересечения с основной плоскостью (черт. 11).

Решение этой задачи сводится к двукратному применению решения предшествующей задачи на нахождение точки пересечения прямой с плоскостью. D и E — точки пересечения прямых AB и AC с основной плоскостью, DE — след искомой плоскости на основной. Такая непосредственная связь одной задачи с другой помогает учащимся лучше осваивать решение и учиться выполнять его самостоятельно.

В качестве практического приложения задачи № 2 предложены были задачи на проведение сечений в призмах и пирамидах. Остановимся на некоторых подробностях решения задач.

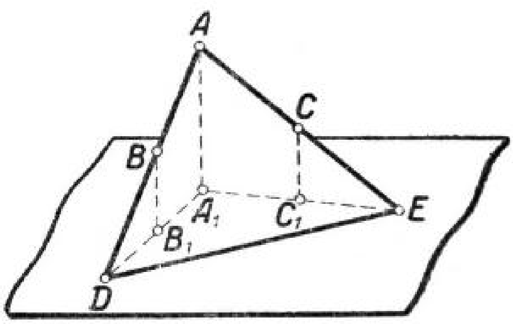
Задача № 3. Провести линию сечения четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки, лежащие на боковых ребрах.

Задача эта решалась ученицей у доски. Предварительно со всем классом производился разбор этой задачи, который заключался в следующем.

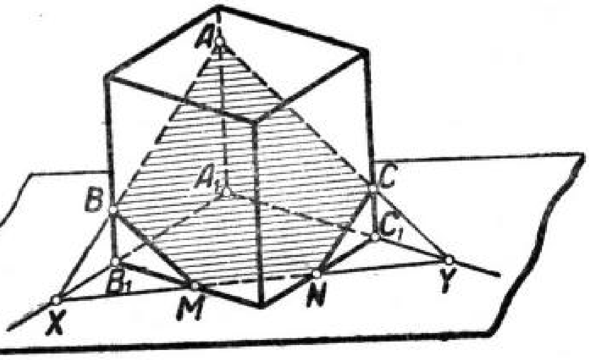
Учитель ставил вопрос: „Всегда ли искомое сечение пересечет основную плоскость?"

Ответ: „Если плоскость сечения будет параллельна плоскости основания (учащиеся к этому времени прошли параллельные плоскости), то пересечения плоскостей не будет".

Учитель предложил взять точки на ребрах так, чтобы искомое сечение прошло через нижнее основание призмы. В этом случае решение задачи сводится к нахождению линии пересечения (следа) плоскости, проходящей через три точки, с основной плоскостью, т. е. к решению предшествующей задачи (черт. 12).



Черт. 11

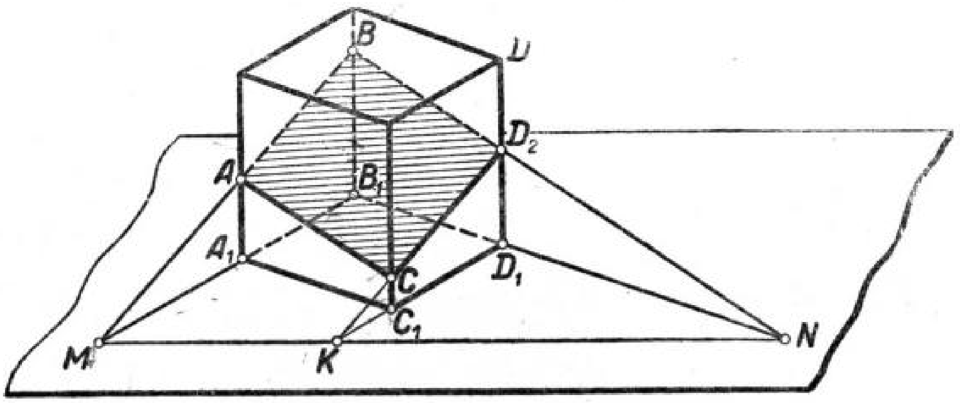


Черт. 12

Сечение $ACNMB$ построено с помощью следа, пересекающего основание призмы. Для самостоятельного решения этой задачи, даже слабыми учениками, достаточно было напомнить им решение предшествующей задачи. Сильные же ученики в этом напоминании не нуждались. По мере освоения решения задач всем классом становилось ненужным обращать внимание учеников на связь между задачами.

После решения этой задачи учитель предложил рассмотреть тот случай, когда сечения пересекают основную плоскость вне призмы. Решение этой задачи проходит так же, как и предыдущей (черт. 13).

Для нахождения точки сечения на четвертом ребре учащиеся ищут точку пересечения плоскости боковой грани $L(D_1)$ C со следом MN. Эта точка обозначена на чертеже буквой K. Линия KC пересекает ребро DD_1 в точке D_2 — точке пересечения искомого сечения с боковым ребром DD_1.



Черт. 13

Сечение ABD_2C построено с помощью следа, не пересекающего основания призмы.

Этот второй случай рассматривается с учащимися, чтобы ответить на вопрос, поставленный отдельными учащимися: „А может ли след искомой плоскости не пересекать основание призмы?"

Ошибки, встретившиеся у учащихся при решении задач с помощью нахождения следа, в большинстве случаев заключались в невыполнимости решения на листе бумаги. Это происходит из-за отсутствия навыка делать прикидку искомого чертежа.

Учащиеся постепенно подходят к решению более сложных задач на сечения в пятиугольной и шестиугольной призме, закрепляя решение способом нахождения следа.

Далее, последовало решение задач на построение сечений с помощью следа в пирамидах. Перед решением задачи на сечение в пирамиде повторяется центральное проектирование. Учащиеся знают из предшествующего, что вершина пирамиды принимается за центр проекций. Проекциями точек, взятых на боковых ребрах, являются основания этих ребер. Так же, как и на сечения в призмах, решаются задачи с помощью следа. Рассматриваются задачи, в которых след либо пересекает основание пирамид, либо не пересекает его.

Приведем пример решения таких задач учащимися.

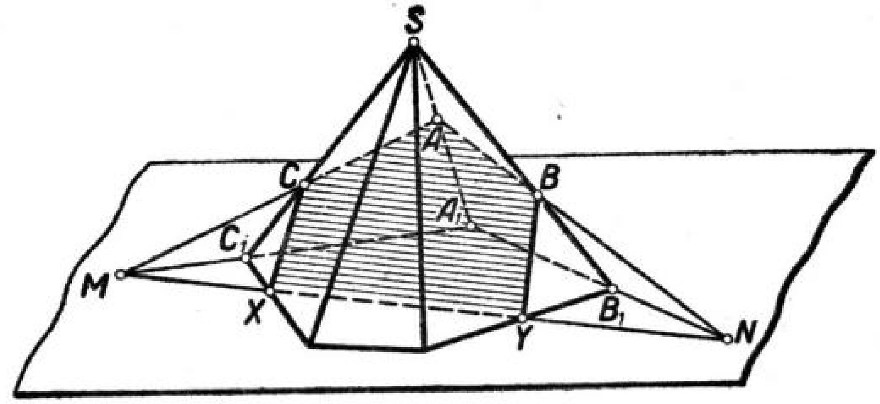
З а д а ч а. Через три точки A, B и C на боковых ребрах пятиугольной пирамиды провести плоскость и найти линию сечения на гранях.

Учитель располагает заданные точки на боковых гранях так, чтобы для начала задача давала простейшее решение (черт. 14).

Итак, в задачах на сечение многогранников, решаемых способом получения следа искомой плоскости на основной, руководящей является простейшая задача из темы о взаимном положении прямых и плоскостей в пространстве: „Найти точку пересечения прямой с основной плоскостью".

2. Решение задач способом внутреннего проектирования

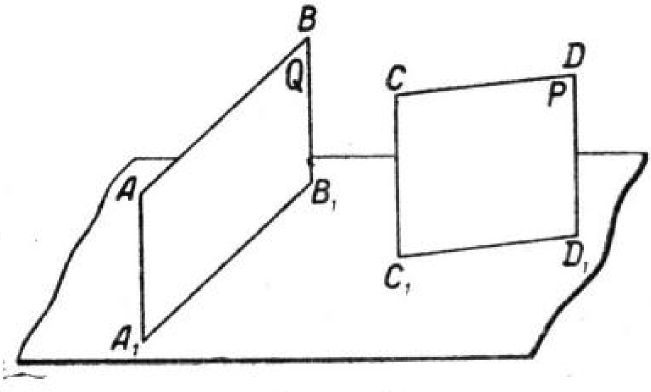
При решении задач способом внутреннего проектирования мы руководствовались такой же преемственностью в подборе задач, что и в предшествующем способе. В решении выделялась также руководящая задача. Руководящей задачей являлась задача о пересечении проектирующих плоскостей: „Найти линию пересечения двух проектирующих плоскостей $A(A_1)B$ и $C(C_1)D$“.



Черт. 14

Плоскость, проходящая через проектирующую прямую, называется проектирующей.

Даны две проектирующих плоскости $A(A_1)B$ и $C(C_1)D$ (черт. 15).



Черт. 15

С учащимися повторяется вопрос о пересечении плоскостей. Одна из учениц сказала, что для нахождения общей точки, принадлежащей плоскостям, надо продолжить плоскость P так, чтобы она пересеклась с плоскостью Q.

При этом найдем точку пересечения следов плоскостей: C_1D_1 с A_1B_1, т. е. точку X_1. Учащиеся все время привлекаются к обсуждению построения.

Первый шаг в решении задачи (черт. 16). Найдена точка X_1 пересечения следов плоскостей.

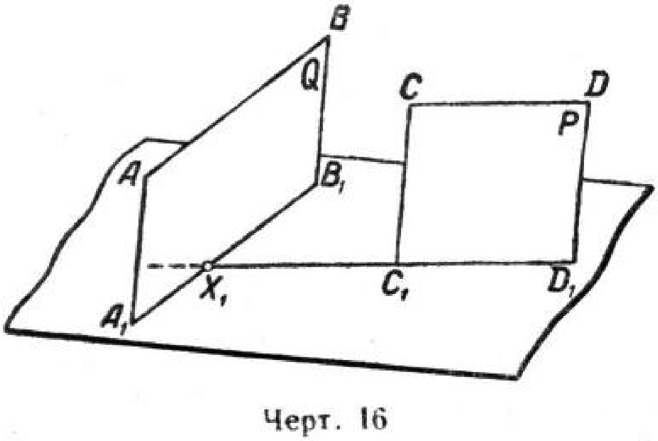
Далее стали разбирать вопрос о том, как пойдет линия пересечения плоскостей.

Второй шаг в решении задачи (черт. 17). Найдена линия пересечения плоскостей. С классом разбираются следующие три предположения:

1) Что означало бы в условии задачи направление X_1m?

X_1m — принадлежит только плоскости P и лежит за плоскостью Q.

2) Что означало бы в условии задачи направление X_1n?

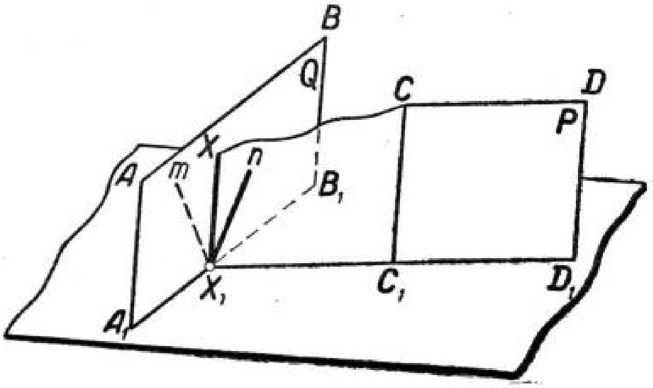


Черт. 16

X_1n — принадлежит только плоскости P и лежит перед плоскостью Q.

3) Что означает в условии задачи направление X_1X? ($X_1X \parallel C_1C$).

X_1X — принадлежит плоскостям P и Q и, следовательно, является линией их пересечения.

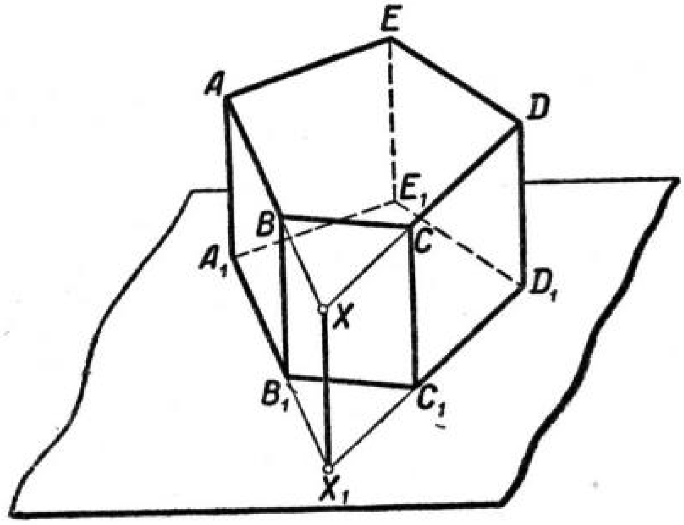


Черт. 17

Далее был сделан вывод: для нахождения пересечения проектирующих плоскостей следует найти точку пересечения следов плоскостей и провести через эту точку прямую, параллельную проектирующим прямым.

Задача № 8. Найти линию пересечения боковых граней пятиугольной призмы, расположенных через одну (черт. 18).

На грани $A(A_1)B$ и $C(C_1)D$ можно смотреть, как на две проектирующие плоскости; тогда решение задачи сводится к нахождению линии пересечения двух проектирующих плоскостей.



Черт. 18

Следует сказать, что эта задача предлагалась на устных выпускных испытаниях на аттестат зрелости. Лучшие ученики затруднялись в ее решении. В тех классах, где ранее систематически проводилась работа над задачами построения на проекционном чертеже, учащиеся настолько осваивали метод решения их, что на устных выпускных испытаниях на аттестат зрелости свободно решали такие задачи.

Рассмотренные задачи послужили вступлением к решению задач способом внутреннего проектирования.

Простейшей руководящей задачей на внутреннее проектирование была следующая задача.

Задача № 9. Через три точки A, B и C, лежащие на трех параллельных прямых, провести плоскость и найти ее пересечение с четвертой прямой, параллельной заданным, если никакие три прямые не лежат в одной плоскости (черт. 19).

Как свести решение этой задачи к решению предшествующих задач?

Через противоположные пары параллельных прямых проводятся проектирующие плоскости и находится линия пересечения их. Решение вопроса о пересечении проектирующих плоскостей проводилось в предшествующих задачах.

Разбираются следующие вопросы:

1) Почему прямая AC принадлежит искомой плоскости?

Потому что две ее точки A и C принадлежат искомой плоскости.

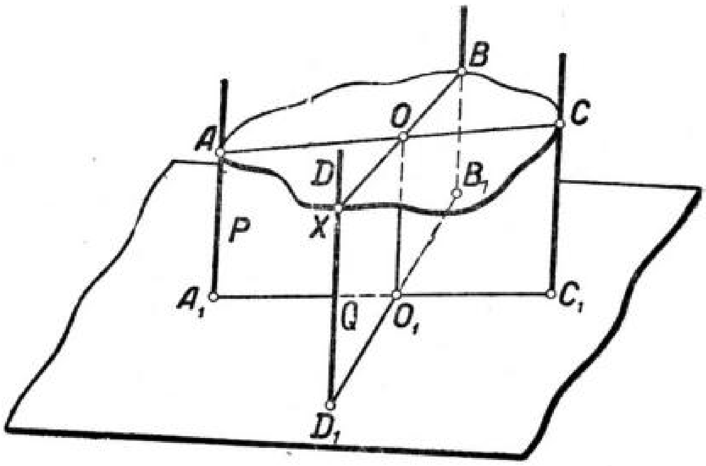
2) Почему OO_1 пересекается с AC?

Потому что OO_1 параллельна AA_1 и AA_1 пересекает AC.

3) Почему OB пересечет четвертую прямую?

Потому, что DD_1 параллельна BB_1 и BO пересекает BB_1.

После этого решение задачи закончилось следующей записью:



Черт. 19

Построение

$O_1 = \overline{A_1C_1} \times \overline{B_1D_1}$,

$\overline{OO_1} =$ пл. $P \times$ пл. Q, $(OO_1 \| AA_1)$,

$O = \overline{AC} \times \overline{O_1O}$,

$X = \overline{D_1D} \times \overline{BO}$.

Доказательство

$\overline{AC} \subset$ пл. ABC,

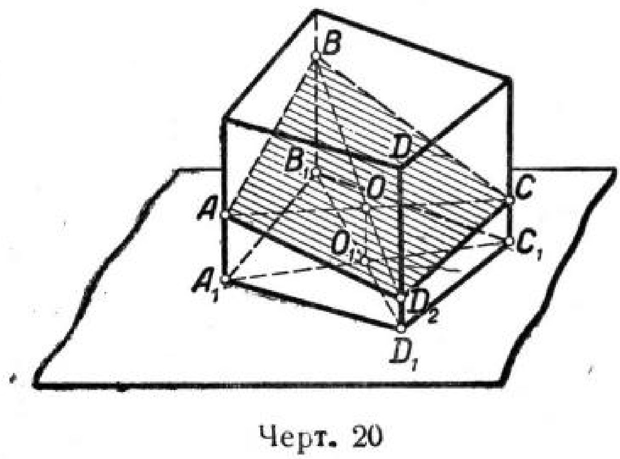
$O \subset$ пл. ABC,

$\overline{BO} \subset$ пл. ABC,

$X = DD_1 \times$ пл. ABC.

Учащиеся быстро привыкают к символической записи и пользуются ею не механически. Например, первую строчку записи читают так:

„Точка O_1 является точкой пересечения отрезка A_1C_1 с отрезком B_1D_1“.



Черт. 20

Первую строчку доказательства читают так:

„Отрезок AC принадлежит плоскости ABC“.

Вторую строчку читают так: „Следовательно, точка O принадлежит плоскости ABC“.

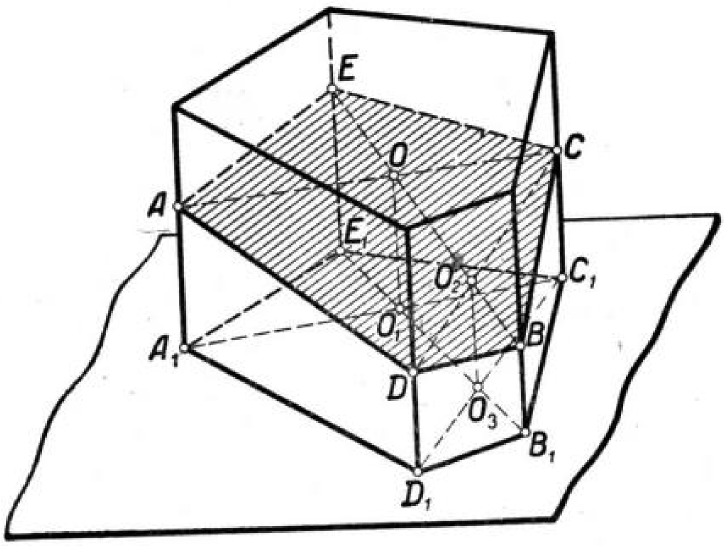
В целях экономии времени, решения классных задач записывались изредка. В классе запись заменилась устным объяснением. В домашней работе ученики в большинстве случаев пользовались записью.

Далее решались задачи на сечение призм и пирамид с помощью внутреннего проектирования.

Рассмотрим несколько таких задач.

Задача № 10. Найти сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки A, B и C, лежащие на боковых ребрах (эта задача решалась указанным выше способом построения следа искомой плоскости на основной).

Решение (черт. 20). Разбирается с учащимися вопрос: почему решение этой задачи можно свести к решению руководящей задачи о внутреннем проектировании [задача № 9 о пересечении четвертой параллельной прямой DD_1) плоскостью, проходящей через три точки A, B и C, лежащие на трех прямых, $A(A_1)$, $B(B_1)$ и $C(C_1)$, параллельных четвертой, $D(D_1)$].



Черт. 21

Потому что боковые ребра призмы параллельны между собой и по условию задачи три точки лежат на трех боковых ребрах.

Решение выполняется учащимися самостоятельно, если суть решения предшествующей руководящей задачи была воспроизведена.

Задача № 11. Найти линию сечения пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через три заданные на боковых ребрах точки A, B и C.

При решении задачи на сечение пятиугольной призмы предоставляется возможным провести предварительный анализ решения, так как возможны различные планы решения. Дадим такой анализ на примере (черт. 21).

Проведем проектирующую плоскость $A(A_1)C$. Так как способ решения задачи заключается в нахождении линий пересечений проектирующих плоскостей, содержащих заданные точки и точки, получаемые на ребрах, то рассмотрим, какие из этих плоскостей пересекаются внутри призмы.

Пл. $A(A_1)B$ не пересекается внутри призмы с плоскостью $A(A_1)C$, а пл. $B(B_1)E$ пересекается с нею. Следовательно, ищем линию пересечения пл. $A(A_1)C$ и пл. $B(B_1)E$. Находим точку E на ребре E_1E.

Такая задача уже решалась (см. руководящую задачу).

Далее выясняется: 1) Почему точка O принадлежит искомому сечению. 2) Почему точка O_2 принадлежит искомому сечению.

Для решения задачи остается найти на ребре DD_1 точку, принадлежащую сечению. Такую точку можно найти двумя путями:

1) С помощью пересечения проектирующих плоскостей $D(D_1)C$ и $B(B_1)E$.

2) С помощью пересечения проектирующих плоскостей $A(A_1)C$ и $D(D_1)E$.

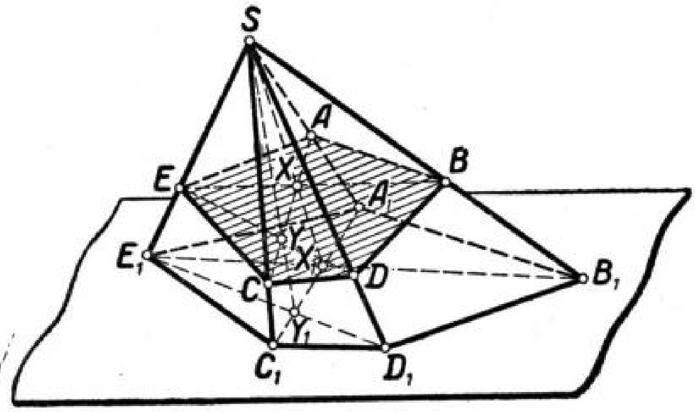
В условиях данного чертежа и тот и другой путь равнозначны и приводят к единственной точке D на ребре DD_1.

Подобные рассуждения приучают учащихся сознательно выбирать ход решения задачи, а следовательно, развивают их логическое мышление. Аналогично находим точку E.

Точки пересечения искомого сечения со всеми боковыми ребрами найдены. В сечении получился многоугольник ABD_2CE.

Это же самое условие задачи может быть отнесено и к пирамидам.

Задача № 12. Найти сечение пятиугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки A, B, C, лежащие на боковых ребрах (черт. 22).



Черт. 22

Так же, как и при решении задачи на сечение призмы способом внутреннего проектирования, проводится анализ задачи, который начинается с рассмотрения тех ребер, которые не содержат заданных точек.

Такими будут ребра SE_1 и SD_1. Одна из проектирующих плоскостей пройдет через пару ребер, содержащих заданные точки. В условиях данной задачи — это ребра SA_1 и SC_1.

Итак, для нахождения линии пересечения проектирующих плоскостей, лежащей внутри пирамиды, следует взять третье ребро с заданной точкой B и одно из двух не содержащих заданной точки. Для решения вопроса, какое ребро взять из этих двух, следует обратиться к чертежу. Из чертежа ясно, что таким ребром является только SE_1, как не лежащее с ребром SB в плоскости одной грани пирамиды.

Линия пересечения этих проектирующих плоскостей $A(A_1)C_1$ и $B(B_1)E_1$ есть SX_1. Пересечение линий SX_1 и AC дает точку X, принадлежащую сечению. С учащимися подробно выясняется, почему эта точка принадлежит искомому сечению. В результате, на ребре SE_1 получается точка E, т. е. $E = SE_1 \times BX$. Далее разбирается вопрос: какое ребро следует взять в паре с ребром SD_1 для проведения проектирующей плоскости? Хорошие ученики быстро отвечают на этот вопрос. Со слабыми учениками к ответу на этот вопрос можно подойти методом исключения: может ли ребро SC_1 или SB_1 быть в искомой проектирующей плоскости с ребром SD_1? Нет. Почему? Потому что каждое из них лежит с ребром SD_1 в плоскости одной грани. Может ли ребро SE_1 или SA_1 быть в искомой проектирующей плоскости с ребром SD_1? Да. Почему? Потому что проектирующая плоскость $S(E_1)S(D_1)$ дает внутреннее пересечение с проектирующей плоскостью $A(A_1)C$ и проектирующая плоскость $S(A_1)S(D_1)$ дает внутреннее пересечение с проектирующей плоскостью $S(E_1)S(B_1)$. Следовательно, может быть сделан выбор любой из этих пар. Выбор в данном случае будет определяться характером чертежа. В данном чертеже выбор пал на плоскость SE_1D_1. Дальнейший разбор задачи с учащимися идет в том же плане, что и в предшествующих задачах. В результате решения получилось сечение $ABDCE$.

Наряду с задачами, в которых заданные точки располагались на ребрах, решались и такие задачи, в которых точки задавались на гранях. Рассмотрим такие задачи. Решение их основано тоже на нахождении линии пересечения проектирующих плоскостей.

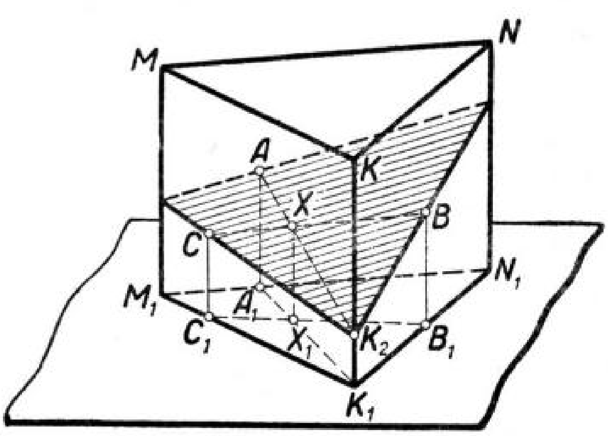
З а д а ч а № 13. Найти сечение треугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки A, B и C, лежащие на боковых гранях призмы.

Если задача решается на классной доске, то большинство учащихся на первых шагах располагают в своих тетрадях заданные точки так, как они изображаются на классной доске. Это удобнее и для учителя, так как ему в это время приходится давать много разъяснений и поэтому легче оперировать с одинаковыми чертежами (на доске и в тетрадях учащихся). Далее, по мере развития навыка в решении таких задач, отдельные учащиеся определяют самостоятельно выбор положения заданных точек по условию задачи. Это создает самостоятельность в работе, а следовательно, вызывает интерес учащихся к выполнению работы.

Преподаватель обращает внимание учащихся на то, что проекции заданных точек определяют, на какой грани лежат эти точки (черт. 23). Так, точка A лежит на грани $M(M_1)N$, точка B лежит на грани $N(N_1)K$.

Решение задачи начинается с нахождения линии пересечения проектирующей плоскости $C(C_1)B$ с плоскостью $A(A_1)K$. При разборе этой задачи повторяется решение руководящей задачи (2).

В результате этого решения получается на ребре KK_1 точка K_2, принадлежащая сечению. Точка K_2 дает возможность построить линию сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A, B и C.



Черт. 23

Если учащиеся поймут самый принцип нахождения четвертой точки по трем данным, то смогут правильно разбираться в проведении сечения любой многогранной призмы или пирамиды.

Чтобы создать навыки в решении подобных задач, следует разнообразить их условия.

Вот пример одной из таких задач.

З а д а ч а № 14. Найти сечение пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания A_1B_1, и точку M на боковой грани, не содержащей заданную сторону основания (черт. 24).

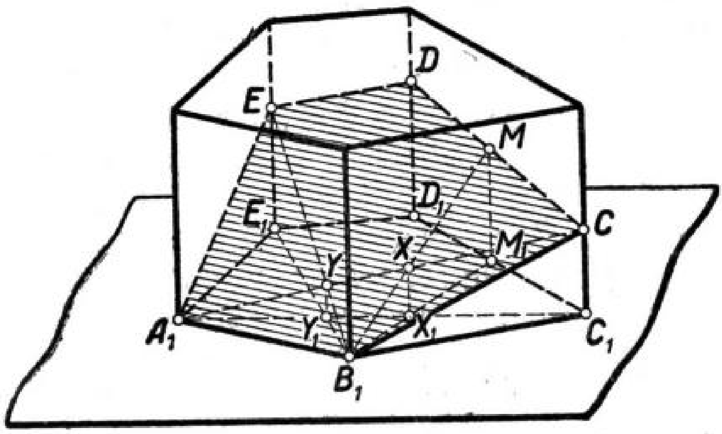
Из условия задачи следует, что точка M может быть на любой из четырех граней, не содержащих стороны A_1B_1.

Задача решалась по следующему плану:

1) Нахождение линии пересечения плоскости A_1CC_1 и B_1MM_1. (XX_1 есть линия пересечения этих плоскостей.)

2) Нахождение линии пересечения плоскостей B_1EE_1 и A_1CC_1. (YY_1 есть линия пересечения этих плоскостей.)

Полученные точки E и C на ребрах EE_1 и CC_1 дали возможность провести линию пересечения искомой плоскости с гранями призмы. Решение задачи дало сечение A_1EDCB_1.



Черт. 24

Для того чтобы создать навык свободной ориентировки учащихся в построениях, следует длительнее остановиться на пространственных задачах на построение с помощью проекционного чертежа. Учащиеся приобретают при этом навык придумывать такие же задачи.

Одна ученица X класса 113-й школы так рассказывает в математической газете о том, как она училась решать задачи на построение с помощью проекционного чертежа:

„Когда мы были еще в IX классе и нам сказали о том, что мы будем решать задачи на построение в стереометрии с помощью проекционного чертежа, что проекционный чертеж поможет нам решать эти задачи так же, как задачи на построение в планиметрии, мы решили, что это очень трудно.

Первые задачи мы решали с помощью учительницы и, вопреки ожиданию, они решались очень легко. Но когда нам дали в классе решить новую задачу самостоятельно, то ее решили не все. На этом же уроке нам опять разъяснили ее решение. У меня задача эта вышла, но я над ней потрудилась.

Потом стали чаще и чаще давать самостоятельно решать задачи и решать стало легче. Мне хотелось научиться самостоятельно решать всякую задачу. Я стала придумывать задачи: брала несколько многогранников и строила сечения по одинаковому условию. Иногда брала одну и ту же призму и рисовала ее в разных положениях. Условие брала одно и то же. Это мне очень помогло хорошо видеть линии пересечений.

Вот однажды мне предложили с решением задач выступить на школьном математическом кружке. Я решила взять три задачи и предварительно потренироваться в их решении. Задачи выходили, ну, думаю, разберусь в решении. Вот наступило мое выступление. Руки дрожали и видно было, что я волнуюсь. Вот я заканчиваю решение последней задачи, сечения все сошлись. Неужели не поняли сидящие? Нет, поняли, потому что никто не задал мне вопроса. Только я хотела садиться на место, как встал один ученик и говорит: „Может быть Вы решите мою задачу?“ Я испугалась, подумав, что он может дать такую задачу, которую мы не умеем решать. Я согласилась решить. Помню мне дали такую задачу: „провести сечение в семиугольной пирамиде через точку на одном боковом ребре, точку на противолежащей грани и точку вне пирамиды“. Задачу я решила без затруднения. После этого выступления я почувствовала уверенность в своих силах и мне хотелось находить более хороший путь в решении, поэтому одну и ту же задачу я стала решать по-разному. Чтобы добиться хорошего решения задач, мало стараться решать задачи самостоятельно, а если они не выходят, то спросить, как решается, но обязательно после этого еще раз или два решить эту же задачу самостоятельно. После этих задач, задачи на вычисление кажутся легкими“.

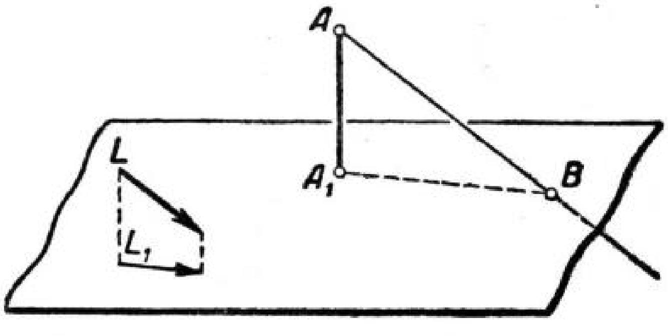
Аккуратное выполнение решений дает возможность добиться действенных результатов в задачах с пространственными образами.

Когда приемы решения задач с помощью внутреннего проектирования и прием решения задач на построение с помощью следа секущей плоскости на основной хорошо освоены, тогда учащиеся могут делать выбор того или другого приема в зависимости от условий задачи. Целесообразный выбор проектирующих плоскостей облегчает построение, поэтому важно на первых шагах проводить рассуждение: какие пары плоскостей можно взять и какие из возможных — лучше.

В сложных чертежах удобно пользоваться цветным мелом. Это облегчает чтение чертежа.

Теперь остановимся на практических задачах по определению *теней* от предметов. Эти задачи легко решаются с помощью проекционного чертежа, и приступили мы к их решению после того, как по теории были проработаны теоремы о перпендикуляре и наклонных к плоскости.

Начали с решения простейшей задачи на нахождение тени от вертикально поставленного шеста. Шест изображался на чертеже вертикальным отрезком $A(A_1)$. Поверхность земли принималась за основную плоскость и изображалась так же, как в предшествующих задачах. Для решения задач на тени в условии должно быть задано направление луча света и его проекции на основную плоскость. При этом имеется в виду солнечное освещение, при котором тело освещается пучком параллельных лучей (черт. 25). L — есть один из таких лучей. L_1 — его проекция на основную плоскость (подробно вопрос о тенях изложен в книге проф. Н. Ф. Четверухина, Стереометрические задачи на проекционном чертеже, часть 1, § 8).



Черт. 25

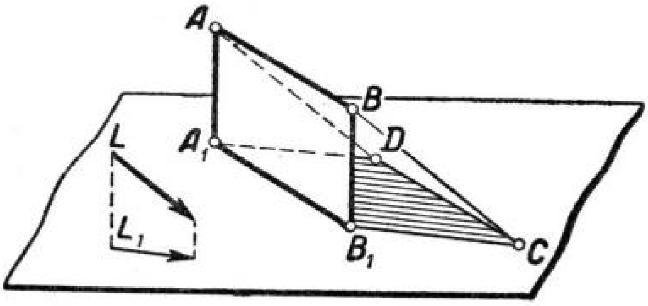
При решении этой задачи преподаватель разбирает с учащимися зависимость положения точки B на основной плоскости от направления луча света L. Преподаватель напоминает учащимся о том, что условия задачи обеспечивают выполняемость ее на чертеже.

Если кто-нибудь из учащихся получил точку B — пересечение луча света с его проекцией, проходящей через точку A_1, — за листом тетради, то следует изменить направление луча света.

Далее перешли к решению более сложной задачи: найти тень от прямоугольной стенки при заданном направлении луча света.

Учащихся не затруднило изобразить вертикальную прямоугольную стенку в виде проектирующей плоскости. Один из учащихся даже предложил на проектирующую плоскость смотреть, как на след, полученный от движения проектирующей прямой $A(A_1)$ параллельно самой себе. При движении проектирующей прямой происходит движение тени.

Учащиеся быстро сообразили, что для решения этой задачи следует найти тени от проектирующих прямых $A(A_1)$ и $B(B_1)$, и тени от точек A и B на основной плоскости соединить (черт. 26).

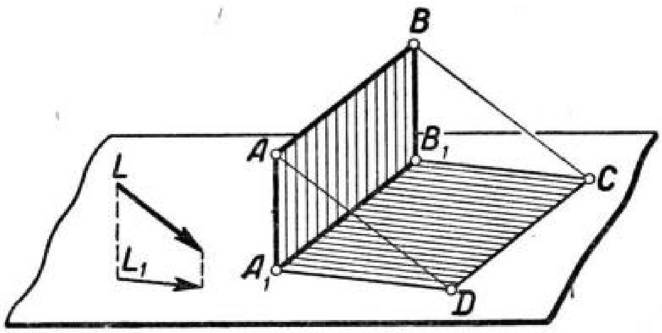


Черт. 26

В результате решения задачи получилась тень A_1DCB_1 (ее видимая часть заштрихована).

После первого знакомства с элементарными задачами на тени и закрепления их решения на задачах, составленных самими учениками, дано было понятие о собственной тени предмета и о падающей тени. Понятие это давалось при решении такой задачи, где направление луча света дало на предмете собственную тень.

Была дана задача: Построить тень от вертикальной стенки при заданном направлении луча света (черт. 27). Тень, полученная от



Черт. 27

проектирующей плоскости $AB(B_1A_1)$ на основной плоскости, — A_1B_1CD есть падающая тень. Тень на самой проектирующей плоскости — есть собственная тень.

В решениях дальнейших задач на тени требовалось построение той и другой тени.

Задачи на тени решались учащимися с большим интересом, и много задач было составлено самими учащимися.

Вот какие задачи придумывали учащиеся:

1. Построить тень от шеста, опирающегося одним концом в вертикальную стенку, другим в землю.

2. Построить тень от треугольной пластины, опирающейся основанием на землю, а противоположной вершиной на вертикальный шест.

3. Построить тень от прямоугольного щита, опирающегося противоположными сторонами на землю и вертикальную стенку.

4. Построить тень от щита, имеющего вид трапеции. Щит опирается нижним основанием на землю и подпирается шестом.

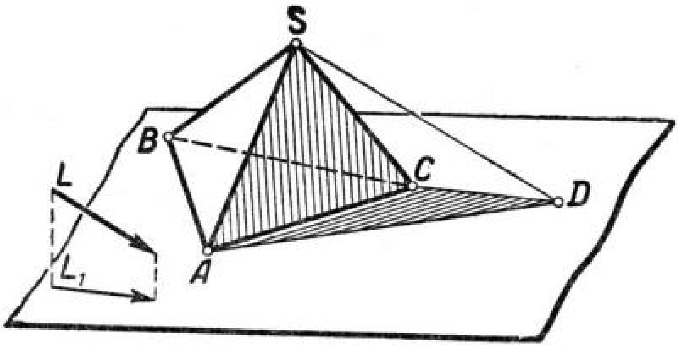
5. Найти тень от беседки, имеющей вид пятиугольной прямой призмы.

6. Найти тень от палатки, представляющей собою треугольную пирамиду.

Во всех этих задачах задано направление луча света.

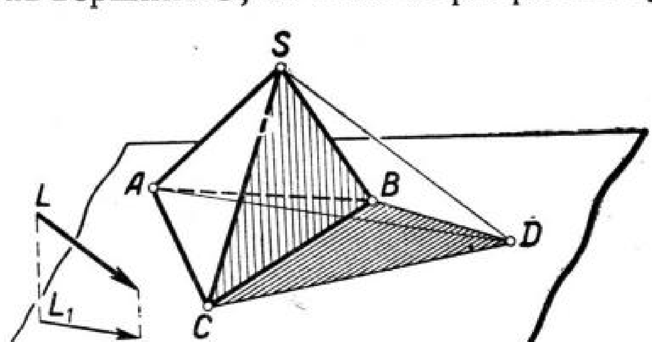
При проверке домашних задач на тени ошибок встречалось немного, большинство из имеющихся ошибок заключалось в отсутствии обозначения пунктиром линий, закрытых плоскостью. Все же у отдельных учащихся были ошибки в построении.

Например, в задаче: построить собственную и падающую тени пирамиды $SABC$ при заданном освещении $L(L_1)$ (эта задача взята из книги проф. Н. Ф. Четверухина, 1 ч.) (черт. 28).



Черт. 28

Ученица А. решала ее так: нашла тень от ребра SC пирамиды. Это отрезок CD. Далее она соединила точку A с точкой D, считая, что если D есть тень вершины S, то тень от ребра SA будет отрезок AD.

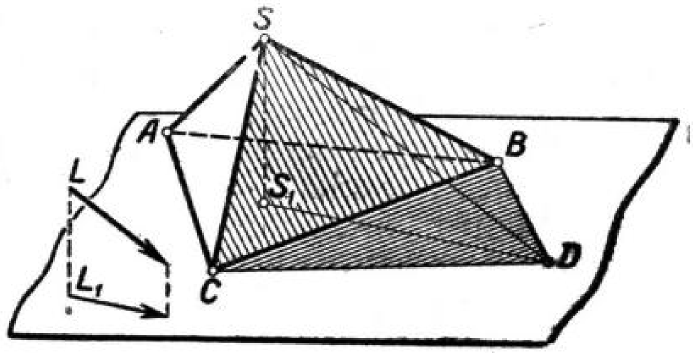


Черт. 29

Другая ученица У. так решала эту задачу: она нашла тень от ребра SA и тень от точки S, т. е. точку D соединила с точками B и C (черт. 29).

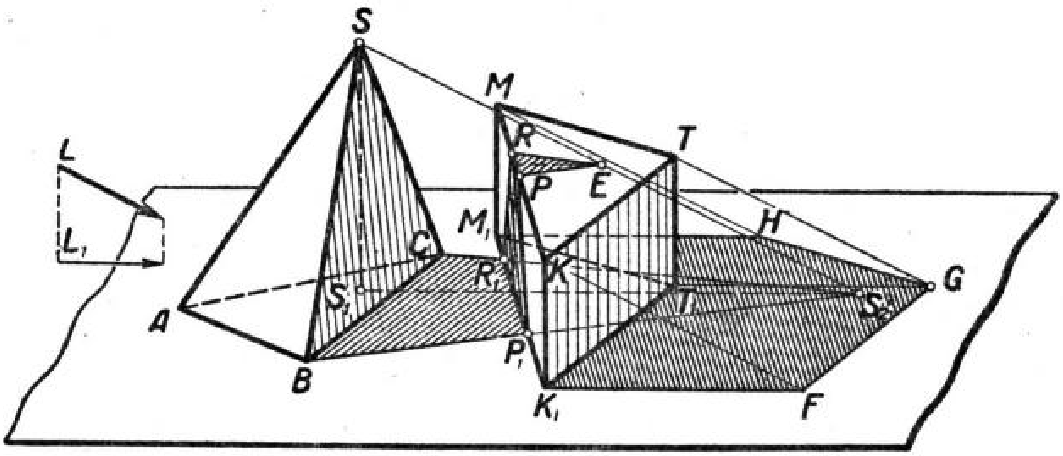
Ошибки той и другой ученицы заключались в том, что они не взяли на чертеже проекции вершины пирамиды (проекции точки S) на основную плоскость. Поэтому изображение не было полным.

Верное решение этой задачи изображено на чертеже 30.



Черт. 30

Учащиеся, интересующиеся математикой, с большим интересом решали в математическом кружке более сложные задачи, например, такие (черт. 31).



Черт. 31

Собственная тень пирамиды SBC.

Падающая тень пирамиды BP_1PERR_1C.

Задачи на тени без затруднения решаются массой учащихся. Хорошее выполнение построения теней вызывает эстетическое наслаждение учащихся.

Учащиеся придумывают разнообразное положение тел и направление луча света. У одного всегда не так, как у другого. Это обстоятельство обеспечивает самостоятельность в работе каждого и поднимает интерес к изучению геометрии.

ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ В 29-й ЖЕНСКОЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ ФРУНЗЕНСКОГО РАЙОНА МОСКВЫ

(*преподаватель М. Х. Кекчеева*)

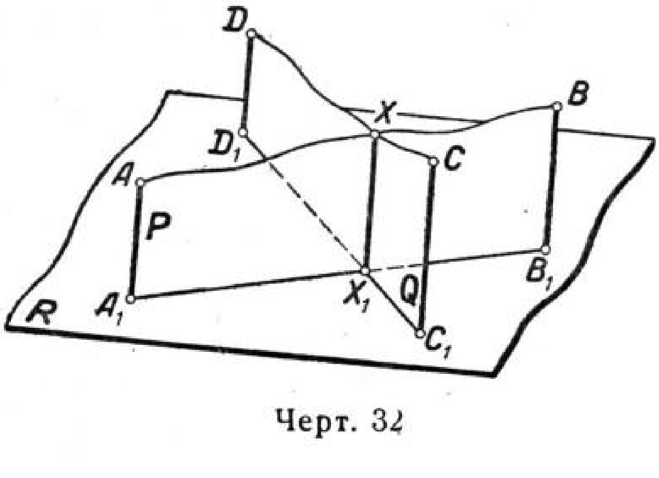
Прежде чем приступить с учащимися 29-й школы к решению задач на построение при помощи проекционного чертежа, я провела большую подготовительную работу. Я ознакомилась с серией пространственных построений и задач, с приемами построения проекционных чертежей, предложенных нам проф. Н. Ф. Четверухиным, под руководством которого проводилась описанная мною работа, перерешала большое количество задач, выполнила все необходимые чертежи, подготовила объяснение к каждой задаче с подробной записью построения и доказательства, составила календарный план работы, подобрала задачи в соответствии с темами программы школы по стереометрии, составила методическую записку к применению чертежей-моделей в курсе стереометрии.

Я придерживалась того порядка прохождения материала, который соответствует программе и учебнику.

С первых уроков стереометрии я ознакомила учащихся со способом изображения точек пространства. Учащиеся познакомились с терминами „основная плоскость", „проектирующие прямые", „проектирующая плоскость". Они узнали, какая точка считается заданной, и что, пользуясь заданными точками, можно задавать прямые и плоскости.

В связи с этим учащимся давался ряд самостоятельных упражнений, из которых учащиеся узнали, что любая точка заданной прямой или заданной плоскости является заданной. Учащиеся, таким образом, стали строить фигуры, имея заданные точки, прямые и плоскости. Порядок решения задач указан в моей статье „Из опыта решения стереометрических задач на проекционном чертеже" в журнале „Математика в школе", № 5, 1948 г. Новый материал давался мною с подробным объяснением, записью и тщательным выполнением чертежа. Приведу решение одной из первых задач.

Задача. Даны две проектирующие плоскости P и Q. Найти линию их пересечения (черт. 32).



Черт. 32

Построение

1) Проектирующая плоскость P определяется проектирующими прямыми AA_1 и BB_1, а проектирующая плоскость Q — проектирующими прямыми CC_1 и DD_1.

2) Находим точку X_1 пересечения следов A_1B_1 и C_1D_1 данных плоскостей P и Q.

3) Проводим через точку X_1 проектирующую прямую XX_1.

Доказательство

1) $XX_1 \subset$ пл P, так как $XX_1 \parallel AA_1$.

2) $XX_1 \subset$ пл. Q, так как $XX_1 \parallel CC_1$.

3) $XX_1 =$ пл. $P \times$ пл. Q.

Задачи предлагались учащимся для самостоятельного решения под моим руководством и для домашней работы.

Учащиеся получали представление о „полноте“ чертежа и проверяли это свойство полноты на каждом чертеже.

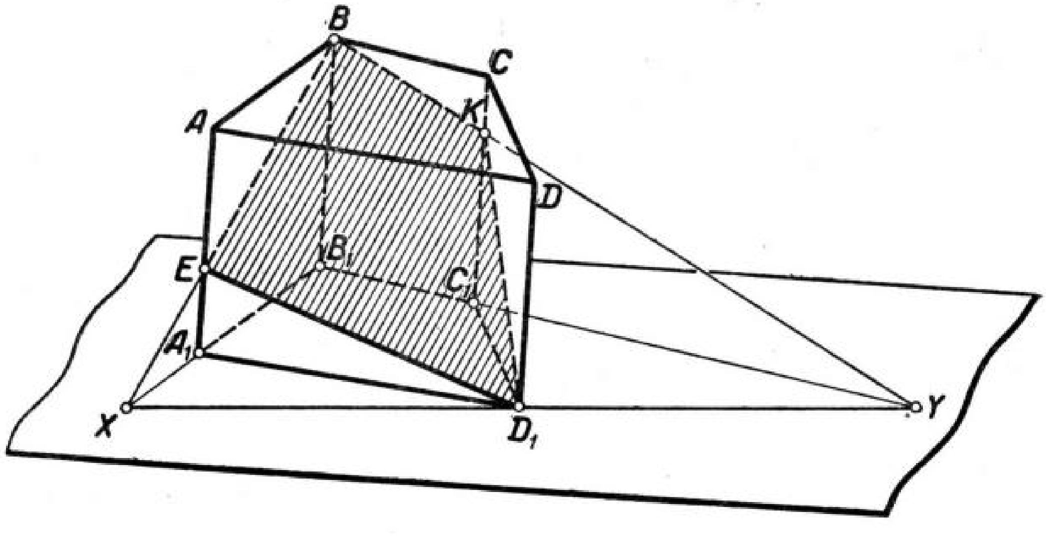
Применяя проекции точек на основную плоскость, учащиеся решали задачи на построение сечений в призме и пирамиде, продолжая эту работу в X классе.

Учащимся были показаны два пути решения: 1) при помощи нахождения следа искомой плоскости на основной плоскости и 2) при помощи нахождения линии пересечения проектирующих плоскостей при внутреннем проектировании.

Учащиеся уяснили, что общий принцип построения сечений призмы на проекционных чертежах заключается в том, что сечение призмы, плоскостью для полного изображения можно задавать тремя точками и искать на какой-либо проектирующей четвертую точку, причем эти три точки могут быть заданы на ребрах призмы, на ее гранях, одна из точек может быть задана на плоскости основания внутри или вне призмы и различные комбинации из указанных случаев.

Приведем решение задачи нахождением следа искомой плоскости на основной.

Задача. Построить сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через ее вершины B и D_1 и точку E, взятую на ребре AA_1 (черт. 33).



Черт. 33

Построение

Для построения всего сечения найдем на проектирующей прямой CC_1 четвертую точку K_1.

1) Соединяем точку E с точкой B.

2) Находим точку X пересечения прямой BE с основной плоскостью.

3) Через точки X и D_1 проводим прямую и находим точку Y пересечения ее с продолжением стороны B_1C_1.

4) Соединив точку B с точкой Y, находим четвертую точку

$$K = BY \times C_1C.$$

Приводим решение этой же задачи способом внутреннего проектирования (черт. 34).

Построение

Выберем основание призмы в качестве основной плоскости, а ребра призмы в качестве проектирующих.

Для изображения всего сечения следует построить его точку на ребре CC_1, т. е. найти точку K пересечения плоскости BED_1 с проектирующей CC_1. Для этого находим:

$$O_1 = A_1C_1 \times B_1D_1,$$

проводим $OO_1 \parallel AA_1$ и строим точку O:

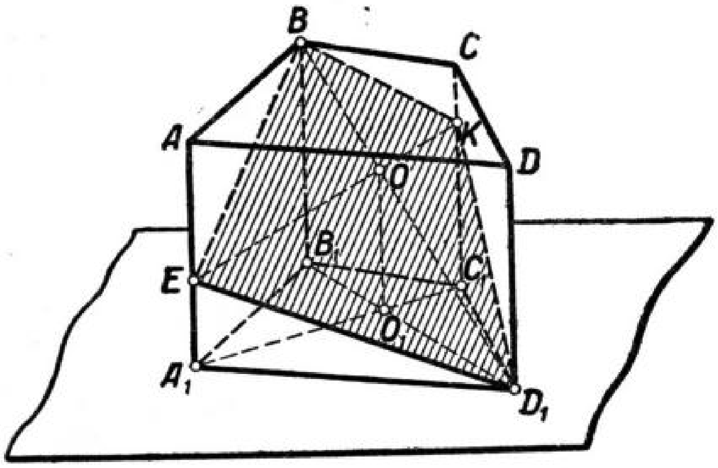
$$O = BD_1 \times OO_1,$$

и, наконец, находим точку K:

$$K = EO \times CC_1.$$

После решения задач на сечения призмы учащимся была дана контрольная работа для выяснения степени понимания ими поставленной задачи.

Привожу варианты этих задач.



Черт. 34

I

Дана четырехугольная призма и три точки на трех ее ребрах. Найти след сечения на плоскости основания.

II

Дана четырехугольная призма. Построить сечение через сторону основания и точку на боковом ребре.

III

На гранях четырехугольной призмы даны точки K, L и M. Требуется построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки K, L и M.

IV

Построить сечение четырехугольной призмы плоскостью, для которой даны: след ее на плоскости основания и точка на ребре.

После решения задач на сечения призмы, учащиеся перешли к решению задач на сечения пирамиды.

Учащиеся уяснили, что пирамида является фигурой, обладающей свойством „полноты". Параллельное проектирование на основную плоскость заменяется центральным проектированием.

Далее следует целый ряд задач на сечение пирамиды.

В результате этой работы учащимся была дана контрольная работа.

Приводим ее текст (четыре варианта).

I

Дана четырехугольная пирамида, в которой заданы три точки на трех ее гранях. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через эти точки.

II

Дана треугольная пирамида. Требуется построить сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S, точку, лежащую в плоскости основания, и точку, лежащую по боковой грани.

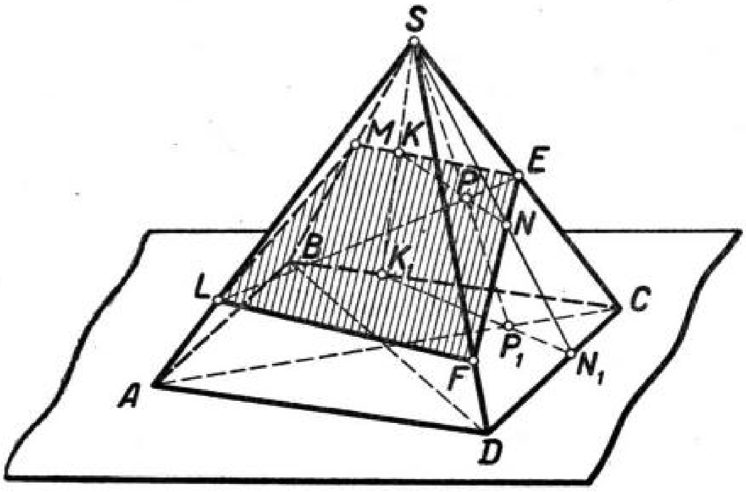
III

В четырехугольной пирамиде провести сечение плоскостью, проходящей через три точки, из которых две лежат на гранях и одна на ребре пирамиды, не принадлежащем этим граням.

IV

Дана треугольная пирамида и три точки: одна на основании пирамиды, другая на ее ребре и третья на боковой грани. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через три данные точки.

Привожу чертеж решения задачи III варианта (черт. 35).



Черт. 35

Учащимся также предлагалось построить след сечения на плоскости основания.

Варианты задач на сечения призмы и пирамиды очень разнообразны. Много задач было придумано самими учащимися. Приведем, например, задачи, придуманные учащимися.

Ученицей Климентовой:

„Дана шестиугольная призма и три точки: одна на нижнем основании, а две другие на боковых ребрах призмы. Провести сечение плоскостью, проходящей через эти три точки".

Ученицей Ворониной:

„В правильной четырехугольной пирамиде построить сечение плоскостью, проходящей через середины смежных ребер основания и середину высоты".

Кроме задач на сечение, учащиеся также решали другие позиционные задачи, как, например:

„Дано изображение пирамиды $SABC$ и прямой DE, пересекающей пирамиду в точках D и E. Построить точку пересечения прямой DE с плоскостью основания".

Учащимся предлагается такая же задача в приложении к призме.

Более сложные задачи решались на кружковых занятиях, так, например:

„На изображении имеем треугольную пирамиду $SABC$ и проектирующую плоскость, определяемую точками $(P(P_1)$ и $Q(Q_1)$. Построить линию пересечения плоскости PQQ_1P_1 с пирамидой".

Так учащиеся фактически производили построения и находили искомые элементы на чертеже и постепенно усваивали метод решения задач на построение с помощью проекционного чертежа и развивали свое пространственное представление и конструктивные навыки.

В заключение следует сказать, что приведенный опыт работы двух школ охватывает лишь позиционные задачи.

Что касается метрических задач, то следует отметить, что они стоят в плане работы этих школ, и опыт этой работы будет освещен в дальнейшем.

Время, отведенное на решение задач на проекционном чертеже, расходовалось за счет сокращения числа мало полезных задач на непосредственное вычисление поверхностей, объемов и т. п. Это время вполне окупается той большой пользой, которую приносит учащимся решение задач на проекционном чертеже. Решение таких задач действительно развивает пространственные представления и воображение учащихся и, в силу фактического выполнения, создает более твердые навыки при изучении стереометрии.

Систематическое обращение к проекционному чертежу особенно помогает слабым ученикам разбираться в пространственных фигурах и мысленно оперировать в пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проф. Четверухин Н. Ф., Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, 1946.

2. Его же, Стереометрические задачи на проекционном чертеже, изд. АПН, М.—Л., 1947.

3. Его же, Стереометрические задачи на проекционном чертеже, ч. II. Метрические задачи, изд. АПН, М.—Л., 1948.

4. Его же, Стереометрические задачи на проекционном чертеже, журн. „Математика в школе", № 2 за 1946 г.

5. Его же, Позиционные задачи в курсе стереометрии, журн. „Математика в школе", № 3 за 1946 г.

6. Кекчеева М. Х., Из опыта решения стереометрических задач, журн. „Математика в школе", № 5 за 1948 г.

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
38	25 — 26 сверху	полное их отсутствие и неумение ответить подчас на почти простой вопрос	почти полное их отсутствие и неумение ответить подчас на простой вопрос
49	14 снизу	Некоторые выводы в преподавании геометрии	некоторые выводы о преподавании геометрии.

Известия Академии педагогических наук РСФСР, № 21