Д. Галанинъ.

НАЧАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

ВЪ СВЯЗИ СЪ ПРОПЕДЕВТИЧЕСКИМЪ КУРСОМЪ ГЕОМЕТРІИ.

Цѣна 75 коп.

МОСКВА.

Изданіе магазина „СОТРУДНИКЪ ШКОЛЪ“
А. К. Залѣсской.
Воздвиженка, домъ Армандъ.
1912.


Д. Галанинъ.

НАЧАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

ВЪ СВЯЗИ СЪ ПРОПЕДЕВТИЧЕСКИМЪ КУРСОМЪ ГЕОМЕТРІИ.

МОСКВА.
Изданіе магазина „СОТРУДНИКЪ ШКОЛЪ“
А. К. Залѣсской.
Воздвиженка, домъ Армандъ.
1912.

МОСКВА.
Типографія П. П. Рябушинскаго, Страстной бульв., соб. домъ.
1912.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Предлагаемый курсъ алгебры составляетъ одно цѣлое съ моимъ курсомъ ариѳметики, изложенное въ методическомъ видѣ. Въ нормальной школьной системѣ средняя школа должна составлять продолженіе низшей, хотя каждая имѣетъ законченный характеръ. Въ низшей школѣ долженъ быть законченъ пропедевтическій курсъ ариѳметики, а въ средней также пропедевтическій курсъ алгебры. И тотъ, и другой курсъ не должны быть разбиты на спеціальныя ячейки, какъ это существуетъ въ настоящее время, а должны объединяться около общей математической идеи. Для не спеціалиста ученаго, а для обыденнаго человѣка нѣтъ отдѣльныхъ предметовъ: ариѳметика, алгебра, геометрія, тригонометрія, а есть, и должна быть, только математика. Предметъ обученія математики долженъ обнимать собою всю совокупность идей числа, дѣйствія и функціональной зависимости. Здѣсь долженъ быть міръ въ числахъ, т.-е. развитіе тѣхъ логическихъ процессовъ, которые охватываются сознаніемъ, какъ измѣряемыя величины, и изученіе свойствъ величинъ составляетъ сущность, внутреннее содержаніе, какъ начальнаго, такъ и средняго обученія. Съ этой точки зрѣнія математика не можетъ и не должна быть оторвана отъ жизни, а должна войти въ жизнь, какъ ея необходимая составная часть. Говоря иначе, я думаю, что глубоко правъ былъ Амосъ Каменскій, представляя себѣ человѣка, какъ микрокосмъ, могущій все знать и все постичь. Несмотря на то, что развитіе науки дробитъ ее на все болѣе и болѣе мелкія спеціальности, несмотря на то, что ученые не въ состояніи освѣтить въ настоящее время даже всего отдѣла, а должны по необходимости разрабатывать только частности, мелкія подробности общаго ученія, несмотря на это, первые шаги человѣка должны охватывать все знаніе во всемъ цѣломъ. Въ это цѣлое входитъ ученіе о величинахъ, т.-е. геометрія, измѣрительная часть физики, механики и астрономіи. Такъ рисуется программа обученія, если исходить изъ общихъ педагогическихъ возрѣній Коменскаго; но такъ же рисуется она, если за исходную точку построенія курса взять современныя психологическія теоріи познаванія. Среди этихъ теорій наибольшаго вниманія со стороны педагогики заслуживаетъ теорія ассоціацій. Согласно этой теоріи всякій новый элементъ познаванія долженъ связываться съ существующими элементами самосознанія и сопровождаться такимъ ансамблемъ впечатлѣній и чувственныхъ образовъ, которые бы въ самихъ себѣ содержали возможности дальнѣйшаго углубленія. Въ видѣ примѣра я разсмотрю счетъ. Когда ребенокъ считаетъ ряды разнообразныхъ предметовъ, то въ этихъ предметахъ у него нѣтъ чувственныхъ воспріятій количества, а есть только свойства, принадлежащія сосчитываемымъ предметамъ. Если онъ измѣряетъ длины, вѣса, объемы и проч., то въ самомъ процессѣ измѣренія уже недержатся ассоціаціи, изъ которыхъ вытекаетъ идея дѣйствія и идея функціональной зависимости. Когда ко 2-мъ кубикамъ счетнаго ящика прикладываютъ еще 3, то этотъ актъ приложенія не содержится въ свойствѣ кубиковъ и не вытекаетъ изъ этихъ свойствъ, а всецѣло обусловливается волей учителя и вытекаетъ изъ его желанія увеличить число кубиковъ. Но когда вмѣстѣ съ объемомъ взятой воды, увеличивается и вѣсъ, то это увеличеніе вѣса есть свойство воды и не находится ни въ какой зависимости учителя. Когда ребенокъ измѣряетъ длину ленты, то результатъ измѣренія коренится въ свойствахъ протяжимости ленты и это свойство тѣсно и прочно ассоціируется съ числомъ. Отсюда ясно, что число, полученное изъ счета кубиковъ, будетъ имѣть совершенно иное психологическое содержаніе, чѣмъ число, полученное отъ измѣренія ленты, отъ измѣренія объемовъ, вѣсовъ и т. п. Первыя числа не содержатъ психическихъ воспріятій величинъ, вторыя являются слѣдствіемъ изученія свойствъ величинъ, а эти свойства приводятъ мысль человѣка къ идеѣ дѣйствія и зависимости.

Я взялъ только примѣръ изъ котораго ясно, что новое изученіе даетъ иныя, болѣе важныя психологическія ассоціаціи, чѣмъ современное. Но, чтобы еще болѣе выяснить свою точку зрѣнія, я возьму еще примѣръ. Приступая къ изученію алгебры, ученикъ знакомится съ одночленомъ. Что такое одночленъ? Это есть искусственно построенное алгебраическое выраженіе, оторванное совершенно какъ отъ жизни, такъ и отъ предыдущаго ариѳметическаго курса. Выраженіе, необходимо—нужное для школы и совершенно лишнее дома. Одночленъ состоитъ изъ буквъ, передъ которыми стоитъ цифра, а вверху у буквъ также стоятъ цифры. Первая цифра называется коэффиціетномъ, и вторыя — показателемъ степени. Говорятъ, что каждая изъ этихъ цифръ имѣетъ свое особое значеніе, которое надо запомнить и кромѣ того, надо запомнить рядъ дѣйствій съ этимъ страннымъ алгебраическимъ выраженіемъ, которое даже не встрѣчается въ задачахъ. Отвлекитесь на минуту отъ своего математическаго образованія и представьте себѣ одночленъ такъ, какъ онъ долженъ рисоваться ребенку, и вы почувствуете полную пустоту тѣхъ ассоціацій, изъ которыхъ могло бы быть добыто это понятіе. Оно можетъ ассоціироваться съ классной доской, личностію учителя, съ учебникомъ, но его нѣтъ ни въ предыдущемъ опытѣ жизни, ни въ чемъ либо, сопровождающимъ его введеніе въ курсъ.

Если вы это себѣ представите ясно, то вамъ будетъ понятно и то, что дѣти плохо понимаютъ правило приведенія подобныхъ одночленовъ; они запоминаютъ его и забываютъ, и когда вы доходите до дѣленія, то въ головѣ получается каша, изъ которой трудно выдѣлить подходящее знаніе; ученіе алгебры, анализъ, мысль — все пропало; остались трудныя формулы, непонятныя дѣйствія, какіе-то ребусы и загадки. Но тотъ же одночленъ получается въ физикѣ, какъ слѣдствіе функціональной зависимости величинъ, напримѣръ законъ Ньютона выражается формулой $\frac{m.\,m.}{d^2}$; здѣсь каждая буква полна скрытаго значенія, имѣетъ свою характеристику и чувственныя воспріятія. Разберемъ доступную и для дѣтей формулу $m = v.\, d.$, гдѣ m есть масса, количество вещества: (здѣсь рисуется стаканъ воды, коробочка съ пескомъ, кирпичъ или что-либо подобное), v есть объемъ, чувственно воспринимаемый и хорошо представляемый; но вотъ d—плотность; это понятіе производное, его надо добыть и выяснить. Однако это выясненіе не такъ страшно; но разъ вы его достигли, разъ ребенокъ хорошо почувствовалъ, что количество вещества въ тѣлѣ вполнѣ соотвѣтствуетъ произведенію его объема на то, сколько вещества въ единицѣ объема, то передъ нимъ живой одночленъ съ его индивидуальной характеристикой и свойствами. Достичь этого живого представленія алгебраической формулы и составляетъ задачу обученія. Это возможно сдѣлать только изучая свойства величинъ, т.-е. производя опыты, изслѣдуя эти свойства, измѣряя ихъ.

Простѣйшимъ и наиболѣе доступнымъ предметомъ измѣренія, я считаю плоскую фигуру, изъ которой уже по моему мнѣнію создается пространственное представленіе геометрическаго тѣла.

Въ силу этого, въ начальный курсъ обученія ариѳметикѣ я ввожу геометрію, какъ изученіе плоскихъ фигуръ и свойствъ этихъ фигуръ, обосновывая все это на непосредственномъ сравненіи вырѣзанныхъ изъ бумаги фигуръ и ихъ перегибаніи. Въ основу изученія я ставлю измѣреніе площадей и длинъ. Простѣйшей фигурой считаю квадратъ, потомъ прямоугольникъ, изъ которыхъ уже получается треугольники. Затѣмъ идетъ окружность, вписанные многоугольники, измѣреніе угловъ и площадей. Время отъ времени изъ плоскихъ фигуръ получаются пространственныя формы: призмы, пирамиды, цилиндръ, конусъ. Такимъ образомъ, по моему проекту, ученикъ въ начальномъ обученіи уже знакомъ съ равенствомъ треугольниковъ, геометрической номенклатурой: высота, основаніе радіусъ, діаметръ, хорда, уголъ и проч. и проч. Онъ опытнымъ путемъ знаетъ свойства многихъ фигуръ, умѣетъ обращаться съ циркулемъ и рѣшать простѣйшія задачи на построенія. Однако къ изученію протяженій онъ приступаетъ не непосредственно, а проходя черезъ особый измѣрительный курсъ, въ которомъ онъ измѣряетъ объемы, взвѣшиваетъ, измѣряетъ длины аршиномъ и футомъ, знакомится съ сантиметромъ и литромъ. Все это я изложилъ въ напечатанномъ курсѣ методики, которая охватываетъ пока первые два года обученія, а въ ближайшемъ будущемъ собираюсь напечатать еще 3 года обученія, которыя свяжутъ начальный курсъ со среднимъ. Первымъ годомъ средняго обученія и будетъ предлагаемая книга.

Въ основу курса я положилъ всестороннее изученіе функціональной зависимости величинъ и способы ея математическаго изученія. Среди выраженій этой зависимости простѣйшее будетъ пропорціональность; и вотъ я думаю, что пропедевтическій курсъ средней школы долженъ быть объединенъ около этой идеи. Въ то время, какъ въ начальномъ курсѣ основной идеей должно быть равенство, въ этой части курса — пропорціональность. Изученіе понятія пропорціональности требуетъ введенія новаго математическаго термина — отношеніе. Мнѣ кажется, что изученіе свойствъ отношеній должно занять наиболѣе видное мѣсто въ начальномъ курсѣ и должно быть пополнено геометрическими примѣрами.

Не затрудняя вниманія читателя изложеніемъ многихъ особенностей въ изложеніи предмета, я скажу только слѣдующее. Новое построеніе курса въ высшей степени трудно, и если я рѣшился на такой смѣлый шагъ, то только для того, чтобы вызвать критику и разсмотрѣніе вопроса. Мнѣ кажется несомнѣннымъ, что курсъ средней школы долженъ быть переработанъ существенно, будетъ ли эта переработка направлена такъ, какъ я думаю, или совершенно иначе, сказать въ настоящее время ничего нельзя. Но, если не давать примѣровъ построенія курса, то нельзя обсуждать его въ видѣ общихъ положеній; только на фактическомъ курсѣ можно видѣть достоинства и недостатки предлагаемой системы обученія.

Однако это не все; читатель, согласившись со мною въ основной идеѣ, можетъ совершенно быть несогласнымъ въ способѣ ея проведенія.

Объ этомъ я хочу сказать нѣсколько словъ.

Отчасти потому, что у меня еще не напечатанъ полный курсъ начальнаго обученія, отчасти потому, что новое изложеніе потребовало дополнительныхъ подробностей вслѣдствіе новизны построенія курса, все это увеличило размѣръ книги, который въ будущемъ самъ собою сократится. Мнѣ необходима была глава о числахъ и ихъ двоякомъ представленіи: числовомъ и геометрическомъ. Въ этой главѣ я разсматриваю отрицательное число, какъ число противоложное положительному. Мнѣ казалось, что начиная алгебру полезно обобщить въ одно цѣлое добытое ученіе о числахъ, а главное выдѣлить ихъ отъ количествъ, т.-е. отъ измѣренія величинъ. По моему мнѣнію существуетъ принципіальная разница между понятіемъ о дѣйствіи и способомъ его производства. Умноженіе какъ дѣйствіе создаетъ новое число или новое количество, а вычисляется какъ сложеніе равныхъ слагаемыхъ. Вотъ почему послѣ главы о числахъ идетъ глава о количествахъ, дѣйствія надъ которыми уже носятъ совершенно особый характеръ. Я далекъ отъ мысли, что мнѣ удалось прочно обосновать новое ученіе, т.-е. правильно установить тѣ принципіальныя отличія, которыя раздѣляютъ тѣ и другія, и я лишь твердо убѣжденъ въ томъ, что рѣчь объ этомъ должна быть поднята съ первыхъ шаговъ новаго курса. Главный вопросъ въ этомъ состоитъ въ нашемъ правѣ вводить именованнаго множителя. Лично я считаю этотъ вопросъ рѣшеннымъ въ положительномъ смыслѣ, и во всемъ дальнѣйшемъ на основаніи этого рѣшенія вывожу формулы и объясняю ихъ внутреннее содержаніе.

Ставя такимъ образомъ въ основу курса изученіе свойствъ величинъ, я рѣзко подчеркиваю то обстоятельство, что величина измѣняется соотвѣтственно ея свойствамъ; число есть одна изъ возможностей для изученія ея свойствъ, а самыя свойства могутъ быть тогда выражены въ видѣ алгебраической формулы, Чтобы эта возможноснь была яснѣе, я начинаю ея изученіе съ установленія понятія о функціи. Это понятіе всего проще устанавливается на геометрическихъ примѣрахъ, которые я и разсматриваю въ первую очередь. Здѣсь, собственно, можно было бы совершенно опустить вопросъ о построеніи правильныхъ многоугольниковъ, который по моему плану входитъ въ начальный курсъ обученія, но пока этого начальнаго курса еще нѣтъ, то я не нашелъ возможнымъ его изъятіе. По существу я не вижу никакой трудности отъ введенія геометрическихъ поясненій, собственно не понятій, а геометрическихъ образовъ. Образъ центральнаго угла многоугольника ясенъ, ясность его позволяетъ уяснить его числовую величину и его функціональную зависимость отъ числа сторонъ многоугольника. Взаимная зависимость полученныхъ ассоціацій здѣсь важна именно въ томъ отношении, что вызывая въ понятии одна другую, обѣ они уясняютъ сущность основной идеи. Другіе примѣры функціональной зависимости величинъ приведены для того, чтобы съ одной стороοы подкрѣпить уже существующее представленіе, а съ другой расширить его при помощи иныхъ элементовъ. Геометрическое изображеніе функціональной зависимости угловъ многоугольника приводитъ мысль къ представленію предѣла. Это представленіе я оставляю въ сторонѣ, но оно, конечно, очень важно, и о немъ ученики могутъ заговорить.

Выяснять его во всей полнотѣ нѣтъ необходимости, а выясненіе частнаго случая возможно во всей полнотѣ.

Разсматривая количества, какъ нѣчто особое, совершенно отличное отъ чиселъ, я долженъ былъ выдѣлить это различіе въ ученіи о равенствахъ. Здѣсь я привожу аксіомы равенствъ, излагая ихъ по по Эвклиду, но замѣняя слово „величина" словомъ „количество". Педагогически усвоеніе этихъ аксіомъ не является простымъ актомъ познаванія, и современный ученикъ быть можетъ задумается надъ надъ нѣкоторыми изъ нихъ. Въ этомъ отношеніи я долженъ остановиться на одномъ терминѣ, который я взялъ у Эвклида, но который въ настоящее время можетъ показаться неяснымъ. Я разумѣю понятіе о кратности. Дѣло въ томъ, что если признать за умноженіемъ самостоятельное значеніе дѣйствія, при помощи котораго получается новое количество, то отъ этого дѣйствія умноженія надо выдѣлить тотъ случай, когда данное количество повторяется слагаемымъ. Въ первомъ случаѣ геометрическое произведеніе мы должны представить какъ площадь, а во второмъ случаѣ мы находимся на той же линіи, которая изображаетъ данное количество. Въ первомъ случаѣ мы имѣемъ алгебраическій одночленъ, а во второмъ число есть коэффиціентъ.

Понятіе о коэффиціентѣ въ этомъ смыслѣ, мнѣ кажется лучше и правильнѣе, чѣмъ обычное представленіе числа, стоящаго передъ буквеннымъ выраженіемъ. Коэффиціентъ можетъ быть и буквенный, но двѣ формулы $n\ a$, изъ которыхъ въ одной n даетъ кратность a, тогда n коэффиціентъ; и n особое количество, тогда $n\ a$ будетъ новое количество, въ которомъ n не будетъ коэффиціентъ. Напримѣръ, въ механической формулѣ $\frac{16\,t^2}{2}$, число $^{16}/_{2}=8$ будетъ коэффиціентъ, если даетъ кратность времени, и не будетъ коэффиціентомъ, а количествомъ, если оно есть ускореніе. Въ поясненіе этого возьмемъ двѣ формулы $S=\frac{a\,t^2}{2}$ и $t_1=\frac{a\,t^2}{2}$. Въ первой формулѣ мы имѣемъ новое количество — пространство, которое равно произведенію двухъ количествъ $\frac{a}{2}$ — ускоренія и t^2—времени; во второй формулѣ мы имѣемъ время, которое равное нѣкоторой кратности $\frac{a}{2}$ также времени. Слѣдовательно, одно и то же выраженіе $\frac{a}{2}$ можетъ быть и количествомъ и числомъ; въ первомъ случаѣ оно будетъ множителемъ, а во второмъ указателемъ кратности, т.-е. коэффиціентомъ.

Исходя изъ этого опредѣленія коэффиціента, мнѣ кажется становится понятнымъ и терминъ коэффиціентъ пропорціональности, о которомъ я и говорю при его полученіи.

Отдѣливши такимъ образомъ изученіе свойствъ чиселъ отъ изученія свойствъ количествъ, я долженъ былъ показать, что отношеніе и пропорція принадлежатъ количествамъ; а если это такъ, то количества могутъ быть пропорціональными независимо отъ того, сумѣемъ или не сумѣемъ мы ихъ выразить въ числахъ. Чтобы это показать я воспользовался методомъ Эвклида и при его помощи доказалъ основную теорему дѣленія сторонъ угла на пропорціональныя части. Мнѣ кажется, что способъ Эвклида объ опредѣленіи пропорціональности только потому не входитъ въ школьный курсъ, что у него не дано доказательства этой теоремы, которая въ современномъ строѣ легла въ основу подобія треугольниковъ. Сознаюсь, что доказательство можетъ показаться труднымъ и непосильнымъ для учениковъ, тогда его можно пропустить. Болѣе существеннымъ является отсутствіе полноты доказательствъ геометрическихъ теоремъ, гдѣ встрѣчаются ссылки на недоказанныя предварительно свойства фигуръ. Мое личное мнѣніе таково, что эта неполнота не будетъ замѣчена учениками, но я допускаю, что наиболѣе даровитые могутъ предложить вопросы. Если бы ученики прошли проектируемый мною курсъ геометріи въ связи съ ариѳметикою, то эти пробѣлы были бы восполнены въ существенныхъ частяхъ; при отсутствіи такого курса, они являются дефектомъ системы. Насколько существенно важенъ такой дефектъ я не знаю, думаю, что его можетъ всегда исправить преподаватель, согласный со мною въ основной идеѣ. Кромѣ этого дефекта, быть можетъ, наберется и много другихъ незамѣченныхъ мною дефектовъ построенія.

Я буду счастливъ, если предложенная книга вызоветъ обмѣнъ мнѣній среди педагоговъ и критику; еще цѣннѣе будетъ для меня, когда найдутся лица, которые попробуютъ дать ученикамъ въ руки новый учебникъ и подѣлятся со мной своими наблюденіями.

Мнѣ остается сказать еще о процентахъ. Въ первоначальномъ проектѣ я думалъ ввести еще одну главу „Проценты“; но потомъ оказалось, что она сильно увеличиваетъ объемъ книги, которая и безъ того вышла довольно толстой. Такъ какъ эта глава не содержитъ существенно важнаго для идеи и всегда можетъ быть пополнена самимъ преподавателемъ, то я и рѣшилъ ее опустить, разсчитывая вставить въ курсъ, если придется готовить второе изданіе.

Дм. Галанинъ.

ГЛАВА I.

О числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними.

§ 1. Число.

Когда намъ нужно сосчитать нѣкоторую совокупность предметовъ, то мы считаемъ ихъ, прикладывая по одному; напримѣръ, у насъ есть кучка карандашей, и мы считаемъ: одинъ, два, три и т. д. Точно также мы сосчитываемъ число учениковъ въ классѣ, число столовъ и все прочее. Если намъ приходится сосчитать очень большое число предметовъ, то мы сначала отсчитываемъ десятокъ, потомъ еще десятокъ и т. д.; затѣмъ считаемъ число десятковъ. Если этихъ десятковъ будетъ также очень много, то мы собираемъ ихъ въ сотни и считаемъ число сотенъ. Изъ сотенъ составляются тысячи, изъ тысячъ—десятки тысячъ и т. д. Предѣлъ счета неограниченъ. Результатъ сосчитыванія называется числомъ, которое греческій математикъ Эвклидъ опредѣлилъ такъ: *число есть совокупность единицъ.*

Подъ наименованіемъ «число», мы и будемъ въ дальнѣйшемъ представлять себѣ совокупность единицъ и назовемъ его счетнымъ числомъ; оно по самому способу своего полученія есть число цѣлое. Количество единицъ въ данной группѣ мы будемъ называть числовой мощностью этой группы. Напримѣръ, если въ классѣ 40 учениковъ, то число 40 будетъ числовая мощность класса.

§ 2. Нормальный числовой рядъ.

Если мы расположимъ числа въ порядкѣ ихъ полученія, то получимъ рядъ 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. до безконечности, потому что предѣла счета нѣтъ, и чиселъ безконечное множество. Такой рядъ называется нормальнымъ числовымъ рядомъ, а каждое число—членомъ ряда. Члены нормальнаго числоваго ряда обладаютъ слѣдующими свойствами.

1) Рядъ не содержитъ одинаковыхъ членовъ; 2) послѣдовательные члены ряда отличаются другъ отъ друга на единицу; 3) каждое число опредѣляется своимъ положеніемъ, т.-е. мѣстомъ, которое оно въ ряду занимаетъ: число 3 занимаетъ третье мѣсто, 7—седьмое и т. д.; это свойство можно формулировать еще такъ: числовая мощность каждаго члена равна его положенію.

Всѣ эти свойства являются слѣдствіемъ самого способа полученія ряда. Къ нимъ можно добавить еще слѣдующія свойства. Если мы остановимся на какомъ-нибудь числѣ, то всѣ дальнѣйшие члены будемъ называть высшими, а всѣ члены, стоящіе до взятаго числа—низшими. Такъ какъ всѣ члены различны, то изъ двухъ взятыхъ чиселъ всегда одно будетъ высшимъ членомъ, а другое низшимъ. Основное свойство членовъ ряда состоитъ въ томъ, что всякій высшій членъ можно разсматривать какъ сумму двухъ или болѣе низшихъ членовъ. Это свойство является слѣдствіемъ способа полученія ряда, но оно вводитъ въ этотъ способъ новое понятіе—дѣйствіе сложенія; но если мы введемъ въ способъ полученіе членовъ ряда понятіе о дѣйствіи, то вмѣстѣ со сложеніемъ намъ необходимо ввести и обратное ему дѣйствіе—вычитаніе. Тогда можно сказать, что всякій членъ нормальнаго числового ряда можно разсматривать какъ разность нѣкотораго высшаго числа и нѣкотораго низшаго; напримѣръ, 7 есть разность $15-8$.

Эти свойства называются основными свойствами нормальнаго числового ряда.

§ 3. Буквенное обозначеніе. Отрицательныя числа.

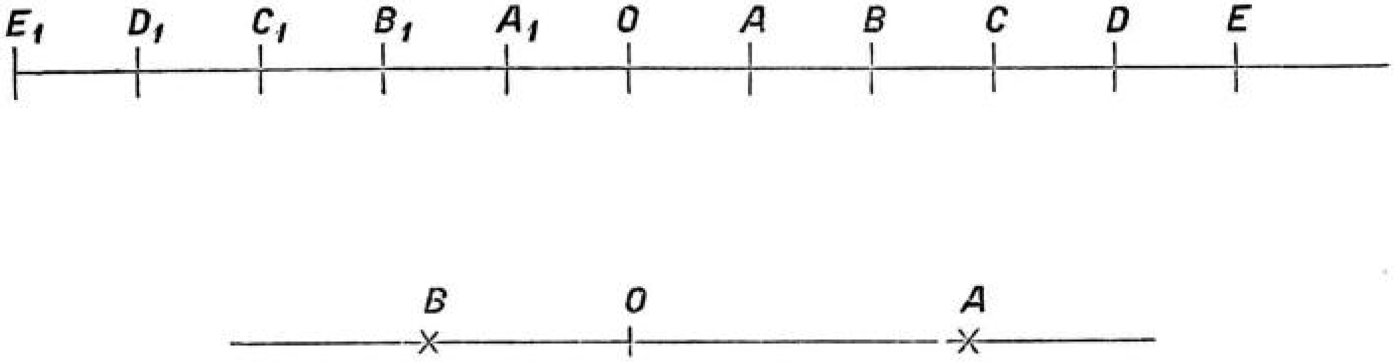
Въ математикѣ условились употреблять буквы латинскаго алфавита для обозначенія выраженія: «какое-нибудь число». Когда нужно сказать: «возьмемъ какое-нибудь число», то вмѣсто этого говоримъ: «возьмемъ число a». Число можно обозначить какой угодно буквой, и обратно буква можетъ быть какимъ угодно числомъ. Такой способъ обозначенія упрощаетъ рѣчь и позволяетъ выразить короче какое-либо свойство чиселъ, если это свойство принадлежитъ всѣмъ числамъ. Такъ, напримѣръ, вмѣсто того, чтобы сказать, что отъ перестановки мѣстъ слагаемыхъ сумма не измѣняется, мы можемъ написать $a+b=b+a$, и это алгебраическое выраженіе вполнѣ точно замѣняетъ словесное выраженіе свойства суммы. Точно также, всякое четное число мы можемъ записать въ видѣ $2\ m$, а нечетное $2\ m—1$. Такая запись опять вполнѣ точно замѣняетъ слова: «четное число», «нечетное число».

Возьмемъ теперь два какихъ-либо члена ряда и обозначимъ ихъ буквами a и b; если бы это были числа, то мы сейчасъ же могли бы сказать, какое изъ нихъ будетъ высшимъ, и какое низшимъ членомъ ряда; но въ буквенномъ обозначеніи мы лишены этой возможности, а потому замѣнимъ ее слѣдующимъ разсужденіемъ. Если изъ a можно вычесть b, то a будетъ высшій, а b—низшій членъ ряда. Такая замѣна позволяетъ расширить самое понятіе о членахъ ряда и ввести въ него новые члены. Положимъ, что $a=15$, $b=8$; тогда изъ 15 можно вычесть 8 и a будетъ высшимъ членомъ, а b—низшимъ. Но если $a=8$ и $b=8$; тогда разность $a—b$ условились обозначать цифрой 0 и помѣщать ее въ самомъ началѣ ряда, такъ что при этомъ условіи нормальный числовый рядъ будетъ начинаться не съ единицы, а съ нуля; онъ будетъ 0, 1, 2, 3 и т. д. Но, возможно, что $a=5$, и $b=7$; тогда мы должны сказать, что b—высшій членъ ряда, и a—низшій, но наша разность есть $a—b$, и мы хотимъ, чтобы a осталось высшимъ членомъ, то нельзя ли показать, что въ этой разности члены a и b занимаютъ обратныя мѣста? Для этого условились обозначать $5—7$ также цифрой 2, только со знакомъ минусъ, пишутъ такъ $5—7=—2$. Сдѣлано такое условіе: если изъ меньшаго числа надо вычесть большее число, то вычитаютъ изъ большаго, меньшее и ставятъ у разности знакъ минусъ. Такія числа называются отрицательными, ихъ также вводятъ въ числовый рядъ, и пишутъ передъ нулемъ налѣво, начиная съ —1, такъ что новый числовой рядъ будетъ безконечность...—10,—8,—7,—6,—5,—4,—3,—2,—1, 0, 1, 2, 3... безконечность.

При этомъ весь рядъ идетъ въ порядкѣ наростанія слѣва направо, потому что въ основу его положено свойство разности: чѣмъ больше вычитаемое, тѣмъ меньше остатокъ, такъ что—20 меньше чѣмъ—5. Числовую мощность называютъ абсолютно величиной числа, тогда свойство отрицательныхъ чиселъ можно формулировать такъ: отрицательное число тѣмъ меньше, чѣмъ больше его числовая мощность; или такъ, отрицательное число тѣмъ меньше, чѣмъ больше его абсолютная величина.

§ 4. Геометрическое представленіе чиселъ.

Очень многіе вопросы математики становятся гораздо яснѣе, когда число будетъ изображено не цифрами, а въ видѣ отрѣзка прямой линіи. Для этого условились поступать слѣдующимъ образомъ: берутъ неограниченную прямую (черт. 1) и отмѣчаютъ на ней гдѣ-нибудь точку O;



Черт. 1.

вправо отъ этой точки откладываютъ равные отрѣзки OA, AB, BC, CD и т. д.; отрѣзокъ OA можно взять какимъ угодно (на чертежѣ онъ равенъ сантиметру); но всѣ остальные отрѣзки должны быть равны OA. Тогда, если мы примемъ OA за единицу, то OB будетъ ровно 2;

$OC = 3$; $OD = 4$ и т. д. Такимъ образомъ всякое положительное число будетъ выражатья отрѣзкомъ опредѣленной длины при данномъ масштабѣ. Начало счета будетъ точка O. Налѣво отъ этой точки также откладываются отрѣзки, равные $OA : OA_1$, $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и т. д.; эти отрѣзки условились считать отрицательными числами, такъ что $OA_1 = -1$; $OB_1 = -2$; $OC_1 = -3$ и т. д. Такимъ образомъ отрѣзокъ прямой налѣво отъ точки O даетъ отрицательное число любой величины. Итакъ, на нашей прямой мы можемъ имѣть все безконечное множество какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ чиселъ.

При этомъ, если мы скажемъ: возьмемъ отрѣзокъ OA, равный числу a, не указывая ни масштаба, ни величины самого числа, то геометрическое представленіе отрѣзка OA и ариѳметическое представленіе числа a будутъ имѣть одно и то же содержаніе. Мы взяли отрѣзокъ вправо, (черт. 1) это значитъ, что число a положительное; если мы возьмемъ другой отрѣзокъ $OB_1 = -b$, то число b будетъ отрицательное. Здѣсь есть нѣкоторая разница въ геометрическомъ и алгебраическомъ представленіи. Подъ буквой a или b мы можемъ разумѣть какое угодно число, какъ положительное, такъ и отрицательное, тогда какъ направленіе отрѣзка уже опредѣляетъ знакъ числа. Чтобы уничтожить эту разницу представленій, мы подъ знакомъ числа будемъ подразумѣвать не мѣсто, гдѣ геометрически число отложено, а направленіе, въ которомъ оно отложено. Если намъ дано число a, то въ случаѣ a положительнаго, что обозначается $(+a)$, мы откладываемъ его вправо; если a отрицательное, т.-е. $(-a)$, то влѣво, при чемъ это отложеніе можетъ происходить не отъ самой точки O, а отъ каждой другой точки на данной прямой.

Нѣкоторая неясность въ этомъ представленіи уничтожится въ дальнѣйшемъ.

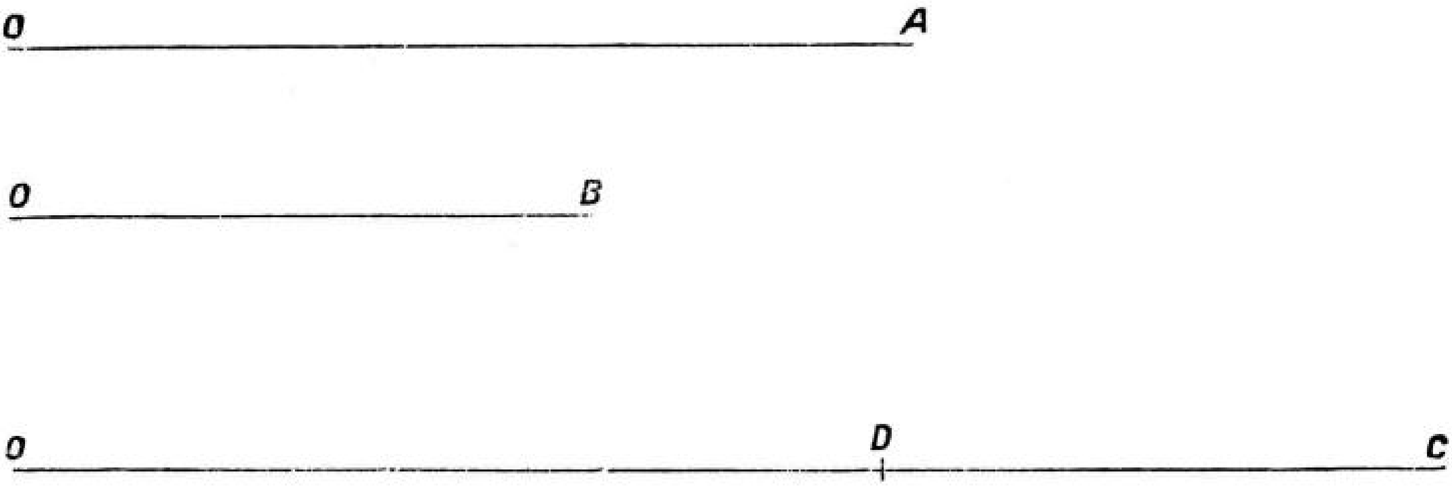
§ 5. **Понятіе о дѣйствіи. Сложеніе.**

Въ разсмотрѣніе свойствъ чиселъ нормальнаго ряда (§ 2) мы ввели свойства дѣйствій сложенія и вычитанія.

хотя понятіе о дѣйствіи не содержится въ понятіи о числѣ и представляетъ собою совершенно самостоятельное понятіе.

Дѣйствіемъ мы будетъ называть такую операцію надъ числами, при помощи которой получается новое число.

Такъ какъ новыя числа получаются и въ процессѣ счета, то можно сказать, что процессъ счета, или сосчитываніе, есть простѣйшее дѣйствіе, это дѣйствіе называется сложеніемъ. Отсюда дается и самое опредѣленіе сложенія: *сложеніемъ называется такое математическое дѣйствіе, когда мы къ единицамъ одного числа прибавляемъ единицы другого.*



Черт. 2.

Въ процессѣ счета это прибавленіе дѣлается по одному, но въ самомъ дѣйствіи мы можетъ прибавлять группу. Напримѣръ, къ 8 прибавить 5; въ процессѣ счета мы къ 8 прибавляемъ 1, потомъ еще 1 и т. д., пока не прибавимъ 5; говоря иначе, мы переходимъ въ нормальномъ числовомъ рядѣ послѣдовательно отъ 8-го члена къ 13-му. Но мы можетъ взять 8-й членъ, отсчитать отъ него 5 членовъ и тогда къ группѣ 8 прибавимъ группу 5, получимъ группу 13.

Въ такомъ представленіи мы сближаемъ ариѳметическое дѣйствіе съ геометрическимъ. Мы имѣемъ два отрѣзка $OA = 8$; $OB = 5$; чтобы получить отрѣзокъ, равный ихъ суммѣ, возьмемъ произвольную прямую, по ней точку O, отложимъ отъ этой точки $OD = OA$ и отъ точки D отрѣзокъ $DC = OB$, тогда $OC = OD + DC$ или $OC = 8 + 5$. (черт. 2).

Здѣсь мы къ группѣ 8 единицъ, приложили группу 5 единицъ и получили группу 13 единицъ, геометрически выражаемую отрѣзкомъ OC.

Сближая оба производства дѣйствія сложенія: ариѳметическое и геометрическое, мы должны дополнить само опредѣленіе дѣйствія словами: «въ томъ же направленіи». Это значитъ, что когда мы отъ точки D откладываемъ отрѣзокъ $DC = OB$, то это отложеніе мы должны сдѣлать въ томъ же направленіи, въ которомъ было сдѣлано отложеніе $OD = OA$. Безъ этого условія геометрическое сложеніе не будетъ яснымъ.

Такимъ образомъ ариѳметическое дѣйствіе сложенія чиселъ вполнѣ соотвѣтствуетъ геометрическому дѣйствію сложенія отрѣзковъ, только съ дополненіемъ: «въ томъ же направленіи». Это происходитъ потому, что въ ариѳметикѣ числа не имѣютъ направленія, лучше сказать: въ ариѳметикѣ направленіе счета не разсматривалось. Но мы ввели числа отрицательныя и сказали, что отрицальное число измѣняетъ направленіе счета. Тогда мы можемъ еще болѣе сблизить оба дѣйствія, если условимся ввести два счета — прямой: 1, 2, 3 и т. д. и противоположный *) 10, 9, 8, 7 и т. д.; въ первомъ мы идемъ вправо въ нормальномъ ряду чиселъ, а во второмъ влѣво. Возьмемъ число 20, тогда прямой счетъ будетъ 21, 22, 23 и т. д.; противоположный: 19, 18, 17 и т. д. Если мы примемъ такое разграниченіе, то и въ ариѳметическомъ опредѣленіи должны сказать о направленіи счета, какъ въ геометрическомъ—о направленіи отложенія.

Положимъ, что намъ нужно найти сумму $+5$ и -2, т.-е. сосчитать, сколько будетъ $(+5) + (-2)$ геометрически это значитъ, что отъ точки O (черт. 1) мы должны передвинуться вправо на 5 дѣленій, получимъ точку E, отъ

---

*) Я ввожу терминъ „противоположный“, а не „обратный“ вотъ почему: два числа называются *противоположными*, если въ суммѣ даютъ нуль, и *обратными*, если въ произведеніи даютъ единицу. Разграниченіе этихъ терминовъ считаю необходимымъ.

точки E передвинуться влѣво на 2 дѣленія, получимъ точку C, тогда отрѣзокъ OC будетъ искомая сумма. Ариѳметически мы можемъ сказать, что число —2 есть результатъ обратнаго счета, поэтому передвинемся въ нормальномъ числовомъ рядѣ на пятое мѣсто, потомъ передвинемся назадъ на два мѣста (т. е. произведемъ обратный счетъ) получимъ число 3. Итакъ $(+5)+(-2)=+3$.

Разсмотримъ еще сумму $(-5)+(-3)$ эта сумма состоитъ изъ двухъ слагаемыхъ одного направленія влѣво. Геометрически мы должны передвинуться отъ точки O влѣво сначала на 5 дѣленій, а потомъ на 3, получимъ отрѣзокъ, равный 8 дѣленіямъ влѣво отъ точки O; точно такъ же въ дополненномъ нормальномъ числовомъ рядѣ отъ нуля надо передвинуться влѣво и получимъ число —8. Итакъ $(-5)+(-3)=-8$.

Наконецъ, разсмотримъ послѣдній случай $(-5)+(+2)$; здѣсь мы сначала перемѣщаемся влѣво какъ по прямой, такъ и въ дополненномъ нормальномъ числовомъ ряду, а потомъ вправо (черт. 1) и окончательно получимъ точку C_1; результатъ сложенія выразился отрѣзкомъ $OC_1=-3$, а въ нормальномъ числовомъ ряду получимъ само число —3.

Соединимъ теперь всѣ разсмотрѣнные случаи: мы нашли, что

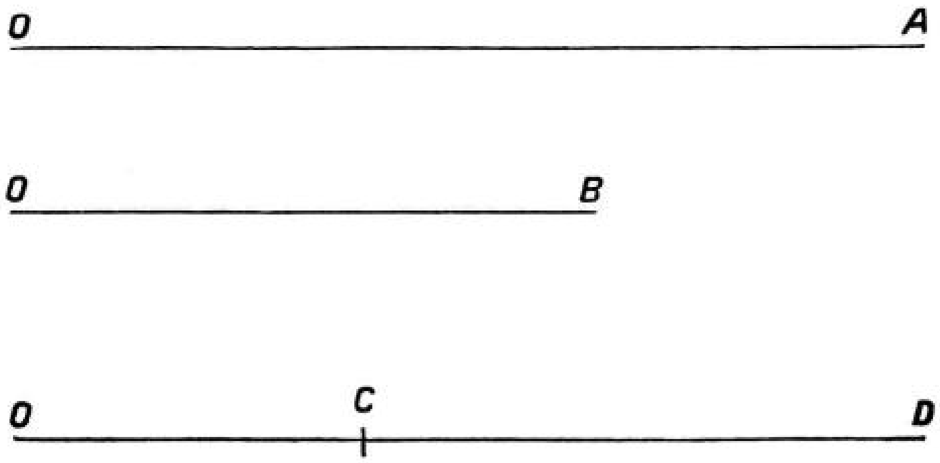
1) $8+3$ или $(+8)+(+3)=+11$
2) $(+5)+(-2)=+3$
3) $(-5)+(-3)=-8$
4) $(-5)+(+2)=-3$.

Изъ этихъ равенствъ мы можемъ вывести два правила: одно по отношенію къ отрицательнымъ числамъ, которое можно формулировать такъ: *чтобы прибавить отрицательное число надо вычесть его числовую мощность.* Согласно этому правилу приведенныя равенства пишутъ такъ: $(+5)+(-2)=+5-2=+3$; $(-5)+(-3)=-5-3=-8$ и $(-5)+(+2)=-5+2=-3$.

Равенства, написанныя въ такомъ видѣ, показываютъ, что можно знаки дѣйствія замѣнить знакомъ числа, при чемъ *при сложенiи* знакъ числа остается и замѣняетъ знаки дѣйствiя. Изъ полученныхъ равенствъ $+5-2=+3$; $-5-3=-8$; $-5+2=-3$ и $+8+3=+11$ слѣдуетъ второе правило: *если два числа имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ* $+8+3;-5-3$, *то числовыя мощности ихъ складываются и ставится тотъ же знакъ. Если два числа имѣютъ разные знаки:* $+5-2;-5+2$, *то числовыя мощности ихъ вычитаются и ставится знакъ большей.*

§ 6. **Вычитанiе.**

Дѣйствiе, противоположное сложенiю, называется вычитанiемъ. Произвести вычитанiе, значитъ отнять отъ одного числа другое; геометрически это значитъ отложить данный отрѣзокъ въ обратномъ направленiи. Пусть мы имѣемъ два отрѣзка $OA=8$ и $OB=5$, и намъ надо



Черт. 3.

изъ OA вычесть OB, т.-е. найти разность $OA-OB$. Для этого, на произвольной прямой отъ точки O откладываемъ отрѣзокъ OD, равный OA вправо, отъ точки D откладываемъ отрѣзокъ $DC=OB$ влѣво, получимъ точку C; отрѣзокъ OC и будетъ искомая разность (черт. 3).

Чтобы сблизить геометрическiй прiемъ вычитанiя отрѣзковъ съ ариѳметическимъ прiемомъ вычитанiя чиселъ, условимся въ томъ, что дѣйствiе вычитанiя измѣняетъ направленiе счета. Когда намъ нужно изъ 8 вычесть 5, то въ нормальномъ числовомъ рядѣ нужно сначала переместиться вправо на 8-ой членъ, потомъ отсюда влѣво на

5 членовъ; говоря иначе: сначала нужно произвести прямой счетъ 8-ми единицъ, потомъ обратный 5 единицъ, и мы получимъ число 3. Итакъ $(+8)-(+5)=+3$.

Такъ какъ $8=5+3$, а $8-5=3$, то говоримъ, что *вычитаніе есть дѣйствіе противоположное сложенію, въ которомъ по данной суммѣ двухъ слагаемыхъ и одному изъ нихъ находятъ другое.*

Перейдемъ теперь къ отрицательнымъ числамъ. Пусть намъ дано $(-8)-(+5)$. Здѣсь намъ нужно отъ точки O перемѣститься влѣво на 8 дѣленій и потомъ въ направленіи обратномъ положительному, т.-е. въ направленіи обратномъ правому, т.-е. опять влѣво, перемѣститься на 5 дѣленій, всего мы перемѣстимся влѣво на 13 дѣленій, т.-е. $(-8)-(+5)=-13$. Точно то же получимъ, перемѣщаясь въ нормальномъ числовомъ рядѣ, при чемъ знакъ дѣйствія минусъ заставляетъ насъ принять направленіе обратное знаку числа.

Возьмемъ теперь $(+8)-(-5)$. Здѣсь первоначальное перемѣщеніе идетъ вправо на 8 дѣленій, а потомъ надо перемѣститься въ направленіи, обратномъ лѣвому, т.-е. опять вправо на 5 дѣленій, всего мы перемѣстимся вправо на 13 дѣленій, т.-е. $(+8)-(-5)=+13$.

Совершенно также получимъ $(-8)-(-5)=-3$.

Если теперь мы соберемъ вмѣстѣ всѣ случаи, то получимъ:

1) $(+8)-(+5)=8-5=3$.
2) $(-8)-(+5)=-8-5=-13$.
3) $(+8)-(-5)=8+5=13$.
4) $(-8)-(-5)=-8+5=-3$.

Разсматривая ихъ, мы видимъ, что здѣсь знакъ дѣйствія мѣняетъ знакъ числа, т.-е. само дѣйствіе состоитъ въ томъ, чтобы измѣнить направленіе числа. Это правило формулируется еще и такъ; *вычесть отрицательное число значитъ его прибавить.* Отсюда же можно вывести и другое правило: *чтобы раскрыть скобки, передъ которыми стоитъ знакъ минусъ, мы должны перемѣнить знакъ у количества, стоящаго въ скобкахъ.*

Въ силу того, что вычитаніе отличается отъ сложенія только направленіемъ дѣйствія, и можетъ быть замѣнено измѣненіемъ знака у вычитаемаго числа, въ математикѣ принято называть разность алгебраической суммой и выражать въ общемъ видѣ $a+b$, потому что подъ a и b мы можемъ подразумѣвать всѣ числа какъ положительныя, такъ и отрицательныя; и если намъ дана разность $a-b$, то мы всегда ее можемъ представить въ видѣ суммы $a+(-b)$; обратно сумму $a+b$ можно представить въ видѣ разности $a-(-b)$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что геометрическое представленіе чиселъ въ видѣ прямой линіи не только вполнѣ соотвѣтствуетъ ариѳметическому нормальному числовому ряду, но даетъ возможность подробнѣе выяснить смыслъ и значеніе основныхъ дѣйствій: сложенія и вычитанія. Кромѣ того, оно расширяетъ самое понятіе о числѣ, вводя въ него новый признакъ—направленіе числа. Другими словами, геометрическое представленіе вводитъ въ эвклидовское опредѣленіе числа: собраніе единицъ, понятіе о дѣйствіи. Мы можемъ сказать теперь, что каждый членъ нормальнаго числового ряда можетъ разсматриваться какъ результатъ дѣйствія. Онъ можетъ быть суммой ниже стоящихъ членовъ: $5=3+2$; если мы перейдемъ въ область чиселъ отрицательныхъ, которые имѣютъ обратное направленіе, то должны слово сумма замѣнить разностью: $5=3-(-2)$; $-5=-3-(-8)$ и т. п.

Точно также, каждый членъ ряда можетъ разсматриваться какъ разность выше стоящаго и ниже стоящаго; въ области отрицательныхъ чиселъ эта разность будетъ суммою $5=8-3$ или $5=8+(-3)$.

Изъ этого разсмотрѣнія вытекаетъ свойство чиселъ противоположныхъ. Противоположными называются такія числа, которыя въ суммѣ даютъ нуль; напр.

$$+3+(-3)=0.$$

Ихъ можно опредѣлить иначе: противоположные числа имѣютъ одинаковую числовую мощность, но противоположное направленіе.

§ 7. Прибавленіе и вычитаніе суммъ.

Правило: Чтобы къ какому-нибудь числу прибавить алгебраическую сумму данныхъ чиселъ, надо прибавить послѣдовательно каждое слагаемое.

Пусть дана сумма $a-b+c$, которую надо прибавить къ числу m: это мы можемъ записать въ видѣ $m+(a-b+c)$; здѣсь сумма стоитъ въ скобкахъ, которыя показываютъ, что мы должны раньше сосчитать сумму чиселъ $a-b+c$ и результатъ прибавить къ числу m; но этотъ способъ мы можемъ замѣнить другимъ, который называется правиломъ раскрытія скобокъ. Если мы воспользуемся правиломъ прибавленія суммъ, то получимъ: $m+(+a)+(-b)+(+c)$ или по правилу сложенія чиселъ можемъ написать $m+a-b+c$. Отсюда: *чтобы раскрыть скобки, передъ которыми стоитъ знакъ* $+$, *мы должны переписать числа, стоящія въ скобкахъ, сохраняя ихъ знаки.*

Правило вычитанія суммъ. Чтобы изъ какого-нибудь числа вычесть сумму данныхъ чиселъ, мы должны вычесть послѣдовательно каждое слагаемое.

Пусть намъ дана сумма $a-b+c$, которую надо вычесть изъ числа m; это мы можемъ записать въ видѣ $m-(a-b+c)$.

По правилу вычитанія, мы можемъ написать

$$m-(+a)-(-b)-(+c)$$

или, по правилу вычитанія чиселъ,

$$m-a+b-c.$$

Отсюда, *чтобы раскрыть скобки, передъ которыми стоитъ знакъ минусъ, мы должны переписать члены, стоящіе въ скобкахъ, перемѣняя знакъ у каждаго изъ нихъ на обратный.*

Основное свойство суммы. Сумма не измѣняется отъ перестановки мѣстъ слагаемыхъ.

Основное свойство разности. Разность двухъ чиселъ не измѣнится, если къ уменьшаемому и вычитаемому придать одно и то же число.

Въ этомъ легко убѣдиться на числовыхъ примѣрахъ, но доказать справедливость этого свойства можно только на буквахъ. Возьмемъ два числа a и b, разность ихъ будетъ $a-b$, обозначимъ ее буквой d, и напишемъ $a-b=d$. Прибавимъ теперь къ a и b по числу m, тогда получимъ два новые числа $a+m$ и $b+m$, разность ихъ будетъ $(a+m)-(b+m)$; надо доказать, что эта новая разность будетъ также d. Для этого, раскроемъ скобки, и получимъ $a+m-b-m$; мы получили сумму, величина которой не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ, и мы ее можетъ написать такъ: $a-b+m-m$; но $+m$ и $-m$ суть противоположные числа, которыхъ сумма равна нулю, значитъ $(a+m)-(b+m)=a-b$.

Въ этомъ доказательствѣ мы ничѣмъ не обусловливали взятыхъ чиселъ a и b, значитъ свойство разности будетъ примѣнимо ко всякимъ числамъ какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ.

§ 8. **Задачи**.

Вычислить суммы

1) $(+23)+(-15)-(-8)+(+6)$ отв. $+22$.
2) $(+110)-(+45)-(-42)+(-16)$ отв. $+91$.
3) $(-100)+(-50)-(+40)-(-96)$ отв. -94.
4) $[(-6)+(-8)-(-9)]-[(+2)-(-3)+(-11)]$ отв. $+6$.
5) $[(+102)-(+108)+(-104)]+[(-102)+(-108)-(-16)]-[(-102)-(-108)+(-16)]$ отв. -299.

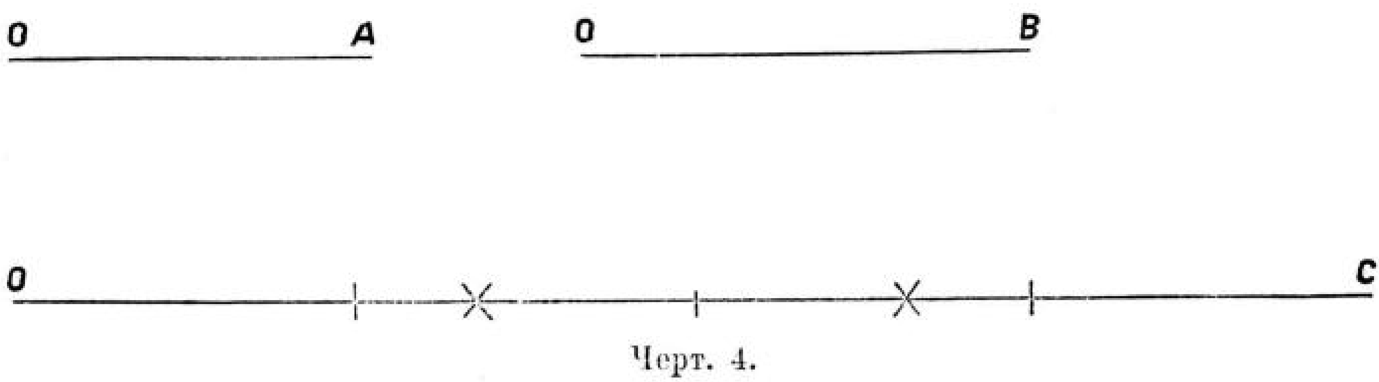
§ 9. **Умноженіе чиселъ**.

Такъ какъ мы пока еще среди разсматриваемыхъ чиселъ не имѣемъ дробей, то дѣйствіе умноженія будетъ относиться только къ числамъ цѣлымъ, но эти числа могутъ быть и положительными и отрицательными.

По отношенію къ цѣлымъ числамъ умноженіемъ называется сокращенное сложеніе равныхъ слагаемыхъ. Если намъ нужно сложить $15+15+15$, то мы эту сумму записываемъ такъ 15×3 и называемъ эту новую запись произведеніемъ. Высчитываемъ произведеніе по особой таблицѣ, которая наывается таблицей умноженія, а самое высчитываніе называемъ умноженіемъ. Отсюда: умноженіе есть сложеніе равныхъ слагаемыхъ.

Число 15, которое берется слагаемымъ называется множимое, а число 3, которое показываетъ, сколько разъ взято 15 слагаемымъ, называется множителемъ. Итакъ, множимое и множитель суть совершенно разныя числа. Множимое дано, написано; множитель мы должны получить сами, сосчитавъ число слагаемыхъ. Очевидно, что множимое мы легко и удобно можемъ замѣнить буквой, напримѣръ, взявъ число a слагаемымъ 5 разъ, получимъ $a+a+a+a+a$, что въ сокращенной записи даетъ $a \times 5$. Но, когда мы множимое замѣняемъ буквой, то условились во-первыхъ не писать знака умноженія, а само произведеніе $a \times 5$ записывать просто $a5$; а во-вторыхъ, всегда ставить число передъ буквой и писать $5a$.

Можно, конечно, и множитель представить себѣ въ буквенномъ видѣ, тогда произведеніе будетъ имѣть видъ an, или na, т.-е. число a, взято слагаемымъ n разъ. Число 5 и число n называются коэффиціентомъ. Итакъ: коэффиціентъ показываетъ, сколько разъ данное буквенное число взято слагаемымъ.



Черт. 4.

Вмѣсто числа мы можемъ взять отрѣзокъ прямой линіи OA (черт. 4) и взять его слагаемымъ 4 раза, получимъ отрѣзокъ OC, который будетъ равенъ $OA \times 4$ или $4\,OA$. Отрѣзокъ OC мы будемъ называть *кратнымъ* отрѣзка OA, а число 4 *величиной кратности*. Точно также и произведенiе $15 \times 3 = 45$ будетъ кратнымъ числа 15, а 3 величина кратности; число $5a$ будетъ кратнымъ числа a, величина его кратности будетъ 5; вообще na есть число кратное a, величина кратности n.

Для чиселъ можно доказать весьма важное свойство: число единицъ въ произведенiи двухъ чиселъ останется то же, если мы перемѣнимъ мѣста множимого и множителя.

Другими словами это значитъ, что четырехкратное 3 равно трехкратному 4. На нашемъ отрѣзкѣ OC (черт. 4) я отмѣтилъ знакомъ отрѣзки, равные AO, ихъ будетъ 4, но въ то же время на этой прямой укладывается 3 отрѣзка, равныхъ 4.

Это свойство произведенiя формулируется такъ: *отъ перестановки мѣстъ множителей произведенiе не измѣняется.*

Доказать это свойство можно такъ: напишемъ 3 въ видѣ трехъ единицъ $1 + 1 + 1$ и возьмемъ эту сумму слагаемымъ 4 раза, получимъ:

$$\begin{array}{c} 1+1+1=3 \\ 1+1+1=3 \\ 1+1+1=3 \\ 1+1+1=3 \end{array}$$

Складывая по вертикальнымъ столбцамъ

$$4 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3 \quad \text{или} \quad 4 \times 3 = 3 \times 4.$$

Итакъ, если намъ дано произведенiе двухъ положительныхъ чиселъ a и n, то намъ безразлично, какое изъ нихъ множимое, какое множитель, и мы съ полнымъ правомъ можемъ написать $a5 = 5a$. Но что будетъ, если одно изъ данныхъ чиселъ или оба они будутъ отрицательными? Если отрицательнымъ будетъ множимое, то въ нашемъ разсужденiи ничто не измѣняется, и мы легко догадаемся, что $(-4) \times 3 = -12$, потому что это есть сумма трехъ отрицательныхъ чиселъ.

Но, можно ли здѣсь переставить мѣсто множителей и написать $(-4) \times 3 = (+3) \times (-4)$. Если мы допустимъ такое равенство, то является вопросъ, что значитъ умножить на—4? Этого вопроса можно было бы избѣжать, условившись, множитель считать всегда положительнымъ; но оказывается гораздо выгоднѣе и лучше расширить самое понятіе объ умноженіи и распространить его на отрицательнаго множителя. Можно сказать такъ: умножить на—4, это значитъ найти четырехкратное число въ противоположномъ направленіи. Тогда само умноженіе $(+3)$ на (-4) мы можемъ разсматривать такъ: это будетъ такъ же число 12 въ противоположномъ направленіи, т.-е. $(+3)\times(-4)=-12$. Отсюда будетъ слѣдовать, что основное свойство произведенія распространяется и на произведеніе отрицательныхъ чиселъ.

Принявъ распространенное толкованіе дѣйствія умноженія, мы можемъ найти и такое произведеніе $(-5)\times(-4)$; это значитъ найти четырехкратное число отъ -5, которое будетъ—20 и перемѣнить его направленіе, получимъ $+20$. Итакъ произведеніе (-5) на (-4) даетъ положительное число $+20$.

Теперь мы получаемъ правило знаковъ при умноженіи, если соединимъ всѣ разсмотрѣнные случаи въ одну группу, мы получили:

$$\begin{aligned}(+3)\times(+4)&=+12\\(-3)\times(+4)&=-12\\(+3)\times(-4)&=-12\\(-3)\times(-4)&=+12\end{aligned}$$

Разсматривая эти произведенія, мы видимъ, что *одинаковые знаки даютъ плюсъ, а разные минусъ.* Это значитъ, что произведеніе положительныхъ чиселъ и произведеніе отрицательныхъ чиселъ будутъ положительными, а произведенія чиселъ положительнаго на отрицательное и отрицательнаго на положительное будутъ отрицательными.

И такъ, мы можемъ говорить объ умноженіи чиселъ, не ограничивая разматриваемыя числа какими-либо условіями. Любопытно то, что отрѣзки прямыхъ подтверждаютъ это свойство чиселъ. Такъ, на (черт. 4) прямая OC

есть четырехкратная прямой $OA = 3$; но въ тоже время она будетъ трехкратной нѣкоторой прямой OB равной 4; значитъ отрѣзокъ AC мы можетъ разсматривать или какъ $4\,OA$, т.-е. 4×3; или какъ $3\,OB$, т.-е. 3×4.

Если мы теперь обратимся къ членамъ нормальнаго числового ряда, то по отношенію къ нѣкоторымъ членамъ можемъ отмѣтить ихъ особое свойство. Мы видѣли (§ 6), что каждый членъ ряда есть сумма или разность другихъ членовъ ряда; теперь мы можемъ сказать, что въ этомъ рядѣ чиселъ есть такія, которыя будутъ произведеніемъ низшихъ членовъ ряда. При чемъ въ этихъ числахъ надо отмѣтить нѣкоторыя особыя свойства.

1) Всякое число можетъ быть представлено какъ произведеніе себя самого на единицу. Это свойство происходитъ отъ того, что всякое число есть сумма единицъ, т.-е. равныхъ слагаемыхъ, такъ напр., $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ или 1×5. Поэтому говорятъ, что число 5, въ пять разъ больше единицы.

2) Если данное число есть кратное другого числа (не единицы), то оно можетъ быть составлено изъ этого числа такъ какъ множитель составленъ изъ единицы. Напримѣръ, 15 есть кратное 5, а именно $15 = 5 \times 3$, то оно можетъ быть составлено изъ 5 такъ, какъ 3 составлено изъ единицы: $3 = 1 + 1 + 1$, а $15 = 5 + 5 + 5$. Въ этомъ случаѣ мы можемъ сказать, что 15 содержитъ столько же пятерокъ, сколько множитель 3 содержитъ единицъ.

3) Числа, кратныя другихъ чиселъ (не единицы) называются составными, а числа кратныя только единицы называются простыми.

4) Всякое число, кратное другого числа, можетъ быть представлено, какъ произведеніе этого числа на нѣкоторый множитель. Числа, кратныя 2 будутъ $2\,m$, кратныя 3 будутъ $3\,m$ и т. д.; эти выраженія $2\,m$, $3\,m$ называются общимъ видомъ чиселъ, кратныхъ 2 и 3. Общій видъ чиселъ кратныхъ 5 будетъ $5\,m$.

5) Всякое число, кратное другого числа, будетъ кратнымъ и величинѣ его кратности. Напримѣръ число 15 будетъ кратно и 3 и 5.

§ 10. Задачи.

Вычислить слѣдующія суммы

1) $(+3)\times(-5)+(-5)\times(-4)-(-3)\times(+5)$ отв. $+20$.

2) $(-100)\times(-25)-(+40)\times(-8)+(+50)+(-15)$ отв. $+2070$.

3) $75-[(+15)\times(-3)-(-16)\times(-40)+(+36)+$ $+(+10)]$ отв. $+400$.

4) $100-[(-3)\times(-2)+(-5)\times(-4)-(-6)\times(+3)]$ отв. $+54$.

5) $(a+b+c)-(a+b-c)+(a+c-b)$ отв. $a+3c-b$

§ 11. Правило раскрытія скобокъ при умноженіи.

Если нужно какую-нибудь сумму умножить на число или число умножить на сумму, то принято сумму заключать въ скобки. Напримѣръ, намъ нужно сумму $a+b+c$ умножить на 5, то это умноженіе мы выражаемъ такъ: $(a+b-c)5$; обратно, если число 7 надо умножить на сумму $m+n$, то это пишутъ такъ: $7\ (m+n)$.

Изъ свойства призведенія, что оно не зависитъ отъ перестановки мѣстъ множителей, вытекаетъ, что оба случая умноженія будутъ однимъ и тѣмъ же, потому что все равно, что $(a+b+c)$ помножить на 5, или 5 помножить на $a+b-c$; это можно выразить такой записью

$$(a+b-c)5=5(a+b-c).$$

Правило. Чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, надо каждое слагаемое помножить на это число.

Справедливость этого правила вытекаетъ изъ самого опредѣленія дѣйствія умноженія: умножить $a+b+c$ на 5 значитъ взять слагаемымъ пять разъ, т.-е. $a+b-c+$ $+a+b-c+a+b-c+a+b-c+a+b-c$; но сумма не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ, а потому ее можно написать такъ: $a+a+a+a+a+b+b+b+b+b-$ $-c-c-c-c-c$, что (§ 9) будетъ $5a+5b-5c$.

Легко видѣть, что это будетъ справедливо, какъ для чиселъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ, ибо, напримѣръ: $(a+b)\times(-7)=-[(a+b)\times 7)]=-(7a+7b)$ или $-7a-7b$.

Если мы это свойство суммы представимъ въ чисто буквенномъ видѣ, то можемъ написать, что

$$(a+b-c)\ m=am+bm-cm.$$

Число m называется *общимъ множителемъ*; если этотъ множитель стоитъ при каждомъ слагаемомъ, то мы можемъ написать обратно $am+bm-cm=m(a+b-c)$; въ этомъ случаѣ говорятъ, что общій множитель данныхъ чиселъ взятъ за скобку.

Правило. Чтобы взять за скобку общаго множителя у данныхъ слагаемыхъ, нужно каждое изъ нихъ раздѣлить на этого множителя и полученныя частныя заключить въ скобки, написавъ при нихъ общаго множителя.

Изъ того же правила раскрытія скобокъ при умноженіи слѣдуетъ очень важное свойство произведенія: произведеніе всякаго числа на нуль равно нулю. Въ самомъ дѣлѣ, пусть намъ дано $a\ o$; число o есть сумма противоположныхъ чиселъ, напримѣръ $5-5$, тогда $a\times o=a(5-5)$ или $5a-5a$; но числа $5a$ и $-5a$ будутъ противоположными, а слѣдовательно сумма ихъ равна o. Итакъ $a\times o=o$.

Разсмотримъ теперь правило умноженія суммы на сумму.

Правило. Чтобы умножить сумму на сумму, нужно каждое слагаемое первой суммы помножить на каждое слагаемое второй.

Пусть намъ дано $(a+b-c).(m+n)$; сосчитаемъ мысленно, чему равно $m+n$ и обозначимъ это число буквой s, тогда мы получимъ случай умноженія суммы $a+b-c$ на число s и можемъ написать $(a+b-c)s=as+bs-cs$; замѣнимъ теперь s его выраженіемъ $m+n$, тогда $as+bs-cs=a(m+n)+b(m+n)-c(m+n)$; но эти скобки мы также можемъ раскрыть и получимъ $am+an+bm+bn-cm-cn$. Или, переставляя мѣста слагаемыхъ будемъ имѣть окончательно:

$$(a+b-c)(m+n)=am+bm-cm+an+bn+cn.$$

§ 12. Задачи.

1) $(a+b+c)\,5-(a-b+c)\ 7$ отв. $-2a+12b-12c$.
2) $7\,(m+n)+8\,(m-n)-12\,(m+a)$ отв. $3m-n-12a$.
3) $(a+b+c)(p+q)-(a-b+c)(p-q)$ отв. $2bp+2aq+$ $+2cq$ или $2\,(bp+aq+cq)$.
4) $(m+n)\,(a+b)+(m-n)\,(a-b)$ отв. $2am+2bn$ или $2(am+bn)$.
5) $(m+n-a)\,[(+5)(-8)-(-4)(+3)]$ отв. $-28m-$ $-28n+28a$.
6) $[(+3)\times(-5)+(+4)\times(-2)+(-8)\times(-6)]\,(b+$ $+c-a)$ отв. $19b+19c-19a$.

§ 13. Дѣленіе чиселъ.

Дѣленіе есть дѣйствіе обращенное по отношенію къ умноженію; въ немъ по данному произведенію и одному изъ множителей отыскивается другой.

Въ умноженіи мы имѣемъ слѣдующее:

Произведеніе = множимому $\times$ множителя.

Множимое и множитель были даны, и мы отыскивали произведеніе, которое назвали кратнымъ по отношенію къ множимому, нашли, что множитель показываетъ величину кратности.

Теперь, намъ дано произведеніе, т.-е. дано нѣкоторое кратное число, и дано еще или величина его кратности (множитель) или дано множимое и ищется величина кратности. Такое обращенное дѣйствіе, называется дѣленіемъ.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ:

1) Всякое число, кратное другого числа, дѣлится какъ на это число, такъ и на величину его кратности.

2) Если мы имѣемъ сумму равнократныхъ чиселъ, то она будетъ равнократна суммѣ самихъ чиселъ. Такъ, напримѣръ, намъ даны числа a, b и c, мы возьмемъ отъ нихъ равнократныя и величину кратности обозначимъ буквой n, получимъ новыя числа na, nb и nc; то

$$an+bn+cn=n\ (a+b+c).$$

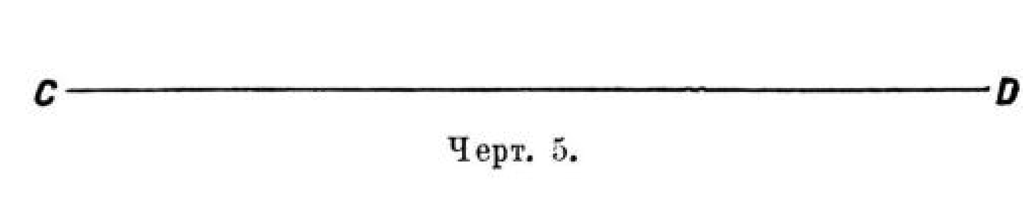
Обратно: если мы имѣемъ разныя кратности одного и того же числа, то сумма ихъ равна суммѣ кратностей числа, помноженной на само число. Возьмемъ число 15 и разныя кратныя отъ него $15m$, $15n$, $15p$, то $15m+15n+$ $+15p=15(m+n+p)$.

Такимъ свойствомъ дѣлимости обладаютъ только числа кратныя или составныя, какъ положительные, такъ и отрицательные; но числа первоначальныя этимъ свойствомъ не обладаютъ; 17 не можетъ быть произведеніемъ какихъ либо чиселъ, кромѣ единицы на само число.

3) Изъ опредѣленія дѣленія слѣдуетъ правило знаковъ при дѣленіи, которое формулируется такъ же, какъ и при умноженіи, а именно: одинаковые знаки даютъ плюсъ, а разные—минусъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что намъ надо раздѣлить $(+15)$ на $(+3)$; это значитъ, нужно найти такое число, которое будучи умножено на $+3$ даетъ $+15$; это число не можетъ быть отрицательнымъ, ибо произведеніе положительнаго числа на отрицательное было бы отрицательнымъ, а потому это число должно быть $+5$. Если намъ нужно $+15$ раздѣлить на -3, то частное должно быть отрицательное, ибо только тогда въ произведеніи мы получимъ число положительное. Совершенно также разсуждая, мы убѣдимся въ справедливости слѣдующихъ равенствъ $(-15):(-5)=+3$; $(-15):(+5)=-3$.

§ 14. Геометрическое дѣленіе отрѣзковъ прямое.

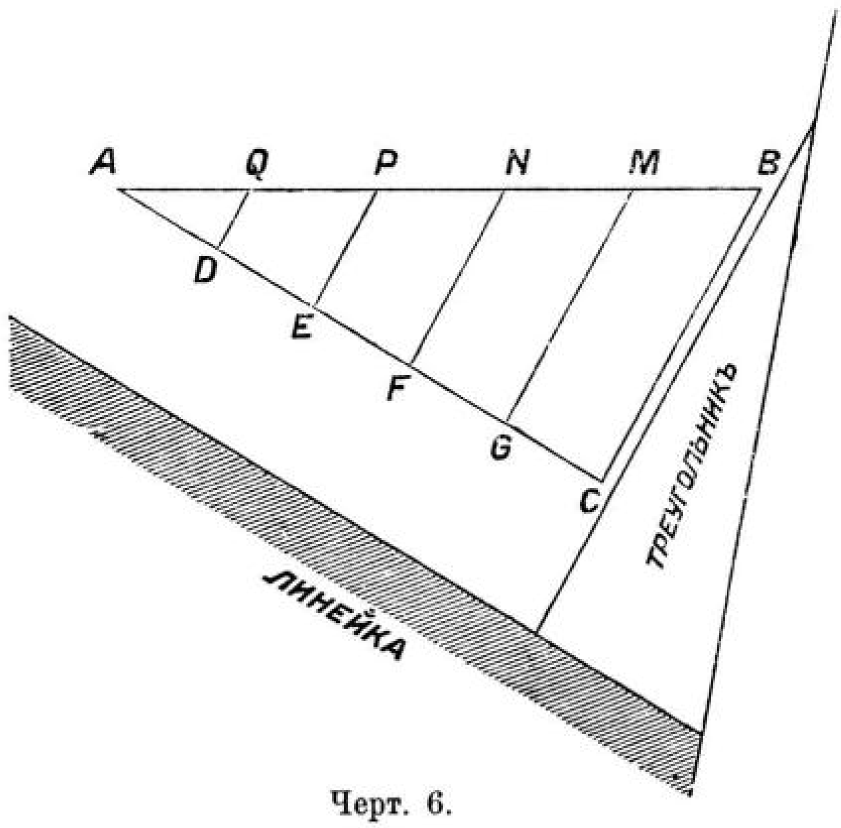
Соотвѣтственно съ ариѳметическимъ дѣленіемъ чиселъ, возможно и геометрическое дѣленіе отрѣзка прямой линіи. При этомъ также возможны два вопроса: 1) Даны два от-



Черт. 5.

рѣзка AB и CD, при чемъ сказано, что отрѣзокъ CD кратный отрѣзка AB; требуется опредѣлить величину его кратности. (Черт. 5). Для этого достаточно сосчитать, сколько разъ отрѣзокъ AB укладывается въ отрѣзкѣ CD; если онъ уложится 4 раза, то 4 и будетъ величиной кратности.

2) Данный отрѣзокъ AB требуется раздѣлить на 5 равныхъ частей, т.-е. найти такой отрѣзокъ, для котораго AB былъ бы пятикратнымъ. Для этого поступаютъ слѣдующимъ образомъ: проводятъ линію AC подъ угломъ и откладываютъ на ней равные отрѣзки AD, DE, EF, FG и GC; берутъ деревянный треугольникъ и кладутъ его такъ, чтобы одна изъ сторонъ проходила черезъ точки C и B (черт. 6) и проводятъ линію BC; потомъ берутъ линейку



Черт. 6.

и прикладываютъ ее къ треугольнику, какъ это показано на чертежѣ. Передвигая треугольникъ по линейкѣ, мы увидимъ, что его сторона будетъ проходить черезъ точки G, F, E и т. д., проводя каждый разъ линіи, мы раздѣлимъ отрѣзокъ AB на 5 равныхъ частей.

Если мы теперь сравнимъ ариѳметическое дѣленіе чиселъ и геометрическое дѣленіе отрѣзковъ, то увидимъ, что они представляютъ собою два разныхъ пріема, имѣющихъ одно и то же основаніе: въ ариѳметическомъ дѣленіи мы послѣдовательно отнимаемъ дѣлителя, а въ геометрическомъ также послѣдовательно отнимаемъ данный отрѣзокъ. Проведя линіи GM, мы отняли отрѣзокъ BM, потомъ линіей FN отняли еще отрѣзокъ MN и т. д., пока не использовали всю линію AB.

Оба метода будутъ совершенно совпадать для чиселъ кратныхъ; но изъ геометрическаго дѣленія очевидно, что любой отрѣзокъ мы можемъ раздѣлить на любое число равныхъ частей, тогда какъ ариѳметическое число мы можемъ раздѣлить только въ случаѣ его кратности. Чтобы сблизить оба пріема, вводятъ дроби.

§ 15. **Понятіе о дробяхъ.**

Мы видѣли (§ 3), что невозможность вычитанія привела насъ къ необходимости ввести въ составъ нормальнаго числового рода новыя числа—отрицательныя. Геометрическое представленіе числа въ видѣ отрѣзка прямой (§ 4) расширило самое понятіе о числѣ, введя въ него новый признакъ—направленіе счета. Теперь мы находимся при новомъ затрудненіи: дѣйствіе дѣленія приложимо только къ особымъ членамъ нормальнаго числового ряда, которыя будутъ кратными или дѣлимаго или дѣлителя. Попробуемъ и здѣсь расширить область чиселъ, сдѣлавъ условіе возможности невозможнаго дѣленія, для чего введемъ новыя числа, которыя называются *дробями*.

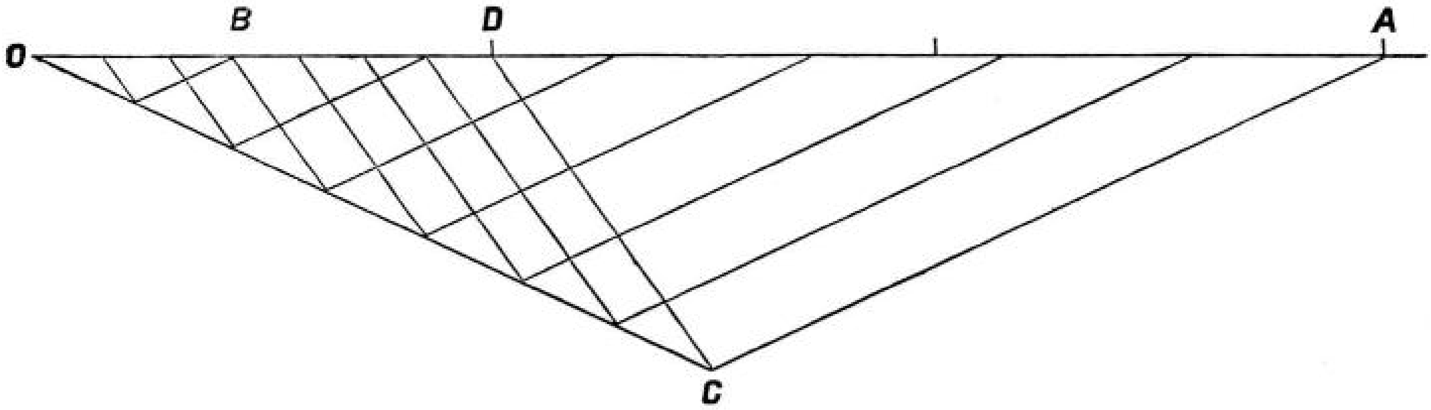
Невозможность выполненія дѣленія встрѣчается въ двухъ случаяхъ: 1) когда одно число не дѣлится на другое потому, что оно не есть кратное этого второго числа, и въ 2) когда дѣлимое меньше дѣлителя. Разсмотримъ сначала второй случай.

Пусть намъ дано 3 раздѣлить на 7, т.-е. надо найти число, которое, будучи умножено на 7, дастъ 3. Это требованіе принято изображать двояко: или въ видѣ $3:7$, или въ видѣ $\frac{3}{7}$, при чемъ черта замѣняетъ знакъ дѣленія (:). Какъ найти частное?

При рѣшеніи этого вопроса могутъ быть двѣ точки зрѣнія.

1) Мы можемъ разсуждать такъ: 3 мы не можемъ раздѣлить на 7, обозначимъ это невыполненное дѣленіе въ видѣ $\frac{3}{7}$ и назовемъ его дробью. Итакъ, дробь есть невыполненное дѣленіе. Число 3 и число 7 называются членами дроби: число, стоящее надъ чертой—числителемъ, а подъ чертой—знаменателемъ дроби. Очевидно, что числитель дроби есть дѣлимое, а знаменатель дроби есть дѣлитель, черта по условію—знакъ дѣленія.

Въ такомъ видѣ само дѣйствіе геометрически мы можемъ произвести въ такомъ видѣ: возьмемъ отрѣзокъ OA, который равенъ 3 единицамъ и раздѣлимъ его на 7 равныхъ частей, получимъ отрѣзокъ OB, который условимся записать въ видѣ $\frac{3}{7}$ (черт. 7). Это одна



Чер. 7.

точка зрѣнія на дробь, какъ на выраженіе невыполненнаго дѣленія.

2) Вторая точка зрѣнія состоитъ въ слѣдующемъ: мы имѣемъ числовой рядъ, члены котораго отличаются другъ отъ друга на единицу; въ этомъ числовомъ рядѣ нѣтъ и не можемъ быть дробей, и потому мы не можемъ найти числа, которое выражало бы частное отъ дѣленія 3 на 7. Геометрически нашъ прямой рядъ даетъ отрѣзки: OA, AB, OC... (черт. 1), при чемъ точки A и B отстоятъ другъ отъ друга на длину выбраннаго масштаба. Но мы можемъ каждый отрѣзокъ OA, AB, BC... раздѣлить на сколько угодно равныхъ частей. Раздѣлимъ OA сначала на 2 части, потомъ на 3, потомъ на 4 и т. д. Полученныя длины усло-

вимся изображать въ видѣ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$... Такое изображенiе, при условiи что черта есть знакъ дѣленія, будетъ соотвѣтствовать дѣленію отрѣзка. Мы получимъ новыя числа, которыя назовемъ *числами обращенными*, потому что они построены по закону нормальнаго числового ряда, но обладаютъ обратными свойствами. Въ нормальномъ числовомъ рядѣ каждый членъ съ большой числовой мощностью будетъ больше каждаго изъ всѣхъ предшествующихъ членовъ; въ новомъ числовомъ ряду членъ будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ больше числовая мощность знаменателя. Въ нормальномъ числовомъ рядѣ съ увеличенiемъ числовой мощности членъ отодвигается отъ начала; въ новомъ числовомъ рядѣ членъ съ увеличенiемъ числовой мощности знаменателя приближается къ началу. Эти обращенныя числа мы назовемъ дробями.

Введя такія числа между каждыми двумя сосѣдними членами ряда, мы пополнимъ нашъ числовой рядъ безчисленнымъ множествомъ новыхъ членовъ и еще болѣе сблизимъ геометрическое и ариѳметическое представленiе числа. Теперь мы съ полнымъ правомъ можемъ сказать, что всякое число можно разсматривать, какъ отрѣзокъ прямой; обратное утвержденiе: всякій отрѣзокъ прямой можно разсматривать какъ число, какъ мы увидимъ впослѣдствiи, не вполнѣ справедливо,—оказывается, что не всѣ точки прямой могутъ покрыться обращенными числами.

Изъ сопоставленія ариѳметическаго и геометрическаго представленія обращенныхъ чиселъ можно вывести очень важныя свойства этихъ чиселъ.

1) Всякое обращенное число представляетъ собою часть единицы. Въ этомъ представленiи обыкновенно дѣлается обобщенiе понятія объ единицѣ. Подъ единицей понимаютъ нѣчто цѣльное, т.-е. всякое число можетъ быть принято за единицу, тогда единица получитъ названiе цѣлаго; обратно: всякое цѣлое можетъ быть принято за единицу. Это обобщенiе понятія единицы является непосредственнымъ слѣдствiемъ геометрическаго представленія чиселъ, въ которомъ цѣлыя единицы могутъ откладываться про-

извольной величины отрѣзкомъ. При такомъ представленіи единицы можно сказать, что дробь $\frac{3}{7}$ есть седьмая числа 3; дробь $\frac{5}{12}$ есть двѣнадцатая часть числа 5 и т. п. Это новое представленіе дроби, какъ части цѣлаго сближаетъ вторую точку зрѣнія съ первой: дробь есть невыполненное дѣленіе.

2) Если мы назовемъ обращенныя числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\ldots$ дробными единицами, то можемъ сказать, что числовая мощность дробной единицы опредѣляется величиною ея знаменателя, и можетъ быть принята за счетную единицу. Это положеніе можно формулировать еще такъ: произведеніе какого-либо числа на число обращенное всегда равно единицѣ: $7 \times \frac{1}{7} = 1$.

Теперь мы можемъ разсмотрѣть, чему равно частное отъ дѣленія 3 на 7; оно равно тремъ дробнымъ единицамъ въ $\frac{1}{7}$, т.-е. это есть трехкратное число дробной единицы въ $\frac{1}{7}$.

Геометрически мы можемъ (черт. 7) раздѣлить отрѣзокъ OD, равный единицѣ, на 7 равныхъ частей и взять 3 такихъ части, получимъ ту же величину OB; это значитъ, что седьмая часть числа 3 есть въ то же время 3 седьмыхъ единицы.

Въ силу всего этого дробь $\frac{3}{7}$ мы можемъ представить только въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ: 1) Частное отъ дѣленія числа 3 на число 7; 2) какъ сумму дробныхъ единицъ $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$; 3) какъ произведеніе $3 \times \frac{1}{7}$.

Всякое иное представленіе дроби, хотя бы видѣ $\frac{1+1+1}{1+1+1+1+1+1+1}$ будетъ неправильнымъ, т.-е. несогласнымъ со сдѣланными условіями, и знаменатель дроби не есть совокупность единицъ, а числовая группа, соотвѣтственный членъ нормальнаго числоваго ряда.

§ 16. **Знакъ дроби и ея свойства.**

Въ § 6 мы условились понимать умноженіе на отрицательное число, какъ перемѣну направленія произведенія. Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что умножить на —1, это значитъ взять то же число въ противоположномъ направленіи. Такъ какъ дѣленіе есть дѣйствіе, обращенное по отношенію къ умноженію, то раздѣлить на -1, значитъ то же, что умножить на -1, т.-е. взять то же число въ противоположномъ направленіи. Отсюда слѣдуетъ, что всякое отрицательное число мы можемъ разсматривать или какъ произведеніе положительнаго числа на (-1), напримѣръ $-7=7\times(-1)$ или какъ частное отъ дѣленія положительнаго числа на (-1), напримѣръ $-7=\frac{7}{-1}$, подобно тому, какъ всякое положительное число можно представить какъ произведеніе числа на $+1$, или какъ частное числа на $+1$.

Теперь, если мы возьмемъ дробь въ буквенномъ видѣ $\frac{a}{b}$, гдѣ a и b могутъ быть какія утодно числа, положительныя или отрицательныя, то знакъ дроби не измѣнится, если мы одновременно перемѣнимъ знакъ въ числителѣ и знаменателѣ, потому что это будетъ соотвѣтствовать двумъ перемѣщеніямъ въ обратномъ направленіи; отсюда $\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}$.

При этомъ свойствѣ дроби, мы всегда можемъ условиться считать знаменатель всегда положительнымъ, потому что, если бы онъ оказался отрицательнымъ, то мы можемъ перемѣнить знаки того и другого члена дроби и сдѣлать знаменателя положительнымъ.

Итакъ, *знакъ дроби всегда будетъ одинаковъ со знакомъ ея числителя*, и мы можемъ написать $\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$; тогда на дробныя числа распространяется правило знаковъ цѣлыхъ чиселъ.

Кромѣ этого свойства, дробныя числа обладаютъ еще слѣдующими.

1) Всякая единица цѣлаго числа будетъ кратной дробной единицѣ, величина кратности равна знаменателю дроби. Вслѣдствіе этого, каждую единицу числа можно представить въ видѣ частнаго отъ дѣленія двухъ одинаковыхъ чиселъ, напримѣръ $\frac{n}{n}$.

2) Всякое цѣлое число можно представить въ видѣ дроби, числитель которой будетъ произведеніемъ числа на знаменателя дроби: напримѣръ $3=\frac{21}{7}$.

3) Всякая дробная единица можетъ быть принята за цѣлое и относительно ея можно сказать то же, что относительно цѣлой единицы, т.-е. что она можетъ быть раздѣлена на произвольное число частей. Возьмемъ $\frac{1}{4}$ и раздѣлимъ ее на n равныхъ частей, тогда въ цѣлой единицѣ будетъ $4n$ такихъ частей, и каждая часть будетъ равна $\frac{1}{4n}$, а $\frac{1}{4}$ будетъ равна $\frac{n}{4n}$. Мы можемъ сказать, что всякая дробная единица будетъ кратной новой меньшей дробной единицѣ и величина ея кратности равна занаменателю новой дроби.

4) *Основное свойство дроби.* Числовая величина дроби не измѣнится, если мы числителя и знаменателя ея умножимъ на одно и то же число. Возьмемъ дробь $\frac{3}{7}$: мы видѣли, что ее можно представить въ видѣ $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$; но каждое слагаемое по предыдущему можно представить въ видѣ $\frac{n}{7n}$, тогда $\frac{n}{7n}+\frac{n}{7n}+\frac{n}{7n}=\frac{3n}{7n}$ или $\frac{3}{7}=\frac{3n}{7n}$.

5) Если знаменатель дроби есть число кратное числителю, то данная дробь можетъ быть замѣнена болѣе крупной дробной единицей. Пусть намъ дана дробь $\frac{5}{20}$, здѣсь знаменатель есть число четырехкратное 5, значитъ эта дробь получилась изъ другой дроби, числитель и знаменатель которой были умножены на 5, эта дробь будетъ $\frac{1}{4}$.

6) Числовая величина дроби не измѣнится, если мы ея числителя и знаменателя раздѣлимъ на одно и то же число.

§. 17. **Неточное дѣленiе.**

Разсмотримъ теперь первый случай § 15, когда намъ даны два числа, не дѣлящiяся другъ на друга. Возьмемъ 17 и 7. Намъ нужно найти число, которое бы при умноженiи на 7 давало 17. Такого числа нѣтъ, но его можно опредѣлить приблизительно: можно взять 2, произведенiе 2 къ 7 даетъ 14 меньше 17; но если мы возьмемъ 3, то получимъ число больше 17, поэтому мы можемъ написать, что

$$3>\frac{17}{7}>2.$$

Если мы примемъ за частное $\frac{17}{7}$ число 2 или число 3, то говоримъ, что мы нашли его съ точностью до 1, т.-е. сдѣлали ошибку, меньшую единицы. Поищемъ, не будетъ ли точнаго числа въ десятыхъ доляхъ единицы; для этого обратимъ 17 въ десятыя доли, ихъ будетъ 170; $170:7=23$ или 24, мы можемъ написать $2{,}4>\frac{17_0}{7}>2{,}3$. Взявъ за частное числа 2,3 или 2,4 мы сдѣлаемъ ошибку, меньшую десятой доли единицы, поэтому говоримъ, что частное 2,3 взято съ точностью до 0,1.

Если мы будемъ продолжать такъ далѣе, опредѣляя сотыя, тысячныя доли, то направо и налѣво будемъ получать сближающіяся числа, которыя будутъ увеличивать точность нашихъ вычисленій, но не дадутъ полнаго совпаденія потому что частное $\frac{17}{7}$ нельзя выразить въ видѣ десятичной дроби.

Точное частное условились писать въ видѣ суммы $2\frac{3}{7}$, т.-е. оно имѣть 2 цѣлыхъ единицы и еще 3 седьмыхъ доли. Такое выраженіе называютъ смѣшаннымъ числомъ, а выраженіе $\frac{17}{7}$ — неправильной дробью.

Въ ариѳметикѣ доказывается, что дробныя числа подчиняются всѣмъ дѣйствіямъ надъ цѣлыми числами; причемъ, такъ какъ дробь есть число обращенное, то умноженіе на дробь соотвѣтствуетъ дѣленію, т.-е. нахожденію части цѣлаго, а дѣленіе на дробь соотвѣтствуетъ умноженію чиселъ, т.-е. нахожденію цѣлаго по части, и раздѣлить на дробь значитъ умножить на обращеннаго дѣлителя.

Кромѣ того, нетрудно доказать, что правила раскрытія скобокъ при сложеніи, вычитаніи, умноженіи и дѣленіи остаются справедливыми и тогда, когда въ составъ членовъ входятъ дроби.

§ 18. **Возвышеніе въ степень и извлеченіе корня.**

Кромѣ вышеразсмотрѣнныхъ дѣйствій въ математикѣ входятъ еще два: возвышеніе въ степень и извлеченіе корня; эти дѣйствія называютъ обратными, потому что совершая ихъ надъ однимъ и тѣмъ же числомъ, мы получимъ само число.

Возвышеніе въ степень есть сокращенная запись произведенія равныхъ производителей; напримѣръ, вмѣсто того, чтобы писать $5 \times 5 \times 5$, пишутъ 5^3. Число 5 называютъ основаніемъ, число 3 — показателемъ степени, а все выраженіе 5^3 — степенью или степеннымъ количествомъ.

Обратное дѣйствіе, когда намъ дано степенное количество, степень, въ которую было возвышено основаніе, и требуется узнать основаніе, это дѣйствіе называютъ — извлеченіемъ корня. Здѣсь намъ дано, что нѣкоторое количество, будучи возвышено въ третью степень, дало 125, какое было взято количество. Этотъ вопросъ принято записывать такъ $\sqrt[3]{125}$ и говорить: извлечь корень третьей степени.

Прямое дѣйствіе — возвышеніе въ степень всегда возможно; оно даетъ члены разсмотрѣнаго числового ряда; обратное не всегда возможно.

Если нельзя найти такое число, которое, будучи возвышено въ степень показателя корня, даетъ число подкоренное, то такія новыя числа называются ирраціональными, т.-е. несоизмѣримыми съ единицей.

Оба эти дѣйствія не входятъ въ предлагаемый курсъ, а потому будутъ разсмотрѣны позднѣе.

ГЛАВА II.

Количества и дѣйствія надъ ними.

§ 1. Величины.

Величинами называются такія свойства или качества предметовъ, по которымъ мы сравниваемъ предметы другъ съ другомъ. Такими свойствами будутъ: вѣсъ, время, длина, объемъ, скорость, работа и многія другія. Такъ, напримѣръ, если мы возьмемъ два разнородныхъ предмета: карандашъ и яблоко, то можемъ сравнить ихъ по вѣсу, по цѣнности; если мы возьмемъ карандашъ и листъ бумаги, то можемъ сравнить длину листа бумаги съ длиною карандаша. Отсюда ясно, что свойства предметовъ имѣть вѣсъ, имѣть длину, есть такое свойство, по которому мы можемъ ихъ сравнивать.

Кромѣ предметовъ наблюдаются еще явленія; всякое явленіе есть движеніе, а потому качествами явленій будутъ также величины, въ составъ которыхъ какъ простѣйшія входятъ время, скорость и прочія.

Каждая изъ величинъ представляетъ собою особыя свойства предметовъ или явленій, принадлежащія только этой величинѣ, а потому мы не можемъ сравнивать величины другъ съ другомъ, а исключительно куски или количества одной и той же величины. Но сами предметы могутъ содержать разныя величины, напримѣръ карандашъ имѣетъ опредѣленный вѣсъ, опредѣленный объемъ, опредѣленную стоимость, а потому величины должны находиться въ зависимости другъ отъ друга, вступать другъ съ другомъ въ опредѣленныя отношенія.

Разныя науки занимаются изученіемъ величинъ, ихъ свойствъ и взаимныхъ соотношеній. Для изученія измѣненій какой либо величины строится особый измѣрительный приборъ, при помощи котораго мы можемъ опредѣлить количество величины и сравнить его съ количествомъ той же величины, находящейся въ другомъ предметѣ. Такъ, напримѣръ, для изученія вѣса употребляютъ особый измѣрительный приборъ—вѣсы. Если мы на одну чашку вѣсовъ положимъ карандашъ, а на другую листъ бумаги, то карандашъ будетъ легче листа бумаги, и чашка подымется; если положимъ на одну чашку карандашъ, а на другую монету въ пять копѣекъ, то монета будетъ тяжелѣе карандаша. Мы можемъ поставить такой опытъ; сколько надо взять карандашей, чтобы ихъ вѣсъ былъ равенъ вѣсу монеты, тогда вѣсъ монеты выразится числомъ карандашей.

Нужно замѣтить, что далеко не для всѣхъ величинъ удалось придумать измѣрительные приборы, такъ, въ области психической жизни мы не имѣемъ возможности сравнивать величины, напримѣръ, память, вниманіе, умъ и прочее. Мы хорошо знаемъ, что память у разныхъ людей разная, но не можемъ сказать, ни на сколько одна память больше другой, ни восколько разъ одна память больше другой, т.-е. не можемъ выразить память числомъ.

Итакъ, главное свойство величинъ состоитъ въ томъ, что измѣримыя величины мы можемъ выразить числомъ; второе свойство, столь же важное, состоитъ въ изученіи зависимости одной величины отъ другой, съ ней разнородной.

Если мы знаемъ эту зависимость двухъ величинъ, то умѣя измѣрить одну, можемъ судить обо измѣненіи другой, тогда каждая изъ нихъ будетъ выражаться числомъ. Такъ, напримѣръ, изъ физики извѣстно, что количество вещества въ двухъ однородныхъ тѣлахъ точно соотвѣтствуетъ величинѣ давленія каждаго изъ нихъ на чашку вѣсовъ; а потому, зная вѣсъ тѣла, мы можемъ судить о его массѣ. Въ свою очередь массы однородныхъ тѣлъ находятся въ зависимости отъ объема тѣла; слѣдовательно масса, объемъ и вѣсъ находятся въ взаимной зависимости; съ измѣненіемъ объема, напримѣръ воды, измѣняется его масса, т.-е. количество вещества, измѣняется и вѣсъ этой массы, или то давленіе, которое оно производитъ на чашку вѣсовъ.

§ 2. **Понятіе о количествѣ. Единицы мѣры.**

Подъ словомъ «количество» мы будемъ понимать опредѣленный кусокъ какой-либо величины, напримѣръ, вѣсъ яблока, длина стола и т. п.

Для тѣхъ величинъ, для которыхъ существуютъ измѣрительные приборы, мы можемъ сравнивать ихъ количество другъ съ другомъ, въ результатѣ такого сравненія мы получаемъ число. Такое число называется именованнымъ, потому что оно *непремѣнно* и *обязательно* должно имѣть при себѣ указаніе на единицу мѣры.

За единицу мѣры какой-либо величины, для которой удалось построить измѣрительный приборъ, принятъ опредѣленный ея кусокъ.

Если эта величина была извѣстна уже давно, то такой кусокъ этой величины, т.-е. ея единица мѣры, имѣетъ прочно установленное, опредѣленное значеніе; таковы: аршинъ, сажень, верста, какъ единицы длины; золотникъ, фунтъ, пудъ—единицы вѣса; секунда, минута, часъ, сутки, мѣсяцъ, годъ—единицы времени. Если величина получила свой измѣрительный приборъ сравнительно недавно, то ея единицы мѣры имѣютъ согласительный, условный характеръ; таковы, напримѣръ, единицы мѣры электрической силы: вольтъ, омъ, амперъ; такова единица теплоты калорія и многія другія физическія единицы.

Въ различныхъ странахъ въ обиходѣ жизни находятся различныя единицы измѣренія, тогда какъ измѣримое количество одно и то же, вслѣдствіе этого одно и то же количество выражается различными числами, что затрудняетъ сужденіе о его величинѣ при международныхъ сношеніяхъ. Чтобы избѣжать этого недостатка въ настоящее время почти во всѣхъ государствахъ принята метрическая система. Въ основаніи этой системы находится метръ, составляющій $\frac{1}{40000000}$ часть парижскаго меридіана; метръ подраздѣляется на дециметры, сантиметры и миллиметры. Объемъ кубическаго дециметра принятъ за единицу объемовъ и называется литръ; масса дистилированной воды въ объемѣ $\frac{1}{1000}$ литра при температурѣ 4° Ц. принята за единицу массъ и называется масса-граммъ, а вѣсъ этой массы — за единицу вѣса и называется граммъ.

Такъ какъ величины находятся во взаимной зависимости другъ отъ друга, то въ наукѣ въ настоящее время установилась особая система измѣренія, которая называется *абсолютной системой единицъ*. Въ этой системѣ три единицы измѣренія называются *основными:* сантиметръ, граммъ и секунда.

Единицы измѣренія всѣхъ прочихъ величинъ выражаются въ этихъ основныхъ единицахъ и называются *производными*. Такъ, напр., площадь измѣряется въ квадратныхъ сантиметрахъ, и ея единица измѣренія выражается (1 сант. $\times$ 1 сант.) или (1 сант.)^2. Объемы измѣряются въ кубическихъ сантиметрахъ, которыя выражаются (1 сант.^{2})$\times$(1 сант.) или (1 сант.)^3. Если мы обозначимъ единицу длины въ одинъ сантиметръ буквой z, единицу площади въ одинъ квадратный сантиметръ буквой s, а единицу объема въ одинъ кубическій сантиметръ буквой v, то можемъ написать $s=z^2$ и $v=z^3$; эти равенства называются *формулами измѣреній.*

Въ настоящее время можно считать доказаннымъ, что основныхъ единицъ только три: единица длины, единица вѣса и единица времени; единицы измѣренія всѣхъ другихъ величинъ могутъ быть сведены къ этимъ простымъ единицамъ и являются производными.

§ 3. **Именованныя числа.**

Количество всякой измѣряемой величины мы можемъ выразить числомъ, такое число называется именованнымъ.

Такимъ образомъ всякое именованное число есть количество. При этомъ слѣдуетъ обратить особенное вниманіе на слѣдующее: 1) всякая величина измѣняется по тѣмъ особымъ свойствамъ, которыя ей присущи; 2) число есть только одинъ изъ способовъ выраженія величины, но не сама величина, вслѣдствіе чего возникаетъ основной вопросъ: можетъ ли быть всякое количество какой-либо величины выражено числомъ? Для отвѣта на этотъ вопросъ, надо вспомнить, что числа получены нами, какъ результатъ счета; эти счетныя числа мы пополнили искусственно, заполнивъ интервалы между ними дробями и получили безконечно близкія точки прямой линіи. Каждая величина обладаетъ свойствомъ непрерывности, а потому числовый рядъ, пополненный дробями, казалось, имѣлъ бы возможность точно отобразить количество величины. Однако, оказывается, что это не вполнѣ вѣрно. Мы можемъ при помощи числового ряда отобразить количество величины только приблизительно, съ нѣкоторою степенью точности. Есть количества однородныхъ величинъ, которыя не могутъ быть вполнѣ точно быть выражены числомъ; къ такимъ количествамъ относятся между прочимъ аршинъ и метръ; аршинъ не можетъ быть измѣренъ метромъ и метръ аршиномъ. Такія количества называются несоизмѣримыми. Для этихъ количествъ на числовой прямой нѣтъ точекъ, полученныхъ отъ счетнаго ряда съ дробными вставками. Изученіе несоизмѣримыхъ количествъ составитъ предметъ дальнѣйшаго курса, а въ настоящее время мы остановимся только на соизмѣримыхъ количествахъ.

Для соизмѣримыхъ количествъ примемъ за очевидное такое положеніе: *всякое соизмѣримое количество можетъ быть выражено числомъ.* При этомъ условимся въ слѣдующемъ. Положимъ, намъ дана нѣкоторая длина и единица мѣры—аршинъ; мы будемъ говорить, что $\frac{\text{длина}}{\text{аршинъ}}$ равна числу, откуда длина = числу $\times$ аршинъ.

Такимъ образомъ, если намъ дано 8 саженъ, то это есть произведеніе числа 8 на единицу мѣры — сажень.

Выраженіе $\frac{\text{длина}}{\text{единица длины}}$, $\frac{\text{вѣсъ}}{\text{единица вѣса}}$, $\frac{\text{время}}{\text{единица времени}}$ и т. п. называются отношеніями, а потому говорятъ, что по отношенію къ величинамъ *число есть отношеніе количества величины къ единицѣ мѣры.* Отсюда слѣдуетъ, что само число не выражаетъ количества величины, или обратно: количество величины не можетъ быть выражено числомъ; оно выражается произведеніемъ числа на единицу мѣры. Вслѣдствіе этого *мы не имѣемъ права* въ именованныхъ числахъ опускать наименованія и производить дѣйствія только надъ числами; другими словами дѣйствія, которыя мы производимъ надъ числами, не распространяются на количества, или дѣйствія надъ количествами имѣютъ особый смыслъ. Итакъ: 1) именованное число, выражающее количество величины, есть произведеніе числа на единицу мѣры; 2) дѣйствія надъ именованными числами не соотвѣтствуютъ дѣйствіямъ надъ числами отвлеченными и имѣютъ особый смыслъ.

§ 4. **Дѣйствія надъ количествами.**

Пользуясь правилами производства дѣйствій надъ числами, мы можемъ совершать надъ количествами дѣйствія и преобразованія. Подъ словомъ *дѣйствіе* мы будемъ понимать такую операцію, при которой получается новое количество или однородное съ данными или разнородное съ ними; подъ преобразованіемъ мы будемъ понимать такую операцію, когда одно и то же количество выражается разными числами.

Преобразованіе количествъ можетъ быть произведено въ двухъ направленіяхъ: 1) когда мы данное количество выражаемъ въ меньшихъ единицахъ измѣренія, 2) когда мы то же количество выражаемъ въ большихъ единицахъ измѣренія. Напримѣръ, 5 фунтовъ можетъ быть выражено какъ 160 лотовъ или 480 золотниковъ; такое преобразованіе называется *раздробленіемъ*. Но 5 фунтовъ есть $\frac{1}{8}$ пуда; такое преобразованіе называется *превращеніемъ*. Въ обоихъ случаяхъ само количество остается безъ измѣненія.

Дѣйствія надъ количествами. Надъ количествами мы можемъ совершать дѣйствія, которыя называются такъ же, какъ и дѣйствія надъ числами; но каждое дѣйствіе надъ количествами даетъ новое количество и имѣетъ свое собственное значеніе. Здѣсь надо различать дѣйствіе надъ количествами и вычисленіе, т.-е. способъ ихъ производства.

Сложеніе количествъ есть соединеніе ихъ при помощи знака $+$; такое соединеніе называется суммой. Вычисленіе суммы основывается на слѣдующихъ основныхъ положеніяхъ.

I. Основное положеніе. Сумма количествъ можетъ быть выражена однимъ числомъ только тогда, когда данныя количества однородны и измѣрены одной и той же единицей.

Слѣдуетъ замѣтить, что въ ариѳметикѣ во многихъ случаяхъ опускается знакъ соединенія и сумма количествъ пишется, какъ совокупность слагаемыхъ, напримѣръ, 2 пуда 8 фунт. есть скрытая сумма 2 пуда $+$ 8 фунт.; эту сумму мы можемъ выразить однимъ числомъ, преобразуя или пуды въ фунты, или фунты въ пуды: въ первомъ случаѣ мы получимъ 2 пуда $+$ 8 фунт. $=$ 80 фунт. $+$ 8 фунт. $=$ 88 фунт.; во второмъ случаѣ: 2 пуда $+$ 8 фунт. $=$ 2 пуда $+ \frac{1}{5}$ пуда $= 2\frac{1}{5}$ пуда;

при чемъ оба числа 88 и $2\frac{1}{5}$ въ свою очередь имѣютъ видъ скрытыхъ суммъ, 88 есть 8 десят. $+$ 8 един., $2\frac{1}{5}$ есть $2+\frac{1}{5}$. Послѣднія суммы есть условный способъ написанія чиселъ, а первыя суммы есть свойства суммъ количествъ. Однако, алгебраически мы не имѣемъ права воспользоваться ни тѣмъ ни другимъ условіемъ. Если бы намъ было дано m пудовъ $+\,n$ фунтовъ, то мы должны были бы написать $40m$ фунт. $+\,n$ фунтовъ; эту сумму, на основаніи числовыхъ свойствъ суммы (§ 11), мы можемъ представить въ видѣ $(40m+n)$ фунтовъ, гдѣ $40m+n$ есть число, подчиненное закону сложенія чиселъ. Точно также число 88 въ общемъ видѣ мы должны представить какъ 8 десятковъ $+$ 8 единицъ или $8\times 10+8$, что даетъ общій видъ двузначнаго числа $a\cdot 10+b$. Это обстоятельство показываетъ, что ариѳметическія условныя суммы, алгебраически должны быть раскрыты. Но, если мы подъ числомъ 88 будемъ разумѣть только опредѣленный числовой символъ, то намъ ясно будетъ основное положеніе сложенія m пуд. $+\,n$ фунт. $=40m$ фунт. $+\,n$ фунт., что мы можемъ обозначить однимъ числомъ p фунтовъ.

II. Основное положеніе. Всякая сумма однородныхъ и измѣренныхъ одной и той же единицей количествъ вполнѣ подчиняется закону суммы чиселъ, а именно: результатъ сложенія двухъ чиселъ не измѣнится, если мы одно изъ нихъ разложимъ на произвольныя части и послѣдовательно приложимъ ихъ въ произвольномъ порядкѣ къ другому числу.

Слѣдствія: 1) Сумма, имѣющая свойство быть сосчитанной, всегда больше каждаго изъ своихъ слагаемыхъ.

2) Равенство сосчитанныхъ суммъ не влечетъ за собою равенства слагаемыхъ.

III. Основное положеніе. Суммы, въ которыхъ знакъ $+$ есть знакъ соединенія, не подчиняются законамъ сложенія чиселъ, но подчиняются свойству перемѣстительности, т.-е. величина суммы не зависитъ отъ порядка сложенія слагаемыхъ. Въ этихъ суммахъ равенство ихъ можетъ влечь за собою и равенство слагаемыхъ.

Вычитаніе есть дѣйствіе противоположное сложенію, а потому оно подчиняется всѣмъ основнымъ положеніямъ сложенія; но кромѣ того какъ дѣйствіе надъ количествами, оно имѣетъ самостоятельное значеніе. Это самостоятельное значеніе состоитъ въ томъ, что мы можемъ при помощи вычитанія сравнивать количества одной и той же величины по вопросу: насколько одно изъ нихъ больше другого. Такое сравненіе носитъ особое названіе—ариѳметическое отношеніе.

При разсмотрѣніи вычитанія количествъ является вопросъ объ отрицательномъ количествѣ, соотвѣтствующемъ отрицательному числу. Въ этомъ отношеніи надо отмѣтить то, что вопросъ объ отрицательномъ количествѣ зависитъ отъ свойствъ разсматриваемой величины. Нѣкоторыя величины по существу не могутъ быть отрицательными, а другія по условіямъ вопроса. Если начало измѣреній условно, то количество можетъ быть какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ. Мы считаемъ начало лѣтосчисленія отъ Р. Хр.; всѣ года, которые текли до Р. Хр. будутъ отрицательными. Начало температуры мы считаемъ отъ температуры замерзанія воды, тогда градусы мороза отрицательны. Соотвѣтственно этому мы можемъ считать убытокъ, какъ отрицательную прибыль; долгъ, какъ отрицательный капиталъ и т. п. Всѣ эти отрицательныя значенія количествъ подчиняются законамъ отрицательныхъ чиселъ: капиталъ будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ больше долгъ; температура тѣмъ ниже, чѣмъ больше число градусовъ. Прибавить отрицательное количество значитъ вычесть его числовое значеніе; вычесть отрицательное количество значитъ прибавить его числовое значеніе.

Но есть величины, которыя не имѣютъ направленія, такъ, напримѣръ, если мы будемъ отсчитывать температуру отъ абсолютнаго нуля (-273^{0}), то такая температура отрицательной быть не можетъ. Точно также не можетъ быть отрицательнымъ разстояніе между городами; но если мы будемъ разсматривать движеніе человѣка между городами, то направленіе движенія въ одну сторону будетъ положительнымъ, а въ другую отрицательнымъ.

§ 5. Среднее ариѳметическое число.

Когда мы производимъ какія либо измѣренія величинъ, то вслѣдствіе отчасти несовершенства измѣрительныхъ приборовъ, отчасти вслѣдствіе несовершенства нашихъ чувствъ, мы никогда не можемъ получить безусловное точное число. Поэтому при научныхъ изслѣдованіяхъ принято производить измѣренія нѣсколько разъ и изъ этихъ измѣреній вычислять среднее число. Чтобы вычислить это число, поступаютъ такъ: складываютъ полученныя числа и сумму дѣлятъ на число ихъ.

Но, кромѣ неточности измѣреній, само явленіе можетъ измѣняться, и мы можемъ судить о немъ только тогда, когда изъ ряда наблюденій выведемъ среднее число. Такъ, напримѣръ, почти всегда мѣняется вѣсъ человѣка, который тщательно измѣряется и записывается, если кто либо лѣчится. Положимъ больной взвѣшиваясь каждую недѣлю, имѣлъ слѣдующій вѣсъ: $5^{п}\ 16^{ф}$; $5^{п}\ 14^{ф}$; $5^{п}\ 15^{ф}$; $5^{п}\ 13^{ф}$; $5^{п}\ 14^{ф}$; $5^{п}\ 12^{ф}$. Изъ этой строки мы видимъ, что вѣсъ его то повышается, то падаетъ, и можемъ сказать, что за это время *средній вѣсъ* больного былъ равенъ

$$\frac{5^{п}16^{ф}+5^{п}14^{ф}+5^{п}15^{ф}+5^{п}13^{ф}+5^{п}14^{ф}+5^{п}12^{ф}}{6} \text{ или } 5^{п}14^{ф}$$

На этомъ принципѣ основанъ выводъ средняго балла, при чемъ если получается дробь, то она отбрасывается. Пусть ученикъ получитъ слѣдующіе баллы 3, 5, 4, 2; его средній баллъ будетъ $\frac{3+5+4+2}{4}=3\frac{1}{2}$; но половина отбрасывается и ставится отмѣтка 3.

Въ жизни мы почти не имѣемъ абсолютно точныхъ измѣреній и всегда судимъ и производимъ разсчетъ по среднимъ числамъ. Возьмемъ два примѣра: 2 десятка сливъ вѣсятъ $1\frac{1}{2}$ фунта; мы можемъ сказать, что каждая слива этого сорта будетъ вѣсить $2\frac{2}{5}$ лота среднимъ числомъ, и это среднее число вполнѣ достаточно для нашего сужденія о достоинствѣ этого сорта сливъ. По нему мы можемъ разцѣнить сливы не по штучно, а по вѣсу; если десятокъ этихъ сливъ стоитъ 15 копѣекъ, то мы можемъ продавать ихъ по фунтамъ, разсчитавъ такъ: 10 сливъ будутъ вѣситъ 24 лота или $\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$ фунта и $\frac{3}{4}$ ф. стоитъ 15 копѣекъ, слѣдовательно фунтъ будетъ стоить $15:\frac{3}{4}=20$ коп.

Возьмемъ еще примѣръ. Пиленый сахаръ имѣетъ приблизительно куски одной и той же величины. Если мы сосчитаемъ число кусковъ въ фунтѣ сахара, то найдемъ 60 кусковъ, слѣдовательно каждый кусокъ среднимъ числомъ вѣситъ $\frac{1}{60}$ фунта или $1\frac{3}{5}$ золотника; а по этому разсчету можно продавать сахаръ по кускамъ.

Такимъ образомъ среднее число въ жизни играетъ очень важную роль, позволяя измѣнить способъ измѣренія; но оно играетъ еще болѣе важную роль при изученіи нѣкоторыхъ явленій. Какъ примѣръ, можно взять изученіе температуры воздуха. Температуру воздуха наблюдаютъ въ теченіе дня и составляютъ среднюю температуру дня. Положимъ, что утромъ было 13^0 тепла, въ полдень 21^0 тепла и вечеромъ 16^0 тепла, тогда средняя температура дня будетъ $\frac{13+21+16}{3}=16^0$. Градусы тепла принято считать положительными, а градусы холода отрицательными, и это отмѣчаютъ знаками $+$ и $-$. Если бы температура дня была частію положительная частію отрицательная, то къ отрицательнымъ количествамъ примѣняютъ правила отрицательныхъ чиселъ. Пусть въ теченіи сутокъ мы наблюдали такую температуру: $-5, -2, 0, 4, 6$; тогда средняя температура сутокъ будетъ

$$\frac{-5-2+4+6}{5}, \text{ что составитъ } +\frac{3}{5}^0.$$

Изъ среднихъ суточныхъ температуръ составляютъ среднія мѣсячныя, а изъ среднихъ мѣсячныхъ — среднія годовыя.

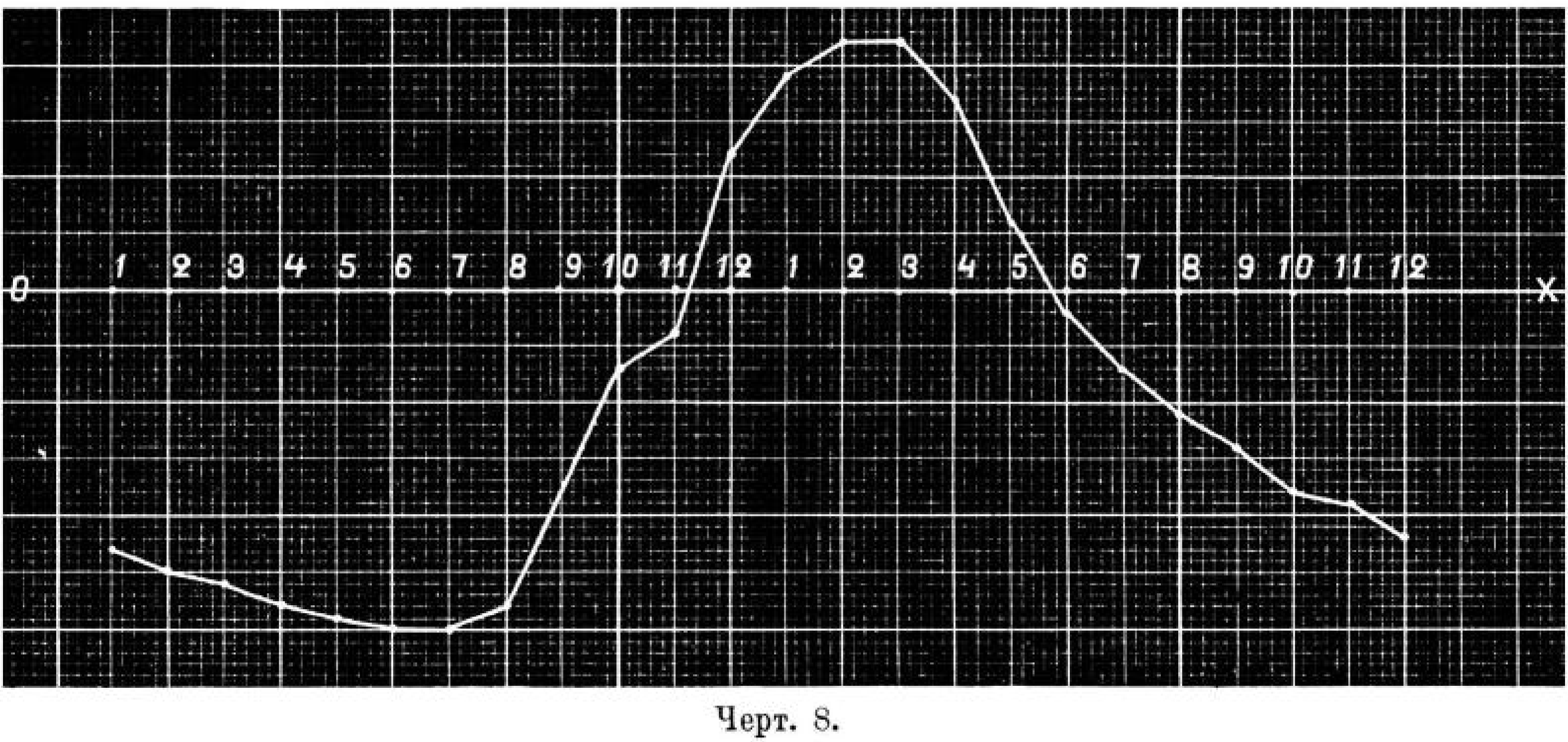
§ 6. **Графическій способъ изученія явленій.**

Мы брали среднюю температуру дня; измѣнимъ теперь нашъ способъ наблюденія: будемъ записывать ежечасныя измѣненія температуры воздуха въ январѣ мѣсяцѣ въ теченіи ряда лѣтъ и выведемъ среднія числа для этихъ температуръ, получимъ таблицу. Возьмемъ такую таблицу для города Тифлиса за январь мѣсяцъ.

Часы	темпер.	Часы	темпер.	Часы	темпер.	Часы	темпер.
1	—2°,3	7	—3,0	1	1,9	7	—0,7
2	—2,5	8	—2,8	2	2,2	8	—1,1
3	—2,6	9	—1,8	3	2,2	9	—1,4
4	—2,8	10	—0,7	4	1,7	10	—1,8
5	—2,9	11	0,4	5	0,6	11	—1,9
6	—3,0	12	1,2	6	—0,2	12	—2,2

Изъ этихъ наблюденій вытекаетъ средняя суточная температура —1,°0. Но кромѣ средней суточной температуры, намъ интересно прослѣдить самое измѣненіе ея въ теченіе дня; таблица не даетъ представленія объ этомъ измѣненіи, а потому принято представлять его графически.

Возьмемъ листъ бумаги, раздѣленный на милиметровыя клѣточки, проведемъ на немъ черту OX, на которой назначимъ часы, полагая на каждый часъ 5 милиметровъ; примемъ за градусъ сантиметръ, тогда 0,1° будетъ милиметръ, и условимся отрицательную температуру откладывать подъ чертой OX, а положительную надъ чертой. Отложивъ указанныя температуры и соединивъ между собою точки отложенія, получимъ кривую линію, которая выражаетъ графически измѣненія суточной температуры. (Черт. 8).



Черт. 8.

§ 7. Упражненія.

1) Вычертить кривую годичнаго измѣненія температуры въ гор. Одессѣ и вычислить среднюю годовую температуру.

Январь	—1°,9	Май	15°,0	Сентябрь	16,8
Февраль	—0,3	Іюнь	19,6	Октябрь	12,0
Мартъ	2,1	Іюль	22,3	Ноябрь	4,0
Апрѣль	8,1	Августъ	22,1	Декабрь	—0,5.

§ 8. Дѣйствія надъ количествами.

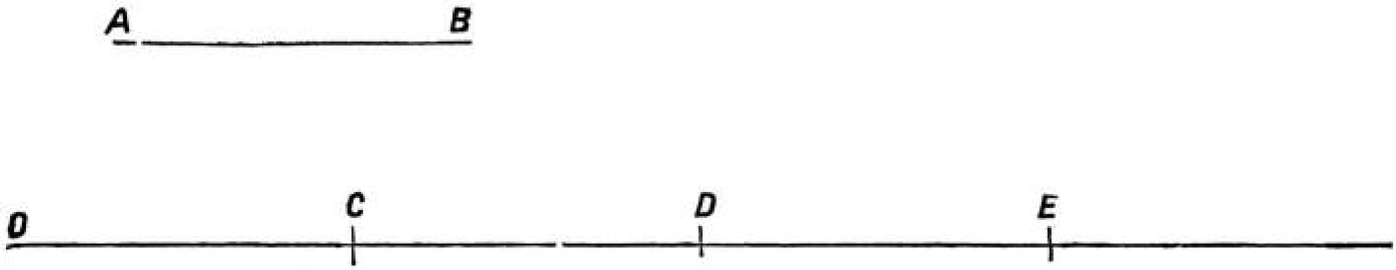
Умноженіе количествъ отличается отъ умноженія чиселъ тѣмъ, что въ количествахъ мы имѣемъ сложный символъ, состоящій изъ числа и наименованія единицы мѣры. Эти два символа нераздѣлимы, и мы не имѣемъ права отбрасывать наименованіе. Поэтому мы не можемъ разсматривать умноженіе, какъ сложеніе равныхъ слагаемыхъ, а должны придать ему особый смыслъ. Умноженіе количествъ мы раздѣлимъ на два совершенно обособленные случая: 1) умноженіе именованнаго числа на отвлеченное, 2) умноженіе именованнаго числа на именованное.

Умноженіе именованнаго числа на отвлеченное можетъ разсматриваться, какъ сложеніе равныхъ слагаемыхъ, но не подчиняется закону перемѣстительности; здѣсь множимое и множитель совершенно обособлены и не могутъ быть замѣнены одинъ другимъ. Оно представляетъ собою нахожденіе кратнаго данному количеству и подчинено основнымъ положеніямъ сложенія именованныхъ чиселъ. Его ариѳметическое и геометрическое производство одно и то же. Положимъ намъ нужно умножить 5 дюймовъ на 3; это значитъ, найти длину больше данной въ 3 раза или такую, которая была бы тройной кратной данной длины.

Ариѳметически мы поступаемъ такъ:

$$5 \text{ дюйм.} \times 3 = 5 \text{ дюйм.} + 5 \text{ дюйм.} + 5 \text{ дюйм.} = (5 + 5 + 5) \text{ дюйм. или } 5 \times 3 \text{ дюйм., т.-е. } 15 \text{ дюйм.}$$

Геометрически поступаемъ такъ: пусть отрѣзокъ AB, (черт. 9) есть длина въ 5 дюймовъ произвольнаго масштаба: на неопредѣленной прямой отъ точки O откладываемъ этотъ отрѣзокъ 3 раза, получимъ длину OE, равную 15 дюймамъ. Очевидно, что въ томъ и другомъ случаѣ мы производимъ сложеніе равныхъ слагаемыхъ.



Черт. 9.

Совершенно также находимъ кратное 4 фунтовъ, 17 секундъ и т. п.

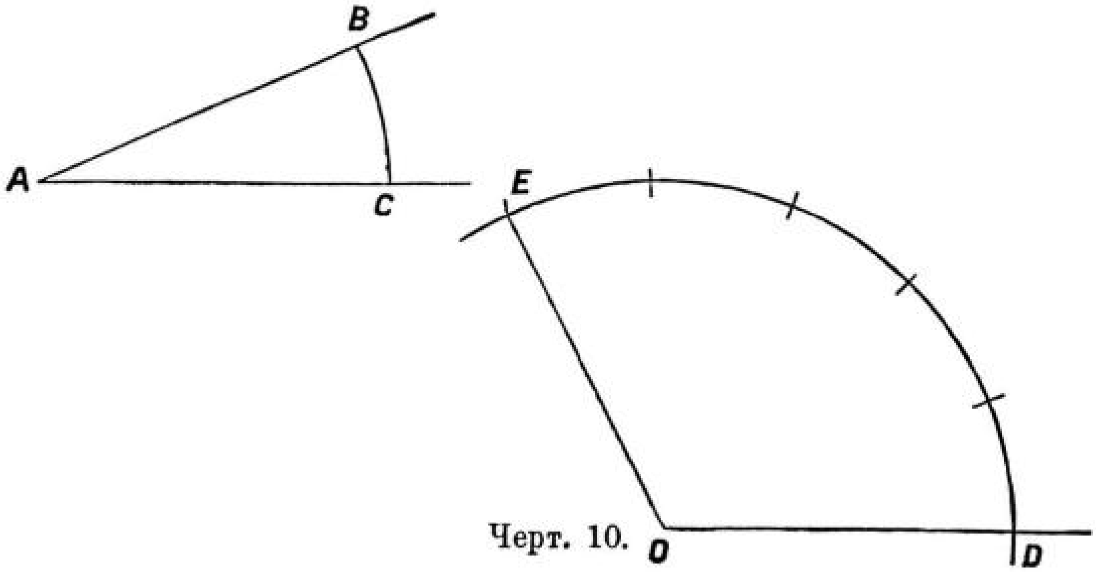
Разсмотримъ еще геометрическій примѣръ кратности угловъ. Углы измѣряются градусами слѣдующимъ образомъ: вся окружность дѣлится и 360 равныхъ частей и $\frac{1}{360}$ часть ея называется градусомъ; градусъ дѣлится на 60 минутъ, а минута на 60 секундъ. Градусъ обозначается нуль вверху. Минуты обозначаются одной черточкой вверху, а секунды— двумя. Такъ что, если намъ дано 36 градусовъ 15 минутъ 10 секундъ, то мы это запишемъ такъ $36^{\circ}15'10''$.

Приборъ, которымъ измѣряются углы называется *транспортиромъ*.

Положимъ намъ данъ какой нибудь уголъ, если мы примемъ вершину его за центръ и проведемъ дугу, то эта дуга будетъ служить мѣрой угла въ томъ размѣрѣ транспортира, который соотвѣтствуетъ радіусу этой дуги.

Пусть намъ данъ уголъ A, примемъ его вершину за центръ и опишемъ дугу BC (черт. 10). Тогда дуга BC будетъ измѣрять величину угла A; пусть намъ требуется найти другой уголъ, больше даннаго въ 5 разъ. Для этого мы проведемъ прямую линію OD, примемъ точку O за центръ и опишемъ дугу тѣмъ же радіусомъ, какимъ мы проводили дугу BC; на этой дугѣ отложимъ дугу BC

пять разъ, получимъ точку E, которую соединимъ съ O. Получимъ уголъ DOE въ пять разъ больше даннаго.



Черт. 10.

Умноженіе именованнаго числа на именованное представляетъ собою возможность отысканія новаго количества, которое образуется какъ произведеніе данныхъ. Образованіе новаго количества не является слѣдствіемъ нашей воли или нашего произвола, а вытекаетъ изъ свойствъ перемножаемыхъ количествъ. Мы не можемъ сказать, что произведеніе какихъ угодно двухъ количествъ даетъ новое количество; но есть такія количества, которыя получаются какъ произведеніе данныхъ.

Такъ, напримѣръ, величина работы зависитъ отъ количества рабочихъ и времени, поэтому мы можемъ разсматривать работу какъ произведеніе числа рабочихъ на время работы. Точно также площадь есть произведеніе линій; объемъ есть произведеніе площади на длину.

Разсмотримъ, какъ можно вычислить такое произведеніе: умножить 5 футовъ на 3 сантиметра. Мы уже условились, что 5 футовъ есть произведеніе 5 (1 футъ) и 3 сант. есть 3 (1 сант.). Поэтому 5 фут. $\times$ 3 сант. $=$ 5 (1 футъ) $\times$ 3 (1 сант.) или 5 $\times$ 3 (фут. $\times$ сант.).

Здѣсь футъ $\times$ сант. есть единица мѣры новаго количества, и наше произведеніе показываетъ намъ, что въ площади 5 фут. $\times$ 3 сант. содержится 15 единицъ площадей фут. $\times$ сант.

Итакъ, чтобы умножить именованное число на именованное, мы должны перемножить числа и единицы наименованій; произведеніе чиселъ даетъ намъ числовую величину новаго количества, а произведеніе единицъ—новую единицу.

Чтобы это умноженіе выполнить геометрически, мы должны построить прямоугольникъ, у котораго основаніе равно 5 футамъ, а высота 3 сант.

Обыкновенно за единицу мѣры площадей принимаютъ квадратъ, у котораго длина и ширины одинаковы, такая единица мѣры называется квадратной. Площадь прямоугольника, имѣющаго 8 футовъ длины и 5 футовъ ширины будетъ содержать 40 квадр. футовъ, что мы можемъ обозначить такъ 40 (фут.)^2.

Если бы намъ было дано, что заготовлено сѣно для 8 лошадей на 30 дней, то количество сѣна мы могли бы выразить такъ: 240 (лошадь $\times$ день), гдѣ произведеніе лошадь $\times$ день служитъ единицей мѣры.

Произведеніе именованныхъ чиселъ подчиняется закону перемѣстительности. Этотъ законъ очевиденъ для площадей, ибо площадь прямоугольника не измѣнится, если мы его длину примемъ за ширину, а ширину за длину; точно также количество сѣна будетъ одно и тоже, какъ для 8 лошадей на 30 дней, такъ и для 30 лошадей на 8 дней. Однако съ измѣненіемъ порядка множителей здѣсь вносится и новая черта—измѣняется условіе вопроса, чего нѣтъ и не можетъ быть, если мы разсматриваемъ только числа. Кромѣ того, и это очень важно, умноженіе количествъ есть самостоятельное дѣйствіе, дающее новыя количества, и оно не можетъ быть разсматриваемо, какъ сумма равныхъ слагаемыхъ.

Дѣленіе есть дѣйствіе обращенное умноженію, вслѣдствіе чего оно можетъ имѣть слѣдующія возможности.

1) Дѣленіе именованнаго числа на отвлеченное; въ этомъ случаѣ мы ищемъ часть цѣлаго, которую всегда можемъ выразить или цѣлымъ числомъ или дробью или числомъ смѣшаннымъ. Наименованіе частнаго будетъ всегда одинаково съ наименованіемъ дѣлимаго.

2) Дѣленіе именованнаго числа на число того же наименованія. Въ этомъ случаѣ мы ищемъ величину кратности, на которую распространяемъ понятіе дробности. Частное будетъ число отвлеченное.

3) Дѣленіе именованнаго числа на именованное другого наименованія. Этотъ случай дѣленія въ свою очередь распадается на два случая: на тотъ, гдѣ дѣлимое есть количество, полученное отъ умноженія именованныхъ чиселъ, тогда частное даетъ наименованіе другого множителя. Пусть намъ нужно работу раздѣлить на число рабочихъ, мы получимъ число дней; если мы площадь раздѣлимъ на длину, то получимъ ширину. Въ этомъ случаѣ вычисленіе производится такъ: числа дѣлятся другъ на друга, и единицы мѣры другъ на друга. Пусть мы имѣемъ 240 (раб. $\times$ день) и эту работу надо раздѣлить на 15 рабочихъ, получимъ $\frac{240}{15}\ \frac{\text{раб.} \times \text{день}}{\text{раб.}}$; $\frac{240}{15}$ даетъ 16, а частное $\frac{\text{раб.} \times \text{день}}{\text{раб.}}$ даетъ дни, и мы говоримъ, что искомое частное будетъ 16 дней. Здѣсь мы условливаемся распространять правило обращенности дѣленія на единицы мѣры.

Второй случай дѣленія разнородныхъ именованныхъ чиселъ будетъ тотъ, когда дѣлимое не есть произведеніе. Въ этомъ случаѣ дѣленіе не будетъ дѣйствіемъ обращеннымъ умноженію, а обратно: умноженіе есть дѣйствіе обращенное дѣленію. Дѣленіе есть дѣйствіе самостоятельное и даетъ новыя количества. Пусть, напримѣръ, какое нибудь тѣло въ 5 часовъ проходитъ 20 верстъ, двигаясь равномѣрно. Чтобы узнать скорость этого движенія, мы должны 20 верстъ раздѣлить на 5 часовъ, получить $\frac{20 \text{ верстъ}}{5 \text{ часовъ}}$. Это выраженіе условились вычислять такъ $\frac{20}{5}\ \frac{\text{верста}}{\text{часъ}}$; $\frac{20}{5}$ даетъ 4; слѣдовательно скорость движенія равно 4 $\frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}}$. Выраженіе $\frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}}$ есть единица скорости, а сама скорость есть новое количество, полученное какъ результатъ дѣленія данныхъ разнородныхъ именованныхъ чиселъ. Если намъ нужно найти, какое разстояніе тѣло пройдетъ въ 8 часовъ, то мы пишемъ $4 \frac{\text{верста}}{\text{часъ}} \times 8$ часовъ $= 4 \times 8\ \frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}} \times$ часъ. Произведеніе чиселъ даетъ 32, а произведеніе единицъ мѣры въ силу того, что умноженіе въ этомъ случаѣ есть дѣйствіе обращенное дѣленію, даетъ версты, слѣдовательно тѣло пройдетъ 32 версты.

Мы остановимся на этихъ 4 дѣйствіяхъ; возвышеніе въ степень и извлеченіе корня будутъ разсмотрѣны въ своемъ мѣстѣ.

ГЛАВА III.

Равенства и ихъ свойства.

§ 1. Различные типы равенства.

Понятіе о равенствѣ принадлежитъ къ числу основныхъ логическихъ понятій и опредѣлено быть не можетъ; но въ математикѣ установились различные термины, съ которыми необходимо познакомиться. Къ такимъ терминамъ принадлежитъ понятіе о равновеликости. Въ геометріи различаютъ двоякого рода фигуры: равныя и равновеликія. Равными называютъ такія фигуры, которыя при наложеніи совпадаютъ, а равновеликими тѣ, которыя имѣютъ одинаковую площадь или объемъ.

Эта разница понятій равенства и равновеликости не есть принадлежность одной только геометріи, она относится и къ другимъ количествамъ, такъ, напримѣръ, вѣсовыя гири мы должны считать равными, потому что безразлично какія именно мы будемъ брать для взвѣшиванія, тогда какъ равные вѣса двухъ веществъ (масла и хлѣба) будутъ равновелики. Точно также монеты будутъ имѣть равную цѣнность, тогда какъ какой либо товаръ будетъ имѣть равновеликую цѣнность.

Всѣ эти различія пропадаютъ, когда мы данное количество выразимъ числомъ, а потому въ алгебрѣ не различаютъ равенства и равновеликости, и считаютъ равновеликія количества равными.

Однако и въ алгебрѣ явилась необходимость различить равенства другъ отъ друга по ихъ внутреннему содержанію: одни равенства называютъ тождественными или тождествами, а другія—условными, или уравненіями. Въ основѣ этого различія положенъ тотъ же признакъ, который въ скрытой формѣ содержится въ понятіяхъ равенства и равновеликости. Равныя количества можно характеризовать такъ: это суть такія количества, которыя мы всегда можемъ замѣнить одно другимъ. Такъ мы можемъ брать разновѣсъ какой угодно, вмѣсто одного треугольника взять равный ему и т. д. Точно также тождествомъ будетъ такое равенство, въ которомъ его правая и лѣвая часть будутъ совершенно одинаковы.

Равновеликими будутъ такія количества, которыя дѣлаются равными при нѣкоторыхъ условіяхъ, такъ и въ уравненіяхъ равенство получается только при извѣстномъ условіи.

Если данныя числа или количества тождественно равны, то намъ не нужно искать тѣхъ признаковъ, по которымъ мы можемъ судить о ихъ равенствѣ; если же они равны условно, то мы должны выяснить, при какихъ обстоятельствахъ мы можемъ ихъ уравнять. Эти условія составляютъ элементы нашего сужденія о равенствѣ, при чемъ мы будемъ различать равенство чиселъ и равенство количествъ.

§ 2. **Равенство чиселъ**.

Такъ какъ въ нормальномъ числовомъ рядѣ, хотя и пополненномъ дробными числами, каждое число занимаетъ свое опредѣленное мѣсто и не имѣетъ себѣ равныхъ, то мы можемъ сказать, что два числа равны между собой, если они соотвѣтствуютъ одному и тому члену ряда. Это есть аксіома, которую можно формулировать такъ: *всякое число всегда тождественно равно самому себѣ*. Изъ этого слѣдуется:

1) Всякое число можно разсматривать, какъ результатъ произведеннаго дѣйствія. Въ самомъ дѣлѣ мы всегда можемъ число 3 разсматривать, какъ $2+1$ или какъ $5-2$, или $27:9$ и т. п., потому что каждое изъ этихъ дѣйствій приводитъ насъ къ одному и тому же члену числового ряда.

2) Если двѣ числовыя формулы, будучи вычислены, даютъ одно и то же число, то они равны между собой; напримѣръ $5 - 2 = 27 : 9$.

3) Умноженіе или дѣленіе на единицу не мѣняетъ величины числа: $5 = 5 \times 1$ или $\frac{5}{1}$.

4) Всѣ числовыя равенства будутъ тождествами, потому что совершенно безразлично, какъ мы выразимъ число въ видѣ ли одной цифры или въ видѣ болѣе или менѣе сложнаго ряда дѣйствій.

§ 3. **Равенство количествъ.**

По отношенію къ количествамъ мы должны установить особую аксіому: равными могутъ быть только количества одной и той же величины. Согласно этой аксіомѣ мы не можемъ уравнивать количества различныхъ величинъ: время вѣсу или длинѣ; но должны всегда имѣть въ правой и лѣвой части равенства одно и то же наименованіе.

Это будетъ основная аксіома равенства количествъ, но кромѣ нея мы должны еще установить слѣдующее: два количества будутъ равными, если они выражены однимъ и тѣмъ же числомъ и одной и той же единицей измѣренія. Равенство чиселъ не влечетъ за собой равенство количествъ, такъ 5 саж. не равно 5 арш. и 8 пудовъ не равно 8 фунт. Можно сказать даже, что равенство чиселъ какъ бы необязательно: количества могутъ быть равны, хотя числа ихъ выражающія будутъ разными; такъ, напримѣръ, 400 фунтовъ равно 10 пудамъ. Здѣсь мы имѣемъ разныя числа, но равныя количества. Это показываетъ, что нами установленъ необходимый но недостаточный признакъ равенства; его надо пополнить еще чѣмъ-нибудь, чтобы безошибочно судить о равенствѣ количествъ. Полная его формулировка будетъ слѣдующая: два количества будутъ равными, если выражающія ихъ числа будутъ относиться между собою такъ же, какъ единицы измѣренія. Пудъ больше фунта въ 40 разъ, и 400 больше 10 также въ 40 разъ.

Кромѣ того, здѣсь слѣдуетъ отмѣтить два обстоятельства:

1) О равенствѣ количествъ мы можемъ судить, не выражая ихъ числами. Такъ равенство вѣсовъ двухъ тѣлъ требуетъ равновѣсія прибора; равенство длинъ требуетъ ихъ совмѣщенія.

2) Числовое выраженіе величины подчиняется закону преобразованія чиселъ, поэтому мы всегда можемъ вмѣсто числа поставить какое угодно изъ его числовыхъ выраженій 6 фунт. $=(3\times 2)$ фунт. и т. п.

§ 4. **Части равенства**.

Каждое равенство содержитъ знакъ равенства ($=$). Все то, что находится по лѣвую сторону знака, называется первою или лѣвой частью равенства; все то, что находится по правую сторону знака, называется второю или правой частью равенства. Итакъ, всякое равенство имѣетъ только двѣ части: лѣвую — первую и правую — вторую. Такъ, напримѣръ, равенство $15-3=60:5$ имѣетъ двѣ части $15-3$ — первая часть и $60:5$ — вторая часть.

Иногда пишутъ рядъ равенствъ, напримѣръ, $45:9=3+2=60:12$; въ такой строкѣ содержится столько равенствъ, сколько есть знаковъ равенства: въ данномъ случаѣ два равенства. По существу въ написанной строкѣ мы имѣемъ три комбинаціи: $45:9=3+2$; $45:9=60:12$ и $3+2=60:12$; но двѣ изъ этихъ комбинацій самостоятельныя, а третья есть ихъ слѣдствіе, поэтому она и не считается особымъ равенствомъ. Такая строка представляетъ собою сокращенную запись нѣсколькихъ равенствъ и для разсужденія о каждомъ изъ нихъ мы непремѣнно и обязательно должны его выдѣлить такъ, чтобы равенство имѣло только двѣ части.

§ 5. **Члены равенства**.

Каждая часть равенства состоитъ изъ членовъ. Членомъ равенства считается выраженіе, имѣющее передъ собой знакъ $+$ или $-$. Такъ въ равенствѣ $45:9=3+2$, въ первой части только одинъ членъ, а въ правой два; также въ равенствѣ $(5+3)\times4=64:2$ въ каждой части равенства будетъ только по одному члену; но если мы раскроемъ скобки, и напишемъ $5\times4+3\times4=64:2$, то произведенія 5×4 и 3×4 будутъ отдѣльными членами и тогда лѣвая часть равенства будетъ содержать уже два члена.

§ 6. **Основныя свойства равенствъ**.

Основными свойствами равенствъ называются такія ихъ свойства, когда мы можемъ измѣнить числовую величину каждой части равенства, не нарушая самого равенства. Эти свойства были даны греческимъ математикомъ Эвклидомъ (315—255 г. до Р. Хр.) и изложены имъ въ сочиненіи «Начала», по отношенію къ геометрическимъ количествамъ; они названы Эвклидомъ аксіомы, т.-е. истины, не требующія доказательства. Справедливыя для геометрическихъ протяженій, они будутъ справедливы и по отношенію ко всякимъ количествамъ и числамъ. Всего у Эвклида аксіомъ 12; но послѣднія двѣ имѣютъ спеціально геометрическій характеръ; 10 остальныхъ я называю основными свойствами равенствъ. Они будутъ слѣдующія *).

1) *Два количества, равныя одному и тому же количеству, равны между собой.*

Эта аксіома является основной при нашихъ сужденіяхъ о равенствѣ и представляетъ собою логическую необходимость. Однако о приложеніи ея слѣдуетъ сказать нѣсколько словъ. Во-первыхъ, она не только очевидна, но и безусловно приложима къ числамъ; на основаніи ея мы можемъ быть твердо увѣрены, что двѣ числовыя формулы равны, если онѣ, будучи вычислены, даютъ одно и то же число (§ 2). Во-вторыхъ, она также очевидна и безусловно приложима къ количествамъ одной и той же величины; на основаніи этой аксіомы мы считаемъ вѣса двухъ тѣлъ равными, если каждое изъ нихъ уравновѣши-

*) Аксіомы изложены согласно принятой мною терминологіи.

вается одними и тѣми же разновѣсками. Но она приложима и къ такимъ величинамъ, которыя измѣряются не однородной съ ними единицей. Такъ, два угла равны, если измѣряются одной и той же дугой; двѣ массы равны, если имѣютъ одинъ и тотъ же вѣсъ и т. п. Это расширеніе основной аксіомы имѣетъ очень важное значеніе для установленія нѣкоторыхъ равенствъ.

2) *Если къ равнымъ количествамъ придать равныя, то получимъ равныя суммы.*

Эта аксіома также вполнѣ очевидна и безусловно приложима къ числовымъ равенствамъ и къ равенствамъ количествъ одной и той же величины; но обратное заключеніе въ этомъ случаѣ не будетъ справедливо: равенство суммъ не влечетъ за собою равенство слагаемыхъ. Но аксіома приложима и въ томъ случаѣ, когда мы къ равнымъ количествамъ одной величины присоединимъ равныя количества другой величины, тогда также получимъ равныя суммы. Въ этомъ случаѣ справедливо и обратное заключеніе: равенство суммъ влечетъ за собою и равенство слагаемыхъ. Напримѣръ, если два числа равны, то равны и числа ихъ разрядовъ.

3) *Если отъ равныхъ количествъ отнимемъ равныя количества, то получимъ равные остатки.*

Такъ какъ вычитаніе есть дѣйствіе, противоположное сложенію, то по существу аксіома 3 одинакова съ 2 и къ ней приложимо все то, что относится ко 2.

4) *Если къ неравнымъ количествамъ придадимъ равныя, то получимъ неравныя суммы.*

5) *Если отъ неравныхъ количествъ отнимемъ равныя количества, то получимъ неравныя остатки.*

6) *Равнократныя одного и того же количества или равныхъ количествъ равны между собой* *).

Эта аксіома можетъ разсматриваться какъ слѣдствіе

---

*) 6-ая аксіома Эвклида говоритъ о двойномъ количествѣ, но я ее замѣнилъ аксіомой 1-ой въ книгѣ V, такъ какъ въ такомъ видѣ она имѣетъ болѣе общее содержаніе. Но тогда къ ней нужно присоединить еще слѣдующія: количества, для которыхъ одно и то же количество есть равнократное, равны между собой. Въ текстѣ я это опускаю, такъ какъ оно не имѣетъ существеннаго значенія.

аксіомы второй, потому что равнократныя количества соотвѣтствуютъ сложенію количествъ, равныхъ даннымъ. Здѣсь сложеніе замѣняется умноженіемъ, но умноженіе разсматривается какъ сложеніе равныхъ слагаемыхъ. Мы можемъ обобщить аксіому, формулируя ее такъ: если равныя количества умножимъ на одно и то же число, то получимъ количества равныя.

Въ такой формулировкѣ слово умножить можно расширить и сказать такъ: если равныя количества умножимъ на одно и то же количество, то вновь полученныя количества будутъ равными.

Такая общая формулировка будетъ справедлива съ двумя ограниченіями, которыя не содержатся въ формулировкѣ Эвклида, а именно: мы не имѣемъ права множить на ноль и на безконечно большое число, потому что въ обоихъ случаяхъ можемъ уравнять и неравныя количества.

7) *Одинаковыя части одного и того же количества или количествъ равныхъ равны между собой* *).

Эта аксіома можетъ быть также формулирована иначе: если мы одно и то же количество или равныя количества раздѣлимъ на одно и то же число, то получимъ количества равныя. Такая формулировка вновь позволяетъ расширить понятіе о дѣленіи; но и даетъ ограниченія: мы не имѣемъ права дѣлить на ноль и на число безконечно большое, потому что въ этомъ случаѣ можемъ уравнять неравныя количества.

8) *Цѣлое больше своей части.*

Къ этимъ общимъ аксіомамъ Эвклидъ присоединяетъ еще слѣдующія геометрическія.

Величины, которыя при положеніи совмѣщаются, равны между собой.

Всѣ прямые углы равны между собой.

Двѣ прямыя не могутъ заключать пространства.

Передъ послѣдней аксіомой, которая по счету прихо-

---

*) Формулировка измѣнена: Эвклидъ говоритъ: половины одной и той же величины равны между собой.

дится 12-ой, находится знаменитая 11-ая аксіома Эвклида, которая относится къ теоріи параллельныхъ линій *).

§ 7. Преобразованіе равенствъ.

Преобразованіе равенства можетъ быть двоякое: преобразованіе членовъ равенства или его частей и преобразованіе самого равенства.

Первое преобразованіе состоитъ въ томъ, что мы имѣемъ право данное выраженіе преобразовать въ другое, не измѣняя его числовой величины. Такое преобразованіе можетъ состоять въ сокращеніи дробей, въ приведеніи ихъ къ одному знаменателю, въ раскрытіи скобокъ и сосчитываніи отдѣльныхъ членовъ равенствъ. Всѣ эти преобразованія совершенно не затрогиваютъ самого равенства, такъ какъ не измѣняютъ числовой величины каждой его части.

Пусть, напримѣръ, намъ дано числовое равенство

$$\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{8}\right)\times 16=91-(3\times 7+6\times 8)$$

Мы можемъ здѣсь раскрыть скобки, получимъ $12+10= =81-(3\times 7+6\times 8)$, можемъ перемножить произведенія и сосчитать полученную сумму, найдемъ $12+10=91-69$. Можемъ поступить иначе: приведемъ дроби къ одному знаменателю, получимъ $\frac{6+5}{8}\times 16=91-(3\times 7+6\times 8)$.

Произведемъ умноженіе въ лѣвой части и сократимъ дробь на 8, тогда $(6+5)\times 2=91-(3\times 7+6\times 8)$. Всѣ эти преобразованія не измѣнили числовой величины той и другой части, а потому и равенство осталось безъ перемѣны.

Второй видъ преобразованій гораздо важнѣе. На основаніи аксіомъ, указанныхъ въ предыдущемъ §, мы можемъ изъ даннаго равенства получить другое, въ которомъ каждая часть измѣнитъ свою числовую величину, но

*) Она формулирована такъ, если двѣ прямыя встрѣчаются третей такъ, что сумма внутреннихъ угловъ, лежащихъ по одну сторону третей, меньше двухъ прямыхъ угловъ, то двѣ первыя прямыя, по достаточномъ продолженіи, встрѣчаются по ту сторону третей прямой, по которой сумма внутреннихъ угловъ меньше двухъ прямыхъ.

новыя числовыя величины будутъ также равны. Эти преобразованія состоятъ въ слѣдующемъ.

1) *Каждый членъ равенства мы можемъ переносить изъ одной части въ другую, перемѣняя у него знакъ на обратный.*

Возьмемъ разсмотрѣнное равенство $(\frac{3}{4}+\frac{5}{8})\times 16 = 91 - (3\times 7+6\times 8)$ и разберемъ, какія у него будутъ члены. Въ лѣвой части равенства только одинъ членъ, если мы не будемъ раскрывать скобки; въ правой — два: 91 и сумма $(3\times 7+6\times 8)$. Если же мы раскроемъ всѣ скобки и напишемъ равенство въ видѣ $12+10=91-3\times 7-6\times 8$, то въ лѣвой части будетъ два члена: 12 и 10, а въ правой—три: 91, 3×7 и 6×8. Каждый изъ этихъ членовъ мы можемъ перенести изъ одной части равенства въ другую, перемѣняя у него знакъ. Положимъ, что мы хотимъ перенести членъ 6×8. Для этого напишемъ наше равенство и прибавимъ къ обѣимъ частямъ его по произведенію 6×8; на основаніи аксіомы 2 отъ этого равенство не нарушится, и мы получимъ

$$12+10+6\times 8=91-3\times 7-6\times 8+6\times 8.$$

Направо два одинаковыхъ произведенія съ разными знаками даютъ ноль; слѣдовательно $12+10+6\times 8=91-3\times 7$. Вычисливъ ту или другую часть равенства, найдемъ $70=70$; мы получили новыя числа: было $22=22$, стало $70=70$; но эти новыя числа остались равными.

Совершенно также мы можемъ 10 перенести въ правую часть равенства, вычтя по 10 изъ обѣихъ частей, найдемъ

$$12+10+6\times 8-10=91-3\times 7-10,$$

или $$12+6\times 8=91-3\times 7-10;\ 60=60.$$

Мы можемъ перенести цѣлое выраженіе $3\times 7+6\times 8$, если не будемъ раскрывать скобокъ, и написать

$$(\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{8})\times 16+(3\times 7+6\times 8)=91.$$

Наконецъ, мы можемъ всѣ члены перенести въ одну часть равенства, тогда въ другой будетъ ноль, и написать такъ

$$\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{8}\right)\times+(3\times 7+6\times 8)-91=0.$$

Каждое изъ этихъ преобразованій даетъ новыя числа, но эти числа останутся равными.

2) Если мы обѣ части равенства умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число, то равенство не нарушится (аксіомы 6 и 7).

На основаніи этого мы можемъ во всякомъ равенствѣ освободиться отъ дробей, приведя ихъ къ одному знаменателю и умноживъ обѣ части на общаго знаменателя. Разсмотримъ два случая: 1) когда дроби находятся только въ одной части равенства. Пусть дано равенство

$$\left(\tfrac{4}{5}-\tfrac{5}{7}\right)\times 70=6.$$

Приведемъ дроби къ одному знаменателю, получимъ $\frac{28-25}{35}\times 70=6$; умножимъ обѣ части равенства на 35, получимъ $(28-25)\times 70=6\times 35$. Мы получимъ равенство, въ которомъ дроби уничтожились.

Второй случай, когда обѣ части равенства содержатъ дроби; тогда можно каждую изъ нихъ привести къ одному знаменателю и умножить обѣ части равенства на наименьшее кратное знаменателей; или привести все равенство къ одному знаменателю и потомъ знаменителя опустить, что и будетъ соотвѣтствовать умноженію обѣихъ частей на общаго знаменателя. Возьмемъ такое равенство

$$7-\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{12}=5\tfrac{1}{2}+1\tfrac{1}{6}.$$

Общій знаменатель первой части будетъ 12, а второй—6, и мы можемъ написать

$$\frac{84-9+5}{12}=\frac{33+7}{6}$$

Умноживъ обѣ части равенства на 12, получимъ $84-9+5=(33+7)\times 2$.

Мы можемъ поступить иначе: обратимъ смѣшанныя числа въ неправильныя дроби, получимъ $7-\frac{3}{4}+\frac{5}{12}=\frac{11}{2}+\frac{7}{6}$. Замѣтимъ, что общій знаменатель всего равенства будетъ 12, напишемъ дополнительные множители, тогда $7 \times 12 - 3 \times 3 + 5 = 11 \times 6 + 7 \times 2$. Мы получиимъ равенство, не содержащее дробей.

Если обѣ части равенства содержатъ одинаковаго множителя, то мы имѣемъ право раздѣлить на этого множителя, отчего равенство не нарушится. Возьмемъ такое равенство

$$\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right) \times 6 = 48 - \tfrac{258}{6}$$

Если мы въ правой части равенства возьмемъ за скобки 6, то получимъ

$$\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right) \times 6 = 6 \times \left(8 - \tfrac{43}{6}\right)$$

Теперь обѣ части можемъ раздѣлить по 6 и упростить вычисленіе.

Итакъ, преобразованіе равенствъ приводитъ насъ къ слѣдующимъ правиламъ.

1) Мы имѣемъ право переносить членъ равенства изъ одной части въ другую, мѣняя его знакъ.

2) Мы имѣемъ право уничтожить дробные члены, приведя всѣ части равенства въ обѣихъ частяхъ къ одному знаменателю и опустить этотъ знаменатель.

§ 8. **Задачи.**

Преобразовать равенства

1) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{13}{24} = 3.$

2) $\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) \times 2 + \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) \times 4 = 7\frac{3}{8} - 3\frac{7}{8}$

3) $\dfrac{3\frac{2}{7} - 2}{5\frac{2}{3} - 4\frac{1}{6}} = \frac{6}{7}.$

§ 9. **Приложеніе свойствъ равенствъ.**

Ученіе о равенствахъ даетъ возможность легко и просто доказать нѣкоторыя свойства чиселъ, полученныхъ какъ результатъ произведенныхъ дѣйствій. Разсмотримъ нѣкоторыя изъ этихъ свойствъ:

1) Если одно число при дѣленіи на другое даетъ остатокъ, то разность между дѣлимымъ и остаткомъ будетъ кратной другого числа.

Возьмемъ два числа a и b и пусть при дѣленіи a на b мы получимъ частное g и остатокъ r, тогда $a=bg+r$; перенесемъ r въ лѣвую часть равенства, получимъ $a-r=bg$, что и доказываетъ нашу теорему.

2) Если уменьшаемое и вычитаемое умножимъ на какое нибудь число, то и остатокъ умножится на это число.

Возьмемъ два числа a и b и обозначимъ остатокъ черезъ d, тогда $a-b=d$; умножимъ обѣ части равенства на число m, получимъ $(a-b)m=dm$ или $am-bm=dm$, что и требовалось доказать.

3) Если дѣлимое и дѣлителя умножимъ на какое нибудь число, то и остатокъ отъ дѣленія умножится на это число. Возьмемъ число a и b; пусть при дѣленіи a на b получимъ частное g и остатокъ r, тогда $a=bg+r$; перенесемъ bg въ лѣвую часть равенства, тогда $a-bg=r$ и теперь по предыдущей теоремѣ заключаемъ, что если a и bg умножимъ на число m, то и остатокъ r умножится на это число.

4) Если мы къ числителю и знаменателю дроби прибавимъ одно и то же число, то правильная дробь отъ этого увеличится, а неправильная уменьшится.

Возьмемъ дробь $\frac{a}{b}$, о которой мы пока ничего не можемъ сказать, правильная она или неправильная; но все таки мы знаемъ, что если $a>b$, то дробь неправильная; если $a<b$, то правильная.

Прибавимъ къ числителю и знаменателю ея число m, получимъ новую дробь $\frac{a+m}{b+m}$. Чтобы сравнить новую дробь съ данной, приведемъ ихъ къ одному знаменателю, для этого умножимъ числителя и знаменателя первой дроби на $b+m$, а числителя и знаменателя второй на b получимъ:

$$\frac{a}{b}=\frac{a(b+m)}{b(b+m)}=\frac{ab+am}{b(b+m)} \quad \text{и} \quad \frac{a+m}{b+m}=\frac{(a+m)b}{(b+m)b}=\frac{ab+bm}{(b+m)b}.$$

Мы получили двѣ дроби $\frac{ab+am}{b(b+m)}$ и $\frac{ab+bm}{(b+m)b}$ съ одинаковыми знаменателями, и знаемъ что та изъ нихъ больше, у которой числитель больше. Чтобы узнать, который изъ числителей больше, вычтемъ изъ перваго второй, получимъ $(ab+am)-(ab+bm)$ или $ab+am-ab-bm$. Здѣсь ab сокращается, и мы находимъ, что искомая разность равна $am-bm$ или, взявъ m за скобки, получимъ $(a-b)\ m$. Теперь разсуждаемъ такъ: если $a>b$, то разность положительная и вторая дробь меньше первой, т.-е. если данная дробь $\frac{a}{b}$ неправильная, то она уменьшится отъ прибавленія къ ея числителю и знаменателю числа m. Если $a<b$, то разность отрицательная, значитъ первая дробь меньше второй, т.-е. если данная дробь $\frac{a}{b}$ правильная, то она увеличится, когда мы къ ея числителю и знаменателю прибавимъ число m.

§ 10. **Ариѳметическое отношеніе и его свойства.**

Ариѳметическимъ отношеніемъ называется сравненіе двухъ количествъ по вопросу, на сколько одно изъ нихъ больше другого. Если количества выражены числами, то ариѳметическое отношеніе количествъ равно ариѳметическому отношенію чиселъ, а потому намъ важно разсмотрѣть только это послѣднее и все то, что можно сказать объ ариѳметическомъ отношеніи чиселъ будетъ приложимо къ ариѳметическому отношенію количествъ. Точно такъ же все то, что будетъ вытекать изъ отношенія чиселъ будетъ въ то же время служить выясненіемъ свойствъ количествъ.

Такъ какъ свойства ариѳметическаго отношенія не могутъ зависѣть отъ числовой величины его членовъ, то ихъ можно обозначить буквами. Возьмемъ два числа a и b, ариѳметическое отношеніе ихъ будетъ $a-b$, обозначимъ величину разности буквой d, тогда $a-b=d$.

Числа a, b, d называются членами отношенія: число a предыдущимъ членомъ, b — послѣдующимъ, а d — разностью отношенія.

Итакъ, ариѳметическое отношеніе состоитъ изъ трехъ членовъ: предыдущаго, послѣдующаго и разности. Чтобы опредѣлить разность, нужно изъ предыдущаго члена вычесть послѣдующій, такъ, напр., разность отношенія $12-5$ равна 7; разность отношенія $35-4$ равна 31 и т. д.

Изъ свойствъ равенствъ легко вывести свойства членовъ ариѳметическаго отношенія; они будутъ слѣдующія:

1. *Предыдущій членъ равенъ послѣдующему, сложенному съ разностью отношенія.* Чтобы убѣдиться въ справедливости этого свойства, намъ достаточно въ отношеніи $a-b=d$ перенести членъ b въ другую часть равенства, тогда $a=b+d$, что и выражаетъ высказанное свойство.

2. *Послѣдующій членъ равенъ предыдущему безъ разности отношенія.* Чтобы убѣдиться въ этомъ, перенесемъ b въ правую часть равенства, а d — въ лѣвую, тогда $a-d=b$ или $b=a-d$.

На основаніи этихъ свойствъ мы можемъ опредѣлить тотъ членъ отношенія, который намъ неизвѣстенъ. Неизвѣстный членъ обозначаемъ обыковенно одной изъ послѣднихъ буквъ латинскаго алфавита, обозначимъ его буквой x и напишемъ такое отношеніе. $15-x=7$.

Въ этомъ отношеніи неизвѣстенъ послѣдующій, который равенъ предыдущему безъ разности, слѣдовательно $x=15-7$ или $x=8$. Это же самое мы могли бы получить, пользуясь свойствами равенства.

§ 11. **Ариѳметическая пропорція.**

Ариѳметической пропорціей называется равенство двухъ ариѳметическихъ отношеній, а два ариѳметическихъ отношенія равны, если равны ихъ разности. Въ числахъ не представляется никакихъ затрудненій, въ е. д. возьмемъ числовое отношеніе $15-2=13$ и другое отношеніе $27-14=13$, оба отношенія очевидно равны, и мы можемъ написать: $15-2=27-14$. Вообще говоря, если мы нашли, что $a-b=d$ и $m-n=d$, то можемъ написать $a-b=m-n$; такое равенство есть ариѳметическая пропорція.

Что касается до количествъ, то здѣсь пропорція не всегда возможна, она обусловливается требованіями ариѳметическаго отношенія количествъ и требованіями равенства количествъ. Ариѳметическое отношеніе мы можемъ отыскивать только для количествъ одной и той же величины, и равенство мы тоже можемъ установить только для однородныхъ количествъ. Въ силу этого, оба требованія приводятъ насъ къ одному условію: ариѳметическая пропорція возможна только для количествъ одной и той же величины. Мы не можемъ уравнивать вѣса и длины, объемы и время и т. п. хотя бы ариѳметическія отношенія ихъ и были равны.

Количества въ предѣлахъ одной и той же величины подчиняются всѣмъ свойствамъ чиселъ, слѣдовательно свойства ариѳметической пропорціи будутъ одними и тѣми же какъ для чиселъ, такъ и для количествъ, а потому достаточно разсмотрѣть свойства числовыхъ пропорцій. Возьмемъ пропорцію въ общемъ видѣ:

$$a-b=m-n.$$

Числа a, b, m и n называются членами пропорціи; мы видимъ, что всякая ариѳметическая пропорція состоитъ изъ 4 членовъ. Два изъ нихъ a и n называются крайними, а два b и m — средними членами пропорціи. Если бы случилось, что средніе члены одинаковы, напр., $a-b=b-k$, то членъ b называется среднимъ ариѳметическимъ. Такое наименованіе не отличаетъ его отъ средняго ариѳметическаго данныхъ чиселъ, и въ этомъ нѣтъ ничего опаснаго, потому свойства средняго ариѳметическаго пропорціи совершенно тѣ же, что и свойства средняго ариѳметическаго данныхъ чиселъ.

§ 12. **Свойство членовъ пропорціи.**

Основное свойство членовъ ариѳметической пропорціи будетъ: *сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ.*

Это свойство мы можемъ вывести изъ свойствъ равенства. Возьмемъ пропорціи $a-b=m-n$ и перенесемъ члены b и n въ другія части, тогда $a+n=b+m$.

На основаніи этого свойства можно опредѣлить неизвѣстный членъ пропорціи. Возьмемъ числовой примѣръ $15 - x = 17 - 4$.

Неизвѣстное x мы можемъ вычислить двояко: 1) Опредѣлить величину ариѳметическаго отношенія $17 - 4 = 13$, такъ и $15 - x = 13$. Изъ свойствъ отношенія мы знаемъ, что если $15 - x = 13$, то $x = 15 - 13$ или $x = 2$.

2) Воспользуемся свойствомъ пропорціи: сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ, тогда $15 + 4 = 17 + x$ или $x + 17 = 19$, откуда по свойству равенства $x = 19 - 17$; $x = 2$.

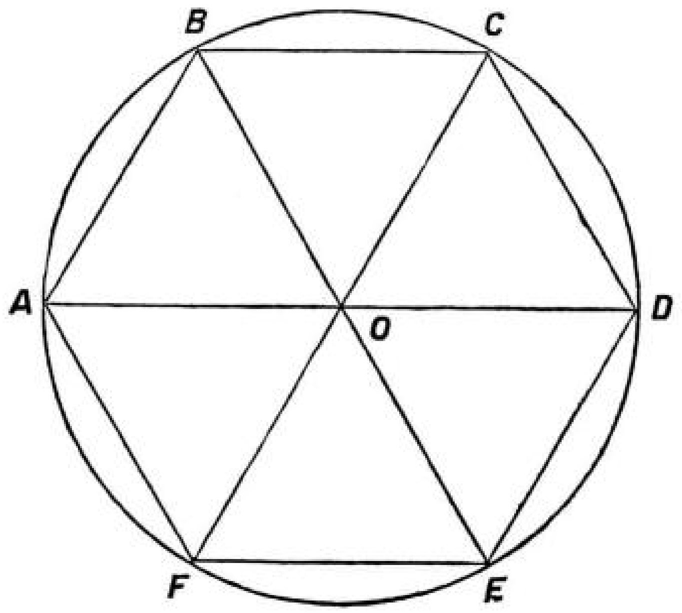
Въ числовыхъ пропорціяхъ оба способа рѣшенія одинаково удобны и всегда могутъ быть примѣнимы. Но указанное основное свойство пропорціи весьма важно для вывода слѣдствія: мы можемъ переставить члены пропорціи, такъ, чтобы основное свойство ея не нарушалось. Очевидно оно не нарушится, если мы переставимъ мѣсто крайнихъ или среднихъ или тѣхъ и другихъ: напр., пропорція $a - b = m - n$, можемъ написать въ видѣ $n - b = m - a$, или $a - m = b - n$, или $b - a = n - m$. Во всѣхъ этихъ пропорціяхъ основное равенство $a + n = b + m$ остается справедливымъ.

ГЛАВА IV.

Понятіе о функціи.

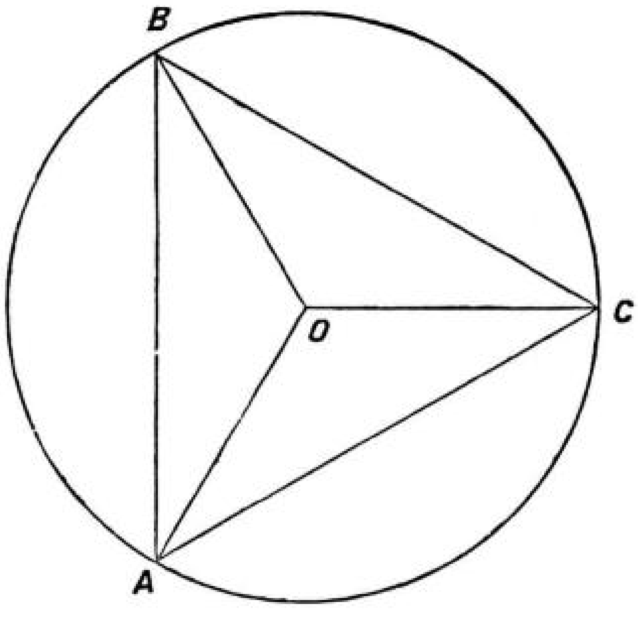
§ 1. Построеніе правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ.

Шестиугольникъ. Возьмемъ циркуль и начертимъ окружность, на этой окружности отложимъ хорды, равныя радіусу, получимъ правильный вписанный шестиугольникъ $ABCDEF$ (черт. 11). Разсматривая этотъ шестиугольникъ, мы находимъ въ немъ 6 угловъ: A, B, C, D... эти углы называются внутренними. Если мы вершины угловъ соединимъ съ центромъ, то при центрѣ получимъ также 6 угловъ: AOB, BOC, COD и т. д.; эти углы называются центральными. Очевидно, что они равны между собой, и сумма всѣхъ центральныхъ угловъ равна 360°.



Черт. 11.

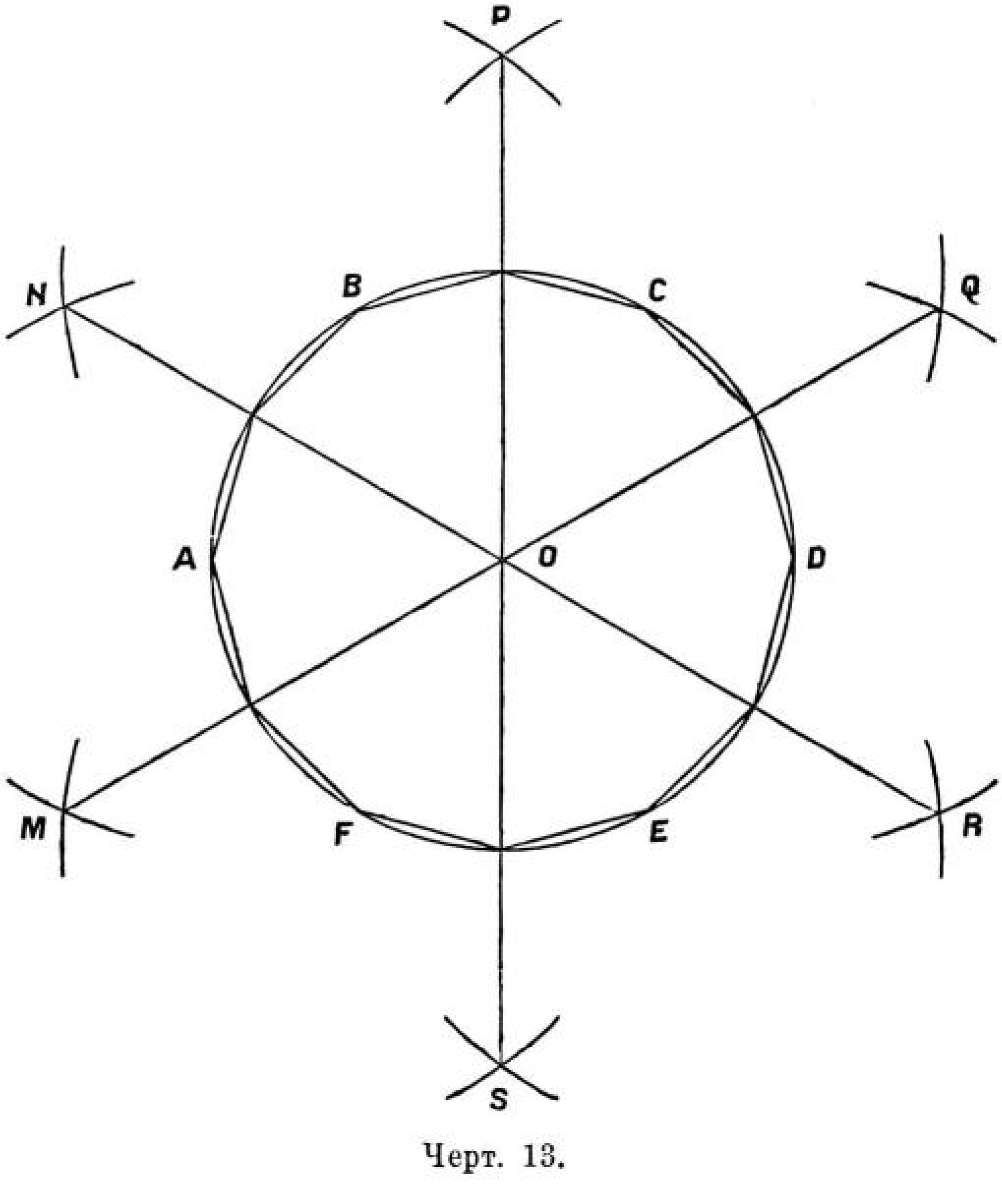
Треугольникъ. Начертимъ окружность и отложимъ на ней радіусъ, онъ уложится 6 разъ; соединимъ полученныя точки черезъ одну, тогда мы получимъ правильный вписанный треугольникъ ABC (черт. 12). Этотъ тре-



Черт. 12.

угольникъ имѣетъ три внутреннихъ угла: A, B и C. Если мы вершины этихъ угловъ соединимъ съ центромъ круга, то получимъ три равныхъ центральныхъ угла: AOB, BOC и AOC. Сумма этихъ угловъ равна 360°.

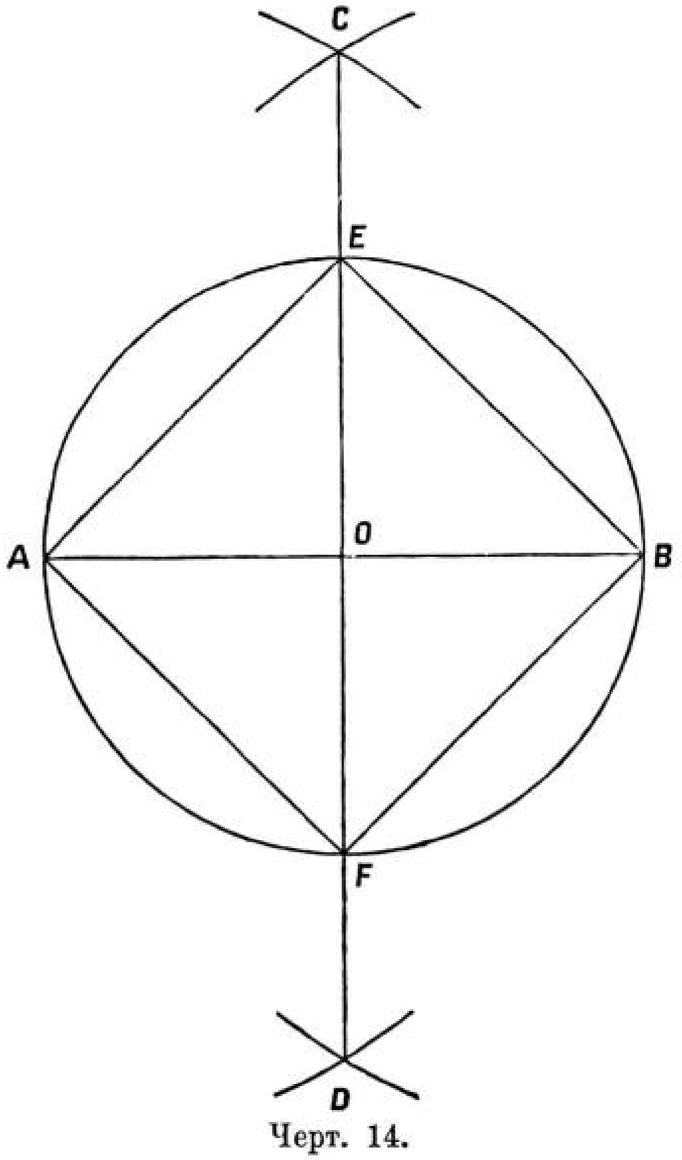
Двѣнадцатиугольникъ. Начертимъ окружность и отложимъ радіусъ, получимъ 6 точекъ: A, B, C, D и F. Примемъ точку A за центръ и произвольнымъ радіусомъ опишемъ двѣ дуги внѣ окружности съ одной стороны точки A и съ другой. Точно также примемъ точку B за центръ и также опишемъ двѣ дуги. Сдѣлаемъ это со всѣми точками C, D, E и F. Всѣ эти дуги пересѣкутся въ точкахъ M, N, P, Q, R и S. Эти точки пересѣченія соединимъ съ центромъ O; прямая MO раздѣлитъ дугу AF пополамъ, прямая NO раздѣлитъ пополамъ дугу AB и т. д. На окружности мы получимъ 12 точекъ, соединивъ которыя, получимъ правильный двѣнадцатиугольникъ, который имѣетъ 12 внутреннихъ угловъ; а если мы вершины этихъ



Черт. 13.

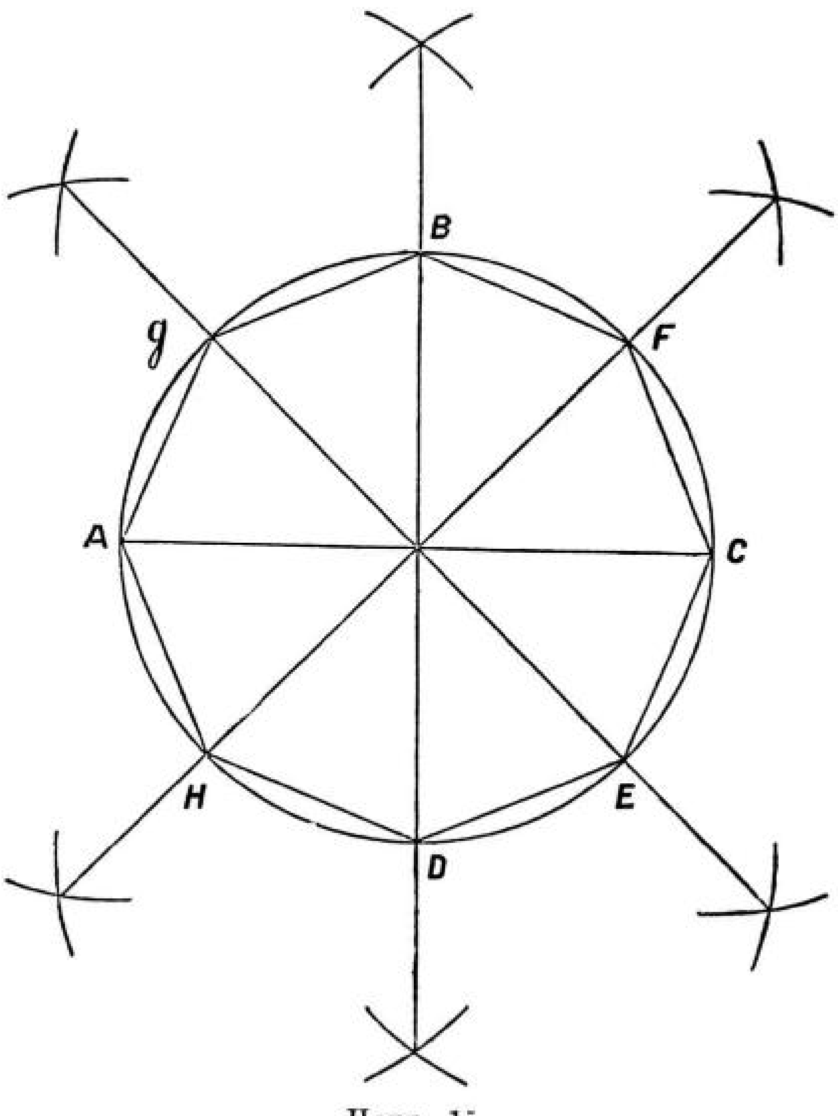
угловъ соединимъ съ центромъ O, то получимъ 12 центральныхъ угловъ, сумма которыхъ равна 360°. (Черт. 13).

Квадратъ. Начертимъ окружность и проведемъ въ ней діаметръ AB. Изъ точекъ A и B произвольнымъ радіусомъ (напримѣръ, равнымъ діаметру AB) проведемъ дуги по ту и по другую сторону окружности. Получимъ точки C и D. Соединивъ ихъ, получимъ прямую CD, которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ E и F. Соединивъ точки A, E, B, F, получимъ вписанный квадратъ, который имѣетъ 4 внутреннихъ угла и 4 центральныхъ угла: AOE, EOB, BOF и FOA; сумма центральныхъ угловъ равна 360°. (Черт. 14).



Черт. 14.

Восьмиугольникъ. Впишемъ въ окружность квадратъ $ABCD$, причемъ каждую изъ его вершинъ примемъ за центръ и опишемъ произвольнымъ радіусомъ дуги, которыя пересѣкутся внѣ окружности. Соединимъ полученныя точки съ центромъ; эти линіи пересѣкутъ окружность въ точкахъ E, F, G и H. Если мы теперь послѣдовательно соединимъ точки на окружности, то получимъ правильный восьмиугольникъ. Этотъ восьмиугольникъ имѣетъ 8 внутреннихъ угловъ и 8 центральныхъ; сумма всѣхъ центральныхъ угловъ равна 360°. (Черт. 15).

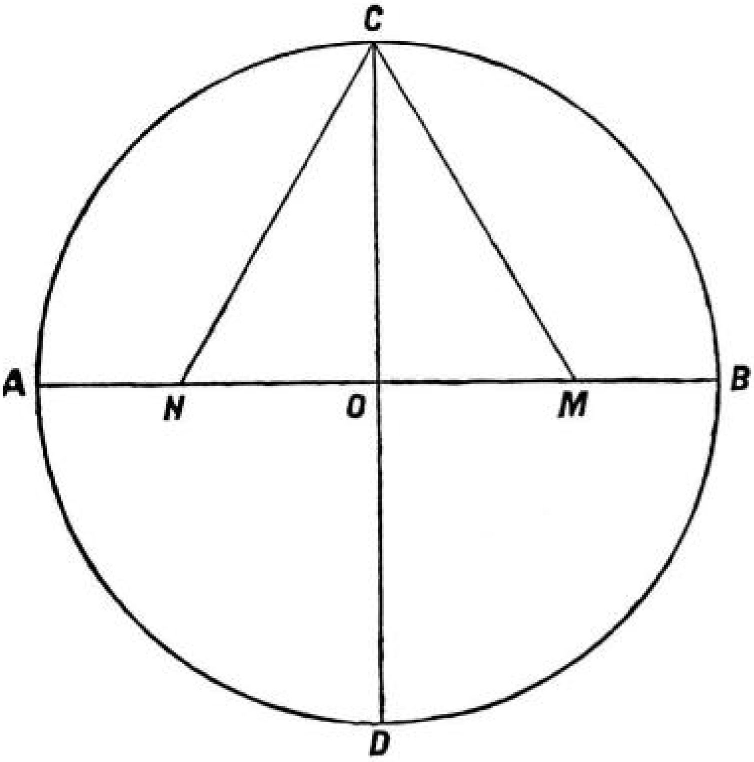


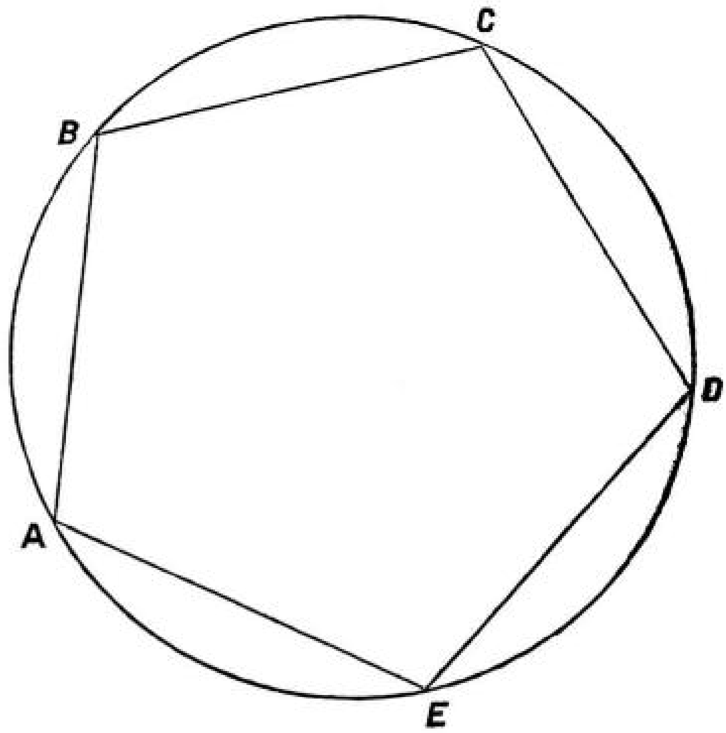
Черт. 15.

Очевидно, что такимъ пріемомъ мы изъ 8-угольника можемъ получить 16-угольникъ, потомъ 32-угольникъ и т. д. Точно также изъ 12-угольника можемъ получить 24-угольникъ, потомъ 48-угольникъ и т. д.

Если мы попробуемъ вычертить такіе многоугольники, то увидимъ, что стороны ихъ будутъ уменьшатся, а самый многоугольникъ будетъ походить на окружность, такъ что намъ даже будетъ трудно отличить его отъ окружности.

Пятиугольникъ. Разсмотримъ еще, какъ можно найти сторону правильнаго пятиугольника. Начертимъ двѣ одинаковыхъ окружности: 1 и 2. Въ окружности 1 проведемъ два взаимноперпендикулярныхъ діаметра: AB и CD такъ, какъ это мы дѣлали при построеніи стороны квадрата. Радіусъ OB раздѣлимъ пополамъ въ точкѣ M, эту точку соединимъ съ точкой C и отложимъ на линіи AM отъ точки M длину MN, равную MC, получимъ точку N; соединимъ N съ C, линія NC и будетъ искомой стороной правильнаго 5-угольника. Чтобы убѣдиться въ этомъ отложимъ по окружности 2 полученную длину, увидимъ, что она отложится ровно 5 разъ. Соединивъ полученныя точки, увидимъ, что фигура $ABCDE$ представляетъ собою правильный пятіугольникъ. Въ этомъ 5-угольникѣ будетъ 5 центральныхъ угловъ, сумма которыхъ равна 360°. (Черт. 16).





Черт. 16.

Если мы будемъ удваивать число сторонъ этого многоугольника, то будемъ получать послѣдовательно правильные: 10-угольникъ, 20-угольникъ, 40-угольникъ и т. д.

§ 2. Опредѣленіе функціи и ея геометрическое изображеніе.

Мы знаемъ, что въ кругъ можно вписывать правильные многоугольники; мы уже видѣли, что можно вписать правильный треугольникъ, квадратъ, шестиугольникъ и пр. Представимъ себѣ теперь, что въ кругъ вписанъ какой-нибудь многоугольникъ, слово «какой-нибудь» мы обозначимъ такъ: «многоугольникъ, имѣющій n сторонъ». Буква въ данномъ вопросѣ очень удобна потому, что не обязываетъ насъ мыслить опредѣленный многоугольникъ, она совершенно точно передаетъ слово «какой-нибудь». Если мы всѣ вершины этого многоугольника соединимъ съ центромъ, то отъ каждой стороны многоугольника пойдутъ двѣ линіи, которыя образуютъ между собою уголъ; такой уголъ называется центральнымъ. Очевидно, что при центрѣ будетъ столько угловъ, сколько въ многоугольникѣ сторонъ, т.-е. n; а такъ какъ многоугольникъ правильный, т.-е. всѣ его стороны равны, то и центральные углы будутъ также равны. Опредѣлимъ величину каждаго угла въ градусахъ. Мы знаемъ, что во всей окружности 360°, угловъ n, слѣдовательно въ каждомъ углѣ будетъ $\frac{360}{n}$ градусовъ. Назовемъ это число черезъ x, тогда можемъ написать равенство

$$x = \frac{360}{n}$$

Мы получили то, что называется формулой, т.-е. такое выраженіе, изъ котораго можемъ опредѣлить число градусовъ центральнаго угла въ каждомъ многоугольникѣ; для этого мы должны только придать для n соотвѣтственное числовое значеніе. Сдѣлаемъ это

$n=3$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x=120°$	90°	72	60	$51\frac{3}{7}$	45	40	36	$32\frac{8}{11}$	30

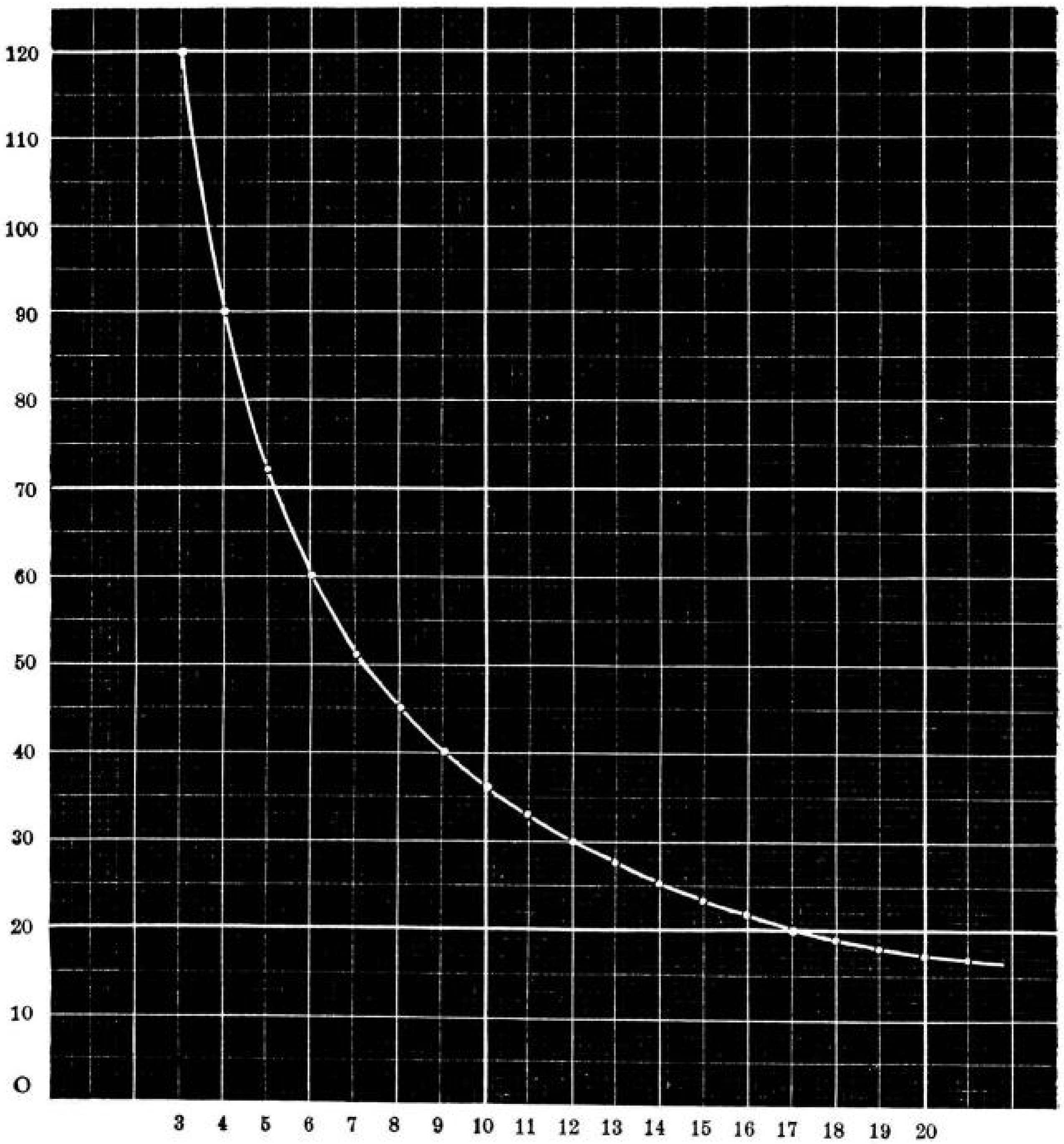
Разсматривая эти числовыя значенія, мы видимъ, что число градусовъ въ центральномъ углѣ уменьшается, когда число сторонъ многоугольника увеличивается. Очевидно, что это уменьшеніе будетъ все больше и больше, если мы будемъ все больше и больше увеличивать число сторонъ. Число градусовъ въ центральномъ углѣ находится въ зависимости отъ числа сторонъ многоугольника. Такое свойство количествъ — находиться въ зависимости другъ отъ друга, называется функціей. Говорятъ, что число градусовъ центральнаго угла вписаннаго многоугольника есть функція числа его сторонъ. Слово «функція» можно опредѣлить болѣе точно. Функціей называется такая зависимость между количествами, при которой для каждаго числового значенія одного, другое получаетъ опредѣленное числовое значеніе.

Эту зависимость въ данномъ случаѣ мы можемъ выразить геометрически слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ листъ бумаги, раздѣленный на клѣточки по одному миллиметру каждая, поставимъ внизу, въ началѣ листа, букву o и отъ этой точки будемъ откладывать числовыя значенія n. Такъ какъ n не можетъ имѣть отрицательныхъ значеній, не можетъ быть 0, 1, 2, то первое числовое значеніе мы должны отложить $n = 3$, непремѣнно вправо, при чемъ за единицу примемъ для удобства длину въ 5 миллиметровъ. По вертикальной линіи отъ точки o будемъ откладывать число градусовъ, т.-е. x, принимая каждый миллиметръ за градусъ. Когда мы это выполнимъ и соединимъ полученныя точки, то получимъ кривую линію, которая геометрически изображаетъ нашу функцію. Такое изображеніе очень удобно, потому что оно наглядно показываетъ, какъ измѣняется функція. (Черт. 17).

При построеніи этой функціи для числа n мы брали 5 милл., а для числа x одинъ милл. Имѣли ли мы на это право? Для рѣшенія этого вопроса, замѣтимъ, что если бы x и n были однородныя количества, измѣряемыя одной и той же единицей, то такое построеніе было бы ошибочно; но такъ какъ x есть число градусовъ, измѣряемое единицей градусъ ($= \frac{1}{360}$ часть окружности), а n есть число сторонъ вписаннаго многоугольника, зависящее отъ нашей воли, то очевидно, что для каждой изъ этихъ величинъ мы можемъ выбрать какой угодно масштабъ.

§ 3. Постоянныя и перемѣнныя величины.

Изъ изслѣдованія функціи $x = \frac{360}{n}$, мы видимъ, что x и n измѣняются, а число 360 всегда остается одно и то же, поэтому 360 называется *постояннымъ*, а x и n — *перемѣнными*. Число n можетъ получать какія угодно числовыя значенія, которыя зависятъ отъ нашего произвола, а потому оно называется *независимою перемѣнною*; число x получаетъ каждый разъ опредѣленное числовое значеніе,

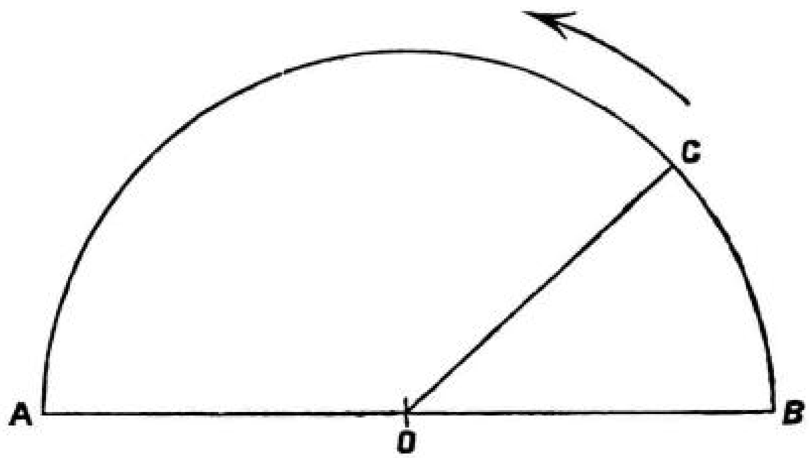


Черт. 17.

въ зависимости отъ того, какое числовое значеніе мы придали числу n, а потому оно называется *зависимою перемѣнною*, его также называютъ *функціею*.

§ 4. Явныя и неявныя функціи.

Возьмемъ на прямой AB точку O и проведемъ прямую OC, тогда мы получимъ два угла: AOC и BOC; такіе углы называются смежными. (Черт. 18).



Черт. 18.

Если мы примемъ точку O за центръ и опишемъ полуокружность, то, очевидно, что сумма этихъ угловъ будетъ равна 180°. Пусть въ одномъ изъ этихъ угловъ—BOC—будетъ $x°$, а въ другомъ — AOC — $y°$, тогда мы можемъ написать равенство $x+y=180$. Будемъ теперь передвигать прямую OC такъ, чтобы конецъ ея всегда находился въ точкѣ O, а точка C перемѣщалась бы по окружности въ направленіи, указанномъ стрѣлкою; тогда уголъ BOC будетъ увеличиваться, а уголъ AOC уменьшаться. Очевидно, что числовая величина одного угла y будетъ зависѣть отъ числовой величины другого угла x, т.-е. y есть функція x. Функція, написанная въ видѣ $x+y=180°$, называется *неявной*; чтобы узнать ея измѣненія, мы должны x перенести въ другую часть равенства и написать ее въ видѣ $y=180-x$, тогда она сдѣлается явной, и мы можемъ изслѣдовать, какъ измѣняется числовое значеніе y въ зависимости отъ измѣненій числового значенія x. Здѣсь

x не можетъ имѣть отрицательныхъ значеній, такъ какъ мы предполагаемъ перемѣщеніе линіи OC только въ одномъ направленіи — противоположно движенію часовой стрѣлки; но онъ можетъ имѣть значеніе 0; это значитъ, что линія OC совпадаетъ съ линіей OB. Если $x = 0$, то $y = 180°$. Положимъ, теперь x начинаетъ увеличиваться, это увеличеніе будетъ инымъ, чѣмъ въ предыдущемъ примѣрѣ: тамъ n могло увеличиваться только на 1; оно не могло быть числомъ дробнымъ, потому что многоугольникъ не могъ имѣть, напр., $5\frac{3}{7}$ стороны. Здѣсь же y можетъ увеличиваться какъ угодно, а именно: онъ можетъ принимать значенія 0, 1; 0, 01 и т. д., но для простоты мы положимъ, что онъ будетъ возрастать по 1°; тогда мы получимъ слѣдующую таблицу:

$x = 0$	1	2	3	4	5	
$y = 180$	179	178	177	176	175	и т. д.

Если мы эти измѣненія отложимъ на миллиметровой бумагѣ, то мы должны брать по одной и той же мѣрѣ, какъ для y, такъ и для x. Возьмемъ двѣ перпендикулярныя линіи и поставимъ точку o въ точкѣ ихъ пересѣченія (черт. 19) и будемъ по горизонтальной линіи откладывать числовыя значенія x, а по вертикальной — числовыя значенія y.

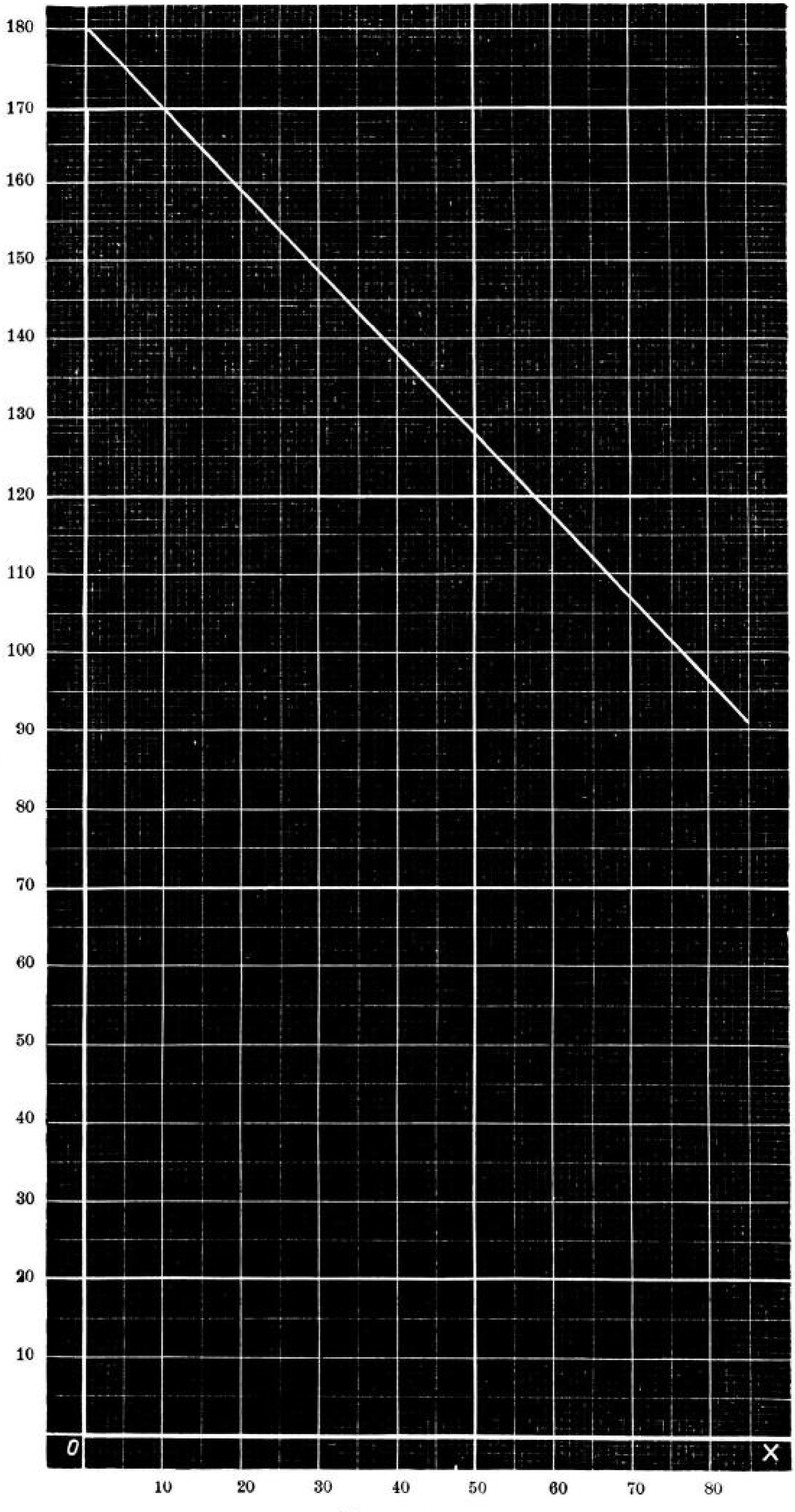
Когда $x = 0$, то $y = 180$, отсчитаемъ 180 клѣтокъ и поставимъ крестикъ; $x = 1$, перейдемъ на одну клѣтку по горизонтальной линіи, $y = 179$, — отсчитаемъ 179 клѣтокъ и поставимъ другую точку и т. д.

Соединивъ всѣ точки получимъ прямую линію, которая очевидно пересѣчетъ линію ox, когда x будетъ равенъ 180°, а $y = 0$.

Итакъ, законъ измѣненія функціи $y = 180 - x$. Геометрически выражается прямою линіею.

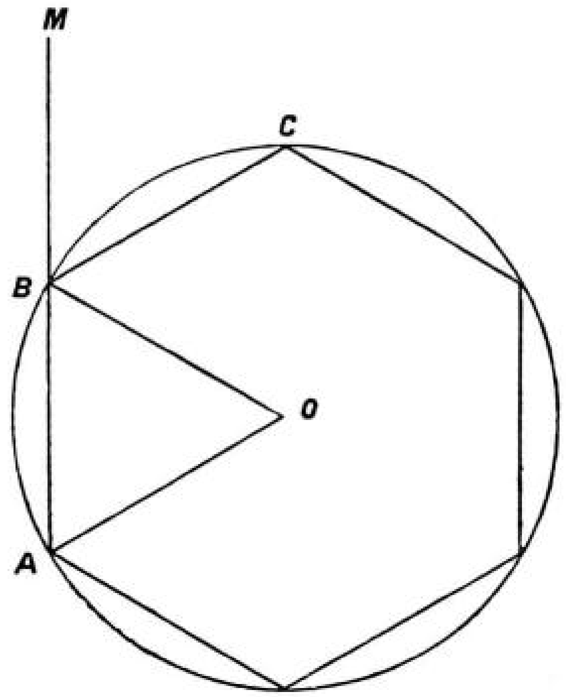
§ 5. Геометрическій примѣръ функціональной зависимости.

Возьмемъ окружность и впишемъ въ нее правильный 6-угольникъ. Для этого, какъ мы знаемъ надо отложить


180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
X
10
20
30
40
50
60
70
80

Черт. 19.

на окружности радіусъ, который отложится ровно 6 разъ. (черт. 20). При каждой вершинѣ шестиугольника обра-



Черт. 20.

зуется уголъ, напр. уголъ ABC, который называется внутреннимъ угломъ. Такихъ угловъ будетъ 6, и число угловъ во всякомъ многоугольникѣ, всегда равно числу сторонъ. Если мы всѣ эти углы сложимъ, то число градусовъ въ суммѣ всѣхъ внутреннихъ угловъ будетъ равно 180°, умноженному на число сторонъ безъ двухъ. Алгебраически это выражается такой формулой $180\,(n-2)$. Такъ какъ всѣ эти углы равны въ правильномъ многоугольникѣ, то каждый изъ нихъ будетъ содержать $\frac{180\,(n-2)}{n}$ градусовъ. Обозначимъ это число градусовъ черезъ y, тогда получимъ формулу

$$y = \frac{180\,(n-2)}{n}$$

Изъ этой формулы мы видимъ, что величина внутренняго угла вписаннаго многоугольника есть функція числа его сторонъ. Чтобы опредѣлить законъ измѣненія этой функціи, мы ее преобразуемъ: раскроемъ скобки въ числителѣ, тогда $y = \frac{180\,n - 360}{n}$; теперь раздѣлимъ правую часть почленно на n, т.-е. представимъ въ видѣ разности двухъ дробей съ однимъ и тѣмъ же знаменателемъ, тогда $y=\frac{180n}{n}-\frac{360}{n}$; въ первой дроби число n можно сократить и окончательно будемъ имѣть

$$y=180-\frac{360}{n}$$

Выраженіе $\frac{360}{n}$ мы знаемъ, это есть величина центральнаго угла вписаннаго правильнаго многоугольника, которую мы обозначили черезъ x (§ 2). Замѣнивъ это выраженіе буквой x, найдемъ

$$y=180-x.$$

Но это какъ разъ то выраженіе, которое мы только что изслѣдовали. Значитъ ли это, что наши углы: внутренній уголъ многоугольника и центральный уголъ, будутъ смежные?.

Нѣтъ, смежные углы должны обязательно лежать по одну сторону прямой, а наши углы находятся въ разныхъ мѣстахъ. Но, что же это значитъ? Это значитъ, что полученные нами углы равны смежнымъ. Чтобы понять это, продолжимъ сторону многоугольника. AB до точки M, тогда получимъ уголъ MBC, который называется *внѣшнимъ угломъ* многоугольника.

Этотъ внѣшній уголъ MBC будетъ смежнымъ съ угломъ ABC, а слѣдовательно въ суммѣ съ нимъ будетъ равенъ 180^0. Но, если центральный уголъ многоугольника и внѣшній уголъ его въ суммѣ съ внутреннимъ угломъ даютъ 180^0, то мы можемъ заключить, что центральный уголъ во всякомъ правильномъ вписанномъ многоугольникѣ равенъ внѣшнему углу, т.-е. всегда уголъ $AOB=$ углу MBC.

§ 6. **Вопросы и задачи.**

1. Доказать, что сумма всѣхъ внѣшнихъ угловъ во всякомъ правильномъ многоугольникѣ равна 360.

2. Вычислить величину внутренняго угла многоугольниковъ; 6-угольника, 12-угольника, 24-угольника и т. д. и составить таблицу.

3. Составить такую же таблицу для величинъ внутренняго угла квадрата, 8-угольника, 16-угольника и т. д.

§ 7. Изслѣдованіе функціи $y = 180 - \frac{360}{n}$.

Мы указали, что эта функція очень похожа по своей формѣ на сумму смежныхъ угловъ; благодаря этому сходству, мы доказали, что во всякомъ вписанномъ правильномъ многоугольникѣ внѣшній уголъ равенъ центральному углу. Однако это не значитъ, что сама функція тожественна съ суммой смежныхъ угловъ; она даетъ соотношеніе совершенно особыхъ количествъ, а потому и измѣненіе ея должно слѣдовать совершенно новому закону.

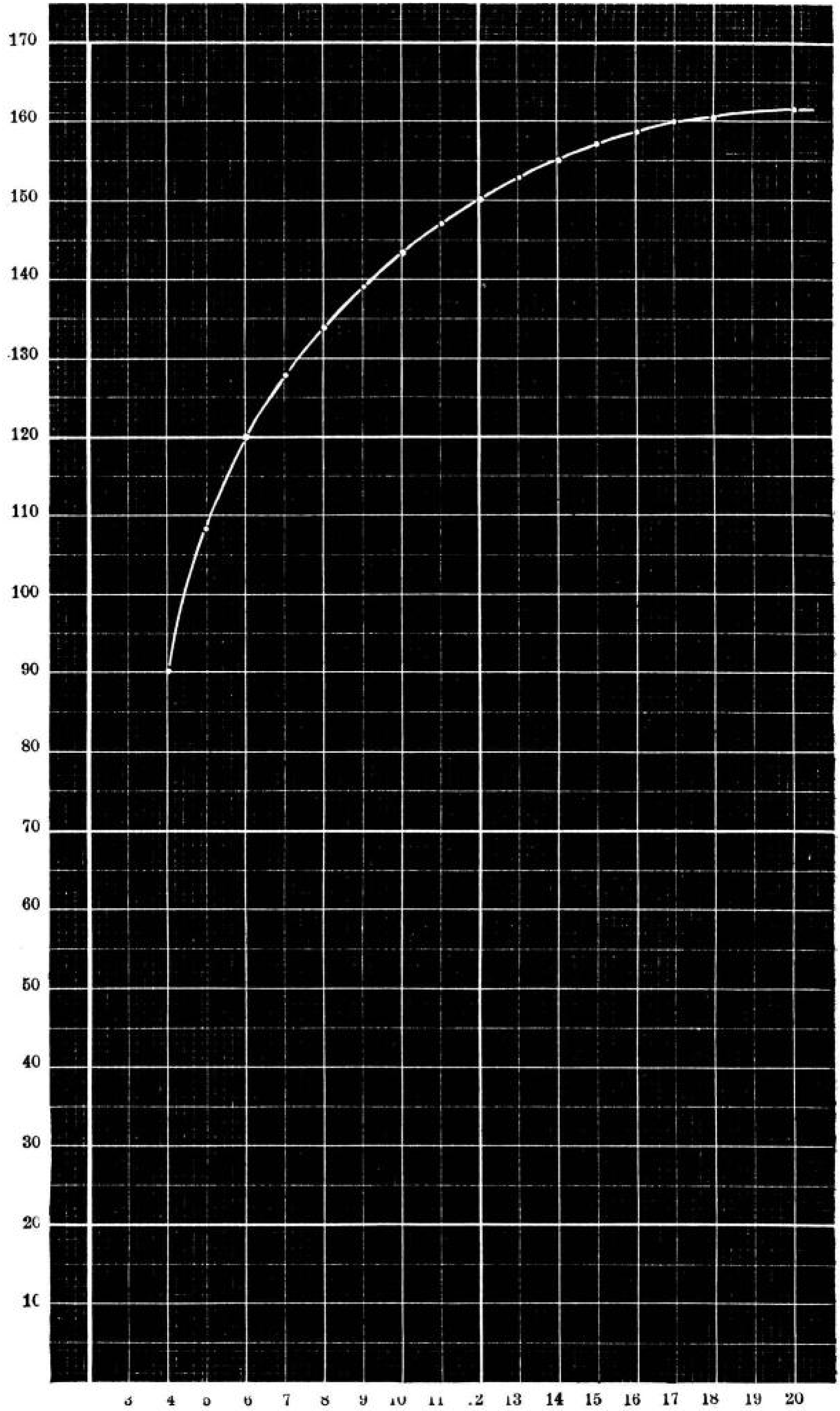
Чтобы подмѣтить законъ ея измѣненія, вычислимъ побольше ея числовыхъ значеній. Это вычисленіе удобно сдѣлать изъ прежней формулы этой функціи $y = \frac{180(n-2)}{n}$. Дадимъ здѣсь n рядъ числовыхъ значеній, начиная съ 3, тогда получимъ слѣдующія значенія для y

$n=3$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$y=60$	90	108	120	$128\frac{4}{7}$	135	140	144	$147\frac{3}{11}$	150	$152\frac{4}{13}$	$154\frac{2}{7}$

$n=15$	16	17	18
$y=156$	$157\frac{1}{2}$	$158\frac{14}{17}$	160

Разсматривая эти значенія, мы видимъ, что ариѳметическое отношеніе двухъ смежныхъ значеній начинаетъ убывать; въ началѣ оно $90 - 60 = 30$, а въ концѣ $160 - 158\frac{14}{17} = 1\frac{3}{17}$. Если мы построимъ на миллиметровой бумагѣ эти числовыя зноченія то получимъ *кривую* линію, которая загибаетъ кверху (черт. 21).

Сравнимъ теперь полученную нами кривую съ той, которую мы получили отъ построенія функціи $x = \frac{360}{n}$. Эта кривая, начинается вверху, опускается внизъ, приближаясь къ нижней горизонтальной линіи. Наша кривая, начинаясь съ 60, подымается вверхъ, но загибается вправо. Если мы подумаемъ теперь, что дробь $\frac{360}{n}$ по мѣрѣ увеличенія n все болѣе и болѣе уменьшается, то намъ станетъ


170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Черт. 21.

ясно, что первая кривая будетъ *все ближе и ближе приближаться* къ горизонтальной линіи; но если дробь $\frac{360}{n}$ дѣлается все меньше и меньше, то значитъ, что мы все меньше и меньше вычитаемъ изъ 180, слѣдовательно, разность все меньше и меньше отличается отъ 180, т.-е. наша вторая кривая должна приближаться къ нѣкоторой прямой, которая удалилась отъ горизонтальной оси на 180 миллиметровъ.

§ 8. **Примѣры функціональной зависимости не геометрическіе.**

Разсмотримъ нѣсколько задачъ:

1) Сколько копеекъ нужно заплатить за 7 лимоновъ, если каждый изъ нихъ стоитъ 6 копеекъ?

2) Сколько рублей слѣдуетъ заплатить за 18 десятинъ земли, если каждая десятина стоитъ 120 рублей?

3) Сколько рублей слѣдуетъ заплатить за 12 аршинъ сукна, аршинъ котораго стоитъ 5 рублей?

Всѣ эти задачи легко рѣшаются, и легко видѣть, что пріемъ рѣшенія ихъ не зависитъ отъ чиселъ, которыя даны въ задачѣ, если намъ будетъ дано не 7, а 12 лимоновъ, при чемъ каждый будетъ стоить не 6, а 4 копейки, то пріемъ рѣшенія отъ этой перемѣны нисколько не измѣнится. Вслѣдствіе этого каждую изъ данныхъ задачъ можно задать въ общемъ видѣ, пользуясь буквами, вмѣсто чиселъ, тогда задачи будутъ записаны такъ:

1) Сколько копеекъ нужно заплатить за a лимоновъ, если каждый изъ нихъ стоитъ b копеекъ?

2) Сколько рублей слѣдуетъ заплатить за m десятинъ земли, если каждая десятина стоитъ n рублей?

3) Сколько слѣдуетъ заплатить рублей за p аршинъ сукна, каждый аршинъ котораго стоитъ k рублей?

Мы въ каждой задачѣ поставили разныя буквы, чтобы можно было выдѣлить рѣшенія: всѣ лимоны стоятъ ab копеекъ; за землю придется заплатить mn рублей; сукно стоитъ pk рублей. Но мы могли бы поставить въ каждой задачѣ одинаковыя буквы, напримѣръ a и b, тогда всѣ отвѣты выразились бы въ одной и той же формулѣ ab, при чемъ для первой задачи это ab имѣло бы наименованіе копейки, а для двухъ другихъ — рублей. Почему же эти задачи рѣшаются по одной формулѣ? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ разберемъ содержаніе каждой задачи. Мы видимъ, что въ каждой изъ нихъ требуется узнать, сколько денегъ нужно заплатить за весь товаръ. Назовемъ эту сумму денегъ *стоимостью* товара; слѣдовательно во всѣхъ предложенныхъ задачахъ ищется стоимость товара. А для того, чтобы найти эту стоимость, намъ дано сколько стоитъ единица мѣры: одинъ лимонъ, одна десятина, одинъ аршинъ. Стоимость единицы мѣры мы будемъ называть *цѣнностью товара*; слѣдовательно, намъ даны цѣнность товара и его количество. Такимъ образомъ во всѣхъ предложенныхъ задачахъ мы имѣемъ одно и то же содержаніе: даны цѣнность товара и его количество, ищется стоимость его. Изъ общей формулы рѣшенія мы можемъ написать:

Стоимость товара = цѣнности товара $\times$ количество товара. Стоимость, цѣнность и количества товара суть величины, находящіяся въ зависимости другъ отъ друга: если будетъ мѣняться цѣнность товара, то вмѣстѣ съ ней будетъ измѣняться и стоимость, но въ то же время стоимость будетъ зависѣть и отъ количества товара. Другими словами, стоимость, цѣнность и количество товара находятся въ функціональной зависимости, которая выражается формулой:

Стоимость = цѣнности $\times$ количество.

Каждую изъ этихъ величинъ мы также можемъ обозначить буквой; назовемъ стоимость буквой p, цѣнность буквой k, а количество буквой n, тогда наша формула будетъ

$$p = n.k.$$

Задачи.

1) Начертить, какъ будетъ измѣняться стоимость при увеличеніи цѣнности, если количество останется одинаковымъ.

2) Какъ будетъ измѣняться стоимость съ увеличеніемъ количества при одной и той же цѣнности.

§ 9. Продолженіе.

Величины, встрѣчающіяся въ наукѣ и жизни могутъ имѣть очень различную функціональную зависимость. Разсмотримъ еще такую задачу: «Сколько нужно нанять землекоповъ, чтобы вынуть 500 кубовъ земли въ 25 дней если въ день каждый вынимаетъ по одному кубу?» Если мы обобщимъ эту задачу и дадимъ ее въ буквахъ, то она будетъ: Сколько нужно нанять землекоповъ, чтобы вынуть a кубовъ въ n дней если каждый въ день вынимаетъ по одному кубу? Вдумываясь въ ея содержаніе, легко обобщить и само содержаніе задачи. Очевидно, что дана работа, время ея выполненія и ищется число рабочихъ. Рѣшеніе задачи ясно: число рабочихъ равно $\frac{a}{n}$ или, если мы подъ a будемъ подразумѣвать не число кубовъ земли, которое надо вынуть, а самую величину — работу, а подъ n не число дней, а время, тогда можно написать

$$\text{Число рабочихъ} = \frac{\text{работѣ}}{\text{время}}.$$

Это и будетъ формулой функціональной зависимости величинъ, число рабочихъ, величина работы и время ея окончанія. Въ алгебраическомъ видѣ формула функціональной зависимости выразится

$$k = \frac{a}{n},$$

гдѣ k есть число рабочихъ. Это число рабочихъ имѣетъ необходимое ограниченіе,—оно не можетъ быть дробнымъ; чтобы избѣжать этого ограниченія очень часто считаютъ не фактическаго работника, а рабочую силу, которая можетъ быть и дробной. Болѣе значительное ограниченіе содержится въ самомъ способѣ рѣшенія задачи: при рѣшеніи мы необходимо допускаемъ, что каждый рабочій вынимаетъ по одному кубу т.-е. работоспособность каждаго рабочаго одна и та же.

Если мы измѣнимъ это условіе, то измѣнится и формула рѣшенія; отсюда видно, что число рабочихъ находится въ фунціональной зависимости отъ ихъ работоспособности.

§ 10. Функціональная зависимость величинъ и чиселъ.

Въ наукѣ и жизни встрѣчаются величины, которыя находятся въ обязательной функціональной зависимости по самой своей природѣ; такъ, напримѣръ, площадь прямоугольника находится въ обязательной функціональной зависимости отъ его длины и ширины; длина стороны правильнаго вписаннаго многоугольника—отъ длины радіуса; стоимость товара—отъ его цѣнности; время работы—отъ числа рабочихъ. Такая зависимость можетъ быть не единичной, данная величина можетъ зависѣть и отъ другихъ величинъ, напримѣръ, стоимость товара зависитъ не только отъ цѣнности, но и отъ количества товара; но указанная зависимость стоимости отъ цѣнности существуетъ и не можетъ не существовать. Такую зависимость мы будемъ называть обязательной. Эта обязательная зависимость выражается опредѣленной алгебраической функціей.

Точно также могутъ быть величины, которыя не находятся ни въ какой зависимости другъ отъ друга, напримѣръ, число сторонъ вписаннаго многоугольника совершенно не зависитъ отъ длины радіуса круга; стоимость товара совершенно не зависитъ отъ времени; время окончанія работы не зависитъ отъ вѣса каждаго работника. Однако, величины, не зависимыя другъ отъ друга, могутъ быть условно зависимыми, напримѣръ, стоимость товара не зависитъ отъ разстоянія; но если товаръ приходится перевозить, то стоимость его будетъ зависѣть не только отъ разстоянія, но и отъ стоимости упаковки, отъ стоимости нагрузки и т. п. Такую зависимость мы будемъ называть условной; она не только должна быть оговорена въ задачѣ, но должна быть указана и самая функціональная зависимость, если она естественно не вытекаетъ изъ свойствъ величинъ. Итакъ, функціональная зависимость величинъ можетъ быть обязательной и условной; можно сказать, что всякія двѣ величины могутъ находиться или въ обязательной или въ условной зависимости. Такъ, напримѣръ, можно предложить такую задачу: найти радіусъ круга такъ, чтобы сторона вписаннаго въ него треугольника была равна 4 сант. Здѣсь длина радіуса круга будетъ зависѣть отъ числа сторонъ вписаннаго многоугольника. Какова бы не была функціональная зависимость величинъ, она всегда выразится въ видѣ алгебраической формулы, гдѣ надъ количествами этихъ величинъ будутъ совершаться математическія дѣйствія. Такъ какъ количества величинъ весьма удобно выражать числами, то эти дѣйствія будутъ совершаться надъ числами, а потому алгебраическая формула функціональной зависимости величинъ должна подчиняться законамъ измѣненія чиселъ и ихъ свойствамъ.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ необходимости разсмотрѣть вопросъ о функціональной зависимости съ двухъ точекъ зрѣнія: съ точки зрѣнія функціональной зависимости величинъ, гдѣ сама природа величинъ, ихъ свойства опредѣляютъ ходъ нашихъ умозаключеній; во-вторыхъ— съ точки зрѣнія свойствъ чиселъ и дѣйствіи, входящихъ въ нашу формулу. Если формула взята независимо отъ какихъ либо величинъ, то мы будемъ называть ее числовой формулой, а зависимость входящихъ въ нее чиселъ— функціональной зависимостью чиселъ.

Разсмотримъ подробнѣе этотъ родъ функціональной зависимости.

§ 11. **Примѣры функціональной зависимости чиселъ.**

Числовая величина результата всякаго дѣйствія надъ числами находится въ функціональной зависимости отъ величинъ данныхъ чиселъ. Эта функціональная зависимость можетъ быть выражена въ видѣ теоремъ.

1) Если къ одному изъ слагаемыхъ прибавить нѣсколько единицъ, то сумма увеличится на столько же единицъ.

Означимъ слагаемыя буквами a и b, сумму— буквой S, тогда $S=a+b$. Прибавимъ къ a еще k единицъ и пусть новая сумма будетъ s_1, такъ что $S_1=(a+k)+b$. Найдемъ ариѳметическое отношеніе новой и прежней суммы S_1-S; оно будетъ равно $a+k+b-a-b$ или k.

Итакъ $S_1 - S = k$, т.-е. новая сумма больше прежней на k единицъ. Очевидно, что это разсужденіе будетъ справедливо и въ томъ случаѣ, когда слагаемыя a и b, равно какъ и число k будутъ дробными.

2) Если одно изъ слагаемыхъ a мы умножимъ на число m, то сумма увеличится на столько единицъ, сколько ихъ содержится въ произведеніи a на $(m-1)$, т.-е. на $a\,(m-1)$.

Пусть слагаемыя будутъ a и b, сумма ихъ S; новыя слагаемыя будутъ am и b, сумма ихъ S_1. Мы можемъ написать $S = a + b$ и $S_1 = am + b$. Найдемъ ариѳметическое отношеніе S_1 и S, получимъ $S_1 - S = am + b - a - b$, или $S_1 - S = am - a$; взявъ a за скобку, получимъ $S_1 - S = a\,(m-1)$.

Въ такомъ видѣ теорема справедлива и для цѣлыхъ и для дробныхъ чиселъ; но для цѣлыхъ это свойство можно доказать иначе. Умножить на m значитъ взять слагаемымъ m разъ, т.-е. прибавить къ a еще $m - 1$ одно a, тогда сумма по теоремѣ 1 увеличится на $a\,(m-1)$.

3) Если каждое слагаемое умножимъ на какое-нибудь число, то и сумма ихъ будетъ умножена на это число.

Пусть слагаемыя будутъ $a + b$, ихъ сумма S, такъ что $S = a + b$. Новыя слагаемыя будутъ ma и mb, ихъ сумма S_1, такъ что $S_1 = ma + mb$. Взявъ здѣсь m за скобки, получимъ $S_1 = m\,(a + b)$ или $S_1 = m.\ S$.

Слѣдствія. 1. Если каждое слагаемое дѣлится на какое нибудь число, то и сумма будетъ дѣлиться на то же число.

2) Если одно слагаемое дѣлится на какое нибудь число, а другое не дѣлится, то и сумма не будетъ дѣлиться на это число.

3) Если сумма и одно изъ двухъ слагаемыхъ дѣлится на какое нибудь число, то и другое должно дѣлиться на это число.

4. *Если уменьшаемое и вычитаемое мы умножимъ на какое нибудь число, то и остатокъ будетъ умноженъ на это число.*

Такъ какъ вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію, въ которомъ уменьшаемое есть сумма вычитаемаго и остатка, то теорема является слѣдствіемъ предыдущей теоремы. Однако ее можно доказать непосредственно. Обозначимъ уменьшаемое буквой a, вычитаемое буквой b, а остатокъ d, тогда $a-b=d$. Новое уменьшаемое будетъ ma, новое вычитаемое mb, обозначимъ новый остатокъ черезъ d_1, тогда $ma-mb=d_1$ или $m(a-b)=d_1$, т.-е. $md=d_1$.

5. *Если дѣлимое и дѣлителя умножимъ на какое нибудь число, то и остатокъ отъ дѣленія будетъ умноженъ на то же число.*

Обозначимъ дѣлимое буквой a, дѣлитель буквой b, частное буквой q и остатокъ — r. Тогда $a=bq+r$ или $a-bq=r$. Новое дѣлимое будетъ ma, новый дѣлитель mb, частное останется то же q, а остатокъ наовемъ r_1; тогда $ma=mbq+r_1$ или $ma-mbq=r_1$. По предыдущей теоремѣ мы имѣемъ $r_1=mr$. Эту теорему можно доказать иначе. Возьмемъ равенство $a-bq=r$ и умножимъ обѣ части его на m, тогда $m(a-bq)=mr$ или $am-mbq=mr$; откуда слѣдуетъ, что новый остатокъ долженъ быть въ m разъ больше прежняго.

6. Если въ числовой формулѣ одинъ изъ членовъ ея обозначимъ буквой, то числовая величина формулы будетъ функціей значенія этой буквы.

Возьмемъ какую нибудь числовую формулу, въ которой одинъ изъ членовъ обозначенъ буквой x, напримѣръ $\frac{7+x}{3}$ и обозначимъ числовое значеніе формулы черезъ y, такъ что $y=\frac{7+x}{3}$. Будемъ теперь давать x рядъ числовыхъ значеній, начиная съ 0 и для каждаго числоваго значенія x вычислять соотвѣтственное значеніе y, тогда получимъ слѣдующую таблицу.

$x=0$	1	2	3	4	5
$y=2\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$	4

Изъ этой таблицы мы видимъ, что когда числовыя значенія x возрастаютъ на единицу, числовыя значенія y

возрастаютъ на $\frac{1}{3}$. Если мы для x будемъ давать дробныя значенія, увеличивая ихъ на 0,1, то получимъ

$x=0$	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}3$
$y=2\frac{10}{30}$	$2\frac{11}{30}$	$2\frac{12}{30}$	$2\frac{13}{30}$

Отсюда видимъ, что когда x увеличивается на 0,1, то y увеличивается на $\frac{1}{30}$. Сравнивая оба результата, можно предугадать, что если x будетъ увеличиваться на 0,01, то y будетъ увеличиваться на $\frac{1}{300}$ и т. д. Чѣмъ все болѣе и болѣе мелкія значенія будетъ давать для x, тѣмъ все мельче и мельче будетъ увеличиваться y.

Если мы будемъ приписывать для x отрицательныя числовыя значенія $-1, -2, -3$, и т. д., то получимъ:

$x=-1$	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
$y=\quad 2$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Здѣсь мы видимъ, что числовыя значенія y постепенно убываютъ, достигаютъ 0 и дѣлаются отрицательными, но законъ убыванія тотъ же, что и законъ возрастанія: каждое новое числовое значенія y уменьшается на $\frac{1}{3}$.

§ 12. **Задачи.**

Составить таблицы числовыхъ измѣненій и опредѣлить законъ измѣненія для слѣдующихъ числовыхъ функцій:

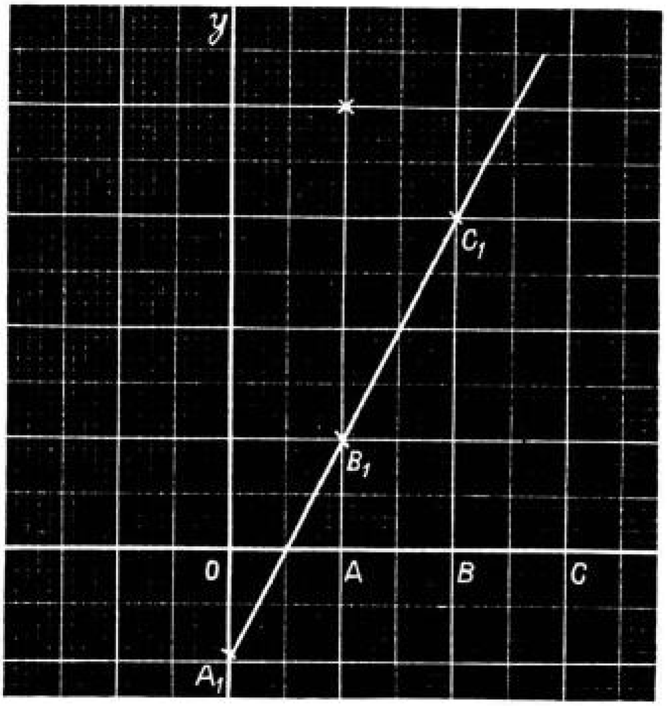
1) $y=\frac{8+3x}{5}$; 2) $y=\frac{5x+1}{4}$; 3) $y=\frac{x}{5}+1$; 4) $y=\frac{4}{x}$;
5) $y=\frac{3}{x+1}$; 6) $\frac{5}{x}+2$; 7) $y=\frac{3}{4}+8x$; 8) $y=\frac{3x+5}{2x+1}$;
9) $y=\frac{2x-3}{7}+x$; 10) $y=\frac{7}{x}+\frac{x}{5}$.

ГЛАВА V.

Рѣшенія уравненій первой степени съ одной неизвѣстной.

§ 1. Понятіе о числовыхъ функціяхъ.

Если мы имѣемъ числовую формулу, въ которую входитъ перемѣнное число, напримѣръ $\frac{7x-5}{8}$, то такую формулу будемъ называть числовой функціей перемѣннаго x. Ея числовое значеніе мы можемъ обозначить буквой y, тогда $y=\frac{7x-5}{8}$ и y называется также функціей x, потому что оно выражаетъ числовую величину формулы, если мы въ ней x замѣнимъ какимъ нибудь числомъ. Пусть, напримѣръ, $x=2$, тогда $y=\frac{14-5}{8}$ или $y=\frac{9}{8}$. Очевидно, что, придавая для x различныя числовыя значенія, мы будемъ получать соотвѣтственныя числовыя значенія y. Законъ измѣненія такой числовой функціи мы можемъ выразить геометрически. Такъ какъ такое выраженіе будетъ для насъ очень важно, то разсмотримъ его болѣе подробно. Возьмемъ сначала болѣе простую числовую функцію $y=2x-1$ и построимъ законъ ея измѣненія. Возьмемъ миллиметровую бумагу, проведемъ двѣ взаимно перпенди-

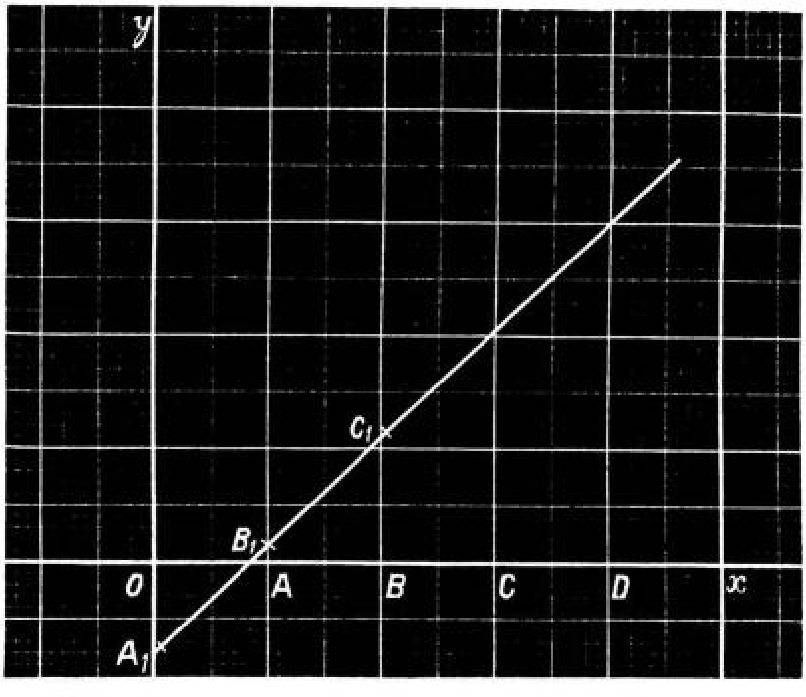


Черт. 22.

кулярныхъ линіи Ox и Oy, точка ихъ пересѣченія будетъ O. Эти линіи носятъ особое названіе *координатъ*. На линіи Ox будемъ откладывать числовыя значенія x, (черт. 22) начиная съ o, потомъ 1, потомъ 2 и т. д., принимая за единицу 1 сант.; тогда первая точка будетъ точка O; она соотвѣтствуетъ $x = o$, потомъ мы получимъ точку A, которая будетъ соотвѣтствовать $x = 1$, точка B будетъ соотвѣтствовать $x = 2$ и т. д.

Отъ каждой точки будемъ отсчитывать по сантиметру вверхъ или внизъ и откладывать числовыя значенія y; вверхъ будутъ итти положительныя значенія, а внизъ отрицательныя. При $x = o$, $y = -1$, отложимъ это значеніе на линіи Oy отъ точки O внизъ, получимъ точку A_1. Потомъ при $x = 1$, $y = 1$, отложимъ 1 сант. вверхъ отъ точки A, получимъ точку B_1; далѣе при $x = 2$, $y = 3$; отложимъ отъ точки B вверхъ 3 сант., получимъ точку C_1. Продолжая поступать такъ далѣе, мы найдемъ рядъ точекъ, которыя и соединимъ. Соединивъ ихъ, увидимъ, что геометрически измѣненіе функціи выражается прямой линіей.

Построимъ теперь законъ измѣненія нашей функціи $y = \frac{7x-5}{8}$, (черт. 23) принявъ за единицу также 1 сант.



Черт. 23.

При $x=0$, $y=-\frac{5}{8}$; это будетъ точка A_1; при $x=1$, $y=\frac{1}{4}$, это будетъ точка B_1, находящаяся отъ A вверхъ на $2\frac{1}{2}$ миллим. При $x=2$, $y=\frac{9}{8}$; это будетъ точка C_1, находящаяся отъ B вверхъ на десять съ лишнимъ сант. и т. д. Соединивъ эти точки, получимъ прямую линію.

Наше построеніе не можетъ быть вполнѣ точно, потому что мы не можемъ на милиметровой бумагѣ точно отложить восьмыя доли, но это и не особенно важно, такъ какъ геометрическое измѣненіе остается яснымъ.

Такія числовыя функціи, которыя содержатъ перемѣнное число x въ первой степени, называются функціями первой степени; если же, при этомъ, x не входитъ въ составъ знаменателя, то функціи называются цѣлыми.

Въ математикѣ доказывается, что всякая цѣлая функція первой степени можетъ быть геометрически представлена въ видѣ прямой линіи. Слѣдовательно и всякая цѣлая числовая функція первой степени геометрически изображается прямой линіей.

Легко видѣть, что это свойство цѣлой числовой функціи первой степени будетъ сохраняться не только для положительныхъ числовыхъ значеній числа x, но и для отрицательныхъ, которыя мы будемъ откладывать по линіи Ox влѣво отъ точки O. Это свойство будетъ справедливо и для всякихъ дробныхъ значеній x, какъ бы малы онѣ ни были.

Вообще, каждая точка прямой выражаетъ собою числовое значеніе y, изображенное соотвѣтственной точкой на прямой.

§ 2. **Задачи**.

Построимъ законъ измѣненія функцій:

$$1)\ y=5x;\ 2)\ y=3x+6;\ 3)\ y=\frac{2x+1}{5};\ 4)\ y=\frac{5x-10}{2};$$
$$5)\ y=2x-\frac{3x+5}{8},$$

принимая за единицу 1 мм.

§ 3. Равенство числовыхъ функцій.

Возьмемъ теперь двѣ числовыхъ функціи $y=\frac{7x-5}{8}$ и $z=\frac{x+1}{2}$; вычислимъ для каждой изъ нихъ рядъ числовыхъ значеній, полагая въ той и другой x послѣдовательно равнымъ 0, 1, 2, 3 и т. д. Эти числовыя значенія можно расположить въ видѣ слѣдующей таблицы:

$y=$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{9}{8}$	2	$\frac{23}{8}$	$\frac{30}{8}$	$\frac{37}{8}$	
$x=$	0	1	2	3	4	5	6	и т. д.
$z=$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	

Разсматривая эти числовыя значенія, мы видимъ, что при $x=3$ обѣ функціи имѣютъ одно и то же числовое значеніе $y=2$ и $z=2$; но, если двѣ числовыя формулы имѣютъ одно и то же числовое значеніе, мы можемъ сказать, что онѣ равны между собою (Гл. 3, § 2 слѣд. 2), и можемъ написать

$$\frac{7x-5}{8}=\frac{x+1}{2}.$$

Это равенство, вообще говоря, несправедливо, оно можетъ быть установлено только для одного числового значенія $x=3$, а потому говорятъ, что $x=3$ уравниваетъ данныя числовыя формулы, и само равенство называютъ *уравненіемъ*.

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіемъ называется такое равенство, которое справедливо только для одного числового значенія перемѣннаго, въ него входящаго.

То числовое значеніе, которое уравниваетъ данныя числовыя функціи, называется корнемъ уравненія, а способъ его нахожденія—рѣшеніемъ уравненія.

§ 4. Задачи.

Провѣрить изложенное на слѣдующемъ рядѣ примѣровъ.

1) $y=\frac{2x+1}{2}$; $z=\frac{7x+5}{8}$

2) $y=x-1$; $z=\frac{2x+1}{3}$

3) $y=\frac{3x-2}{6}$; $z=\frac{5(7-x)}{9}$

4) $y=x+\frac{12-x}{4}$; $z=\frac{26-x}{2}$

5) $y=\frac{9x+5}{2}-36$; $z=x-\frac{x-2}{7}$.

§ 5. Рѣшеніе числовыхъ уравненій.

Въ предыдущемъ мы разсмотрѣли, какъ можно уравнять двѣ числовыя цѣлыя функціи съ одной независимой перемѣнной; теперь перейдемъ къ рѣшенію обратнаго вопроса: уравнены двѣ функціи, найти то числовое значеніе перемѣнной x, которое дѣлаетъ ихъ равными.

Эту задачу принято формулировать такъ: дано уравненіе, требуется найти его корень. «Дано уравненіе»— это значитъ, что двѣ функціи уравнены, а «найти его корень» значитъ опредѣлить то числовое значеніе перемѣннаго x, которое уравниваетъ обѣ функціи.

Рѣшить эту задачу мы могли бы слѣдующимъ способомъ. Положимъ намъ дано уравненіе $\frac{5x+16}{3}=4x$. Обозначимъ первую часть его черезъ y, а вторую черезъ z, и будемъ, подставляя вмѣсто x рядъ числовыхъ значеній, вычислять числовыя значенія для y и z, пока не получимъ одинаковаго числового значенія. Если мы этотъ пріемъ приложимъ къ данному уравненію, то увидимъ, что онъ очень утомителенъ и ненадеженъ.

Ненадеженъ потому, что легко пропустить дробное числовое значеніе x, «*удовлетворяющее*» уравненію. Въ нашемъ примѣрѣ это значеніе x равно $\frac{16}{7}$. Если мы будемъ измѣнять x по единицѣ, то мы пропустимъ это значеніе, если мы будемъ измѣнять по 0,1, то тоже пропустимъ, и такъ будетъ всегда, пока не догадаемся измѣнять по $\frac{1}{7}$, но и тогда должны сдѣлать очень много вычисленій.

Чтобы найти числовое значеніе x, удовлетворяющее данному уравненію, мы можемъ построить геометрически обѣ функціи y и z и измѣрить то числовое значеніе x, которое соотвѣтствуетъ точкѣ пересѣченія прямыхъ. Этотъ способъ очень удобенъ, но не даетъ точнаго отвѣта, потому что, какъ мы видѣли въ § 3, седьмыя доли сантиметра очень трудно опредѣлить.

Въ силу этого намъ необходимо поискать особый путь для рѣшенія нашего вопроса. Этотъ путь мы можемъ найти, исходя изъ свойствъ равенствъ.

Мы знаемъ, что равенство не нарушится, если обѣ части его умножить на одно и то же число; слѣдовательно, если нѣкоторое числовое значеніе x дѣлаетъ равнымъ $\frac{5x+16}{3}$ и $4 \times x$, то оно необходимо и обязательно должно сдѣлать равными $5x + 16$ и $12x$, ибо эти новыя числа получаемъ отъ умноженія равныхъ чиселъ на 3. Но если $5x + 16 = 12x$, то равенство не нарушится, если отъ обѣихъ частей его мы отнимемъ по $5x$; новыя числа 16 и $12x - 5x$ останутся равными, т.-е $16 = 7x$. Раздѣлимъ теперь обѣ части новаго равенства на 7, получимъ $x = \frac{16}{7}$. Это и будетъ рѣшеніемъ уравненія. Въ самомъ дѣлѣ: если $x = \frac{16}{7}$, то $7x = 16$, или $12x - 5x = 16$, или $12x = 16 + 5x$ или $4x = \frac{16+5x}{3}$. Мы можемъ всѣ эти преобразованія повѣрить, подставивъ вмѣсто x число $\frac{16}{7}$ въ данное уравненіе $\frac{5.\frac{16}{7}+16}{3} = \frac{16}{7}.4$. Произведемъ вычисленія $\frac{\frac{80}{7}+16}{3} = \frac{64}{7}$, или $\frac{80+112}{21} = \frac{64}{7}$, или $\frac{192}{21} = \frac{64}{7}$, что по сокращеніи дроби $\frac{192}{21}$ на 3, даетъ равенство $\frac{64}{7} = \frac{64}{7}$, которое иногда называютъ тожествомъ.

Все это приводитъ насъ къ слѣдующему способу рѣшенія уравненій.

Рѣшить уравненіе это значитъ найти такое числовое значеніе неизвѣстнаго, при которомъ числовая величина правой части была бы равна числовой величинѣ лѣвой части. Такое числовое значеніе неизвѣстнаго называется *корнемъ уравненія.*

При отысканіи корня уравненія мы должны слѣдить только за тѣмъ, чтобы при нашихъ преобразованіяхъ равенство не нарушалось. Поэтому мы имѣемъ право дѣлать слѣдующія преобразованія:

1) *Производить въ каждой части уравненія всѣ тѣ*

преобразованія, при которыхъ не измѣняется числовая величина формулы. Къ такимъ преобразованіямъ относится: приведеніе дробей къ одному знаменателю, раскрытіе скобокъ, приведеніе подобныхъ членовъ или сосчитываніе. Этимъ не исчерпываются тѣ преобразованія, которыя не мѣняютъ числовой величины формулы, но пока намъ достаточно и ихъ. При этихъ преобразованіяхъ слѣдуетъ помнить, что ихъ мы можемъ производить только въ одной части уравненія, а не можемъ брать члены изъ разныхъ частей. Пусть, напримѣръ, намъ дано $\frac{3x}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5x}{9}+\frac{1}{3}$. Мы можемъ формулу $\frac{3x}{8}+\frac{1}{4}$ привести къ одному знаменателю и представить въ видѣ $\frac{3x+2}{8}$; точно также формулу $\frac{5x}{9}+\frac{1}{3}$ представить въ видѣ $\frac{5x+3}{9}$; но знаменателей отбрасывать не имѣемъ права, потому что тогда измѣнится числовая величина формулы и правая часть уже не будетъ равна лѣвой. Итакъ, мы можемъ написать

$$\frac{3x+2}{8}=\frac{5x+3}{9}$$

Въ этихъ преобразованіяхъ числовыя величины той и другой части не измѣнились, а равенство между ними сохранилось.

2) *Умножать или дѣлить обѣ части уравненія на одно и то же число,* если только это число не можетъ обратиться въ 0. Здѣсь, наоборотъ, мы непремѣнно должны одновременно измѣнять обѣ части уравненія въ ихъ цѣломъ, а не можемъ производить дѣйствія надъ однимъ или нѣсколькими членами. Возьмемъ, напримѣръ, предыдущее равенство $\frac{3x}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5x}{9}+\frac{1}{3}$ и положимъ, что мы желали бы $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$ умножить на 12, чтобы уничтожить знаменателей; этого мы не можемъ сдѣлать, потому что при умноженіи эти члены увеличатся, при этомъ измѣненіи сумма и первая часть перестанетъ быть равной второй. Мы можемъ умножить на 12 всю первую часть и всю вторую, т.-е. написать такъ $\left(\frac{3x}{8}+\frac{1}{4}\right)12=\left(\frac{5x}{9}+\frac{1}{3}\right)12$ тогда равенство сохранится и, раскрывъ скобки, мы получимъ $\frac{12.3x}{8}+\frac{12}{4}=\frac{12.5x}{9}+\frac{12}{3}$ или по сокращеніи каждой дроби $\frac{9x}{2}+3=\frac{20x}{3}+4$.

Понятно поэтому, почему мы не можемъ умножать или дѣлить на число равное нулю. Всякое произведенiе числа на 0 даетъ нуль, а нуль всегда равенъ нулю; на этомъ основанiи могутъ быть уравнены обѣ части, а мы сокративъ отбросимъ именно то, что дѣлало ихъ равными. Напримѣръ, $5(x-1)=2(x-1)$, потому что при $x=1$, получаемъ $5.0=0$ *и* $2.0=0$; но если мы раздѣлимъ обѣ части на $x-1$, получимъ невѣрный результатъ $5=2$. Итакъ, если нашъ множитель или дѣлитель не можетъ быть нулемъ, то мы имѣемъ право обѣ части равенства умножить или раздѣлить на него. На основанiи этого свойства мы имѣемъ право, приведя обѣ части уравненiя къ одному знаменателю, отбросить этотъ знаменатель, если только знаменатель не содержитъ x. Объ этомъ я скажу особо. А теперь возьмемъ нашъ примѣръ $\frac{3x}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5x}{9}+\frac{1}{3}$. Мы его привели къ виду $\frac{3x+2}{8}=\frac{5x+3}{9}$. Если мы обѣ части этого равенства приведемъ къ одному знаменателю, то получимъ $\frac{(3x+2).9}{72}=\frac{(5x+3).8}{72}$. Теперь можемъ разсуждать двояко: или—если двѣ дроби равны и ихъ знаменатели также равны, то равны и числители, т.-е. $(3x+2)9=(5x+3)8$, или—умножимъ обѣ части равенства на 72, получимъ $(3x+2)9=(5x+3)8$. Въ обоихъ случаяхъ говорятъ короче: «*отбросимъ знаменателя*».

3) *Переносить члены изъ одной части равенства въ другую*; Равенство отъ этого, какъ мы знаемъ, не нарушается.

На основанiи этихъ свойствъ, рѣшенiе уравненiй обыкновенно распадается на слѣдующiя преобразованiя:

a) Всѣ части равенства въ обѣихъ его частяхъ приводятъ къ одному знаменателю, который отбрасываютъ.

b) Переносятъ члены, содержащiе x, въ одну часть равенства (обыкновенно налѣво), а члены безъ x — въ другую часть (обыкновенно направо). При чемъ не забудемъ, что *при переносѣ знакъ члена мѣняется на обратный*.

c) Дѣлаютъ приведенiе подобныхъ членовъ, т.-е. производятъ сосчитыванiе тѣхъ и другихъ.

d) Дѣлятъ обѣ части на коэффиціентъ при x.

Такъ какъ уравненіе безъ дробей проще, то обыкновенно начинаютъ рѣшеніе примѣровъ уравненій съ числами цѣлыми; но тогда первое преобразованір становится лишнимъ и его непроизводятъ.

При сосчитываніи принято слѣдующее правило: складываютъ всѣ члены, имѣющіе передъ собою знакъ $+$, потомъ также складываютъ всѣ члены, имѣющіе передъ собою знакъ $-$; *изъ большаго числа* вычитаютъ меньшее и ставятъ знакъ большаго.

Напримѣръ, если получимъ $5x - 8x$, то результатъ будетъ $-3x$; а если $8x - 3x$, то результатъ будетъ $+5x$; знакъ $+$ обыкновенно опускаютъ и пишутъ просто $5x$.

Если при сосчитываніи мы получимъ при x знакъ минусъ, то принято перемѣнять знакъ въ обѣихъ частяхъ уравненія, чтобы у x всегда былъ знакъ $+$. Напримѣръ, если мы получимъ $-3x = 15$, то мы пишемъ $3x = -15$, откуда $x = -5$. Перемѣна знака въ обѣихъ частяхъ уравненія соотвѣтствуетъ перенесенію члена изъ одной части въ другую, что мы имѣемъ право дѣлать; слѣдовательно, имѣемъ право и мѣнять знакъ въ обѣихъ частяхъ уравненія. Такъ, напр., $-3x = 15$ все равно, что $-15 = 3x$, а это можно написать такъ $3x = 15$.

§ 6. Рѣшить слѣдующіе примѣры.

1) $5x - 3 + 8x = 4x + 9 - 3x$ *Отв.* $x = 1$

2) $7x - 2 = 2x + 10$ *Отв.* $x = 2\frac{2}{5}$

3) $\dfrac{3x - 8}{5} = \dfrac{4x + 5}{9}$ *Отв.* $x = 13\frac{6}{7}$

4) $\dfrac{7x}{9} - 4 = \dfrac{5x}{7} + 6$ *Отв.* $x = 20\frac{1}{2}$

5) $\dfrac{3x}{5} - 8 = 1\dfrac{3}{4} - 2x$ *Отв.* $x = 3\frac{3}{4}$

6) $\dfrac{4x - 8}{5} + 1 = \dfrac{3x - 2}{7}$ *Отв.* $x = \frac{11}{13}$

7) $\frac{(5x-7).4}{9}+2=x$ *Отв.* $x=\frac{10}{11}$

8) $\frac{x-3}{2}+\frac{x-4}{3}=\frac{1}{2}$ *Отв.* $x=4$

9) $2-\frac{3x-7}{4}=-\frac{x+17}{5}$ *Отв.* $x=13$

10) $\frac{5x+1}{3}-\frac{11-2x}{4}=2x-\frac{7(x-2)}{8}$ *Отв.* $x=4$

Слѣдующія задачи рѣшить и повѣрить отвѣтъ подстановкой

11) $\frac{2x-9}{27}+\frac{x}{18}-\frac{x-3}{4}=8\frac{1}{3}-x$

12) $\frac{x-15}{4}-\frac{7-2x}{21}=\frac{3}{14}x+0,5$

13) $1+x=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x}{\frac{3}{8}}$

14) $\frac{0,01-x}{0,02}-2\frac{1}{2}=\frac{2-3x}{0,01}$

15) $a(x-12)=b(x-12)-2(a-b)$, гдѣ a и b суть данныя числа.

§ 7. Равенство количественныхъ функцій.

Чтобы понять, что мы подразумѣваемъ подъ равенствомъ количественныхъ функцій, разсмотримъ нѣсколько примѣровъ.

1) За 30 аршинъ сукна двухъ сортовъ заплачено 128 рублей; аршинъ перваго сорта стоитъ $4\frac{1}{2}$ рубля, а аршинъ второго 4 рубля. Сколько куплено аршинъ того и другого сорта?

Эта задача рѣшается ариѳметически слѣдующимъ разсужденіемъ. Положимъ, что сукно было куплено только перваго сорта, тогда за него пришлось бы заплатить $30\times4\frac{1}{2}$ рублей или 135 рублей; но на самомъ дѣлѣ было заплачено только 128 рублей, т.-е. на $135-128=7$ рублей меньше, потому что часть сукна была дешевле. Мы узнали такимъ образомъ, что всѣ аршины сукна второго сорта стоятъ дешевле того же числа аршинъ перваго сорта на 7 рублей, а каждый аршинъ на $4\frac{1}{2}-4=\frac{1}{2}$ рубля.

Слѣдовательно число аршинъ второго сорта было $7:\frac{1}{2}=14$ аршинъ, а перваго 16 аршинъ.

Другой способъ рѣшенія этой задачи называется алгебраическимъ и основывается на уравниваніи. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ. Обозначимъ число аршинъ перваго сорта буквой x, тогда число аршинъ второго сорта будетъ $30-x$. Каждый аршинъ перваго сорта стоитъ $4\frac{1}{2}$ рубля, а всѣ x аршинъ будутъ стоить $4\frac{1}{2}x$ рублей. Каждый аршинъ второго сорта стоитъ 4 рубля, а всѣ $(30-x)$ аршинъ будутъ стоить $(30-x)\,4$ рублей. Такимъ образомъ вся покупка будетъ стоить $4\frac{1}{2}x+(30-x)\,4$ рублей, но эта же покупка стоитъ 128 рублей, слѣдовательно мы имѣемъ право уравнять нашу формулу числу 128 и написать *уравненіе*.

$$4\tfrac{1}{2}x+(30-x)\,4=128.$$

Здѣсь мы уравниваемъ не числа, а стоимость покупки, выражая ее одинъ разъ, какъ сумму стоимостей перваго и второго сорта, и второй разъ, какъ данное число 128.

Если мы раскроемъ скобки въ первой части этого равенства, получимъ

$$4\tfrac{1}{2}x+120-4x=128.$$

Перенесемъ 120 въ правую часть равенства и вычтемъ $4x$ изъ $4\frac{1}{2}x$, тогда

$$\tfrac{1}{2}x=128-120$$

$$\text{или}\quad \tfrac{1}{2}x=8.$$

Откуда $x=16$.

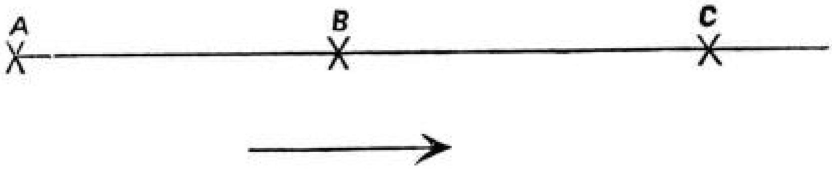
Итакъ перваго сорта было 16 аршинъ, а второго 14 аршинъ.

2) Съ двухъ станцій желѣзной дорогой, находящихся на разстояніи 77 верстъ, выходятъ одновременно два поѣзда и идутъ по одному направленію со скоростью $31\frac{1}{2}$ верстъ и $18\frac{2}{3}$ верстъ въ часъ, при чемъ первый идетъ за вторымъ. Когда онъ догонитъ?

Эта задача также рѣшается ариѳметически такимъ разсужденіемъ.

Если бы поѣзда шли съ одною и тою же скоростью, то разстояніе между ними было бы всегда одинаково 77 верстъ, но задній поѣздъ идетъ скорѣе на $31\frac{1}{2}-18\frac{2}{3}=12\frac{5}{6}$ версты, слѣдовательно онъ будетъ приближаться къ переднему поѣзду каждый часъ на $12\frac{5}{6}$ версты и нагонитъ его, когда пройдетъ съ этой скоростью все разстояніе въ 77 верстъ. Раздѣливъ 77 на $12\frac{5}{6}$ мы узнаемъ, черезъ сколько часовъ это случится $77:\frac{77}{6}=6$ часовъ.

Алгебраическій способъ рѣшенія будетъ иной. Пусть A и B (черт. 24) станціи отправленія, а C мѣсто встрѣчи.



Черт. 24.

Первый поѣздъ пройдетъ разстояніе AC, положимъ въ x часовъ. Такъ какъ каждый часъ онъ проходитъ по $31\frac{1}{2}$ версты, то въ x часовъ онъ пройдетъ $31\frac{1}{2}x$ верстъ. Итакъ $AC=31\frac{1}{2}x$ верстъ. Изъ B другой поѣздъ выходитъ въ то же время, слѣдовательно разстояніе BC онъ пройдетъ также въ x часовъ, но каждый часъ онъ проходитъ по $18\frac{2}{3}$ версты, слѣдовательно $BC=18\frac{2}{3}x$ верстъ. Очевидно, что $AC-BC=AB$, т.-е. $31\frac{1}{2}x-18\frac{2}{3}x=77$. Откуда $12\frac{5}{6}x=77$ и $x=6$ часамъ.

Въ этой задачѣ мы уравниваемъ разстояніе, пройденное каждымъ поѣздомъ въ x часовъ и изъ этого уравненія опредѣляемъ число x. Мы имѣемъ два количества: разстояніе и время; выражая разстояніе въ функціи времени, получаемъ количественную функцію, которая выражаетъ собою разстояніе AC при помощи данной скорости и времени. Точно также выражаемъ разстояніе BC; эти разстоянія отличаются другъ отъ друга на длину AB, которая намъ извѣстна и равна 77 верстамъ.

Сравнивая разстоянія, мы можемъ написать или $AB+BC=AC$ или $AC-BC=AB$; въ обоихъ случаяхъ мы въ правой и лѣвой части равенства имѣемъ одно и то же разстояніе.

3) Возьмемъ еще функцію $x = \frac{360}{n}$; мы видимъ, что эта функція представляетъ собою формулу, по которой мы можемъ опредѣлить величину центральнаго угла во всякомъ вписанномъ многоугольникѣ. Если намъ дано n, то мы всегда можемъ узнать x. Положимъ теперь, что мы хотимъ узнать, какой многоугольникъ имѣетъ центральный уголъ въ 30°.

Въ этой задачѣ мы знаемъ x, онъ равенъ 30°, намъ нужно узнать, чему равно n. Чтобы узнать это, уравняемъ нашу формулу $\frac{360}{n}$ этому численному значенію x, и напишемъ такъ $30 = \frac{360}{n}$. Равенство, которое мы получили, называется уравненіемъ, потому что мы уравняли нашу формулу нѣкоторому данному числовому значенію. Попробуемъ опредѣлить n; такъ какъ мы знаемъ, что n всегда больше 3 и не можетъ быть равно o, то умножимъ обѣ части нашего равенства на n, получимъ $30n = 360$; откуда $n = \frac{360}{30}$ или $n = 12$. Отсюда мы заключаемъ, что въ правильномъ 12-угольникѣ центральный уголъ равенъ 30°.

Но, если бы мы захотѣли узнать, въ какомъ многоугольникѣ центральный уголъ равенъ 7°, то, поступая также, получили бы, что $n = \frac{360}{7}$ или $n = 51\frac{3}{7}$.

Отвѣтъ получили нелѣпый. Отчего это произошло? Могло быть оттого, что въ своихъ преобразованіяхъ мы сдѣлали ошибку? Однако, каждое преобразованіе основано на свойствахъ равенства, а эти свойства въ свою очередь основаны на аксіомахъ; мы можемъ быть вполнѣ увѣрены, что въ этой цѣпи преобразоваиій: $7 = \frac{360}{n}$; $7n = 360$; $n = \frac{360}{7}$ ошибки нѣтъ—равенство не нарушалось, слѣдовательно и n дѣйствительно должно быть равно $51\frac{3}{7}$. Поэтому намъ надо искать ошибку въ другомъ мѣстѣ. Подумавъ хорошенько, мы можемъ догадаться, да можетъ-ли быть такой правильный многоугольникъ, чтобы его центральный уголъ былъ 7°? Посмотрѣвъ на законъ измѣненія нашей функціи, мы скажемъ, что такого многоугольника быть не можемъ. Слѣдовательно намъ задана неправильная задача.

4) Возьмемъ такую задачу «Часы проданы за 63 рубля, при чемъ получена прибыль равная $\frac{1}{8}$ стоимости часовъ. Сколько стоятъ часы?»

Здѣсь мы знаемъ продажную цѣну часовъ; если мы эту продажную цѣну сумѣемъ выразить еще какъ нибудь, то можемъ уравнять эти числа и *составить уравненіе*. Для этого положимъ, что стоимость часовъ равна x, а продажная цѣна соститъ изъ стоимости и прибыли, но въ задачѣ сказано, что прибыль равна $\frac{1}{8}$ стоимости, т.-е. $\frac{x}{8}$. Итакъ, если часы стоятъ x рублей, при продажѣ получено прибыли $\frac{x}{8}$ руб., то значитъ, они проданы за $(x+\frac{x}{8})$ рубл., а намъ сказано, что они проданы за 63 руб.

Уравнявъ эти количества, получимъ уравненіе

$$x+\frac{x}{8}=63$$

чтобы опредѣлить x, помножимъ обѣ части равенства на 8, получимъ

$$8x+x=63\times 8 \text{ или } 9x=63.\ 8$$

Раздѣливъ на 9, находимъ $x=\frac{63.\ 8}{9}$; $x=56$ руб.

5) Возьмемъ еще задачу: «Рабочіе въ первый день выкопали $\frac{1}{3}$ канавы, во второй $\frac{2}{5}$ части, а въ третій остальныя 40 саженъ. Какъ велика длина канавы?»

Обозначимъ длину канавы черезъ x и выразимъ ежедневную работу рабочихъ: въ первый день они выкопали $\frac{1}{3}$ канавы, т.-е. $\frac{x}{3}$ саж.; во второй день $\frac{2}{5}x$ или $\frac{2x}{5}$ саж., а въ третій 40 саж. Слѣдовательно всего они выкопали $(\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}+40)$ саж., или всю канаву, т.-е. x саж. Здѣсь мы получили одно и то же количество—длину канавы въ видѣ двухъ функцій и можемъ написать, что

$$\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}+40=x.$$

Чтобы опредѣлить x, помножимъ обѣ части равенства на 15, тогда

$$\frac{15x}{3}+\frac{15.2x}{5}+40.15=15x \text{ или } 5x+6x+40.15=15x$$
$$\text{или } 11x+40.15=15x.$$

Перенесемъ $11x$ въ правую часть, тогда $15.40=15x-11x$ или $15.40=4x$. Раздѣлимъ обѣ части на 4, получимъ

$$x=\frac{15.40}{4} \quad \text{или} \quad x=150 \text{ саж.}$$

§ 8. Анализъ предложенныхъ задачъ.

Разсмотримъ задачи, приведенныя въ предыдущемъ параграфѣ, съ точки зрѣнія функціональной зависимости. Такое разсмотрѣніе называется изслѣдованіемъ. Изслѣдованіе можетъ быть произведено только тогда, когда величины, входящія въ задачу выражены буквами; оно опредѣляетъ, какъ измѣняется одна перемѣнная въ зависимости отъ измѣненія другой.

Возьмемъ сначала наиболѣе простую задачу № 3. Въ нее входятъ три количества: величина центральнаго угла вписаннаго многоугольника, число его сторонъ и 360^0. Очевидно, что послѣднее количество 360^0 мѣняться не можетъ, а потому называется *величиной постоянной*. Согласно моей терминологіи, я буду его называть *постояннымъ количествомъ*. Это постоянное количество имѣетъ опредѣленное числовое значеніе, и это числовое значеніе также не можетъ мѣняться. Такое постоянное количество, которое всегда имѣетъ одно и то же числовое значеніе, я назову *абсолютнымъ постояннымъ*. Итакъ, задача имѣетъ абсолютное постоянное 360^0 и двѣ перемѣнныя величины: величину центральнаго угла x и число сторонъ многоугольника n. Эти величины по своей функціональной зависимости связаны равенствомъ $x=\frac{360}{n}$. Если одной изъ этихъ перемѣнныхъ мы придадимъ числовое значеніе, то наше равенство переходитъ въ уравненіе, изъ котораго можно опредѣлить числовое значеніе другой перемѣнной. То перемѣнное, которому мы будемъ придавать числовыя значенія, называется независимымъ, а то, которое будетъ получать вычисленныя числовыя значенія изъ полученнаго уравненія—зависимымъ перемѣннымъ; его называютъ также и функціей перваго. Уравненіе $x=\frac{360}{n}$ показываетъ, что x есть функція n; но съ одинаковымъ правомъ мы можемъ написать и обратно $n=\frac{360}{x}$, гдѣ n есть функція x. Это наше право вытекаетъ изъ того, что нѣтъ существеннаго различія между x и n,—каждая изъ нихъ опредѣляется при помощи другой. Кромѣ того само равенство $x=\frac{360}{n}$ или $n=\frac{360}{x}$ является слѣдствіемъ основного равенства $xn=360$. Въ такомъ видѣ x и n совершенно равноправны, а потому само равенство носитъ названіе *неявной функціи*, т.-е. такой, въ которой мы не выбрали еще независимое перемѣнное. Возьмемъ функцію $x=\frac{360}{n}$ и будемъ ее изслѣдовать. При этомъ изслѣдованіи, какъ мы уже видѣли (глава 4), уравненіе не всегда возможно; оно возможно тогда, когда n имѣетъ цѣлыя числовыя значенія и при томъ болѣе 3. Если ему придать дробоное значеніе или положить $n=2$, то уравненіе теряетъ смыслъ по свойству количествъ; но за исключеніемъ этого при всякомъ числовомъ значеніи n—количество x получаетъ опредѣленное числовое значеніе.

Если мы теперь возьмемъ обратную функцію $n=\frac{360}{x}$, то въ уравненіи числовыя значенія x оказываются еще болѣе ограниченными: они должны подчиниться свойствамъ числа n, и уравненіе теряетъ свой смыслъ всякій разъ, какъ вычисленіе даетъ намъ или дробное n или $n<3$.

Отсюда мы видимъ, что свойства количествъ ограничиваютъ нашъ призволъ приписывать для x или n числовыя значенія, т.-е. ограничиваютъ возможность рѣшеній уравненія. Вслѣдствіи этого мы должны сказать, что *уравненія, вытекающія изъ функціональной зависимости величинъ могутъ не имѣть рѣшеній.* Это будетъ тогда, когда данная задача составлена съ нарушеніемъ свойствъ данныхъ количествъ. Напримѣръ, мы не можемъ найти число сторонъ многоугольника, у котораго центральный уголъ имѣлъ бы 19^0.

Перейдемъ теперь къ анализу послѣдней задачи № 5, которая дана въ слѣдующемъ видѣ: «Рабочіе вырыли въ первый день $\frac{1}{3}$ канавы, во второй $\frac{2}{5}$ части, а въ третій остальныя 40 саженъ. Какъ велика длина канавы?

Такія задачи рѣшались уже въ ариѳметикѣ, гдѣ былъ такой способъ разсужденія:

Примемъ длину канавы за единицу, т.-е. представимъ себѣ, что длина канавы есть нѣкоторое количество, способное дробиться на части; сосчитаемъ, какую часть этого количества рабочіе сдѣлали въ 2 дня. Этотъ подсчетъ мы можемъ сдѣлать только тогда, когда данныя дроби суть части одного и того же количества. Въ данной задачѣ это условіе соблюдено, и мы имѣемъ право сложить $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{5}$; сумма $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ даетъ намъ $\frac{11}{15}$.

Слѣдовательно, благодаря тому, что данное количество— длина канавы, способно дробиться, мы можемъ дѣлить его на какія угодно части: оно было раздѣлено на 3 равныя части, потомъ на 5 равныхъ частей, а теперь мы дѣлимъ его на 15 равныхъ частей, и говоримъ, что въ 2 дня рабочіе выкопали 11 такихъ пятнадцатыхъ частей. Очевидно, что имъ осталось копать 4 пятнадцатыхъ части или 40 саженъ. Значитъ $\frac{4}{15}$ составляютъ 40 саженъ, а $\frac{1}{15}$ равна 10 саж., а во всей канавѣ будетъ 150 саж.

Такое ариѳметическое рѣшеніе нисколько не отличается отъ алгебраическаго рѣшенія, въ которомъ мы обозначаемъ длину канавы, не черезъ единицу, а полагаемъ, что она содержитъ x саженъ. Тогда мы получаемъ право уравнять число саженъ въ канавѣ, вычисляя это число по частямъ $\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}+40$ и взявъ его въ цѣломъ — x. Получаемъ уравненіе, рѣшивъ которое, найдемъ тоже число 150.

Сопоставляя ариѳметическое рѣшеніе съ рѣшеніемъ уравненія, мы и здѣсь находимъ полную аналогію: въ уравненіи мы съ x дѣлаемъ совершенно тѣ же преобразованія, которыя мы дѣлали съ единицей. Мы также складываемъ $\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}$, вычитаемъ эту сумму изъ цѣлаго x и дѣлимъ 40 на полученный коэффиціентъ $\frac{4}{15}$.

Такое совпаденіе способовъ рѣшенія не является случайностью: оно является слѣдствіемъ того, что въ этой задачѣ нѣтъ функціональной зависисимости двухъ величинъ, а есть только измѣненіе одной величины.

Разсмотримъ болѣе подробно содержаніе задачи. Очевидно, что мы можемъ придумать совершенно другія числа; мы можемъ также взять за цѣлое не длину канавы, а деньги, уплаченныя рабочимъ, постройку дома и тому подобное. Такимъ образомъ мы видимъ, что сущность задачи состоитъ въ томъ, что взято нѣкоторое количество какъ цѣлое, это цѣлое раздроблено на опредѣленныя части; зная одну изъ этихъ частей, мы можемъ опредѣлить числовую величину всего цѣлаго.

Дробленіе на части подчиняется закону числовыхъ соотношеній, главное и основное свойство которыхъ состоитъ въ томъ, что 1) цѣлое всегда равно суммѣ своихъ частей и 2) часть всегда меньше цѣлаго.

Изъ этихъ условій вытекаетъ и невозможность рѣшенія задачи, которая будетъ обусловлена неправильностью ея заданія. Если мы въ задачѣ возьмемъ такія числа, которыя будутъ противорѣчить основнымъ свойствамъ чиселъ, то рѣшеніе задачи невозможно.

Не трудно видѣть, что эта невозможность обусловливается единственнымъ условіемъ, чтобы сумма данныхъ дробей была меньше единицы. Если это условіе выполнено, то задача всегда возможна.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію задачи № 4: «Часы проданы за 63 рубля, при чемъ полученная прибыль равна $\frac{1}{8}$ стоимости часовъ. Сколько стоятъ часы?»

Если мы обобщимъ содержаніе этой задачи, уничтоживъ наименованіе проданнаго товара—часы, и поставивъ буквы вмѣсто чиселъ, то получимъ такую задачу: проданъ товаръ за a рублей, при чемъ полученная прибыль равна $\frac{1}{n}$ стоимости товара. Сколько рублей стоитъ товаръ? Здѣсь мы имѣемъ три величины: покупная стоимость, продажная стоимость и прибыль. Эти величины находятся въ функціональной зависимости, которая выражается слѣдующимъ ариѳметическимъ отношеніемъ.

Продажная стоимость—покупная стоимость = прибыли.

Въ данной задачѣ намъ неизвѣстна покупная стоимость, обозначимъ ее черезъ x, тогда ариѳметическое отношеніе количествъ можно написать въ видѣ:

$$a - x = \text{прибыль}.$$

Если $a > x$, то при продажѣ получается прибыль, а если $a < x$, то получается убытокъ, этотъ убытокъ обозначается отрицательнымъ числомъ и его можно назвать отрицательной прибылью. При такомъ пониманіи, мы имѣемъ общую формулу функціональной зависимости трехъ величинъ. Изъ этой формулы мы видимъ, что если намъ даны числовыя величины двухъ количествъ, то мы получаемъ уравненіе, изъ котораго можемъ вычислить третье количество.

Отсюда слѣдуетъ, что если три величины имѣютъ функціональную зависимость, выраженную однимъ равенствомъ, то мы можемъ вычислить каждую изъ нихъ, когда даны двѣ другія. Это заданіе можетъ быть дано и въ видѣ новаго условія, такъ, напримѣръ, въ данной задачѣ прибыль задана не числомъ, а опредѣленной частью покупной стоимости, т.-е. x. Это условіе не вытекаетъ изъ свойствъ разсматриваемыхъ величинъ, оно придумано составителемъ и является дополнительнымъ условіемъ, которое позволяетъ одно изъ разсматриваемыхъ количествъ— прибыль выразить въ функціи покупной стоимости: прибыль равна $\frac{1}{n}$ части покупной стоимости, т.-е. $\frac{x}{n}$; тогда мы получаемъ уравненіе:

$$a - x = \frac{x}{n}$$

въ которомъ только одно неизвѣстное x.

Мы можемъ опредѣлить прибыль, какъ часть продажной стоимости, тогда она будетъ $\frac{a}{n}$ и наше уравненіе приметъ видъ $a - x = \frac{a}{n}$.

Въ обоихъ случаяхъ мы имѣемъ при этомъ условіи функціональную зависимость только двухъ величинъ, зная одну, всегда можно вычислить другую.

Примѣчаніе. Рѣшеніе уравненія даетъ:

$$x = \frac{an}{n+1} \text{ или } x = \frac{an-a}{n} = \frac{a(n-1)}{n}.$$

Въ обоихъ случаяхъ n не есть количество, а число и первая изъ этихъ формулъ собственно пишется такъ:

$$a : \frac{n+1}{n}, \text{ а вторая } a . \frac{n-1}{n}.$$

Разсмотримъ еще вкратцѣ самыя количества: продажная стоимость и покупная стоимость. Если мы ограничимся небольшимъ кругомъ личной жизни, то между этими количествами нѣтъ никакой внутренней связи. Мы покупаемъ вещь въ магазинѣ и платимъ за нее столько, сколько спрашиваетъ торговецъ, можемъ купить по случаю ту же вещь за очень дешевую цѣну. Когда намъ случается продавать ту же вещь, то мы получаемъ столько, сколько намъ даютъ, и вообще говоря, всегда меньше того, что мы сами за нее заплатили. Если намъ и нужно будетъ сравнить эти двѣ стоимости, то наше сравненіе будетъ зависѣть отъ нашей воли, отъ нашего желанія; при сравненіи мы можемъ опредѣлить прибыль или убытокъ. Но, если мы представимъ себѣ не ограниченный кругъ личной жизни, а всю совокупность жизненныхъ условій, то увидимъ, что продажная и покупная стоимость есть функція очень сложныхъ величинъ. Такъ, напримѣръ, покупная стоимость хлѣба зависитъ отъ урожая, стоимость вещей зависитъ отъ количества ихъ производства и т. д. Въ этомъ смыслѣ для міорового рынка сравненіе той и другой стоимости есть опредѣленная функція особыхъ условій, для которыхъ еще не найдено математическаго выраженія. Изслѣдованіемъ этихъ условій занимается особая наука, которая называется политической экономіей.

§ 9. **Значеніе коэффиціентовъ при x — въ количественномъ уравненіи.**

Намъ осталось разобрать рѣшенія двухъ задачъ § 7. Возьмемъ первую изъ нихъ. «За 30 арш. сукна двухъ сортовъ заплачено 128 руб., аршинъ 1-го сорта стоитъ $4\frac{1}{2}$ руб., а аршинъ 2-го сорта 4 руб. Сколько аршинъ того и другого сорта было куплено?»

Разсмотримъ сначала, съ какими величинами мы встрѣчаемся при рѣшеніи этой задачи. Здѣсь намъ дано общее количество товара двухъ сортовъ, затѣмъ дана общая стоимость этого товара и цѣнность каждаго сорта.

Общее количество товара. Въ задачѣ дано, что куплено 30 аршинъ сукна двухъ сортовъ; оба сорта сукна измѣряются одной и той же единицей — аршиномъ, поэтому количество сукна того и другого сорта могутъ быть сложены и даны ихъ суммы. Но общій типъ рѣшенія и смыслъ полученныхъ равенствъ не измѣнится, если мы возьмемъ разный товаръ, измѣренный разными единицами; но тогда мы не можемъ найти сумму и должны дать отдѣльно: количество товара одного сорта и количество товара другого сорта. Возьмемъ, напримѣръ, такую задачу: «За 4 фунта чаю и 9 пудовъ сахару заплатили 93 рубля; при этомъ пудъ сахару обошелся втрое дороже фунта чаю. Сколько рублей платили за фунтъ чаю и пудъ сахару?»

Въ этой задачѣ также дано: количество товара двухъ сортовъ, но товара разнаго, измѣреннаго разными единицами, дана общая стоимость этого товара, требуется опредѣлить цѣнность того и другого, при чемъ для этого опредѣленія указана функціональная зависимость цѣнности. Отличіе этой задачи отъ разсматриваемой состоитъ въ томъ, что здѣсь ищется цѣнность, а тамъ она дана и ищется количество; но такъ какъ мы вводимъ алгебраически подъ видомъ перемѣннаго x искомое количество, то очевидно, что обѣ задачи будутъ имѣть одну и ту же функціональную зависимость, которая должна быть установлена между данными величинами.

Среди этихъ величинъ *количество товара* можетъ быть дано или въ видѣ суммы или въ видѣ отдѣльныхъ количествъ, но *стоимость* должна быть дана общей.

Цѣнность товара, все равно будетъ ли она задана или будетъ искомой, должна быть выражена или непосредственно (аршинъ одного сорта стоитъ $4\frac{1}{2}$ рубля, а другого 4 руб.), или въ видѣ функціональной зависимости (пудъ сахару стоитъ втрое дороже фунта чаю). При этомъ нужно отмѣтить, что стоимость и цѣнность обыкновенно измѣряются въ одной и той же единицѣ (рублемъ), но могутъ быть даны равноцѣнныя количества; напримѣръ, условіе второй задачи можно формулировать такъ: Сколько стоитъ фунтъ чаю и пудъ сахару, если вмѣсто пуда сахару даютъ 3 фунта чаю? Въ такой формулировкѣ дано, что цѣнность пуда сахару равна цѣнности 3 фунтовъ чаю, но эта цѣнность дана не въ рубляхъ, а въ равноцѣнныхъ количествахъ товара.

Разсмотрѣвъ входящія величины, составимъ уравненіе для рѣшенія второй задачи. Положимъ, что цѣнность чая въ фунтахъ равна x, т.-е., что фунтъ чая стоитъ x рублей; тотгда цѣнность сахара въ пудахъ будетъ $3x$ рублей.

Куплено 4 фунта чаю, слѣдовательно стоимость чая будетъ $4x$ рублей, а стоимость 9 пудовъ сахара $9.3x$ или $27x$ рублей. Стоимость всего товара будетъ $4x+27x$ или 93 рубля. Итакъ $4x+27x=93$ или $31x=93$, а $x=3$ рубля.

Теперь обобщимъ нашу задачу: обозначимъ общее количество купленнаго товара двухъ сортовъ черезъ a, стоимость его черезъ b, а цѣнность одного сорта будетъ c руб., другого d руб., поставимъ вопросъ, сколько куплено того и другого сорта. Обозначивъ черезъ x количество одного сорта, найдемъ, что количество другого будетъ $a-x$; стоимость одного будетъ cx рублей, стоимость другого $(a-x)d$. Слѣдовательно, оба сорта стоятъ $cx+(a-x)d=b$. Раскрывъ скобки въ этомъ уравненіи, получимъ $cx+ad-dx=b$, или, взявъ x за скобки, можемъ написать, что $(c-d)x+ad=b$. Итакъ, общая стоимость b есть сумма двухъ стоимостей, изъ которыхъ одна ad есть стоимость всего товара, если бы онъ былъ одного сорта, а другое слагаемое есть ариѳметическое отношеніе цѣнностей, умноженное на количество искомаго товара. Если мы ad перенесемъ въ правую часть равенства, то получимъ, что $(c-d)x=b-ad$, т.-е. ариѳметическое отношеніе стоимостей будетъ представлять собою произведеніе ариѳметическаго отношенія цѣнности на искомое количество товара одного сорта. Другими словами, это есть то равенство, которое позволяетъ рѣшить задачу ариѳметически.

Тамъ, мы говоримъ: положимъ, что весь товаръ будетъ одного сорта, тогда онъ стоилъ бы ad рублей; но онъ стоитъ b рублей потому, что другой сортъ дешевле; общая стоимость понижается на $b-ad$ рублей, т.-е. всѣ аршины или фунты одного сорта будутъ дешевле на $(c-d)$ рублей. Отсюда находимъ число единицъ мѣры.

Если бы мы черезъ x обозначили болѣе дорогой сортъ, тогда $c-d$ было бы число отрицательное; но и $b-ad$ было бы также отрицательнымъ. Перемѣнивъ знаки во всемъ уравненіи, получимъ $(d-c)x=ad-b$. Рѣшеніе будетъ правильное.

Обобщимъ теперь рѣшеніе второй задачи. Пусть количество одного сорта товара будетъ a, другого c, общая стоимость b рублей. Опредѣлить цѣнность того и другого, если одна изъ нихъ въ k разъ больше другой.

Обозначимъ цѣнность перваго черезъ x, тогда цѣнность второго kx; стоимость перваго будетъ ax, стоимость второго ckx, общая стоимость $ax+ckx=b$.

Разсмотримъ теперь оба уравненія:

$$cx+(a-x)d=b \text{ (первой задачи)}$$
$$\text{и } ax+ckx=b \text{ (второй задачи).}$$

Мы видимъ, что каждое изъ нихъ имѣетъ одинъ и тотъ же смыслъ: въ томъ и другомъ стоимости заданія $cx+(a-x)d$ и $ax+ckx$ уравнены данной стоимости b; но въ первомъ уравненіи за неизвѣстное взято количество товара, а во второмъ цѣнность товара; въ первомъ цѣнность дана c и d, а въ въ другомъ дано количество a и c. Мы оба уравненія можемъ написать такъ:

$$\text{(количество)} \times \text{(цѣнность одного)} + \text{(количество)} \times$$
$$\times \text{(цѣнность другого)} = \text{стоимости.}$$

Въ такомъ видѣ мы имѣемъ функціональную зависимость между количествомъ, цѣнностью и стоимостью въ томъ случаѣ, когда дано 2 сорта товара.

Отсюда слѣдуетъ, что коэффиціенты при x въ уравненіи не являются произвольными числами, но количествами величинъ, имѣющими особый смыслъ, соотвѣтственно условіямъ задачи.

Вслѣдствіе этого каждое преобразованіе количественнаго уравненія можетъ быть разсматриваемо какъ новое свойство изучаемыхъ количествъ, которое мы можемъ вскрыть, подставивъ вмѣсто чиселъ разсматриваемыя величины. Такое вскрытіе полученныхъ формулъ называется *изслѣдованіемъ задачи* и представляется особенно важнымъ въ вопросѣ о движеніи, къ которому мы и перейдемъ въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ.

§ 10. **Задачи**.

Рѣшить слѣдующія задачи ариѳметически и алгебраически. Показать изъ какихъ алгебраическихъ преобразованій получаются ариѳметическія рѣшенія.

1) Помѣщикъ купилъ 13 десятинъ лѣса и 25 десятинъ пахотной земли, заплативъ за покупку 4060 рублей. Сколько стоитъ десятина лѣса и десятина пахотной земли, если первая обошлась на 20 рублей дороже?

Отв. 170 р.; 150 р.

2) Кассиръ продалъ 125 билетовъ перваго класса и 300 билетовъ второго класса на сумму 1400 рублей. Сколько стоитъ билетъ каждаго класса, если билетъ перваго стоитъ рублемъ дороже билета 2-го класса?

Отв. 4 р.; 3 р.

3) На станціи было продано 75 билетовъ перваго класса, 120 билетовъ второго и 212 билетовъ третьяго, всего на сумму 3040 рублей. Найти цѣнность билета каждаго класса, если билетъ перваго стоитъ 3-мя рублями дороже второго и 7-ю рублями дороже билета 3-го класса? Отв. 12 р.; 9 р.; 5 р.

4) На сумму 619 рублей продано 100 аршинъ сукна двухъ сортовъ. Сколько аршинъ продано того и другого сорта, если аршинъ перваго стоитъ 7 рублей, а аршинъ второго 4 руб.? Отв. 73 арш.; 27 арш.

5) На постройку дома въ 4 недѣли было истрачено 672 руб., при чемъ были наняты плотники и столяры. Каждый столяръ получалъ 8 руб. въ недѣлю, а

каждый плотникъ 4 руб. Сколько было тѣхъ и другихъ, если вмѣстѣ ихъ было 37 человѣкъ?

Отвѣтъ: 15 столяровъ и 12 плотниковъ.

§ 11. **Изслѣдованіе функціональной зависимости въ вопросѣ о равномѣрномъ движеніи. Понятіе о скорости.**

Если что нибудь, напримѣръ, поѣздъ желѣзной дороги, пароходъ, лошадь или человѣкъ, двигаются съ одной и той же скоростью, то такое движеніе называется равномѣрнымъ. По существу движеніе каждаго изъ этихъ предметовъ не будетъ равномѣрнымъ, такъ какъ скорость измѣняется во время движенія, но мы при разсчетахъ беремъ среднюю скорость, и принимаемъ все движеніе за равномѣрное.

Такъ, напримѣръ, поѣздъ желѣзной дороги идетъ скорѣе подъ гору, медленнѣе на подъемахъ и стоитъ на станціяхъ; но разстояніе отъ Москвы до Петербурга, въ 604 версты, онъ проѣзжаетъ въ 10 часовъ, слѣдовательно поѣздъ двигается со средней скоростью 60,4 версты въ часъ.

Въ такомъ движеніи, мы имѣемъ слѣдующія величины: разстояніе, время и скорость.

Первая изъ этихъ величинъ измѣряется верстами, саженями, или другими единицами длины; вторая измѣряется часами, минутами, секундами. Что касается до скорости, то мы условимся измѣрять ее сложной единицей, которую будемъ изображать въ видѣ дроби, въ числителѣ единица длины, а въ знаменателѣ единица времени. Такъ въ указанномъ примѣрѣ мы скажемъ, что средняя скорость поѣзда равна 60,4 $\frac{\text{верста}}{\text{часъ}}$.

Измѣненіе какой-нибудь изъ этихъ единицъ мѣняетъ и числовую величину скорости, такъ, напримѣръ, если мы будемъ измѣрять разстояніе въ саженяхъ, то должны скорость поѣзда выразить числомъ 30200 $\frac{\text{саж.}}{\text{час.}}$; если мы измѣнимъ время и будемъ считать его въ минутахъ, то получимъ скорость $503\frac{1}{2}$ $\frac{\text{саж.}}{\text{минут.}}$.

Средняя скорость движенія нѣкоторыхъ предметовъ точно опредѣлена, и таблица этихъ скоростей находится въ справочныхъ книгахъ. Вотъ нѣсколько примѣровъ:

Человѣкъ идетъ шагомъ со средней скоростью	125 $\frac{\text{сант.}}{\text{секунду}}$
Быстроходный пароходъ движется со скоростью	8,5 $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$
Велосипедистъ	10 $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$
Бѣговая лошадь	12,5 $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$
Скорый поѣздъ	17 $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$
Почтовый голубь	27 $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$
Ласточка	67 $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$
Звукъ распространяется въ воздухѣ со скоростью	333 $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$
,, ,, ,, водѣ ,, ,,	1500 $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$
Точка экватора при суточномъ вращеніи земли	463 $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$
Свѣтъ распространяется со скоростъю . . .	300000 $\frac{\text{кил.}}{\text{сек.}}$

Скорость есть величина, а потому количества ея могутъ складываться и вычитаться, подчиняясь закону сложенія количествъ, который можно формулировать такъ: «Чтобы найти число, выражающее сумму данныхъ однородныхъ количествъ, мы должны предварительно выразить каждое изъ нихъ числомъ одной и той же единицы мѣры. Сумма чиселъ и будетъ суммой количествъ».

Такое сложеніе (вычитаніе) намъ приходится дѣлать тогда, когда мы имѣемъ сложное движеніе. Такъ, напримѣръ, если быстроходный пароходъ будетъ плыть вдоль экватора съ востока на западъ, то для пассажировъ этого парохода скорость движенія вокругъ земной оси будетъ меньше на 8,5 $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$, т.-е. она будетъ 454,5 $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$, вслѣдствіе чего часъ измѣнится на 0,002 (приблизительно).

Возьмемъ такую задачу: лодка въ спокойной водѣ движется со скоростью 40 $\frac{\text{саж.}}{\text{минут.}}$, рѣка течетъ со скоростью 3 $\frac{\text{верст.}}{\text{часъ}}$. Какое разстояніе проплыветъ лодка противъ теченія въ 3 часа? Здѣсь надо предварительно узнать, какъ велика будетъ скорость движенія лодки противъ теченія. Она будетъ равна разности скоростей 40 $\frac{\text{саж.}}{\text{мин.}}$ — 3 $\frac{\text{верст.}}{\text{час.}}$ чтобы вычислить эту разность, мы должны предварительно выразить каждое количество въ одинаковыхъ единицахъ; выразимъ скорость теченія въ единицахъ $\frac{\text{саж.}}{\text{мин.}}$. Для этого обратимъ версты въ сажени, получимъ 1500 саж., потомъ часы въ минуты, будетъ 60 минутъ; слѣдовательно скорость теченія рѣки будетъ равна $\frac{1500}{60}\ \frac{\text{саж.}}{\text{мин.}}$ или $25\ \frac{\text{саж.}}{\text{мин.}}$ Тогда разность скоростей будетъ $40\frac{\text{саж.}}{\text{мин.}} - 25\ \frac{\text{саж.}}{\text{мин.}} = 15\ \frac{\text{саж}}{\text{мин.}}$ Съ этой скоростью будетъ подвигаться лодка противъ теченія. Чтобы узнать, какое разстояніе она пройдетъ въ 3 часа, обратимъ часы въ минуты, получимъ 180 минутъ и умножимъ $15\ \frac{\text{саж.}}{\text{мин}}$ на 180 мин., получимъ 2700 саж.

Это умноженіе мы дѣлаемъ на основаніи слѣдующаго соотношенія: мы представляемъ количество скорости, какъ бы въ видѣ произведенія $15 \times \frac{\text{саж.}}{\text{мин.}}$ и время также въ видѣ произведенія $180 \times$ мин. Произведеніе количествъ $15\ \frac{\text{саж.}}{\text{мин.}} \times 180$ минут., мы представляемъ въ видѣ $15 \times 180\ \frac{\text{саж.}}{\text{мин.}} \times$ мин. и, какъ бы сокращая наименованіе минутъ, получаемъ разстояніе въ видѣ 15.180 саж.

§ 12. **Изслѣдованіе функціональной зависимости количествъ въ вопросѣ о равномѣрномъ движеніи (продолженіе).**

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію функціональной зависимости между разстояніемъ, скоростью и временемъ. Для этого обозначимъ разстояніе буквой s, скоростью—буквой v и время—буквой t.

Здѣсь буквы s, v и t могутъ имѣть двоякое значеніе: они могутъ обозначать самыя величины, т.-е. обозначимъ величину разстоянія буквой s, величину времени—буквой t и скорости буквой v; но они могутъ обозначать и числовыя количества этихъ величинъ, тогда s будетъ s единицъ разстоянія, t единицъ времени и v единицъ скорости. Намъ нужно найти функціональную зависимость величинъ, но чтобы это сдѣлать, необходимо разсмотрѣть числовыя значенія величинъ. Итакъ, пусть какое-нибудь тѣло въ t единицъ времени проходитъ s единицъ разстоянія; какое разстояніе оно проходитъ въ единицу времени? Вопросъ задачи мы можемъ формулировать иначе какую скорость имѣетъ тѣло? потому что подъ словомъ скорость мы понимаемъ разстояніе, проходимое тѣломъ въ единицу времени.

Чтобы опредѣлить это разстояніе, надо s единицъ длины раздѣлить на t единицъ времени. Такое дѣленіе возможно только при допущеніи, что оно есть самостоятельное дѣйствіе, посредствомъ котораго находится новая величина, такой величиной будетъ скорость. Эту новую величину мы находимъ такъ. Представимъ s единицъ длины какъ кратное число единицы длины, т.-е. въ видѣ $s \times$ (единицу длины) и время t, какъ кратное число единицы времени, т.-е. $t \times$ (единицу времени), и тогда частное $\frac{s}{t}\left(\frac{\text{единица длины}}{\text{единица времени}}\right)$ можетъ быть представлено какъ кратное число новой величины скорости $\frac{s}{t}\left(\frac{\text{единица длины}}{\text{единицу времени}}\right)$; здѣсь $\frac{s}{t}$ даетъ числовую величину скорости, а выраженіе $\frac{\text{единица длины}}{\text{единица времени}}$ служитъ единицей измѣренія этой новой величины, и мы можемъ написать, что $\frac{s}{t}\left(\frac{\text{единицъ длины}}{\text{единица времени}}\right) = v$ единицъ скорости.

Замѣняя числовыя значенія количествъ величины самими величинами, получимъ ихъ функціональное соотношеніе, которое и выразится такой алгебраической формулой:

$$\frac{s}{t} = v.$$

Это функціональное соотношеніе связываетъ между собою три количества: разстояніе, время и скорость.

Если эти количества будутъ даны въ числовомъ видѣ, то по этой формулѣ мы можемъ написать уравненіе, изъ котораго можемъ опредѣлить скорость, зная разстояніе и время; можемъ опредѣлить разстояніе, если извѣстны время и скорость; наконецъ, можемъ опредѣлить время, когда даны разстояніе и скорость.

Такъ какъ основныя аксіомы равенствъ одинаковы для чиселъ и для количествъ, то равенство $\frac{s}{t} = v$ можно написать и такъ $s = vt$.

Это равенство называется въ механикѣ уравненіемъ равномѣрнаго движенія.

§ 13. **Задачи.**

1) Встрѣтились два поѣзда, выѣхавшіе изъ разныхъ городовъ; одинъ изъ нихъ ѣхалъ до встрѣчи 14 часовъ со скоростью 24 $\frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}}$, а другой 17 часовъ со скоростью 28 $\frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}}$. Какъ велико разстояніе между городами?

Отвѣтъ 812 верстъ.

2) Лошадь бѣжала 18 минутъ; въ каждыя 3 минуты она пробѣгала 166 саженей, а поѣздъ желѣзной дороги прошелъ это разстояніе въ 3 минуты. Опредѣлить скорость поѣзда?

Отвѣтъ 332 $\frac{\text{саж.}}{\text{мин.}}$

3) Путешественнику нужно проѣхать 346 верстъ; онъ проѣхалъ 196 верстъ; съ какой скоростью онъ долженъ ѣхать дальше, чтобы остальное разстояніе проѣхать въ 6 дней?

Отвѣтъ 25 $\frac{\text{верста}}{\text{день}}$.

4) Поѣздъ, идя съ одною и тою же скоростью, проходитъ растояніе въ 238 верстъ въ 7 часовъ. Черезъ два часа послѣ выѣзда этого поѣзда со станціи отправленія, вслѣдъ за нимъ отправляется другой. Съ какой скоростью онъ долженъ ѣхать, чтобы догнать первый поѣздъ на разстояніи 136 верстъ?

Отвѣтъ 68 $\frac{\text{верста}}{\text{часъ}}$.

5) Два поѣзда выѣхали съ двухъ станцій, разстояніе, между которыми равно 621 верстѣ, въ разное время навстрѣчу другъ другу. Первый ѣхалъ со скоростью 30 $\frac{\text{верста}}{\text{часъ}}$, а второй 27 $\frac{\text{верста}}{\text{часъ}}$. Когда первый поѣздъ прошелъ разстояніе въ 270 верстъ, то онъ встрѣтилъ второй. На сколько часовъ одинъ изъ нихъ выѣхалъ раньше другого?

Отвѣтъ на 4 часа.

6) Путешественникъ, отправившійся изъ Одессы на лошадяхъ, двигается со скоростью $8\frac{1}{4}$ $\frac{\text{верста}}{\text{часъ}}$. Спустя $6\frac{3}{4}$ часа послѣ его отъѣзда по той же дорогѣ отправился курьеръ,

который двигается со скоростью $9\frac{5}{8}\ \frac{\text{верста}}{\text{часъ}}$. Черезъ сколько часовъ онъ догонитъ перваго?

Отвѣтъ $47\frac{1}{4}$ часовъ.

7) Изъ городовъ A и B, между которыми 301 верста, отправились два поѣзда въ одно и то же время по одному и тому же направленію. Изъ A вышелъ пассажирскій поѣздъ, который движется со скоростью $31\frac{1}{2}\ \frac{\text{верста}}{\text{часъ}}$, а изъ B товарный, движущійся со скоростью $18\frac{2}{3}\ \frac{\text{верста}}{\text{часъ}}$. На какомъ разстояніи отъ города B они встрѣтятся?

Отвѣтъ 112 верстъ.

8) Вагонъ трамвая шелъ отъ станціи A къ станціи B со скоростью $30\ \frac{\text{верста}}{\text{часъ}}$, а обратно отъ A къ B со скоростью $40\ \frac{\text{верста}}{\text{часъ}}$. Сколько верстъ отъ A до B, если на весь путь туда и обратно пошло $3\frac{1}{2}$ часа?

Отвѣтъ 60 верстъ.

9) Два тѣла движутся въ одну сторону изъ разныхъ мѣстъ A и B, разстояніе между которыми равно 100 саженямъ. Первое, изъ B, движется со скоростью $\frac{1\text{ фут.}}{1\text{ секунд.}}$, второе, изъ A, въ 3 раза скорѣе. Гдѣ они встрѣтятся, если начали двигаться одновременно?

Отвѣтъ 50 саж. отъ B.

10) Два тѣла двигаются въ одномъ и томъ же направленіи по окружности круга, въ которой 100 футовъ, начавъ свое движеніе съ одного и того же мѣста. Первое движется со скоростью $5\ \frac{\text{фут.}}{\text{сек.}}$, а второе $36\ \frac{\text{дюйм.}}{\text{сек.}}$. Черезъ сколько секундъ оба тѣла будутъ вновь на одномъ и томъ же мѣстѣ?

Отвѣтъ: черезъ 50 секундъ.

11) Пѣшеходъ долженъ былъ пройти нѣкоторое разстояніе такъ, чтобы прибыть на мѣсто не позже извѣстнаго срока. Пройдя въ 1 часъ 3 версты, онъ разсчиталъ, что онъ опоздаетъ на 20 минутъ, если будетъ итти съ той же скоростью, а потому онъ ускорилъ ходъ на $\frac{1}{2}$ версты въ часъ и прибылъ на мѣсто за 40 минутъ до срока.

Какъ велико разстоянiе, которое онъ долженъ былъ пройти?

Отвѣтъ: 24 версты.

12) Три тѣла двигаются по одному и тому же направленiю, и начинаютъ свое движенiе съ одной и той же точки, со скоростью первое 4 $\frac{\text{дюйм.}}{\text{сек.}}$, второе 5 $\frac{\text{дюйм.}}{\text{сек.}}$, третье 6 $\frac{\text{дюйм.}}{\text{сек.}}$. Второе тѣло двинулось черезъ 2 часа послѣ перваго. Черезъ сколько времени послѣ отправленiя второго должно двинуться третье, чтобы догнать первое одновременно со вторымъ?

Отвѣтъ: черезъ 1 часъ 20 минутъ.

13) Собака гонится за лисицей, которая успѣла сдѣлать 60 скачковъ, и это составляетъ первоначальное разстоянiе между ними. Собака дѣлаетъ 6 скачковъ въ то время, когда лисица дѣлаетъ 9; но 9 лисьихъ скачковъ равны 3 собачьимъ. Сколько скачковъ должна собака сдѣлать, чтобы догнать лису?

Отвѣтъ: 30 скачковъ.

14) Двое часовъ бьютъ одновременно, и слышно, что ударили 19 разъ. Удары первыхъ часовъ слѣдуютъ черезъ 3 секунды, вторыхъ черезъ 4 секунды. Который былъ часъ, если извѣстно, что первые часы опоздываютъ на 2 секунды?

Отвѣтъ: 11 часовъ.

ГЛАВА VI.

Отношенiя.

§ 1. Понятiе о мѣрѣ и объ измѣренiи.

Разсмотримъ сначала двѣ линiи: если одна изъ нихъ укладывается въ другой цѣлое число разъ, то первая называется мѣрой второй. Такъ наприм., дюймъ есть мѣра аршина, потому что онъ укладывается въ немъ ровно 28 разъ. Точно также, если мы возьмемъ два сосуда: графинъ и стаканъ; если въ графинъ наливается цѣлое число стакановъ, то стаканъ есть мѣра графина.

Подобнымъ образомъ мы можемъ судить о мѣрѣ всякаго количества; признакомъ того, что данное количество есть мѣра другого будетъ тотъ признакъ, что данное количество укладывается въ другомъ цѣлое число разъ.

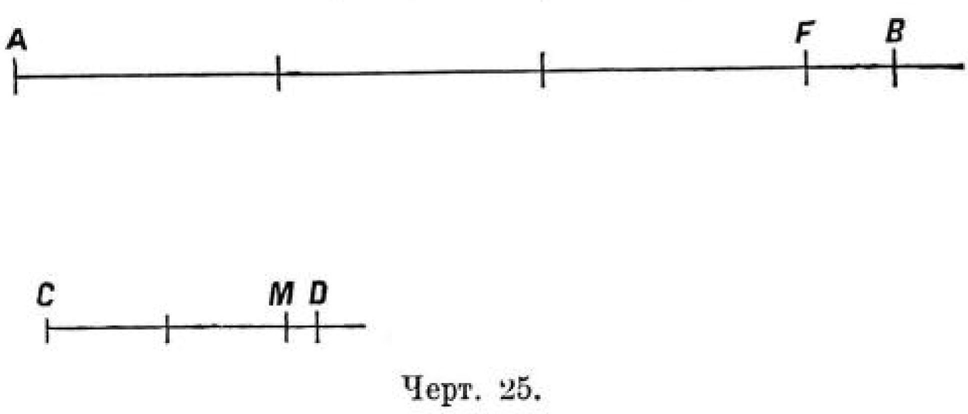
Мѣра должна обладать двумя свойствами: 1) она должна быть однородна съ измѣряемымъ количествомъ и 2) должна укладываться и содержаться въ измѣряемомъ количествѣ цѣлое число разъ.

Слѣдствіе. Отсюда слѣдуетъ, что всякая часть мѣры будетъ также служить мѣрой даннаго количества. Если въ графинѣ 8 стакановъ, то въ немъ будетъ 80 десятыхъ частей стакана.

На практикѣ обыкновенно принято измѣрять всѣ количества особой заранѣе принятой мѣрой или частью ея. Такъ мы говоримъ: длина стола 2 аршина; вѣсъ хлѣба 15 лот., при чемъ, если данное количество не измѣряется въ цѣлыхъ единицахъ, то пользуются дробями, т.-е. частями единицы. Такое измѣреніе практически настолько удобно, что не только считается необходимымъ, но и обязательнымъ. Но это будутъ единицы измѣренія, а не мѣра, подъ словомъ мѣра мы будемъ всегда понимать такое количество, которое въ другомъ количествѣ содержится *непремѣнно* цѣлое число разъ.

§ 2. **Общая мѣра двухъ линій.**

Положимъ намъ даны двѣ линіи AB и CD и (черт. 25) требуется найти такую линію, которая была бы мѣрой



Черт. 25.

той и другой, т.-е. укладывалась бы въ той и другой линіи цѣлое число разъ. Если линія CD укладывается въ AB цѣлое число разъ, то сама CD и будетъ общей мѣрой той и другой линіи. Поэтому отложимъ CD на AB; мы видимъ, что она уложилась 3 раза и еще остался остатокъ FB; значитъ CD не будетъ общей мѣрой этихъ линій. Теперь, если FB уложится на CD цѣлое число разъ, то очевидно, что онъ уложится и въ AB цѣлое число разъ, поэтому отложимъ FB на CD. Мы видимъ, что онъ уложился 2 раза и остался остатокъ MD.

Объ этомъ остаткѣ мы можемъ сказать то же самое, что и о FB, а потому отложимъ его на FB; мы видимъ, что онъ уложился ровно 3 раза. Мы говоримъ, что линія MD будетъ общей мѣрой данныхъ линій AB и CD.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ для удобства отрѣзокъ MD буквой k; тогда мы можемъ написать, что $FB = 3\,k$, но мы видимъ, что $CD = 2\,FB + MD$, значитъ $CD = 6\,k + k$ или $CD = 7\,k$.

Линія $AB = 3CD + FB$, т.-е. $AB = 21k + 3k$; $AB = 24k$. Итакъ, вычисленіе показываетъ, что отрѣзокъ MD укладывается въ CD семь разъ, а въ AB двадцать четыре раза; значитъ онъ и есть общая мѣра этихъ линій.

Очевидно, что всякая часть этого отрѣзка будетъ также мѣрой данныхъ линій, но наибольшая общая мѣра есть MD или K.

§ 3. Наибольшій дѣлитель двухъ цѣлыхъ чиселъ.

Такъ какъ мы всегда имѣемъ дѣло съ количествами, выраженными въ числахъ, то наибольшей общей мѣрой двухъ какихъ угодно количествъ будетъ такое количество, которое соотвѣтствуетъ наибольшему дѣлителю данныхъ чиселъ. Посмотримъ, какъ отыскать такого дѣлителя. Пусть намъ даны два числа 3799 и 1703 и требуется найти самое большое число, на которое дѣлилось бы и то и другое.

Будемъ разсуждать точно также: попробуемъ, не будетъ ли меньшее число 1703 наибольшимъ дѣлителемъ и раздѣлимъ 3799 на 1703

$$\begin{array}{r|l} 3799 & 1703 \\ \cline{2-2} 3406 & \;\;2 \\ \cline{1-1} 393 & \end{array}$$

Мы видимъ, что оно не дѣлится и получается остатокъ 393. Мы можемъ написать $3799 = 2.1703 + 393$. Если бы 1703 раздѣлилось на 393, тогда каждое слагаемое раздѣлится на 393, слѣдовательно и сумма 3799 также раздѣлится. Такъ попробуемъ, не раздѣлится ли 1703 на 393;

$$\begin{array}{r|l} 1703 & 393 \\ \cline{2-2} 1572 & \;\;4 \\ \cline{1-1} 131 & \end{array}$$

Мы видимъ, что 1703 также не дѣлится на 393 и получается остатокъ 131. Мы можемъ написать $1703 = 393.\ 4 + 131$. Относительно остатка 131 можно сказать то же самое, что мы говорили о 393. Поэтому раздѣлимъ 393 на 131, получимъ

$$\begin{array}{r|l} 393 & 131 \\ \cline{2-2} 393 & \;\;3 \\ \cline{1-1} & \end{array}$$

Оказывается 393 дѣлится на 131, и число 131 будетъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ 3799 и 1703. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ для ясности число 131 буквой k, тогда очевидно, $393 = 3\,k$. Число $1703 = 393.4 + 131$, т.-е., $1703 = 12\,k + 3\,k$ или $1703 = 13\,k$. Число $3799 = 1703.2 + 393$ или $3799 = 26\,k + 3\,k$, т.-е. $3799 = 29k$. Итакъ, оба числа 3799 и 1703 имѣютъ общую мѣру число 131, которая и называется ихъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ. Отысканіе общаго наибольшаго дѣлителя обыкновенно располагается такъ

$$\begin{array}{r|c|c|c} & 2 & 4 & 3 \\ \cline{2-4} 3799 & 1703 & 393 & 131 \\ 3406 & 1572 & 393 & \\ \cline{1-3} 393 & 131 & & \end{array}$$

§ 4. Несоизмѣримыя количества.

Можетъ случиться, что какъ бы мы далеко не откладывали остатка на линіи ни одинъ изъ нихъ въ предыдущемъ не уложится точно, такъ напримѣръ сторона квадрата и его діоганаль обладаютъ этимъ свойствомъ. Такія линіи не имѣютъ общей мѣры и называются несоизмѣримыми.

Напримѣръ, аршинъ и метръ несоизмѣримы. Точно также могутъ быть несоизмѣрммы два сосуда, двѣ площади и т. п.

Время, въ теченіе котораго земля обращается около своей оси, несоизмѣримо съ временемъ, въ теченіе котораго она обращается около солнца. Вообще въ явленіяхъ природы мало соизмѣримыхъ величинъ. Для несоизмѣримыхъ величинъ мы не можемъ найти какую-либо мѣру, тогда беремъ самую маленькую мѣру, напр. миллиметръ и измѣряемъ ихъ приблизительно, пренебрегая неточностью, какъ мы дѣлали, отбрасывая дроби, при геометрическомъ представленіи измѣненій функціи $y = \frac{180\,(n-2)}{n}$.

Съ другой стороны недостатки нашихъ измѣрительныхъ приборовъ заставляютъ насъ всегда измѣрять количества только приблизительно, и практическая жизнь легко мирится съ нѣкоторыми неточностями измѣреній. Вслѣдствіе этого всякое количество мы можемъ выразить числомъ. Когда количество выражено числомъ, то считается соизмѣримымъ съ единицею мѣры, такъ что количества въ числовомъ видѣ всегда соизмѣримы, если они измѣрены одной и той же единицею или если соизмѣримы единицы мѣръ. Напримѣръ, если одна длина дана въ аршинахъ, а другая въ футахъ, то эти длины соизмѣримы, такъ какъ аршинъ и футъ имѣютъ общую мѣру—дюймъ; если же одна длина измѣрена въ аршинахъ, а другая въ метрахъ, то эти длины несоизмѣримы, и мы только приблизительно можемъ одну изъ нихъ перевести въ другую, полагая, что метръ равенъ $22\frac{1}{2}$ вершк. Тогда $\frac{1}{2}$ вершка будетъ ихъ общей мѣрой.

Итакъ, если два количества измѣрены одной и той же единицей и выражены числомъ, то единица измѣренія будетъ ихъ общей мѣрой, однако не всегда наибольшей; они могутъ имѣть большую общую мѣру. Такъ, напримѣръ, аршинъ и футъ имѣютъ общей мѣрой дюймъ, но и два дюйма будетъ ихъ общей мѣрой, и четыре дюма будетъ также ихъ общей мѣрой, которая въ аршинѣ укладывается 7 разъ, а въ футѣ 3 раза. Слѣдовательно, наибольшая общая мѣра для аршина и фута будетъ 4 дюйма.

Итакъ, по отношенію къ количествамъ мы устанавливаемъ ихъ соизмѣримость и несоизмѣримость. Разсмотримъ теперь числа. Если при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя мы получимъ въ остаткѣ единицу, то это значитъ, что единица будетъ наибольшимъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ, но единица всегда будетъ дѣлителемъ всякаго числа, слѣдовательно ее и нельзя принимать за дѣлителя. Лучше сказать такъ: всякія два числа имѣютъ общимъ наименьшимъ дѣлителемъ единицу. Если единица является единственнымъ общимъ дѣллителемъ чиселъ, то числа называются *взаимно простыми*. Напримѣръ, числа 15 и 14 имѣютъ единственнымъ общимъ дѣлителемъ единицу, поэтому они взаимно простыя, хотя каждое изъ нихъ и имѣетъ своихъ дѣлителей: число 15 дѣлится на 5 и на 3, а 14 дѣлится на 7 и на 2, но ни одинъ изъ нихъ не будетъ общимъ для того и другого числа. Положимъ теперь, что мы имѣемъ два количества, измѣренныя одной и той же мѣрой, такъ что каждое изъ нихъ дано намъ въ видѣ числа. Если эти числа имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя, то этотъ общій наибольшій дѣлитель будетъ выражать собою то количество, которое является въ то же время наибольшей общей мѣрой; если эти числа будутъ взаимнопростыми, то наибольшей общей мѣрой количествъ будетъ единица измѣренія. Если мы имѣемъ два однородныя количества, измѣренныя разными мѣрами, то эти количества будутъ соизмѣримы, если единицы измѣренія соизмѣримы, и они будутъ несоизмѣримы, когда несоизмѣримы единицы мѣръ.

§ 5. Сравненіе количествъ.

По естественному стремленію къ познаванію мы всѣ предметы сравниваемъ между собою, при чемъ это сравненіе производимъ или по ихъ вѣсу, или по объему, который они занимаютъ, или по длинѣ и т. п.

То качество, по которому производится сравненіе, называется величиной. Такъ какъ мы можемъ сравнивать между собою только однородные предметы, то понятіе величины позволяетъ намъ произвести сравненіе не только однородныхъ, но и разнородныхъ предметовъ; напримѣръ, мы можемъ сравнить длину стола и длину комнаты, вѣсъ хлѣба и вѣсъ мяса и т. д. Обыкновенно мы дѣлаемъ сравненіе приблизительно, на глазъ; но иногда намъ бываетъ необходимо болѣе точное сравненіе, при этомъ всегда мы задаемъ себѣ два вопроса: на сколько одно больше другого и во сколько разъ одно больше другого. Такъ, напр., мы сразу можемъ сказать, что длина комнаты больше длины стола, но не сумѣемъ безъ точнаго измѣренія сказать, во сколько разъ длина комнаты больше длины стола. Если мы смѣримъ аршиномъ ту и другую длину, и выразимъ ихъ въ числахъ, то можемъ отвѣтить на оба вопроса; первый рѣшаемъ вычитаніемъ, а второй дѣленіемъ. Пусть длина комнаты 15 аршинъ, а длина стола 2 аршина; мы говоримъ: комната длиннѣе стола на 13 аршинъ и длина комнаты больше длины стола въ $7\frac{1}{2}$ разъ; эта $\frac{1}{2}$ не мѣшаетъ нашему сужденію, хотя подъ словомъ «разъ» мы всегда представляемъ себѣ цѣлое, но въ то же время хорошо понимаемъ возможность быть больше въ $7\frac{1}{2}$ разъ.

Итакъ, чтобы сравнить между собою какіе-либо предметы, мы должны выбрать такой признакъ или качество, которое принадлежитъ всѣмъ сравниваемымъ предметамъ, т.-е., найти величину, по которой мы будемъ сравнивать, и опредѣлить въ числахъ количество этой величины въ каждомъ предметѣ. Тогда разность чиселъ покажетъ намъ на сколько одно количество больше другого, а частное покажетъ, во сколько разъ одно количество больше другого при чемъ возможно и полученіе дробей.

Условимся, подъ словомъ сравненіе понимать только второй случай, т.-е. сравнивать количества всегда по вопросу, во сколько разъ одно изъ нихъ больше другого, и такое сравненіе назовемъ отношеніемъ.

§ 6. **Опредѣленіе понятія отношеніе; его знакъ.**

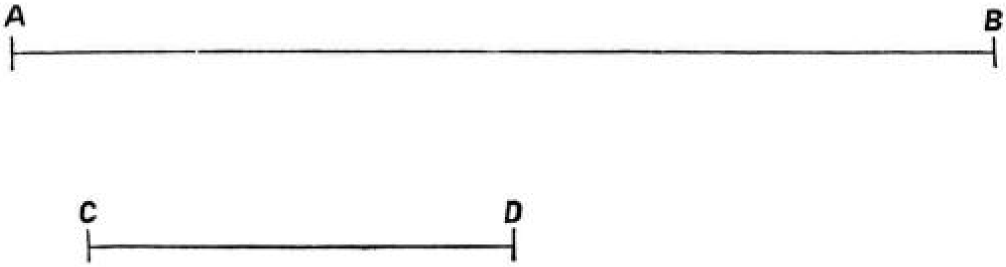
Отношеніемъ называется сравненіе двухъ однородныхъ количествъ по вопросу, во сколько разъ одно количество больше другого.

Такъ какъ дѣйствіе, посредствомъ котораго мы узнаемъ во сколько разъ одно количество больше другого, есть дѣленіе, то и знакъ отношенія есть знакъ дѣленія. Положимъ, что намъ нужно выразить отношеніе 5 фут. къ 3 фут., мы пишемъ 5 футовъ : 3 фут. или $\frac{5 \text{ фут.}}{3 \text{ фут.}}$ и читаемъ это выраженіе такъ: «5 футовъ относятся къ 3 футамъ», или такъ: «отношеніе 5 футовъ къ 3 футамъ».

§ 7. **Числовая величина отношенія двухъ линій.**

Положимъ, что намъ даны двѣ линіи, длину которыхъ мы не знаемъ и требуется опредѣлить отношеніе этихъ линій. Мы можемъ измѣрить каждую изъ этихъ линій въ милиметрахъ и выразить ту и другую числомъ. Тогда отношеніе чиселъ и будемъ отношеніемъ линій. Но мы осложнимъ свою задачу требованіемъ, — найти отношеніе данныхъ линій, не измѣряя ихъ какой либо общепринятой единицей. Для этого, найдемъ общую мѣру для данныхъ линій. Если линіи соизмѣримы, то намъ удастся это сдѣлать, если онѣ несоизмѣримы, то мы не найдемъ общей мѣры. Положимъ, что линіи соизмѣримы и пусть общая мѣра въ одной линіи содержится 17 разъ, а въ другой 5 разъ, тогда мы говоримъ, что отношеніе данныхъ линій равно 17 : 5, т.-е. одна изъ нихъ больше другой въ $3\frac{2}{5}$ раза.

Разсмотримъ это выраженіе нѣсколько подробнѣе. Нарисуемъ двѣ линіи AB и CD, (черт. 26) найдемъ ихъ общую мѣру и обозначимъ ее буквой k.



Черт. 26.

Продѣлавъ все то, что было указано въ § 2, мы увидимъ, что $AB = 17\,k$ и $CD = 5\,k$. Такъ какъ $к$ одно и то же, то очевидно, что линія AB больше линіи CD во столько разъ, во сколько число 17 больше числа 5; но 17 больше 5 въ $3\frac{2}{5}$ раза, слѣдовательно $AB : CD = 3\frac{2}{5}$ или $\frac{AB}{CD} = 3\frac{2}{5}$.

Итакъ, чтобы найти числовую величину отношенія двухъ соизмѣримыхъ линій, нужно найти ихъ общую мѣру и опредѣлить, сколько разъ эта общая мѣра укладывается въ той и другой линіи: отношеніе полученныхъ чиселъ и будетъ показывать числовую величину отношенія линій.

Такъ какъ это будетъ наибольшая общая мѣра, то полученныя числа будутъ всегда взаимно простыми.

§ 8. **Числовая величина отношенія двухъ чиселъ.**

Чтобы найти числовую величину отношенія двухъ чиселъ, достаточно раздѣлить одно число на другое, тогда частное и даетъ искомую величину. Однако, въ интересѣ дальнѣйшаго, мы условимся находить эту числовую величину болѣе сложнымъ путемъ, аналогично тому, какъ мы дѣлали это при отысканіи отношенія двухъ линій. Положимъ, что намъ даны два числа 508 и 381 и требуется найти ихъ отношеніе. Въ геометріи мы отыскивали общую мѣру двухъ линій, а мы знаемъ, что общей мѣрой двухъ чиселъ будетъ ихъ общій наибольшій дѣлитель, поэтому, найдемъ общаго наибольшаго дѣлителя данныхъ чиселъ.

	1	3
508	381	127
381	381	
127	0	

Мы видимъ, что общій наибольшій дѣлитель будетъ 127, обозначимъ его буквой k, и раздѣлимъ каждое изъ данныхъ чиселъ на 127, получимъ:

$$508 : 127 = 4 \text{ и } 381 : 127 = 3.$$

Значитъ $508 = 4\,k$ и $381 = 3\,k$. Тогда числовая величина отношенія $508 : 381 = \frac{4}{3}$ или $1\frac{1}{3}$.

Если данныя числа будутъ взаимно-простыя, то само ихъ отношеніе будетъ служить числовой величиной отношенія этихъ чиселъ.

§ 9. **Числовая величина отношенія двухъ количествъ.**

Такъ какъ данныя намъ количества выражаются всегда въ видѣ чиселъ, то чтобы опредѣлить отношеніе количествъ мы находимъ числовую величину отношенія чиселъ, ихъ замѣняющихъ, и считаемъ отношеніе количествъ равнымъ отношенію чиселъ.

§ 10. **Задачи.**

1. Найти отношеніе цѣнности денегъ русскихъ и французскихъ, если извѣстно, что на 300 рублей въ банкѣ даютъ 800 франковъ? Отв. 3 : 8.

2. Найти отношеніе градусовъ Реомюра и Цельсія, если извѣстно, что разстояніе отъ точки замерзанія 0° до точки кипѣнія воды у Реомюра, раздѣлено на 80 частей, а у Цельзія на 100? Отв. 4 : 5.

3. Найти отношеніе количествъ березовыхъ и осиновыхъ дровъ, равной стоимости, если извѣстно, что 100 саженъ березовыхъ дровъ стоитъ столько же, сколько стоятъ 125 саж. осиновыхъ? Отв. $\frac{4}{5}$.

§ 11. **Опредѣленіе числовой величины отношенія несоизмѣримыхъ линій.**

Положимъ теперь, что данныя намъ линіи AB и CD несоизмѣримы, тогда мы не можемъ точно найти числовую величину ихъ отношенія и должны сдѣлать это приближенно. Для этого, раздѣлимъ меньшую линію на сколько нибудь равныхъ частей, положимъ на 7 и седьмую часть этой линіи отложимъ на большой, пусть она уложилась 25 разъ и остался остатокъ меньшій чѣмъ седьмая часть линіи; тогда мы заключаемъ, что отношеніе $\frac{AB}{CD}$ больше чѣмъ 25 : 7, т.-е. $3\frac{4}{7}$; но меньше чѣмъ отношеніе 26 : 7, т.-е. $3\frac{5}{7}$. Это можно записать такъ: $3\frac{4}{7} < \frac{AB}{CD} < 3\frac{5}{7}$. Обыкновенно принимаютъ, что искомое отношеніе равно меньшему изъ этихъ чиселъ, и говорятъ, что $\frac{AB}{CD}$ равно $3\frac{4}{7}$ съ точностью до $\frac{1}{7}$.

§ 12. **Члены отношенія и ихъ зависимость.**

Положимъ, что мы имѣемъ два количества; одно изъ нихъ обозначимъ буквой m, а другое n; отношеніе ихъ будетъ $\frac{m}{n}$ и пусть числовая величина этого отношенія равна k, такъ что $\frac{m}{n}=k$.

Количество m называется предыдущимъ членомъ отношенія; количество n — послѣдующимъ, а число k знаменателемъ отношенія.

Такъ какъ числовая величина отношенія находится посредствомъ дѣленія, а само отношеніе имѣетъ видъ дроби, то свойства дѣленія и свойства дроби въ то же время будутъ служить и свойствами отношенія.

Изъ дѣйствія дѣленія мы выводимъ слѣдующую зависимость членовъ отношенія:

1) Предыдущій членъ равенъ послѣдующему, умноженному на знаменатель отношенія, т.-е. $m=n.k$, потому что m есть дѣлимое, n — дѣлитель, а k — частное, а мы знаемъ, что дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное.

2) Послѣдующій членъ равенъ предыдущему, раздѣленному на знаменателя отношенія.

§ 13. **Свойства отношенія.**

Изъ того, что отношеніе можетъ быть разсматриваемо какъ дробь, оно обладаетъ и свойствами дроби.

1) Если отношеніе равно единицѣ, то данныя количества равны между собою.

2) Два отношенія равны, если ихъ знаменатели равны.

3) Если оба члена отношенія мы раздѣлимъ на одно и то же число, то числовая величина отношенія останется та же.

4) Если оба члена отношенія умножимъ на одно и то же число, то числовая величина отношенія останется та же.

5) Если мы имѣемъ рядъ равныхъ отношеній, то сумма предыдущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ каждый предыдущій къ своему послѣдующему.

Это послѣднее свойство не вытекаетъ изъ свойствъ дробей, и потому въ справедливости его нужно убѣдиться при помощи особаго доказательства. Пусть намъ дано, что $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$ и нужно доказать, что $\frac{a+c+m}{b+d+n}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$ Обозначимъ знаменателя каждаго изъ равныхъ отношеній буквой k, тогда $\frac{a}{b}=k$; $\frac{c}{a}=k$ и $\frac{m}{n}=k$. По свойству членовъ отношеній мы можемъ написать:

$$a=b.k$$
$$c=d.k$$
$$m=n.k$$

Сложимъ эти равенства другъ съ другомъ почленно, т.-е., будемъ складывать отдѣльно ихъ лѣвыя части и отдѣльно—правыя части. Тогда $a+c+m=bk+dk+nk$. Правая часть полученнаго равенства, содержитъ общаго множителя k, котораго мы можемъ взять за скобку, потому что мы знаемъ, что умножить сумму на какое-нибудь число все равно, что каждое слагаемое умножить на это число, слѣдовательно $bk+dk+nk$ можно написать въ видѣ $(b+d+n)k$.

Итакъ, $a+c+m=(b+d+n)k$. Раздѣлимъ теперь обѣ части, полученнаго равенства на сумму $(b+d+n)$, получимъ

$$\frac{a+c+m}{a+d+n}=k.$$

т.-е., знаменатель новаго отношенія остался такимъ же, значитъ и отношеніе не измѣнилось и $\frac{a+c+m}{b+d+n}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$.

ГЛАВА VII.

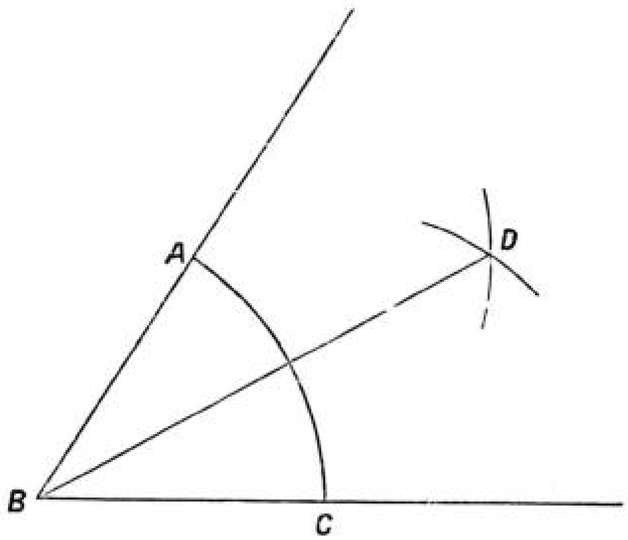
Правило пропорціональнаго дѣленія.

§ 1. Дѣленіе цѣлаго на равныя части.

Если намъ дано какое нибудь количество, которое выражено числомъ и требуется раздѣлить его на равныя части, то для этого достаточно раздѣлить число на данное число частей. Пусть, напримѣръ, 4000 руб. требуется раздѣлить на 5 равныхъ частей. Каждая часть будетъ равна $4000:5=800$ руб.

Количество 800 руб. называется $\frac{1}{5}$ частью количества 4000 руб. Но, если количество не выражено числомъ, то способъ дѣленія его на равныя части не всегда возможенъ. Мы можемъ раздѣлить на равныя части отрѣзокъ прямой линіи (Гл. 1, § 14), можемъ еще раздѣлить уголъ, но только на части, число которыхъ есть степень 2, т.-е. можемъ раздѣлить пополамъ, на 4 части, на 8 частей и т. д.

Дѣленіе угла пополамъ производится слѣдующимъ построеніемъ (черт. 27).



Черт. 27.

Возьмемъ какой нибудь уголъ ABC, произвольнымъ радіусомъ проведемъ дугу AC и изъ точекъ A и C тѣмъ же радіусомъ проведемъ дуги, которыя пересѣкутся въ точкѣ D; соединимъ D съ B, линія BD будетъ дѣлить уголъ ABC пополамъ. Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно чертежъ перегнуть по линіи BD, и мы увидимъ, что тогда линія BC совпадетъ съ линіей BA.

Очевидно, что такимъ же пріемомъ мы можемъ уголъ DBC раздѣлить пополамъ, и уголъ ABD также пополамъ, тогда уголъ ABC раздѣлится на 4 части.

Дѣлить уголъ на 3 части мы уже не съумѣемъ.

Если намъ дано какое либо жидкое или сыпучее тѣло, то мы можемъ при помощи вѣсовъ раздѣлить его пополамъ, отсыпавъ на обѣ чашки вѣсовъ части этого тѣла и уравнивая вѣсъ обѣихъ частей.

Вслѣдствіе сложности такихъ процессовъ дѣленія, принятъ всегда такой способъ: выразить данное количество числомъ и раздѣливъ число, отмѣрить указанную часть.

Такъ, напримѣръ, если намъ нужно уголъ раздѣлить на 5 равныхъ частей, то мы измѣримъ его въ градусахъ, число этихъ градусовъ раздѣлимо по 5, и отложимъ полученный уголъ. Совершенно также, чтобы найти 5-ую часть даннаго вѣса, мы измѣримъ вѣсъ тѣла, раздѣлимъ полученное число на 5 и потомъ отвѣсимъ полученную часть.

§ 2. **Дѣленіе на части неравныя.**

Когда цѣлое приходится дѣлить на части неравныя, то мы должны имѣть условіе для опредѣленія величины этихъ частей. Самое простое изъ этихъ условій будетъ то, когда каждая часть есть кратная одной изъ нихъ. Возьмемъ сначала случай, когда требуется раздѣлить цѣлое на двѣ части, изъ которыхъ одна есть кратная другой. Пусть будетъ дана такая задача: «Раздѣлить 2 пуда на двѣ части, изъ которыхъ одна была бы въ 4 раза больше другой». Для рѣшенія этой задачи, обозначимъ искомую меньшую часть черезъ x, тогда большая часть будетъ $4x$; слѣдовательно 2 пуда будетъ составлять сумму двухъ частей x и $4x$, т.-е. $x + 4x = 2$ пуда; откуда $5x = 2$ пуда.

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ, что $x = \frac{2}{5}$ пуда, или 16 фунтовъ. Такія задачи мы рѣшали въ ариѳметикѣ, пользуясь слѣдующимъ разсужденіемъ: очевидно, что большая часть есть кратная меньшей, т.-е. меньшая является общей наибольшей мѣрой для себя и для большей части. Принявъ эту часть за единицу, мы найдемъ, что въ большей содержится 4 такихъ единицы, а во всемъ цѣломъ, т.-е. въ 2 пудахъ, 5 такихъ единицъ. Раздѣливъ 2 пуда на 5, найдемъ величину единицы, т.-е. общей наибольшей мѣры данныхъ частей.

Это ариѳметическое разсужденіе легко обобщается алгебраической формулой. Возьмемъ общую задачу: «Количество a раздѣлить на 2 части, изъ которыхъ одна въ n разъ больше другой». Обозначивъ меньшую часть черезъ x, мы для большой получимъ nx, слѣдовательно $x+nx=a$ или $x(n+1)=a$, откуда $x=\frac{a}{n+1}$.

Если за x мы примемъ не меньшую, а большую часть, тогда меньшая будетъ $\frac{x}{n}$, наше уравненіе приметъ видъ: $x+\frac{x}{n}=a$, и рѣшеніе его можетъ быть дано въ двухъ видахъ: 1) Умножимъ все уравненіе на n, тогда $xn+x=an$ или $x(n+1)=an$, откуда $x=\frac{an}{n+1}$. 2) Возьмемъ x за скобки, тогда $x(1+\frac{1}{n})=a$, откуда $x=\dfrac{a}{1+\frac{1}{n}}$. Нетрудно показать, что оба рѣшенія представляютъ собою одну и ту же формулу.

Задача, рѣшенная въ такомъ видѣ, можетъ быть формулирована такъ: раздѣлить количество a на двѣ части, изъ которыхъ одна составляетъ n-ую часть другой.

Сличая обѣ формулировки, мы видимъ, что если одна часть есть кратная другой, то въ то же время вторая есть доля первой.

Это новое понятіе доли приводитъ насъ къ вопросу, можетъ ли быть число n дробнымъ. По существу n не можетъ быть дробнымъ; но въ наукѣ и въ жизни числу n приписывается и дробное значеніе. Такъ, иногда говорятъ: одна часть больше другой въ $2\frac{3}{5}$ раза. Такое выраженіе имѣетъ слѣдующій смыслъ: меньшая часть не является общей мѣрой, она не укладывается въ большей цѣлое число разъ; но $\frac{1}{5}$ доля этой части можетъ быть общей мѣрой и уложится въ большей 13 разъ, ибо $2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$. Изъ формулы очевидно, что рѣшеніе задачи не измѣнится и меньшая часть x по прежнему будетъ равна $\frac{a}{n+1}$, а большая часть $\frac{na}{n+1}$, только число n будетъ смѣшанное.

Нетрудно видѣть, что n можетъ быть и правильной дробью, напримѣръ $n=\frac{4}{7}$, ибо тогда можно сказать, что одна часть составляетъ $\frac{4}{7}$ другой. При этомъ, мирясь нѣсколько съ несовсѣмъ правильнымъ оборотомъ рѣчи, мы можемъ сказать, что одна часть въ $\frac{4}{7}$ раза больше другой.

Итакъ, если намъ нужно какое-нибудь количество a раздѣлить на двѣ неравныя части, то здѣсь могутъ быть слѣдующіе случаи:

1) одна часть кратная другой—больше другой въ n разъ; 2) одна часть составляетъ долю другой—равна $\frac{1}{n}$ долѣ другой части, при чемъ обѣ части выражаются въ цѣлыхъ числахъ; 3) одна часть больше другой въ нѣсколько разъ съ дробью; 4) одна часть составляетъ дробную долю другой. Всѣ эти задачи имѣютъ одну и ту же алгебраическую формулу рѣшенія:

$$\text{меньшая} = \frac{a}{n+1}; \text{ большая} = \frac{na}{n+1},$$

гдѣ n можетъ быть какое угодно положительное число.

§ 3. **Задачи**.

1) На 252 рубля было куплено по куску сукна и полотна равной длины; сукно въ 8 разъ дороже полотна; сколько отдѣльно стоитъ кусокъ сукна и кусокъ полотна?

Отвѣтъ: 224 руб.; 28 руб.

При рѣшеніи этой задачи надо выяснить, почему длина кусковъ сукна и полотна должна быть равной?

2) Аршинъ сукна стоитъ 4 рубля, а аршинъ полотна дешевле въ 10 разъ. Было куплено 360 аршинъ сукна и полотна. Сколько слѣдуетъ заплатить за всю покупку, если число аршинъ сукна составляетъ $\frac{1}{5}$ долю числа аршинъ полотна? Отвѣтъ: 360 рублей.

3) Сплавъ, изъ котораго отливается типографскій

шрифтъ, состоитъ изъ свинца и сурьмы, при чемъ количество сурьмы, по вѣсу, должно составлять $\frac{5}{16}$ количества свинца. Сколько того и другого металла будетъ въ $43\frac{3}{4}$ пуда шрифта?

Отвѣтъ: $33\frac{1}{3}$ пуд. свинца; $10\frac{5}{12}$ пуд. сурьмы.

4) Кусокъ сукна стоитъ $187\frac{1}{5}$ рубля. Этотъ кусокъ купили два лица, при чемъ одинъ взялъ $\frac{2}{7}$ того, что взялъ другой. Сколько денегъ придется заплатить каждому?

Отвѣтъ: $145\frac{3}{5}$ руб.; $41\frac{3}{5}$ руб.

5) У двухъ братьевъ 475 рублей. Сколько денегъ у каждаго, если деньги перваго равны $\frac{2}{3}$ денегъ второго?

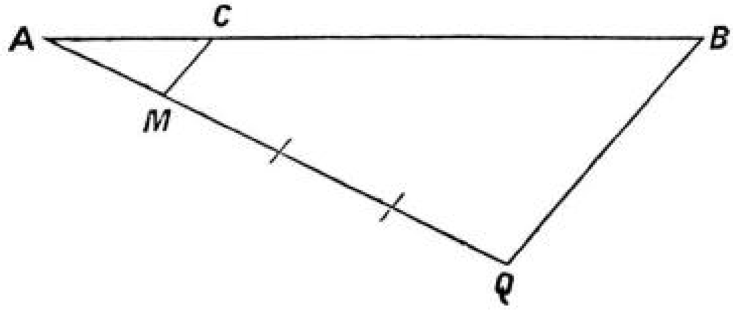
Отвѣтъ: 285 руб. у второго, 190 руб. у перваго.

6) Нѣкто раздѣлилъ землю между своими двумя сыновьями, при чемъ старшему далъ $\frac{13}{15}$ того, что досталось младшему. Сколько десятинъ содержала земля, если младшій братъ получилъ на 28 десятинъ болѣе старшаго?

Отвѣтъ: 382 дес.

§ 4. Геометрическое дѣленіе на неравныя части.

Мы разсмотримъ геометрическое дѣленіе на неравныя части прямой и угла. Пусть намъ нужно данный отрѣзокъ прямой линіи AB (черт. 28) раздѣлить на двѣ части, изъ

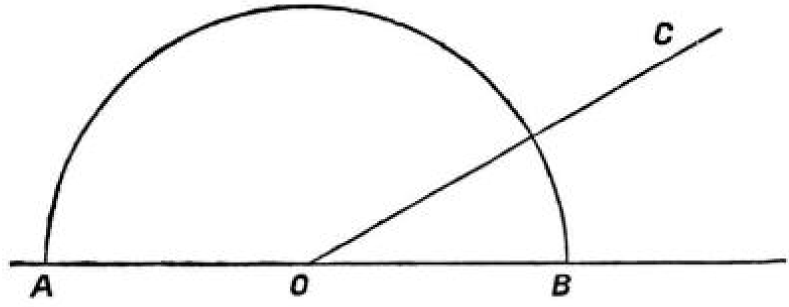


Черт. 28.

которыхъ одна была бы втрое больше другой. Легко видѣть изъ предыдущаго, что меньшая часть линіи будетъ служить общей мѣрой для большей части, въ которой она уложится 3 раза, и для всей линіи, въ которой она должна уложиться 4 раза. Слѣдовательно, если мы данный отрѣзокъ прямой раздѣлимъ на 4 равныя части и возьмемъ 3 изъ нихъ за одну часть, а одну—за другую, то и получимъ то, что требуется. Поэтому, мы проведемъ линію AQ подъ угломъ, отложимъ на ней 4 равныя части, соединимъ точку Q съ точкой B и проведемъ линію MC параллельно BQ, тогда линія AB въ точкѣ C раздѣлится на двѣ части, изъ которыхъ одна будетъ AC, а другая CB въ три раза больше.

Какъ я уже говорилъ, мы не можемъ геометрически дѣлить уголъ на равныя части, кромѣ того случая, когда число этихъ частей есть степень 2. Поэтому обычно поступаютъ такъ: измѣряютъ уголъ въ градусахъ, дѣлятъ число этихъ градусовъ по правилу дѣленія чиселъ и строятъ полученные углы, отмѣря по транспортиру искомое число градусовъ.

Особый интересъ представляетъ слѣдующая задача. Если мы начертимъ прямую линію AB, возьмемъ на ней точку O, и проведемъ изъ этой точки новую прямую OC (черт. 29), то получимъ два угла AOC и COB; эти углы

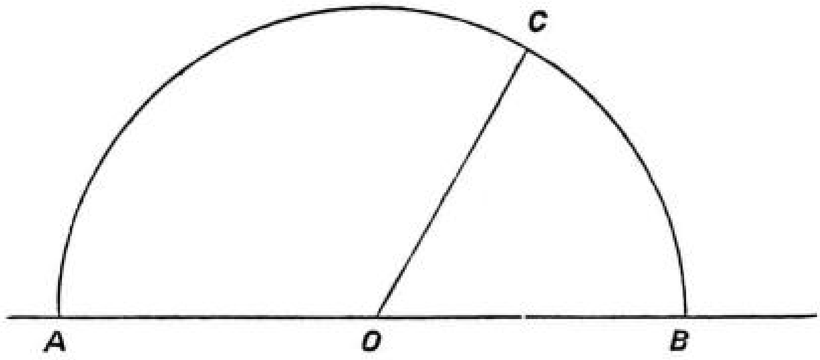


Черт. 29.

называются смежными; они въ суммѣ всегда равны 180°.

Вспомнивъ это, возьмемъ слѣдующую задачу: начертить два смежныхъ угла такъ, чтобы одинъ изъ нихъ былъ въ 4 раза больше другого. Легко вычислить эти углы, составивъ уравненіе $x+4x=180$, откуда $x=36^\circ$.

Отмѣривъ по транспортиру уголъ въ 36°, мы получимъ искомые углы. Если бы намъ было дано, чтобы одинъ уголъ былъ въ два раза больше другого, то изъ уравненія мы нашли бы, что одинъ уголъ будетъ 60°, а другой 120°. Уголъ въ 60° мы можемъ построить геометрически, отложивъ на дугѣ радіусъ. Поэтому и всю задачу можемъ построить, не прибѣгая къ транспортиру. Возьмемъ прямую AB (черт. 30) и на ней точку O; изъ точки O про-



Черт. 30.

извольнымъ радіусомъ опишемъ полуокружность и отъ точки B отложимъ по дугѣ длину радіуса, получимъ точку C, которую соединимъ съ точкой O и получимъ искомые углы AOC и COB.

§ 5. **Дѣленіе количества на части пропорціональныя.**

Когда данное количество раздѣлено не на равныя части, то говорятъ, что оно раздѣлено въ данномъ отношеніи. Напримѣръ, вмѣсто того, чтобы сказать: «раздѣлить линію на двѣ части, изъ которыхъ одна больше другой въ 3 раза», говорятъ: «раздѣлить линію въ отношеніи 1 : 3». Эти части называются пропорціональными, и задача можетъ быть формулирована еще такъ: «раздѣлить отрѣзокъ прямой на части, пропорціональныя числамъ 1 и 3»; или еще: «раздѣлить линію пропорціонально 1 : 3». Всѣ эти выраженія имѣютъ одинъ и тотъ же смыслъ, но, благодаря новому способу выраженія, этотъ смыслъ можетъ быть расширенъ и получаетъ поэтому новое значеніе. Разсмотримъ это значеніе, взявъ такую задачу: «раздѣлить количество a на части въ отношеніи 3 : 4». Если сказано, что эти части относятся между собой, какъ 3 : 4, то это значитъ, что эти части соизмѣримы, и общая мѣра въ одной изъ нихъ укладывается 3 раза, а въ другой — 4 раза. Обозначимъ общую буквой k, тогда одна часть будетъ $3k$, а другая $4k$; обѣ части вмѣстѣ будутъ содержать $7k$.

Итакъ, $7k = a$, откуда $k = \frac{a}{7}$. Найдя общую мѣру, мы можемъ вычислить и каждую часть: одна будетъ $\frac{3a}{7}$, а другая $\frac{4a}{7}$.

Если бы намъ было дано отношеніе не въ цѣлыхъ числахъ, а въ видѣ дробей, напримѣръ, раздѣлить количество a въ отношеніи $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$, то отношеніе дробей мы всегда можемъ замѣнить отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ, пользуясь тѣмъ свойствомъ его, что отношеніе не измѣнится, когда мы обѣ части его умножимъ на одно и то же число. Умножимъ обѣ части даннаго отношенія на общаго знаменателя данныхъ дробей, т.-е. на 28, получимъ
$\frac{3.28}{4} : \frac{5.28}{7} = 21 : 20$.

Слѣдовательно, искомыя части будутъ также соизмѣримы, и задача рѣшается также, какъ предыдущая.

§ 6. **Задачи**.

1) Раздѣлить отрѣзокъ прямой въ 6 сант. въ отношеніи 2 : 3. Отвѣтъ: $2\frac{2}{5}$ сант.; $3\frac{3}{5}$ сант.

2) Данъ треугольникъ ABC; раздѣлить его основаніе AC въ отношеніи 3 : 4 и полученную точку соединить съ вершиной B.

3) Прямая AB по направленію отъ A къ B въ точкѣ C дѣлится въ отношеніи 5 : 7, а въ точкѣ D въ отношеніи 5 : 11; разстояніе между C и D равно 10 дюймовъ. Опредѣлить длину DB. Отвѣтъ: 96 дюйм.

4) Вычислить и начертить два смежныхъ угла, находящихся въ отношеніи 7 : 3.

Отвѣтъ: 126°; 54°.

5) Сумма угловъ, прилежащихъ къ основанію параллелограмма, равна 180°; опредѣлить каждый изъ этихъ угловъ, если они относятся, какъ 5 : 7.

Отвѣтъ: 75°; 105°.

6) Въ равнобедренномъ треугольникѣ отношеніе угла при вершинѣ къ суммѣ угловъ при основаніи равно $1\frac{2}{3}$. Опредѣлить углы этого треугольника.

Отвѣтъ: $112^0 30'$; $33^0 54'$; $33^0 45'$.

7) Кусокъ матеріи въ 32 аршина разрѣзали на двѣ части въ отношеніи $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2}$.

Опредѣлить длину каждой изъ этихъ частей.

Отвѣтъ: 20 арш.; 12 арш.

8) Половина сосуда наполнена ртутью, половина водой. Опредѣлить вѣсъ ртути и вѣсъ воды, если вѣсъ всего (сосуда и жидкости) равенъ 37 килогр., вѣсъ сосуда 1,96 килогр., а ртуть тяжелѣе воды въ 13,6 раза.

Отвѣтъ: 2,4 килогр.; 32,64 килогр.

9) Разстояніе между Москвой и Коломной относится къ разстоянію между Коломной и Рязанью, какъ 22 : 15. Найти разстояніе между этими городами, если отъ Москвы до Рязани 185 верстъ.

Отвѣтъ: 110 верстъ; 75 верстъ.

10) Число жителей на Кавказѣ больше, чѣмъ въ Сибири, на 3600 тысячъ. Сколько жителей на Кавказѣ и сколько въ Сибири, если эти числа относятся между собою какъ 31 : 19?

Отвѣтъ: 9300000 жит.; 5700000 жит.

11) Въ имѣніи площадь пахатной земли относится къ площади лѣса, какъ 2 : 7. Лѣса на $22\frac{1}{2}$ десятины больше, чѣмъ пашни. Сколько десятинъ содержитъ имѣніе?

Отвѣтъ: $40\frac{1}{2}$ десятинъ.

12) Сумма двухъ дробей, имѣющихъ знаменатель 46 равна $1\frac{1}{2}$; числители ихъ относятся, какъ 11 : 12. Найти эти дроби.

Отвѣтъ: $\frac{33}{46}$; $\frac{36}{46}$.

§ 7. Дѣленіе количества на нѣсколько неравныхъ частей.

Если данное количество требуется раздѣлить на нѣсколько неравныхъ частей, то сложность задачи зависитъ отъ того, въ какомъ отношеніи находятся эти части. Самый простой случай будетъ тотъ, когда одна изъ частей служитъ общей мѣрой для всѣхъ другихъ. Напримѣръ: въ шкапу 800 книгъ, находящихся на 3 полкахъ. Сколько книгъ на каждой полкѣ, если извѣстно, что на первой втрое, а на второй вчетверо больше, чѣмъ на третьей?

Здѣсь очевидно, что если мы обозначимъ черезъ x число книгъ на третьей полкѣ, то это число будетъ служить общей мѣрой для числа книгъ на второй и на первой полкѣ. Именно, на первой будетъ находиться $3x$, а на второй $4x$, слѣдовательно $x+3x+4x=800$ или $8x=800$, откуда $x=100$. Если мы обобщимъ содержаніе этой задачи, то получимъ ее въ слѣдующемъ видѣ: «раздѣлить количество a на три части, изъ которыхъ первая была бы въ m разъ, а вторая въ n разъ больше третьей». Общее рѣшеніе такой задачи даетъ формулу: меньшая часть $x=\frac{a}{1+m+n}$, гдѣ очевидно, что m и n могутъ быть числами какъ цѣлыми, такъ и дробными.

Чтобы выяснить общее значеніе чиселъ m и n, слѣдуетъ вспомнить, что общая мѣра данныхъ количествъ всегда можетъ быть принята за единицу измѣренія, и самыя количества могутъ быть выражены въ этой единицѣ. Такъ въ данной задачѣ число книгъ на первой полкѣ можетъ быть измѣрено при помощи числа книгъ третьей полки, если мы назовемъ это число «полка», то число книгъ на первой полкѣ будетъ равно 3 полки, а число книгъ на второй 4 полки, слѣдовательно во всей библіотекѣ будетъ 8 полокъ или 800 книгъ, откуда полка равна 100 книгамъ. Таково ариѳметическое рѣшеніе задачи; но изъ этого рѣшенія вытекаетъ возможность рѣшенія такихъ задачъ, когда m и n числа дробныя. Возьмемъ, напримѣръ, такую задачу: «Нужно было выкопать канаву длиною въ 2 версты и 290 саж. Рабочіе работали 3 дня; въ первый день они выкопали $\frac{3}{4}$, а во второй $\frac{2}{5}$ того, что они выкопали въ третій день. Сколько они копали въ каждый день?»

При ариѳметическомъ рѣшеніи этой задачи, намъ нужно принять за единицу то число саженъ, которое рабочіе выкопали въ третій день; но это же число саженъ мы принимаемъ и за x въ алгебраическомъ рѣшеніи задачи. Такимъ образомъ то и другое рѣшеніе задачи приводится къ одной и той же общей формулѣ. Однако по существу между ними большая разница. Въ алгебрѣ мы оставляемъ измѣреніе въ тѣхъ мѣрахъ, которыя даны въ задачѣ: въ саженяхъ; въ ариѳметикѣ мы беремъ новую мѣру: число выкопанныхъ саженъ въ третій день и въ числахъ этой мѣры измѣряемъ то, что сдѣлано въ первый и второй день. Эта единица служитъ также общей мѣрой, хотя и не даетъ кратныхъ. Мы можемъ однако измѣрить всѣ три части одной общей мѣрой, которая въ каждой изъ нихъ уложится цѣлое число разъ. Чтобы отыскать такую общую мѣру возьмемъ общую формулу рѣшенія $x = \frac{a}{1+m+n}$ и подставимъ сюда вмѣсто буквъ данныя въ задачѣ числа, $x = \dfrac{1290 \text{ саж.}}{1+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}$. Здѣсь знаменатель можетъ быть сложенъ, такъ какъ всѣ дроби суть числа одной и той же единицы, которая входитъ въ формулу. Сложивъ эти дроби получимъ $\frac{20+15+8}{20} = \frac{43}{20}$, но возможность этого сложенія и самое производство дѣйствія показываетъ намъ, что искомыя части могутъ быть измѣрены 20-ой долей третьей части, и тогда въ первой будетъ такихъ частей 15, а второй 8.

Но, если всѣ части могутъ быть измѣрены одной общей мѣрой, то мы можемъ сказать, что они пропорціональны числамъ, т.-е. ихъ отношеніе равно отношенію чиселъ. Въ силу этого общее рѣшеніе задачи распространяется и на тотъ случай, когда она формулирована такъ: «Нужно было выкопать канаву въ 2 вер. 290 саж. въ три дня. Сколько саженъ должно быть выкопано ежедневно, если работа рабочихъ пропорціональна числамъ 20 : 15 : 8?».

Итакъ, если намъ дана задача, въ которой какое-либо количество нужно раздѣлить на неравныя части, при чемъ эти части измѣрены такъ, что одна изъ нихъ принята за единицу, то говорятъ, что данное количество раздѣлено пропорціонально числамъ или что части находятся въ отношеніи.

Обратно, если въ задачѣ сказано, что количество раздѣлено пропорціонально даннымъ числамъ, то это значитъ, что мы всегда имѣемъ право принять одну часть за единицу и выразить всѣ другія въ этой единицѣ.

Отсюда получается два способа разсужденія при рѣшеніи такихъ задачъ. Возьмемъ напримѣръ задачу:

«Въ трехъ ящикахъ 3 п. 3 ф. чаю. Числа, выражающія вѣсъ чая въ каждомъ ящикѣ, относятся между собою какъ $\frac{2}{3}:\frac{5}{6}:\frac{7}{9}$. Сколько фунтовъ чаю въ каждомъ ящикѣ?»

Замѣнимъ здѣсь отношеніе дробей, отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ, умноживъ каждый членъ отношенія на общаго знаменателя данныхъ дробей 18, получимъ:

$$\frac{2}{3}:\frac{5}{6}:\frac{7}{9}=12:15:14.$$

1-ый способъ. Примемъ за единицу 1-ую часть, тогда 2-ая будетъ $\frac{15}{12}$ или $\frac{5}{4}$, а третья $\frac{14}{12}$ или $\frac{7}{6}$. Слѣдовательно во всемъ ящикѣ будетъ первыхъ частей $1+\frac{5}{4}+\frac{7}{6}$ или $\frac{12+15+14}{12}=\frac{41}{12}$, что составляетъ $3\times 40+3=123$ фунта. Итакъ 123 фунта составляетъ $\frac{41}{12}$ первой части, а сама первая часть равна $123:\frac{41}{12}$ или 36 фунт.; вторая часть равна $\frac{5}{4}$ первой, т.-е. $36.\frac{5}{4}=45$ ф., а третья составляетъ $\frac{7}{6}$ первой и будетъ равна $36.\frac{7}{6}=42$ фунта.

2-ой способъ рѣшенія. Обозначимъ общую мѣру всѣхъ трехъ частей буквой k, первая часть содержитъ $12\,k$, вторая $15\,k$, третья $14\,k$, всего будетъ $41\,k$, что составляетъ 123 фунта, слѣдовательно

$$41\,k=123,\ \text{откуда}\ k=3\ \text{фунта}.$$

Первая часть $12\,k=36$ фунтовъ, вторая $15\,k=45$ фунт. и третья $14\,k=42$ фунта.

При рѣшеніи такихъ задачъ можетъ быть дано не цѣлое, а часть его, тогда второй способъ даетъ непосредственно методъ рѣшенія, а первый требуетъ нѣкотораго разсужденія, въ которомъ намъ нужно по части найти цѣлое.

§ 8. **Задачи**.

1) Раздѣлить 1540 на четыре части, относящіяся между собою какъ $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$.

Отвѣтъ: 600; 400; 300; 240.

2) Числа, выражающія количество яблокъ въ каждомъ изъ трехъ ящиковъ, относятся между собою какъ $0{,}75:\frac{2}{3}:1\frac{1}{15}$. Сколько яблокъ въ каждомъ ящикѣ, если извѣстно, что въ первомъ на 20 яблокъ больше, чѣмъ во второмъ?

Отвѣтъ: 180; 160; 256.

3) Числа, выражающія въ географическихъ миляхъ длины рѣкъ: Дуная, Днѣпра и Дона, относятся между собою, какъ $6\frac{1}{4}:5:4\frac{1}{2}$. Опредѣлить длину каждой изъ этихъ рѣкъ, если Дунай на 98 географическихъ миль длиннѣе Дона.

Отвѣтъ: 350 г. миль; 280 г. миль; 252 г. миль.

4) Опредѣлить стороны треугольника, зная, что онѣ относятся между собою, какъ $4:5:6\frac{7}{30}$, а его периметръ равенъ 914 миллим. Построить этотъ треугольникъ.

Отвѣтъ: 240 миллиметровъ; 300 милл.; и 374 милл.

5) Прямая AB раздѣлена на три части въ отношеніи $2:3:4$. Разстояніе между срединами крайныхъ частей равно 4 ф. 8 д. Опредѣлить длину AB.

Отвѣтъ: 7 футовъ.

6) Изъ трехъ угловъ, лежащихъ по одну сторону прямой и имѣющихъ общую вершину, крайніе относятся между собою какъ $3:5$, а средній равенъ разности крайнихъ. Опредѣлить эти улгы.

Отвѣтъ: 36^0; 54^0; 90^0.

7) Опредѣлить стороны четыреугольника, зная, что онѣ относятся между собою, какъ $2:5:4:8$, а периметръ его равенъ 76 метрамъ.

Отвѣтъ: 8 метр.; 20 метр.; 16 метр.; 32 метр.

8) Раздѣлить полуокружность на 3 части въ отношеніи $2:3:4$. Отвѣтъ: 40^0; 60^0; 80^0.

9) Опредѣлить углы треугольника, если они относятся, какъ $12:9:11$.

Отвѣтъ: $61^\circ 52' 30''$; $67^\circ 30'$; $50^\circ 37' 30''$.

10) Опредѣлить углы четыреугольника, если они относятся, какъ $5:7:6:18$.

Отвѣтъ: 50°; 70°; 60°; 180°.

11) Стороны треугольника относятся, какъ $3:4:6$; соединивъ средины всѣхъ сторонъ, получимъ треугольникъ, периметръ, который будетъ 4 ф. 4 д. Опредѣлить стороны даннаго треугольника.

Отвѣтъ: 2 фут.; 2 фут. 8 дюйм. и 4 фута.

§ 9. Дѣленіе количества на неравныя части, измѣренныя разными единицами.

По отношенію къ количествамъ, измѣреннымъ разными единицами, можно установить слѣдующія теоремы.

1) Если какая-либо доля одного количества равна нѣкоторой долѣ другого, то одно изъ нихъ можетъ быть измѣрено другимъ.

Пусть мы имѣемъ два однородныя количества x и y, и намъ дано, что $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$; изъ свойствъ равенства находимъ $nx=my$, откуда $x=\frac{m}{n}y$.

Это значитъ, что если мы y примемъ за единицу, то x будетъ равенъ $\frac{m}{n}$ части этой единицы. Очевидно обратное $y=\frac{n}{m}x$.

2) Если какое-нибудь кратное одного количества равно кратному другого, иной кратности, то одно изъ нихъ можетъ быть измѣрено другимъ.

Возьмемъ количества x и y и пусть $mx=ny$, тогда $x=\frac{n}{m}y$.

Сравнивая доказательства той и другой теоремы, мы видимъ, что каждое изъ нихъ основано на преобразованіи равенствъ. Это преобразованіе, не измѣняя равенства числовыхъ величинъ, однако даетъ новыя числовыя величины, а слѣдовательно содержитъ въ себѣ и новыя свойства разсматриваемыхъ количествъ.

Въ первой теоремѣ намъ дано $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$. Приведя это равенство къ одному знаменателю и отбрасывая его, мы получимъ $nx=my$.

Первое данное уравниваетъ доли количествъ, а второе уравниваетъ кратныя количества. Это второе равенство служитъ основаніемъ въ доказательствѣ второй теоремы. Такъ какъ это преобразованіе не нарушаетъ свойства равенства, то оно позволяетъ объединить обѣ теоремы или лучше сказать вывести слѣдующее слѣдствіе. Если какая-либо доля одного количества равна нѣкоторой долѣ другого, то мы всегда можемъ найти такое кратное перваго, которое будетъ равно кратному второго, иной кратности. Въ самомъ дѣлѣ: если $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$, то непремѣнно и обязательно $nx=my$, т.-е. вторая теорема можетъ быть дана въ общей формулировкѣ съ первой, хотя одна и другая существенно различны.

3) Если два однородныхъ количества выражаются однимъ и тѣмъ же числомъ, то они или равны между собою, если измѣрены одной и той же единицей, или относятся между собой, какъ единицы измѣренія, если эти послѣднія различны.

Пусть одно количество будетъ x, другое y.

Назовемъ единицу измѣренія перваго буквой k, второго k_1, и пусть $x=mk$ и $y=mk_1$; если $k=k_1$, то очевидно и $x=y$; если k не равно k_1, то мы можемъ раздѣлить одно равенство на другое, тогда получимъ

$$\frac{x}{y}=\frac{mk}{mk_1} \text{ или } \frac{x}{y}=\frac{k}{k_1}.$$

Эти теоремы лежатъ въ основаніи ариѳметическаго рѣшенія задачъ на дроби, гдѣ вводятся различныя единицы измѣренія.

Прежде чѣмъ разсмотрѣть рѣшенія тѣхъ задачъ, гдѣ имѣютъ мѣсто эти теоремы, мы должны для выясненія вопроса разсмотрѣть предварительно слѣдующую задачу: «Два брата получили въ наслѣдство неизвѣстное число десятинъ земли. Послѣ того, какъ первый продалъ $\frac{1}{3}$ полученной имъ доли, а второй $\frac{1}{5}$, у каждаго осталось по 120 десятинъ. Сколько десятинъ было получено каждымъ?»

Въ этой задачѣ мы имѣемъ два количества, измѣренныя различными единицами: число десятинъ перваго брата — одна единица, отъ которой взята $\frac{1}{3}$; число десятинъ второго брата—другая единица, отъ которой взята $\frac{1}{5}$. Эти доли мы не можемъ сравнивать другъ съ другомъ, потому что не знаемъ величинъ единицъ; мы не можемъ ихъ ни складывать, ни вычитать. Если бы мы привели дроби къ одному знаменателю и сказали бы, что одинъ братъ продалъ $\frac{5}{15}$ долей своей земли, а другой $\frac{3}{15}$ своей земли, то мы не могли бы сказать, кто продалъ больше.

Все это происходитъ отъ того, что земля измѣрена разными единицами. Однако, предложенную задачу легко рѣшить по частямъ: если первый продалъ $\frac{1}{3}$ своей земли, то у него осталось $\frac{2}{3}$ земли, а въ задачѣ сказано, что эти $\frac{2}{3}$ составляютъ 120 десятинъ. Значитъ его земля равна $120:\frac{2}{3}=180$ десятинъ.

Точно также легко узнать число десятинъ второго.

Въ этой задачѣ намъ не приходится пользоваться указанными теоремами, потому что, хотя и даны разныя единицы измѣренія, но онѣ не связаны никакимъ условіемъ, и задача легко разбивается на двѣ самостоятельныхъ задачи.

Возьмемъ теперь такую задачу:

«У двухъ мальчиковъ 1 р. 8 коп. денегъ. Сколько денегъ у каждаго, если $\frac{1}{4}$ часть денегъ перваго равна $\frac{1}{5}$ части денегъ второго?»

Рѣшая эту задачу ариѳметически, мы говоримъ такъ: если $\frac{1}{4}$ денегъ перваго равна $\frac{1}{5}$ части денегъ второго, то всѣ деньги перваго будутъ составлять $\frac{4}{5}$ денегъ второго.

Принимая деньги второго за единицу, мы находимъ, что деньги перваго составляютъ $\frac{4}{5}$ этой единицы. Значитъ оба количества мы измѣряемъ одной и той же единицей, и можемъ сложить $1+\frac{4}{5}$, что даетъ $\frac{9}{5}$ денегъ второго. Итакъ 108 копеекъ составляютъ $\frac{9}{5}$ денегъ второго, а слѣдовательно у второго было $108:\frac{9}{5}$ или $\frac{108.5}{9}=60$ коп. Очевидно, что при этомъ рѣшеніи мы пользуемся первой теоремой, при помощи, которой измѣряемъ оба количества одной и той же единицей.

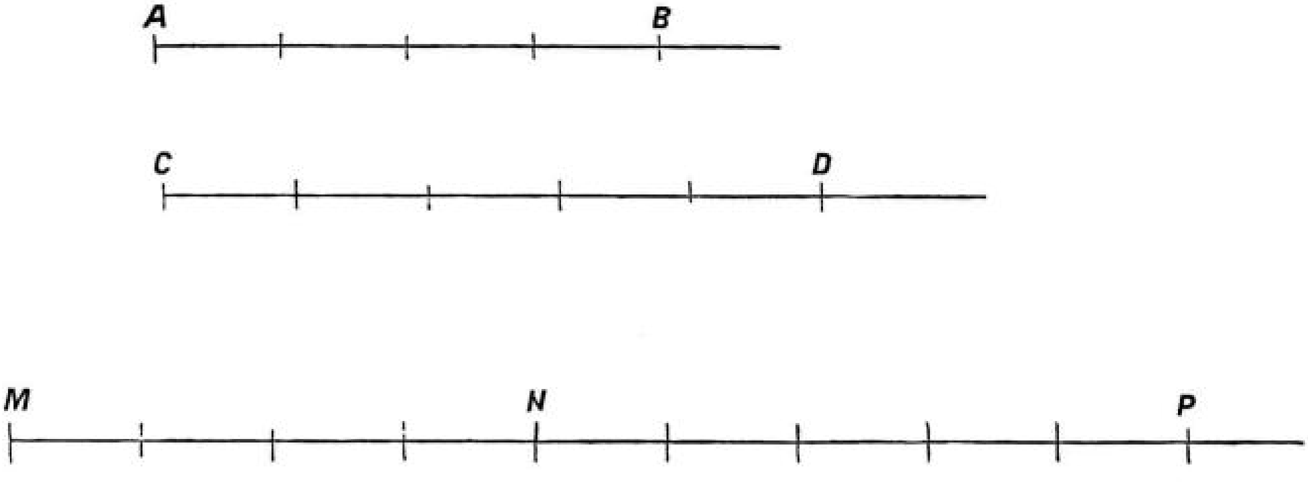
При этомъ особо отмѣтимъ, что данныя дроби $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ мы не можемъ складывать или вычитать, такъ какъ онѣ разнородны.

Если мы приведемъ ихъ къ одному знаменателю и возьмемъ, $\frac{5}{20}$ и $\frac{4}{20}$, вмѣсто $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$, то можемъ сказать, что если $\frac{5}{20}$ одного количества равны $\frac{4}{20}$ другого, то $\frac{1}{20}$ перваго меньше $\frac{1}{20}$ второго. Кромѣ того, если $\frac{5}{20}$ одного равны $\frac{4}{20}$ другого, то это значитъ, что двадцатыя доли этихъ количествъ относятся между собой, какъ $4:5$.

Чтобы выяснить это, обозначимъ $\frac{1}{20}$ перваго буквой k, а $\frac{1}{20}$ второго буквой k_1; тогда мы будемъ имѣть по условію $5\,k = 4\,k_1$.

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что $\frac{k}{k_1} = \frac{4}{5}$, т.-е., цѣлое 108 копеекъ, мы должны раздѣлить пропорціонально числамъ 4 и 5.

Это можно пояснить еще геометрически (черт. 31)



Черт. 31.

Пусть линія MP представитъ собою цѣлое, 108 копеекъ; части этой линіи будутъ MN и NP. Часть MN равна деньгамъ перваго, которыя можно изобразить линіей AB, а часть NP будетъ равна деньгамъ второго, изображеннымъ линіей CD. Четвертая часть AB равна пятой части CD. Очевидно, что вся линія MP будетъ содержать 9 частей и въ точкѣ N раздѣлится въ отношеніи $4:5$.

Наше разсужденіе не измѣнится, если мы вмѣсто $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ взяли бы $\frac{3}{4}$ и $\frac{2}{5}$, или вообще, вмѣсто $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$ взяли бы дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{s}{t}$.

Условіе равенства этихъ долей привело бы насъ къ пропорціональности частей.

Итакъ, ариѳметическій способъ рѣшенія предложенной задачи требуетъ, чтобы или обѣ части были измѣрены одной и той же единицей или чтобы цѣлое было раздѣлено на части въ данномъ отношеніи.

Разсмотримъ теперь алгебраическое рѣшеніе той же задачи. Для этого, обозначимъ число копеекъ у перваго мальчика буквой x, тогда у второго очевидно будетъ $108-x$ копеекъ.

Намъ сказано, что четвертая часть денегъ перваго, т.-е. $\frac{x}{4}$ должна быть равна пятой части денегъ второго, т.-е. $\frac{108-x}{5}$. Итакъ, мы получаемъ уравненіе $\frac{x}{4}=\frac{108-x}{5}$. Это уравненіе мы можемъ рѣшить двояко.

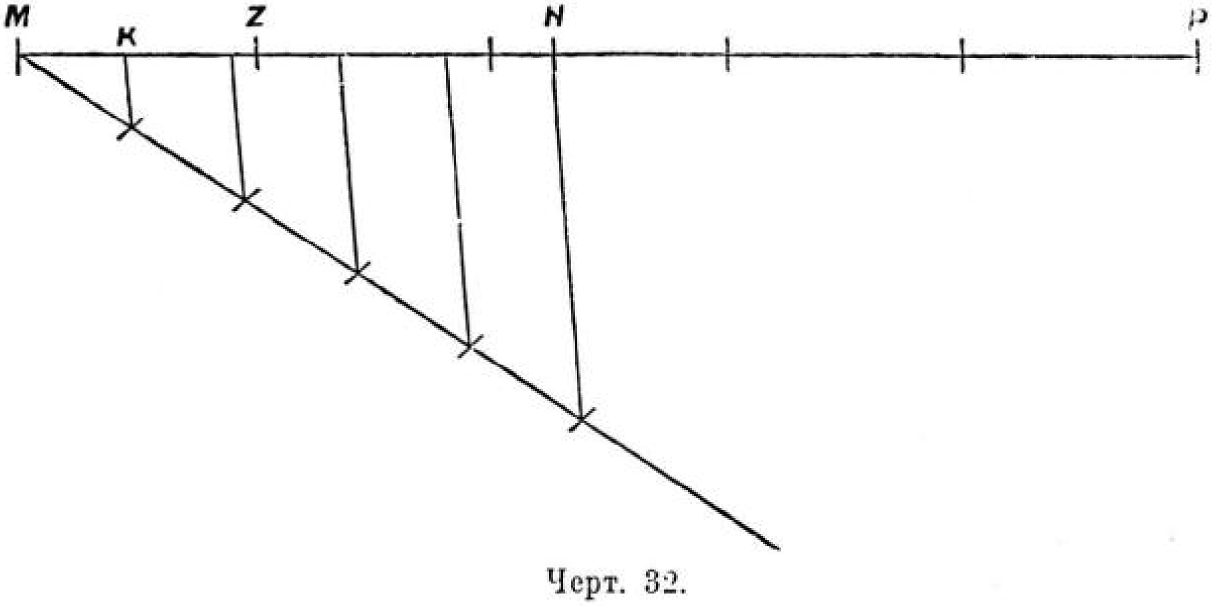
Первое рѣшеніе. Приведемъ обѣ части къ одному знаменателю и его отбросимъ, тогда получимъ новыя количества $5x=4(108-x)$; эти новыя количества будутъ уже не части денегъ, а кратныя имъ. Полученное новое равенство мы должны прочитать такъ: упятеренныя деньги перваго равны учетвереннымъ деньгамъ второго. Если мы теперь раскроемъ скобки въ правой части равенства, то этимъ не преобразуемъ самого равенства, а только измѣнимъ видъ правой части, не измѣняя величины:

$$5x=432-4x.$$

Перенеся $4x$ влѣво, мы получимъ новое равенство $5x+4x=432$. Это равенство показываетъ, что сумма упятеренной части перваго и учетверенной части его же составитъ 432 копейки, т.-е. учетверенное кратное общей суммы равно удевятеренной части перваго, т.-е. $9x=432$, откуда $x=\frac{432}{9}$ или $x=48$ копеекъ. Всѣ эти свойства не содержатся въ ариѳметическомъ рѣшеніи, они закрываются тамъ принятой единицей мѣры или условіемъ пропорціональности; алгебраическое рѣшеніе, вводя обычныя единицы измѣренія,—копейки,—даетъ возможность указать эти свойства и этимъ расширить изученіе вопроса.

Второе рѣшеніе. Уравленіе $\frac{x}{4}=\frac{108-x}{5}$ можетъ быть рѣшено иначе. Разобьемъ правую часть на два слагаемыхъ $\frac{108}{5}$ и $\frac{x}{5}$, т.-е. напишемъ такъ $\frac{x}{4}=\frac{108}{5}-\frac{x}{5}$. Этимъ преобразованіемъ мы равенства не измѣняемъ и потому не получаемъ новыхъ свойствъ; но перенеся $\frac{x}{5}$ налѣво, мы получаемъ новое равенство $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=\frac{108}{5}$, которое показываетъ намъ, что сумма четвертой и пятой части перваго составляетъ пятую часть общей суммы.

Приведя дроби $\frac{x}{4}$ и $\frac{x}{5}$ къ одному знаменателю и сложивъ ихъ, мы получимъ $\frac{5x+4x}{20}$ или $\frac{9x}{20}=\frac{108}{5}$, откуда $x=\frac{108}{4}:\frac{9}{20}$. Въ частномъ мы получимъ тотъ же отвѣтъ $x=48$; но путь, которымъ мы пришли къ этому рѣшенію, и свойство преобразованныхъ количествъ будутъ другими: въ первомъ преобразованіи мы имѣли дѣло съ кратными данныхъ количествъ, а во второмъ съ ихъ долями. Второй путь мы можемъ пояснить слѣдующимъ геометрическимъ построеніемъ (черт. 32).



Черт. 32.

Возьмемъ ту же прямую MP, гдѣ MN деньги перваго, а NP—деньги второго. Раздѣлимъ MN на 5 равныхъ частей, получимъ MK пятую часть, прибавимъ къ ней KZ четвертую часть той же линіи, получимъ MZ, эта MZ будетъ пятой частью всей линіи MP.

Возьмемъ теперь такую задачу: «Раздѣлить число 62 на три части такъ, чтобы первая относилась ко второй, какъ $3:5$, а вторая къ третьей, какъ $2:3$».

Въ этой задачѣ общій наибольшій дѣлитель первыхъ двухъ частей содержится въ первой 3 раза, а во второй 5 разъ, а общій наибольшій дѣлитель второй и третьей части содержится во второй 2 раза, а въ третьей 3 раза. Такимъ образомъ всѣ три части не имѣютъ общей мѣры. Рѣшить задачу ариѳметически можно двумя разсужденіями, но въ томъ и другомъ мы непремѣнно должны отыскать такую мѣру, которая была бы общей для всѣхъ частей.

1-ый способъ. Примемъ за единицу вторую часть, тогда первая будетъ $\frac{3}{5}$ этой единицы, а третья $\frac{2}{3}$ ея же. Такимъ образомъ вторая часть есть общая мѣра всѣхъ трехъ частей и въ числѣ 62 такихъ мѣръ будетъ $1+\frac{3}{5}+\frac{3}{2}$ или $\frac{31}{10}$. Итакъ, 62 составляетъ $\frac{31}{10}$ доли второй части, и сама вторая часть будетъ $62:\frac{31}{10}=\frac{62.10}{31}=20$. Первая составляетъ $\frac{3}{5}$ ея, т.-е. $\frac{20.3}{5}=12$, а третья $\frac{3}{2}$ ея, т.-е. $\frac{20.3}{2}=30$.

2-ой способъ. Намъ дано два отношенія

$$\mathrm{I}:\mathrm{II}=3:5$$
$$\text{и } \mathrm{II}:\mathrm{III}=2:3$$

измѣнимъ оба эти отношенія такъ, чтобы II часть была выражена однимъ и тѣмъ же числомъ; для этого достаточно члены перваго отношенія умножить на 2, а члены второго на 5, отчего самыя отношенія не измѣнятся, тогда

$$\mathrm{I}:\mathrm{II}=6:10$$
$$\mathrm{II}:\mathrm{III}=10:15.$$

Это увеличеніе членовъ отношенія соотвѣтствуетъ измѣнію величины общей мѣры, которая теперь уменьшилась и укладывается въ первой части 6 разъ, во второй

10 разъ и въ третьей 15 разъ. Если мы обозначимъ ее черезъ k, тогда $\mathrm{I} = 6\,k$; $\mathrm{II} = 10\,k$ и $\mathrm{III} = 15\,k$, а во всемъ числѣ 62 будетъ такихъ мѣръ $31\,k$. Итакъ $31\,k = 62$, откуда $k = 2$; слѣдовательно $\mathrm{I} = 12$; $\mathrm{II} = 20$ и $\mathrm{III} = 30$.

Алгебраическій способъ, рѣшенія этой задачи, требуетъ составленія трехъ уравненій и не даетъ чего-либо новаго для рѣшенія.

§ 10. **Задачи.**

1) Въ 3 мѣшкахъ лежали яблоки, всего 530 штукъ. Число яблокъ перваго мѣшка было равно $\frac{3}{4}$ числа яблокъ второго, а въ третьемъ было въ $1\frac{1}{5}$ раза больше, чѣмъ въ первомъ. Сколько яблокъ было въ каждомъ мѣшкѣ?

Отвѣтъ: 200; 150; 180.

2) Который теперь часъ, если протекшая часть сутокъ равна $\frac{3}{5}$ оставшейся?

Отвѣтъ: 9 часовъ утра.

3) Купецъ, продавъ товаръ за 950 руб., получилъ убытокъ, составляющій $\frac{5}{24}$ первоначальной стоимости. Сколько стоитъ этотъ товаръ?

Отвѣтъ: 1200 рублей.

4) Сумма двухъ чиселъ равна 51. Найти эти числа, если $\frac{2}{3}$ одного равны $\frac{3}{4}$ другого.

Отвѣтъ; 27; 24.

5) Разность двухъ чиселъ равна 44. Найти эти числа, если извѣстно, что $\frac{1}{5}$ часть перваго равна $\frac{3}{4}$ второго.

Отвѣтъ: 60; 16.

6) Кусокъ полотна былъ распроданъ тремъ покупателямъ. Первый взялъ $\frac{3}{7}$ всего куска, второй $\frac{3}{5}$ остатка и третій остальные 32 аршина. Сколько аршинъ полотна было въ кускѣ?

Отвѣтъ: 140 аршинъ.

7) Раздѣлить 2492 на такія двѣ части, чтобы половина одной была втрое больше другой.

Отвѣтъ: 2136; 356.

8) Разнощикъ продалъ свои яблоки четыремъ покупателямъ. Первый взялъ $\frac{1}{3}$ всего числа яблокъ и еще 16 штукъ, второй $\frac{1}{3}$ того, что осталось послѣ перваго и еще 16 штукъ, третій $\frac{1}{3}$ того, что осталось послѣ первыхъ двухъ и еще 16 штукъ, четвертый $\frac{1}{3}$ того что осталось послѣ первыхъ трехъ и послѣдніе 16 яблокъ. Сколько яблокъ было у разнощика?

Отвѣтъ: 282 яблока.

9) Разстояніе между Москвой и Смоленскомъ 390 верстъ. На этомъ пути находятся Можайскъ и Вязьма. Разстояніе отъ Москвы до Можайска относится къ разстоянію отъ Можайска до Вязьмы, какъ $4:5$, а разстояніе отъ Можайска до Вязьмы относится къ разстоянію отъ Вязьмы до Смоленска, какъ $8\frac{1}{3}:11$. Опредѣлить разстояніе между этими городами.

Отвѣтъ: Моск.-Можайск. 100 верстъ; Можайск.-Вязьма 125 верстъ; Вязьма-Смоленскъ 165 верстъ.

10) $38\frac{1}{2}$ аршинъ сукна было раздѣлено между тремя лицами. Часть перваго относилась къ части второго, какъ $\frac{2}{3}:\frac{5}{12}$, а часть второго къ части третьяго, какъ $\frac{3}{5}:\frac{3}{4}$. Сколько аршинъ было у каждаго?

Отвѣтъ: 10 арш.; 12,5 арш.; 16 арш.

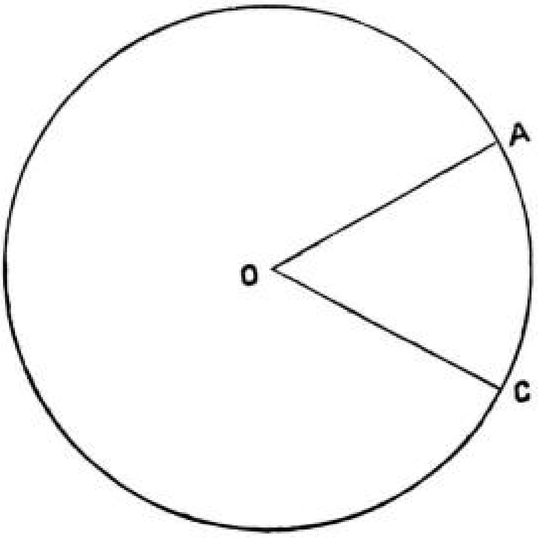
11) Три части числа относятся, какъ $2:3\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$. Сумма первой и третьей на 72 меньше второй. Найти число.

Отвѣтъ: $331\frac{1}{5}$.

§ 11. **Объ измѣреніи угловъ.**

Въ геометріи разсматриваются слѣдующіе углы: центральные, вписанные, описанные, вершины которыхъ находятся внутри круга и вершина которыхъ находится внѣ круга; послѣдніе могутъ быть образованы или двумя сѣкущими, или сѣкущей и касательной.

Углы центральные. Центральнымъ угломъ называется такой уголъ, у котораго вершина находится въ центрѣ круга, напримѣръ, уголъ AOC (черт. 33). Такіе углы измѣряются дугами: уголъ AOC измѣряется дугой AC.



Черт. 33.

Это значитъ, что уголъ содержитъ въ себѣ столько угловыхъ градусовъ, сколько дуга содержитъ дуговыхъ градусовъ. Какъ извѣстно окружность дѣлится на 360 равныхъ частей и $\frac{1}{360}$ часть окружности называется градусомъ.

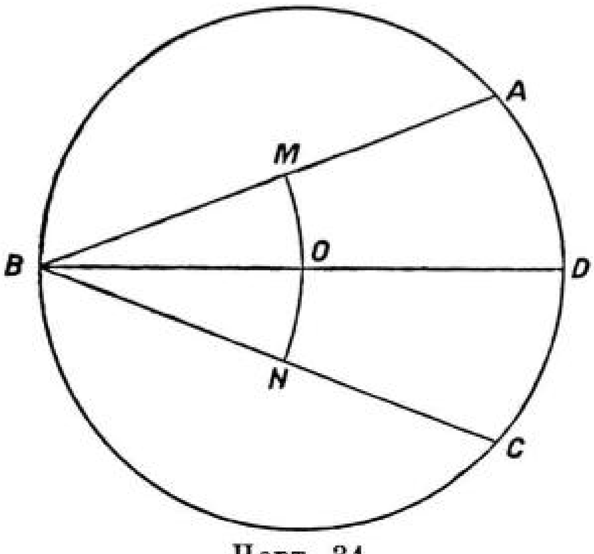
Если мы всѣ точки дѣленія соединимъ съ центромъ, то эти 360 линій раздѣлятъ площадь круга на 360 угловъ. Такой уголъ называется угловымъ градусомъ. Понятно, что если дуга AC содержитъ въ себѣ n дѣленій или n дуговыхъ градусовъ, то и уголъ будетъ содержать n угловыхъ градусовъ.

Чтобы измѣрить величину даннаго угла, мы примемъ его вершину за центръ, опишемъ дугу, и сколько градусовъ будетъ имѣть дуга, столько градусовъ будетъ содержать и уголъ.

Выражаясь короче, говорятъ: центральные углы измѣряются дугами.

Такъ какъ величина радіуса не вліяетъ на величину градуса, то и мѣра угла не зависитъ отъ длины радіуса дуги; обыкновенно для измѣренія угловъ пользуются транспортиромъ. Такъ какъ всегда можетъ случиться, что стороны угла не совпадутъ съ дѣленіемъ транспортира, то принято уголъ дѣлить на 60 минутъ, а минуту на 60 секундъ; но эти дѣленія возможно выдѣлить и отсчитать только на особыхъ угломѣрныхъ приборахъ. Мы будемъ довольствоваться только цѣлыми градусами.

Углы вписанные. Вписаннымъ угломъ называется такой уголъ, вершина, котораго находится на окружности, напримѣръ уголъ ABC (черт. 34). При этомъ дуга AC



Черт. 34.

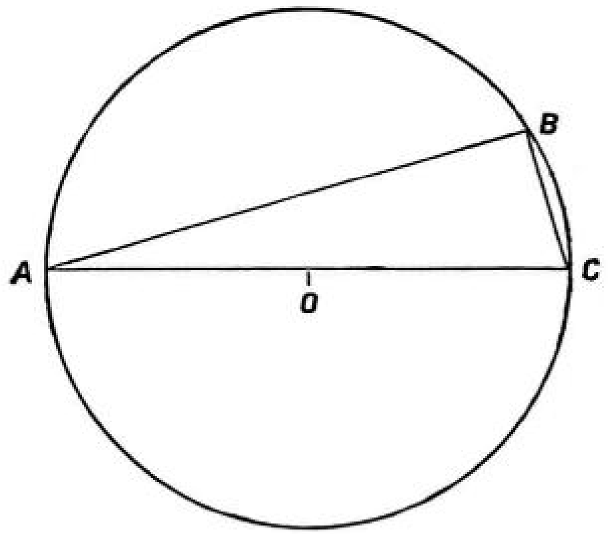
называется «дугой, на которую уголъ опирается», а дуга ABC называется «дугой, вмѣщающей данный уголъ». Очевидно, что сумма дугъ, на которую уголъ опирается и «которая его вмѣщаетъ», всегда равна $360°$. По отношенію къ вписаннымъ угламъ разсматривается три случая: 1) когда одна изъ сторонъ угла будетъ діаметромъ, 2) когда обѣ стороны угла находятся по разныя стороны центра и 3) когда обѣ стороны угла лежатъ по одну сторону центра.

Во всѣхъ случаяхъ *вписанный уголъ равенъ половинѣ центральнаго угла, опирающагося на ту же дугу,* т.-е. онъ содержитъ число градусовъ, равное половинѣ того числа, которое содержится въ дугѣ, на которую онъ опирается *). Чтобы убѣдиться въ этомъ, проведемъ діаметръ BD

*) Я думаю, что эти теоремы можно было бы доказать обычнымъ пріемомъ, при чемъ то обстоятельство, что ученики не знаютъ подробностей, входящихъ сюда теоремъ о внѣшнемъ углѣ треугольника, объ углахъ, образованныхъ параллельными и сѣкущей, на мой взглядъ, не важно. Но, если не стоять на точкѣ зрѣнія логической обоснованности доказательствъ, то можно убѣдиться въ этомъ простымъ измѣреніемъ, какъ это сдѣлано въ текстѣ.

и измѣримъ дугу MN, центръ которой будетъ въ точкѣ A, а радіусъ равенъ радіусу круга. Измѣривъ число градусовъ въ дугѣ AD и дугѣ MO, мы увидимъ, что AD содержитъ вдвое больше градусовъ, чѣмъ MO; но уголъ измѣряется дугой MO, слѣдовательно число градусовъ въ немъ равно половинѣ градусовъ AD. Точно также въ дугѣ DC вдвое больше градусовъ, чѣмъ въ дугѣ ON, а слѣдовательно и въ дугѣ AC вдвое больше градусовъ, чѣмъ въ MN, или уголъ ABC содержитъ половину числа градусовъ дуги AC.

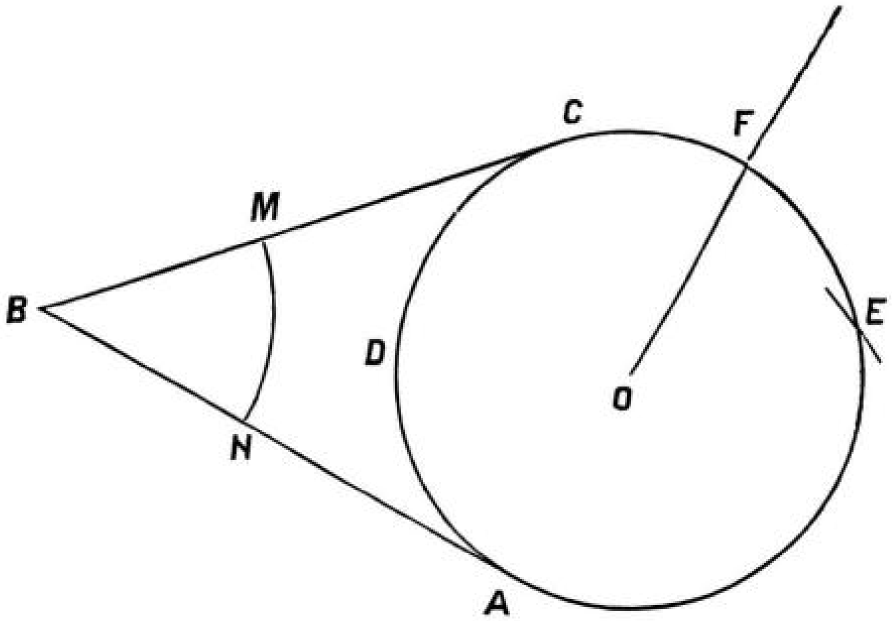
Слѣдствіе. Уголъ, опирающійся на діаметръ, всегда прямой. (Черт. 35).



Черт. 35.

Углы описанные. Описаннымъ угломъ называется уголъ, образуемый касательными къ окружности, проведенными изъ одной внѣшней точки. Такой уголъ измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между сторонами.

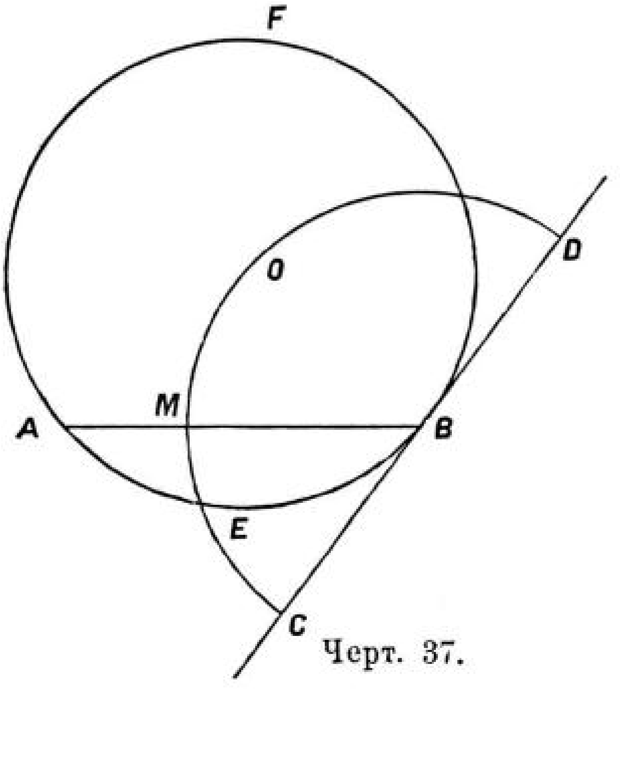
Возьмемъ описанный уголъ ABC; между его сторонами содержатся, дуги ADC и AEC; число градусовъ въ этомъ углѣ равно $\frac{AEC - ADC}{2}$. Чтобы убѣдиться въ этомъ, отложимъ по дугѣ AEC дугу ADC, полученную разность, дугу CE, раздѣлимъ пополамъ. Если мы изъ вершины угла B проведемъ дугу MN радіусомъ, равнымъ радіусу круга, то увидимъ, что дуга $MN = \frac{\text{дугѣ } CE.}{2}$. (Черт. 36).



Черт. 36.

Уголъ, образованный касательной и хордой, измѣряется половиной дуги, стягиваемой хордой.

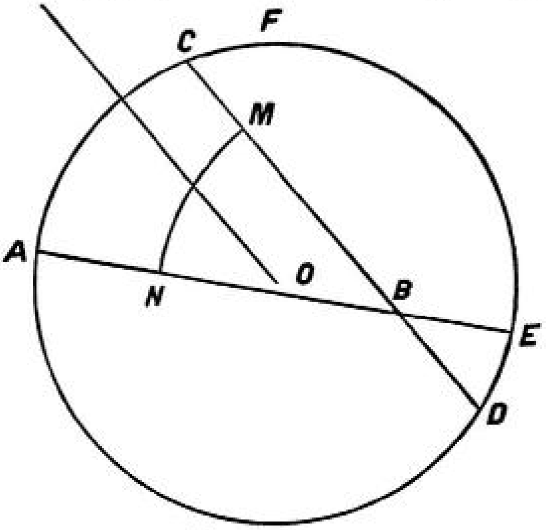
Возьмемъ касательную CD и хорду AB, проведенную въ точку касанія; мы получимъ два угла ABC и ABD; уголъ ABC измѣряется половиной дуги AEB, а уголъ ABD измѣряется половиной дуги AFB. Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно изъ точки B, какъ центра, описать дугу радіусомъ, равнымъ радіусу круга, тогда увидимъ, что дуга MC равна $\frac{1}{2}$ дуги AEB, а дуга MD равна половинѣ дуги AFB (черт. 37).



Черт. 37.

Уголъ, вершина котораго внутри круга, измѣряется полусуммою дугъ, заключенныхъ между его сторонами и ихъ продолженіемъ.

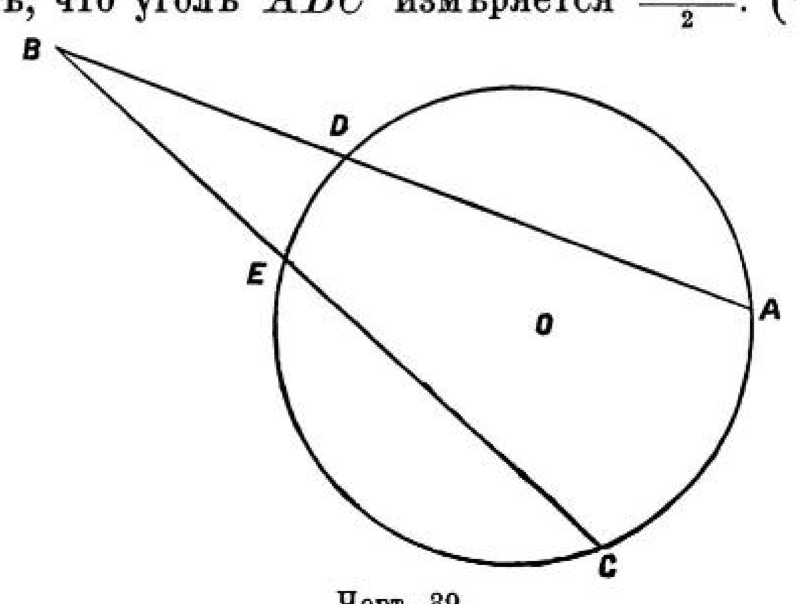
Пусть вершина угла будетъ точка B, его стороны AB и CB, тогда дуга AC будетъ заключаться между сторонами угла, а дуга DE между ихъ продолженіями. Уголъ ABC будетъ измѣряться $\frac{AC+DE}{2}$. Чтобы убѣдиться въ этомъ проведемъ изъ вершины B дугу MN радіусомъ, равнымъ радіусу круга; къ дугѣ AC приложимъ дугу $CF=DE$, раздѣлимъ дугу AF пополамъ, тогда $MN=\frac{1}{2}ACF$. (Черт. 38).



Черт. 38.

Уголъ, образованный двумя сѣкущими, измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между его сторонами.

Возьмемъ уголъ ABC, образованный двумя сѣкущими AB и AC. Каждая сѣкущая пересѣкаетъ окружность въ двухъ точкахъ, вслѣдствіе чего между сторонами угла образуются двѣ дуги AC и DE. Легко убѣдиться построеніемъ, что уголъ ABC измѣряется $\frac{AC-DE}{2}$. (Черт. 39).



Черт. 39.

§ 12. **Задачи.**

1) Зная, что около всякаго треугольника можно описать кругъ, доказать, что во всякомъ треугольникѣ сумма угловъ равна 180°.

2) На прямой AB описана полуокружность, которая въ точкѣ C раздѣлена въ отношеніи $5:7$. Точка C соединена съ точками A и B; опредѣлить углы полученнаго треугольника.

Отвѣтъ: $37^\circ 30'$; $52^\circ 30'$.

3) Уголъ между двумя радіусами равенъ 102°; опредѣлить уголъ между касательными, проведенными черезъ концы этихъ радіусовъ.

Отвѣтъ: 78°.

4) Вычислить уголъ, вписанный въ дугу, составляющую $\frac{17}{32}$ окружности.

Отвѣтъ: $95^\circ 37' 30''$.

5) Хорда дѣлитъ окружность въ отношеніи $5:11$. Опредѣлить величины вписанныхъ угловъ, опирающихся на эту хорду.

Отвѣтъ: $56^\circ 15'$; $123^\circ 45'$.

6) Черезъ конецъ хорды, дѣлящей окружность въ отношеніи $3:5$, проведена касательная. Опредѣлить острый уголъ между хордой и касательной.

Отвѣтъ: $67^\circ 30'$.

7) На окружности взяты дуги AB, BC, CD и DA, которыя пропорціональны числамъ $2:3:5:6$. Проведены хорды AC и BD, которыя пересѣкаются въ точкѣ M. Опредѣлить уголъ AMB.

Отвѣтъ: $78^\circ 45'$.

8) Окружность раздѣлена въ точкахъ A, B, C и D такъ, что полученныя дуги относятся какъ $3:2:13:7$. Хорды AD и BC, будучи продолжены, пересѣкаются въ точкѣ M. Опредѣлить уголъ AMB.

Отвѣтъ: 72°.

9) Изъ внѣшней точки B проведены двѣ сѣкущія; дуги, заключенныя между сторонами полученнаго угла, относятся какъ $2:7$, а сумма ихъ равна 126°. Опредѣлить величину угла B.

Отвѣтъ: $\angle B = 35^\circ$.

10) Опредѣлить величину каждаго изъ двухъ угловъ, составленныхъ касательной и хордой, если хорда дѣлитъ окружность въ отношеніи $\frac{1}{5}:\frac{1}{3}$.

Отвѣтъ: $67^\circ 30'$; $112^\circ 30'$.

11) Дуги, заключенныя между сторонами описаннаго угла, относятся какъ $3:7$. Опредѣлить этотъ уголъ.

Отвѣтъ: 72°.

Окружность раздѣлена на три части въ отношеніи $2:3:4$. Черезъ точки дѣленія проведены касательныя. Опредѣлить величину угловъ полученнаго треугольника.

Отвѣтъ: 100°; 20°; 60°.

§ 13. Дѣленіе количествъ въ отношеніи обратномъ даннымъ числамъ.

Обратными числами называются такія числа, которыя въ произведеніи съ данными даютъ единицу. Такъ, например, 4 и $\frac{1}{4}$ суть числа обратныя, потому что $4.\frac{1}{4} = 1$. Точно также числа $\frac{2}{7}$ и $\frac{7}{2}$ будутъ обратными.

Если одно изъ обратныхъ чиселъ увеличить въ нѣсколько разъ, то другое должно уменьшиться во столько же разъ и обратно.

Раздѣлить данное количество въ отношеніи обратномъ даннымъ числамъ, это значитъ раздѣлить его на такія части, отношеніе которыхъ было бы обратно данному. Въ этомъ случаѣ часто говорятъ: «раздѣлить обратно пропорціонально даннымъ числамъ».

Пусть, напримѣръ, требуется раздѣлить число 65 на 3 части обратно пропорціонально 2, 3 и 4. Это значитъ, что послѣдняя часть должна быть самой маленькой, а первая самой большой. Такъ какъ эти части должны быть обратно пропорціональны числамъ 2, 3 и 4, то можно сказать, что они будутъ прямо пропорціональны обратнымъ числамъ, т.-е. раздѣлить 65 на части обратно пропорціональныя 2, 3 и 4, значитъ раздѣлить 65 на части прямо пропорціональныя числамъ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. Чтобы выполнить это дѣленіе, обратимъ отношеніе дробей въ отношеніе цѣлыхъ чиселъ, умноживъ каждую дробь на ихъ общаго знаменателя 12, получимъ $6:4:3$; значитъ число 65 содержитъ $13k$, гдѣ k есть общая мѣра всѣхъ трехъ частей. Эта мѣра равна 5, слѣдовательно первая часть равна 30, вторая 20 и третья 15. Эти части будутъ находиться въ отношеніи обратномъ отношенію чиселъ 2, 3 и 4.

§ 14. **Задачи.**

1) Раздѣлить число 66 на три части обратно пропорціональныя $5:4:10$.

Отвѣтъ: 24; 30; 12.

2) Раздѣлить 4840 руб. между тремя лицами обратно пропорціонально числамъ $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{5}{6}$.

Отвѣтъ: 1800 руб.; 1600 руб.; 1440 руб.

3) Неизвѣстное число раздѣлено на части, обратно пропорціональныя $\frac{2}{5}:\frac{2}{3}:1\frac{1}{2}$, при чемъ вторая часть оказалась на 75 больше третьей. Найти эти числа.

Отвѣтъ: 225; 135; 60.

4) Число 780 раздѣлить обратно пропорціонально $2\frac{1}{2}:2:1\frac{1}{2}:1\frac{2}{3}$.

Отвѣтъ: 144; 180; 240; 216.

5) Подрядчикъ выдалъ въ награду тремъ рабочимъ 370 рублей съ тѣмъ, чтобы они раздѣлили эти деньги обратно пропорціонально своему жалованью. Сколько получилъ каждый, если ихъ жалованье было 18, 15 и 12 руб.

Отвѣтъ: 100 рублей; 120 рублей; 150 рублей.

6) Четыре деревни построили мостъ, который обошелся въ 588 рублей. Эти деньги они разложили между собою въ отношеніи обратномъ разстоянію каждой деревни

отъ моста. Сколько пришлось заплатить каждой, если первая находится на разстояніи 4,2 версты, вторая $5\frac{3}{5}$ версты, третья—$2\frac{4}{5}$ версты, и четвертая—5,04 версты?

Отвѣтъ: 144 рубля; 108 рублей; 216 рублей; 120 рублей.

ГЛАВА VIII.

Пропорціи.

§ 1. Опредѣленіе пропорціи.

Пропорціей называется равенство двухъ отношеній.

Если два отношенія имѣютъ одинаковаго знаменателя, то они считаются равными, а числа, ихъ составляющія, называются пропорціональными. Напримѣръ:

Отношеніе $225:25=9$; отношеніе $27:3=9$; слѣдовательно

$$225:25=27:3.$$

Такое равенство называется пропорціей, а числа 225, 25, 27 и 3 пропорціональными. Это равенство можно написать въ иномъ видѣ:

$$\frac{225}{25}=\frac{27}{3}$$

§ 2. Члены пропорціи.

Числа или количества, входящія въ пропорцію, называются ея членами.

Всякая пропорція состоитъ всегда изъ четырехъ членовъ; въ общемъ видѣ ее можно написать такъ $a:b=c:d$ или

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Члены пропорціи сохраняютъ наименованіе членовъ отношенія; a и c называются предыдущими, а b и d—послѣдующими; но кромѣ того они получаютъ особыя названія, какъ члены пропорціи, а именно a и d называются крайними членами, b и c средними.

§ 3. Свойства членовъ пропорціи.

Такъ какъ пропорція есть равенство двухъ отношеній, то члены ея сохраняютъ свойства равныхъ отношеній, а именно:

1) Пропорція не нарушится, если мы оба члена того или другого отношенія умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число.

На основаніи этого свойства мы имѣемъ право замѣнить дробные члены пропорціи цѣлыми. Пусть дана пропорція $2\frac{1}{2} : 8 = 7\frac{3}{4} : 24\frac{4}{5}$. Умножимъ оба члена перваго отношенія на 2, получимъ $5 : 16$; а члены второго отношенія на 20, получимъ $155 : 496$; и получимъ ту же пропорцію въ новомъ видѣ:

$$5 : 16 : 155 : 496.$$

2) Во всякой пропорціи сумма предыдущихъ членовъ обоихъ отношеній относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ каждый предыдущій къ своему послѣдующему.

Если мы возьмемъ пропорцію въ общемъ видѣ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то въ силу этого свойства можемъ написать новую пропорцію $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$; это свойство можно записать и такъ $a : b = c : d$; $(a + c) : (b + d) = a : b$.

3) Кромѣ свойствъ отношенія, члены пропорціи обладаютъ и свойствомъ равенства: равенство не нарушится, если мы обѣ части его умножимъ на одно и то же число.

Умножимъ обѣ части равенства $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ на произведеніе bd, получимъ $ad = bc$. Это вновь полученное равенство называется *главнымъ свойствомъ пропорціи* и читается такъ: *произведеніе крайнихъ членовъ всегда равно произведенію среднихъ членовъ*, или просто: произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ вышеприведенныхъ пропорціяхъ $225 : 25 = 27 : 3$, мы имѣемъ $225 \times 3 = 675$ и $25 \times 27 = 675$, т.-е. $225.3 = 25.27$.

Точно также въ пропорціи $5 : 16 = 155 : 496$, имѣемъ $496.5 = 155.16$, изъ которыхъ каждое произведеніе равно 2480.

4) На основанiи этого свойства мы получаемъ право переставлять члены пропорцiи, не измѣняя ее, т.-е. не нарушая равенства, при чемъ отношенiя будутъ мѣняться, но пропорцiя сохранится. При этомъ преобразованiи всегда нужно имѣть въ виду, чтобы произведенiе крайнихъ и среднихъ членовъ было одно и то же.

Возьмемъ пропорцiю въ общемъ видѣ $a:b=c:d$; мы можемъ написать ее въ видѣ $a:c=b:d$, ибо при этомъ попрежнему $ad=bc$. Это свойство формулируется такъ: во всякой пропорцiи мы можемъ переставлять мѣста среднихъ членовъ.

Совершенно на томъ же основанiи мы имѣемъ право переставлять и мѣста крайнихъ членовъ, написавъ $d:b=c:a$.

Такихъ измѣненiй мы можемъ сдѣлать 8, а именно:

1) $a:b=c:d$	5) $c:d=a:b$
2) $a:c=b:a$	6) $c:a=d:b$
3) $d:b=c:a$	7) $b:d=a:c$
4) $d:c=b:a$	8) $b:a=d:c$

При этихъ преобразованiяхъ мы будемъ твердо помнить, что каждое изъ нихъ даетъ намъ новую пропорцiю, которая не тожественна съ данной; между тѣмъ, какъ предыдущiя преобразованiя, на основанiи свойствъ равныхъ отношенiй, даютъ ту же самую пропорцiю только въ другомъ видѣ. Послѣднiя 8 преобразованiй измѣняютъ знаменателя отношенiя, даютъ новыя отношенiя, а первыя не измѣняютъ знаменателя отношенiя, а измѣняютъ только видъ отношенiя, его внѣшнюю форму.

§ 4. Производныя пропорцiи.

Въ разсмотрѣнныхъ нами 8 пропорцiяхъ предыдущаго § сохранялось основное свойство данной пропорцiи: произведенiе крайнихъ и среднихъ членовъ оставалось одно и то же; теперь мы попробуемъ изъ данной пропорцiи получить новыя пропорцiи, въ которыхъ это основное свойство не будетъ сохранено, т.-е. произведенiя крайнихъ и среднихъ членовъ будутъ уже другими. Эти произведенія, конечно, останутся равными другъ другу, иначе пропорція не была бы вѣрна, но они не будутъ равны произведенію крайнихъ и среднихъ членовъ данной пропорціи.

1) *Сумма предыдущаго и послѣдующаго членовъ перваго отношенія относится къ своему послѣдующему, какъ сумма предыдущаго и послѣдующаго членовъ второго отнотенія къ своему послѣдующему.*

Намъ дана пропорція $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и нужно доказать, что $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

Доказать это мы можемъ двояко:

a) переставивъ средніе члены данной пропорціи, получимъ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ и воспользуемся свойствомъ равныхъ отношеній, тогда $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$, а переставивъ здѣсь мѣста среднихъ найдемъ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, что и требуется.

b) Возьмемъ пропорцію $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и такъ какъ это есть равенство, то мы имѣемъ право прибавить къ обѣимъ частямъ его по одному и тому же числу; прибавимъ по единицѣ, тогда получимъ $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$. Приведемъ каждую часть къ одному знаменателю, найдемъ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, что и требуется.

2) *Сумма предыдущаго и послѣдующаго членовъ перваго отношенія относится къ своему предыдущему, какъ сумма предыдущаго и послѣдующаго членовъ второго отношенія къ своему предыдущему.*

Намъ дана пропорція $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и надо доказать, что $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$. Доказательство совершенно такое же, только въ обоихъ случаяхъ надо выбрать подходящій видъ пропорціи.

3. Совершенно также можно доказать, что *разность предыдущаго и послѣдующаго членовъ перваго отношенія относится къ своему послѣдующему (или предыдущему), какъ разность предыдущаго и послѣдующаго членовъ второго отношенія относится къ своему послѣдующему (или предыдущему).*

Изображая эту теорему, алгебраически получимъ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

4. *Сумма предыдущаго и послѣдующаго членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма предыдущаго и послѣдующаго членовъ второго отношенія къ ихъ разности.*

Надо доказать, что $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$. Чтобы доказать это, возьмемъ данную пропорцію $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и составимъ изъ нея первую производную пропорцію $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; затѣмъ составимъ третью производную пропорцію $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$. Теперь раздѣлимъ первую производную на третью производную, получимъ $\frac{(a+b)\,b}{(a-b)\,b}=\frac{(c+d)\,d}{(c-d)\,\cancel{d}}$. Сокративъ одинаковыхъ множителей получимъ требуемое $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

§ 5. **Опредѣленіе неизвѣстнаго члена пропорціи.**

Если одинъ изъ членовъ пропорціи неизвѣстенъ, то его всегда можно вычислить, пользуясь свойствомъ: произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ. Возьмемъ пропорцію $15:x=75:25$. Изъ этой пропорціи мы можемъ написать равенство $15.25=75x$. Если обѣ части этого равенства раздѣлимъ на 75, то равенство не нарушится, слѣдовательно $x=\frac{15.25}{75}$, что посокращеніи даетъ 5. Отысканіе неизвѣстнаго члена пропорціи называется рѣшеніемъ ея.

§ 6. **Рѣшить пропорціи.**

1) $28:x=72\,18$.

Отвѣтъ: $x=4$.

2) $5\frac{3}{4}:\frac{7}{9}=x:3$.

Отвѣтъ: $x=22\frac{5}{28}$.

3) $x:5=\frac{4}{7}:\frac{3}{4}$.

Отвѣтъ: $x=3\frac{17}{21}$.

4) $15:3=\frac{8}{9}:x$.

Отвѣтъ: $x=\frac{8}{45}$.

§ 7. Приложенiе свойствъ пропорцiи къ рѣшенiю уравненiй.

При помощи производныхъ пропорцiй легко рѣшаются тѣ уравненiя, которыя имѣютъ видъ пропорцiи. Пусть, напримѣръ, намъ дано уравненiе

$$\frac{x+2}{x-2}=\frac{3}{2}$$

Составимъ производную пропорцiю.

$$\frac{(x+2)+(x-2)}{(x+2)-(x-2)}=\frac{3+2}{3-2}$$

Раскрывъ здѣсь скобки и сдѣлавъ приведенiе подобныхъ членовъ получимъ

$$\frac{2\ x}{4}=5 \text{ или } \frac{x}{2}=5$$

Откуда $x=10$.

§ 8. Задачи.

Рѣшить уравненiя

1) $\frac{5x+3}{5x-3}=\frac{7}{3}$. Отв. $x-1\frac{1}{2}$.

2) $\frac{5x-1}{5x-3}=\frac{2x+3}{2x-3}$. Отв. $x=\frac{1}{13}$.

3) $\frac{x+5}{x+5}=\frac{3}{4}$. Отв. $x=4\frac{4}{3}$.

ГЛАВА IX.

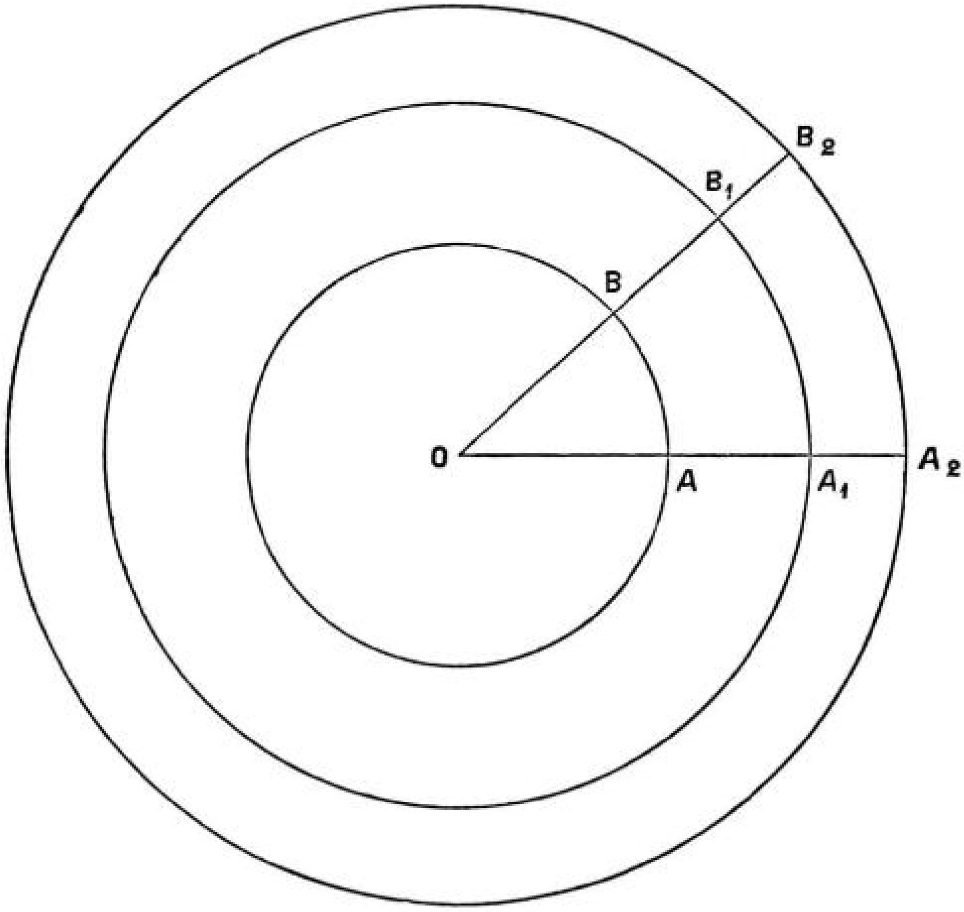
Понятiе о пропорцiональности.

(Простое тройное правило).

Величины зависимыя и независимыя.

Въ томъ родѣ величинъ, съ которыми мы встрѣчаемся въ жизни, и тѣхъ, съ которыми мы сталкиваемся при рѣшенiи задачъ, легко выдѣлить величины двоякаго рода: зависящiя и независящiя другъ отъ друга. Такъ, напримѣръ, объемъ какого-либо вещества и вѣсъ этого объема находятся въ зависимости другъ отъ друга. Эта зависимость непремѣнно и обязательно требуетъ, чтобы при измѣненіи объема измѣнялся и вѣсъ. Но, объемъ взятаго сосуда и вѣсъ налитой въ него жидкости не зависятъ другъ отъ друга; однако мы можемъ поставить условіе, которое будетъ связывать эти двѣ независимыя величины.

Такая зависимость величинъ называется функціональной и мы уже знаемъ, что она можетъ быть естественной и условной. Пояснимъ еще функіональную зависимость величинъ на слѣдующемъ примѣрѣ. Возьмемъ центральный уголъ AOB (черт. 40); мы знаемъ, что онъ бу-



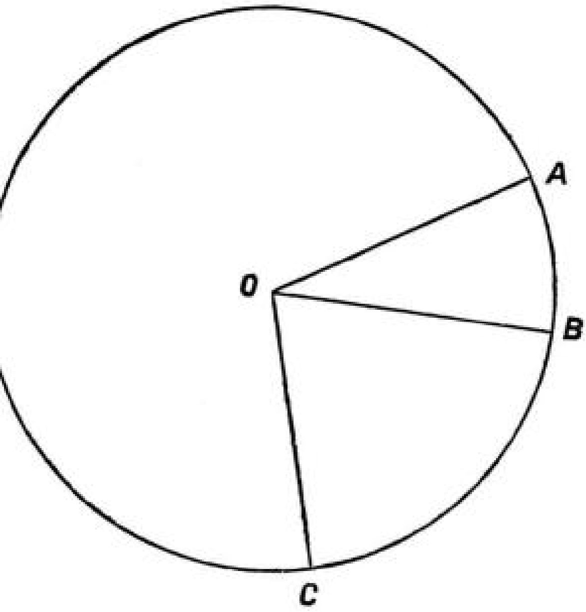
Черт. 40.

детъ измѣряться дугой AB, т.-е. будетъ имѣть столько угловыхъ градусовъ, сколько въ дугѣ дуговыхъ градусовъ. Если мы будемъ уголъ увеличивать, то вмѣстѣ съ нимъ будетъ увеличиваться и дуга; слѣдовательно величина дуги и величина угла будетъ находиться въ функціональной зависимости. Эта функціональная зависимость формулируется такъ: *углы пропорціональны дугамъ*. Но если мы проведемъ рядъ другихъ окружностей, большаго радіуса, то будемъ получать новыя дуги A_1B_1, A_2B_2; число градусовъ въ каждой изъ этихъ дугъ останется тоже самое, потому что мы каждую новую окружность дѣлимъ на 360 равныхъ частей и при такомъ дѣленіи будетъ увеличиваться величина градуса, а число ихъ въ углѣ AOB останется то же самое; слѣдовательно величина угла не зависитъ отъ величины радіуса, которымъ проведена дуга.

§ 2. **Пропорціональность величинъ.**

Простѣйшая функціональная зависимость величинъ называется пропорціональностью. Если одна величина увеличивается въ нѣсколько разъ, а другая то же увеличивается или уменьшается во столько же разъ, то говорятъ, что эти величины *пропорціональны*. При этомъ, если съ увеличеніемъ одной, другая увеличивается, то пропорціональность называется *прямой*. Углы *прямо пропорціональны* дугамъ; вѣса однородныхъ тѣлъ *прямо пропорціональны* объемамъ. Если же съ увеличеніемъ одной, другая уменьшается, то величины называются *обратно-пропорціональными*. Къ числу такихъ величинъ можетъ быть отнесено число рабочихъ и время работы: чѣмъ больше будетъ рабочихъ, тѣмъ меньше времени нужно для выполненія работы.

Такимъ образомъ, самымъ главнымъ признакомъ пропорціональности есть увеличеніе или уменьшеніе въ одно и то же число разъ. Этотъ признакъ приводитъ насъ къ равенству отношеній. Возьмемъ два угла $\angle AOB$ и уголъ $\angle BOC$ (черт. 41), второй уголъ больше перваго, ихъ отношеніе будетъ $\frac{\angle BOC}{\angle AOB}$; это отношеніе показываетъ, что что уголъ $\angle BOC$ больше угла $\angle AOB$ во сколько нибудь разъ, скажемъ: «въ n разъ»; при чемъ число n мы не знаемъ, а только обозначаемъ имъ величину отношенія. Дуга BC также больше дуги AB и отношеніе ихъ бу-



Черт. 41.

детъ $\frac{\smile BC}{\smile AB}$. Зная, что эти величины пропорціональны, мы должны сказать, что второе отношеніе равно также n; но если два отношенія равны, то мы можемъ поставить пропорцію $\frac{\angle BOC}{\angle AOB}=\frac{\smile BC}{\smile AB}$. Эта пропорція показываетъ, что отношеніе угловъ равно отношенію дугъ. Мы написали ее, основываясь на пропорціональности входящихъ величинъ, независимо отъ того, измѣримы эти величины или нѣтъ, т.-е. выражена ли каждая изъ нихъ числомъ или нѣтъ. Пропорціональность есть внутреннее свойство величинъ, независящее отъ того, какъ эти величины выражены. Въ силу этого, получаемая нами пропорція не есть числовая, а количественная, а потому свойство пропорціи:—во всякой пропорціи мы можемъ перемѣнить мѣста среднихъ членовъ,—можетъ быть приложено къ данной пропорціи только тогда, когда мы докажемъ, что это свойство не только чиселъ, но свойство количествъ. Это было доказано древнимъ математикомъ Эвклидомъ, а потому мы можемъ имъ воспользоваться и написать такъ

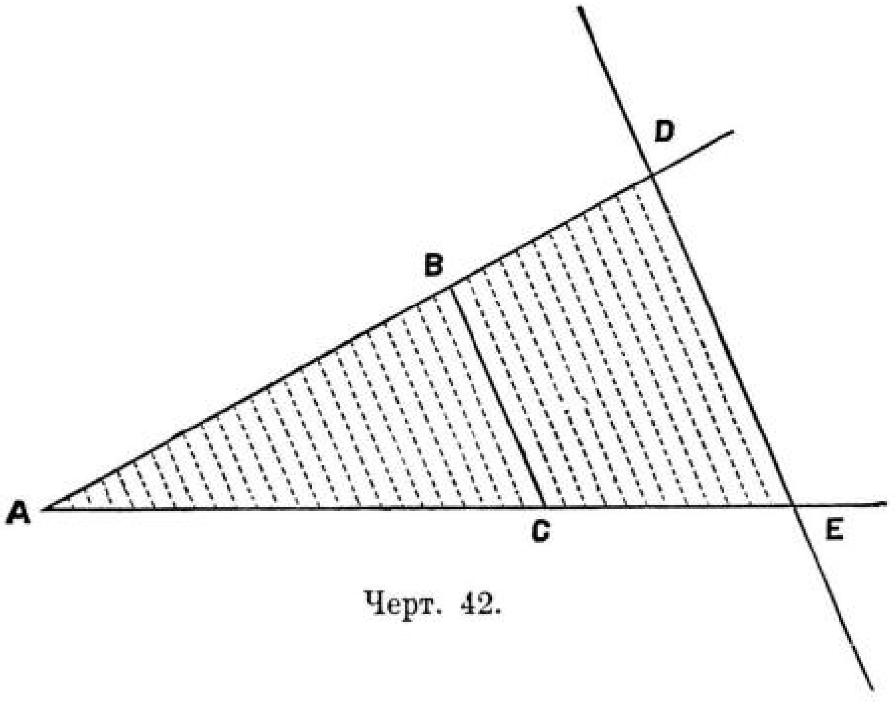
$$\frac{\angle BOC}{\smile BC}=\frac{\angle AOC}{\smile AC}$$

Новая пропорція, которую мы получили, имѣетъ совершенно новый смыслъ, она читается такъ: *отношеніе центральнаго угла къ дугѣ, на которую онъ опирается есть величина постоянная*. Это значитъ, что если мы въ окружности возьмемъ какіе бы то ни было центральные углы, то для каждаго изъ нихъ, отношеніе къ дугѣ, на которую онъ опирается, будетъ одно и то же. Обозначимъ это отношеніе буквой n, тогда $\frac{\angle BOC}{\smile BC} = n$ или $\angle BOC = n.(\smile BC)$. Въ этомъ видѣ въ математикѣ принято обозначать свойство прямо пропорціональныхъ величинъ. Если мы обозначимъ уголъ буквой x, дугу буквой y, получимъ $x = ny$. Это есть алгебраическая формула, замѣняющая словесную фразу: углы прямо пропорціональны дугамъ. Число n называется *коэффиціентомъ пропорціональности* и показываетъ отношеніе угла, принятаго за единицу, къ соотвѣтствующей ему дугѣ.

Собственно равенство $x = ny$ въ томъ случаѣ, когда x есть уголъ, а y—дуга, уравниваетъ разнородныя величины, чего мы не можемъ дѣлать ибо по существу: разнородныя величины не могутъ быть уравнены. Чтобы избѣжать этого, иногда говорятъ, что здѣсь уравнены не количества, а числа ихъ выражающія, но мы уже видѣли, что пропорціональность не есть свойство чиселъ, а свойство величинъ, независящее отъ ихъ числового выраженія, слѣдовательно и равенство $x = ny$ есть равенство количествъ, а не чиселъ. Чтобы оправдать его въ этомъ случаѣ, подставимъ значеніе коэффиціента n, тогда $\angle x = \smile y \, \frac{\text{един. угла}}{\text{един. дуги}}$ и представимъ въ такомъ видѣ $\angle x = \frac{\smile y}{\text{ед. дуги}}$ ед. угла. Отношеніе $\frac{\smile y}{\text{ед. дуги}}$ принято считать числомъ отвлеченнымъ, тогда и наше равенство уравниваетъ количества однородныхъ величинъ $\angle x = k.$ ед. угла, гдѣ число k есть отвлеченное число, выражающее величину отношенія $\frac{\smile y}{\text{ед. дуги}}$.

§ 3. Основная теорема пропорціональности геометрическихъ количествъ.

Основная теорема пропорціональности геометрическихъ количествъ читается такъ: *если стороны угла разсѣчь двумя параллельными линіями, то получимъ пропорціональные отрѣзки.* Эта теорема лежитъ въ основаніи всѣхъ доказательствъ пропорціональности различныхъ геометрическихъ количествъ. Обычное доказательство этой теоремы слѣдующее. Возьмемъ $\angle DAE$ и проведемъ двѣ параллельныя линіи DE и BC; эти линіи отсѣкутъ на сторонахъ угла отрѣзки AD и AB съ одной стороны, AC и AE—съ другой. Нужно доказать, что $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$. Будемъ разсматривать отрѣзки на одной сторонѣ угла, напримѣръ AC и AE (черт. 42).



Черт. 42.

Положимъ, что эти отрѣзки соизмѣримы и общая мѣра укладывается въ отрѣзкѣ AC—m разъ, а въ отрѣзкѣ AE она уложится n разъ, тогда отношеніе $\frac{AE}{AC}=\frac{n}{m}$. Проведемъ черезъ точки отложенія общей мѣры линіи, параллельныя DE и BC; мы знаемъ, что тогда другая сторона угла раздѣлится на равныя части; въ линіи AB будетъ m равныхъ частей, а въ линіи AD такихъ частей n; это значитъ, что отрѣзки AD и AB будутъ также соизмѣримы и ихъ общая мѣра уложится въ отрѣзкѣ AD—n разъ, а въ отрѣзкѣ AB—m разъ. Отношеніе этихъ отрѣзковъ будетъ также $\frac{AD}{AB}=\frac{n}{m}$; но если числовыя величины отношеній равны, то и самыя отношенія равны, т.-е. $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$; слѣдовательно отрѣзки прямо пропорціональны.

Если отрѣзки AC и AE несоизмѣримы, то разлдѣлимъ меньшій изъ нихъ на m равныхъ частей; $\frac{1}{m}$ даннаго отрѣзка уложимъ дальше и пусть въ отрѣзкѣ AE такихъ частей будетъ больше n, но меньше $n+1$, тогда отношеніе $\frac{AE}{AC}$ можно опредѣлить съ точностью до $\frac{1}{m}$; именно, можно написать, что $\frac{n+1}{m}>\frac{AE}{AC}>\frac{n}{m}$.

Проведя черезъ точки отложенія линіи, параллельныя BC и DE, мы увидимъ, что на другой сторонѣ угла отрѣзокъ AB раздѣлится на m равныхъ частей, а въ отрѣзкѣ AD такихъ частей будетъ больше n, но меньше $n+1$. Отношеніе $\frac{AD}{AB}$ будетъ меньше $\frac{n+1}{m}$ и больше $\frac{n}{m}$, т.-е. $\frac{n+1}{m}>\frac{AD}{AB}>\frac{n}{m}$, оно опредѣляется съ той же степенью точности. Съ какой бы степенью точности мы ни опредѣляли то и другое отношеніе, оба они очевидно всегда будутъ находиться въ одномъ и томъ же числовомъ промежуткѣ, слѣдовательно будутъ равны, т.-е.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}.$$

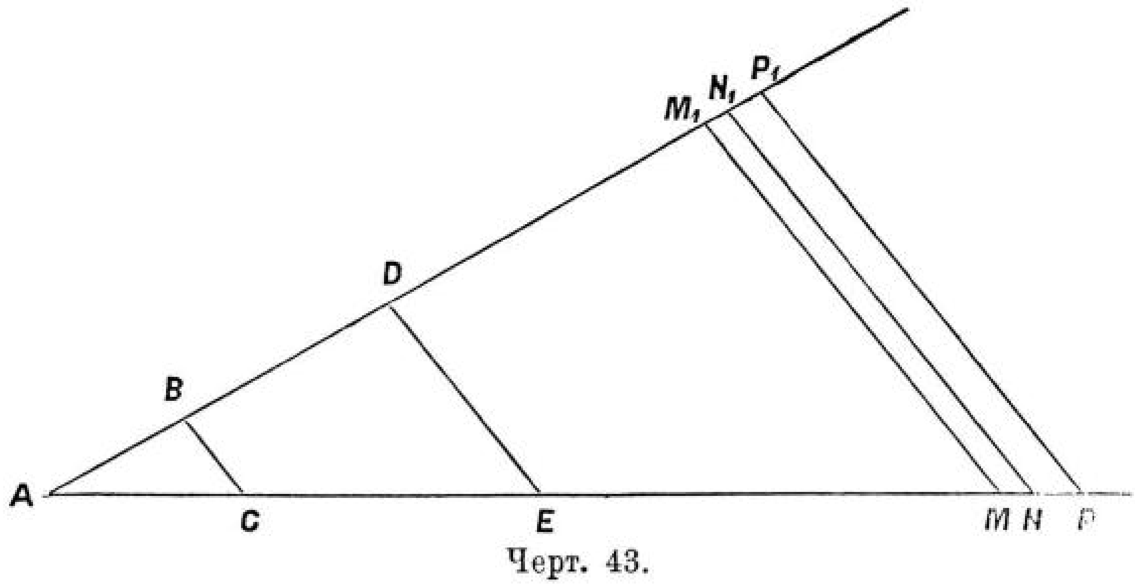
Это доказательство требуетъ нахожденія общей мѣры двухъ отрѣзковъ и предполагаетъ необходимость тотъ и другой отрѣзокъ выразить числомъ. Въ нашемъ доказательствѣ m и n суть числа, и въ томъ и другомъ случаѣ мы находимъ числового знаменателя отношенія: въ первомъ точно, и во второмъ приблизительно. Это обстоятельство понижаетъ достоинство самого доказательство, ибо пропорціональность не зависитъ отъ числа. Въ силу этого очень важно доказать теорему независимо отъ числовыхъ представленій.

§ 4. **Доказательство по Эвклиду.**

Греческій математикъ Эвклидъ (315—255 г. д. Р. Хр.) разсматривалъ геометрическія протяженія не какъ числовыя, а какъ количественныя. Въ своемъ сочиненіи «Начала» онъ такъ опредѣляетъ отношеніе: «Отношеніе есть нѣкоторая взаимная зависимость между двумя однородными величинами, когда онѣ сравниваются по ихъ количественности». Давши такое опредѣленіе понятію отношеніе» онъ говоритъ далѣе: «говорятъ, что двѣ величины имѣютъ отношеніе между собою, если меньшую изъ нихъ можно повторить столько разъ, чтобы результатъ былъ равенъ или больше большей».

Здѣсь нужно обратить вниманіе на то, что находиться въ отношеніи могутъ только однородныя величины, при томъ находящіяся въ такихъ условіяхъ, что мы можемъ сравнивать ихъ по количественности. Намъ нельзя сравнивать отрѣзки AB и AE, лежащіе по разныя стороны угла, потому что, повторяя меньшій, мы не можемъ быть увѣрены, что получимъ отрѣзокъ равный или большій большаго; но мы легко и удобно можемъ сравнивать отрѣзки по одну сторону угла AB и AD; AC и AE, потому что откладывая дальше меньшій, мы непремѣнно получимъ или равный или большій большаго. Далѣе, Эвклидъ даетъ такое условіе для сужденія о равенствѣ отношеній: «говорятъ, что четыре величины находятся въ томъ же отношеніи: первая ко второй и третья къ четвертой, когда равнократныя величины первой и третьей, взятыя по произвольной краткости, всегда или больше, или равны, или меньше, соотвѣтственно, равнократныхъ величинъ второй и четвертой, взятыхъ также по другой произвольной кратности». Чтобы понять это положеніе, назовемъ четыре величины соотвѣтственно буквами A, B, C и D; тогда если $mA > nB$, то въ то же время непремѣнно должно быть, чтобы $mC > nD$; если $mA < nB$, то непремѣнно и $mC < nD$; если $mA = nB$, то и $mC = nD$. Тогда $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Основываясь на этихъ опредѣленіяхъ, докажемъ, что отрѣзки сторонъ угла, разсѣченнаго двумя параллельными линіями будутъ пропорціональны. Возьмемъ уголъ A и проведемъ двѣ параллельныя линіи BC и DE; намъ надо доказать, что $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (черт. 43). Для этого мы отложимъ боль-



Черт. 43.

шой отрѣзокъ AE нѣсколько разъ, напримѣръ m разъ и получимъ точку N, такъ что линія $AN = mAE$. Проведя черезъ точку N линію NN_1 параллельно DE, получимъ на другой сторонѣ угла точку N_1 и по свойству: если на одной сторонѣ угла отложимъ равныя части и проведемъ линіи параллельныя, то на другой сторонѣ угла отложатся также равныя части можемъ сказать, что $AN_1 = mAD$.

Теперь будемъ откладывать меньшій отрѣзокъ AC; здѣсь могутъ быть три случая: или n разъ отложенный

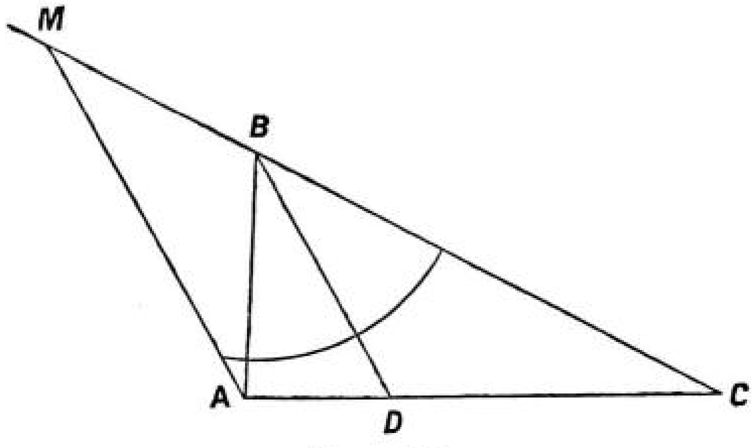
AC будетъ меньше AN, или равенъ, или больше AN. Положимъ, что $nAC < AN$, то есть послѣднее отложеніе упадетъ въ точку M, проведемъ черезъ M линію MM_1 параллельно DE, получимъ на другой сторонѣ угла точку M_1; которая будетъ соотвѣтствовать отрѣзку AB, повторенному n разъ. Очевидно, что если $mAE > nAC$, то непремѣнно $mAD > nAB$. Если отложеніе отрѣзка AC совпадаетъ съ точкой N, то и отложеніе отрѣзка AB совпадаетъ съ точкой N_1, т.-е. если $mAE = nAC$, то непремѣнно и $mAD = nAB$. Если отложеніе отрѣзка AC перейдетъ за точку N и попадаетъ въ точку P, то проведя линію PP_1 параллельно DE_1 мы получимъ, что отложеніе отрѣзка AB перейдетъ за точку N_1 и попадетъ въ точку P_1, т.-е. если $mAE < nAC$, непремѣнно и $mAD < nAB$.

Итакъ, въ этомъ случаѣ, мы находимъ, что условіе данное Эвклидомъ, выполнено, слѣдовательно можемъ написать, что $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$. Здѣсь нѣтъ чиселъ, а слѣдовательно нѣтъ и вопроса о соизмѣримости и несоизмѣримости отрѣзковъ; они будутъ пропорціональны по самой своей сущности, независимо отъ того, сумѣемъ или несумѣемъ ихъ выразить числами.

§ 5. **Свойство, линіи дѣлящей уголъ треугольника пополамъ.**

Линія, дѣлящая пополамъ уголъ треугольника, дѣлитъ противоположную сторону на части, пропорціональныя двумъ другимъ сторонамъ.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, возьмемъ треугольникъ ABC и раздѣлимъ въ немъ уголъ B пополамъ (черт. 44),



Черт. 44.

получимъ линію BD, которая раздѣлитъ противоположную сторону AC на части AD и DB; намъ нужно доказать, что $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$. Чтобы доказать это, проведемъ черезъ точку A прямую AM_1 параллельно BD, мы получимъ треугольникъ AMB, въ которомъ сторона $MB=AB$. Теперь мы получимъ уголъ ACM, разсѣченный двумя параллельными линіями, а мы знаемъ, что тогда отрѣзки будтъ пропорціональны, т.-е. $\frac{CM}{BC}=\frac{AC}{CD}$. Составимъ изъ этой пропорціи производную, взявъ разность предыдущаго и послѣдующаго членовъ перваго отношенія къ послѣдующему и разность предыдущаго и послѣдующаго членовъ второго отношенія къ своему послѣдующему, получимъ $\frac{CM-BC}{BC}=\frac{AC-CD}{CD}$ или $\frac{MB}{BC}=\frac{AD}{CD}$, но такъ какъ $MB=AB$, то $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$.

Равнодѣлящая угла называется биссектриссою.

§ 6. **Задачи**.

1) Въ треугольникѣ ABC проведена биссектрисса BD; опредѣлить отрѣзки AD и DC, если $AB=10$ см., $BC=15$ см. и $AC=20$ см.

Отвѣтъ: $AD=8$ см; $DC=12$ см.

2) Опредѣлить сторону BC въ треугольникѣ ABC, если $AB=1$ арш., а биссектрисса BD дѣлитъ противоположную сторону въ отношеніи $2:7$.

Отвѣтъ: $3\frac{1}{2}$ арш.

3) Периметръ треугольника ABC равенъ 40 дюймамъ. Биссектрисса BD дѣлитъ противоположную сторону на части 9 дюйм. и 6 дюйм. Опредѣлить стороны AB и BC.

Отвѣтъ: $AB=15$ д.; $BC=10$ д.

4) Въ треугольникѣ ABC биссектрисса угла B дѣлитъ противоположную сторону на части AD и DC; опредѣлить DC, если извѣстно, что $BC=1$ фут., а $AB:AD=\frac{2}{3}:\frac{1}{2}$.

Отвѣтъ: $DC=\frac{3}{4}$ ф.

5) Хорда $AB=15$ дюйм., хорда $AC=21$ дюйм., хорда $BC=2$ фут.

Точка D середина дуги BC. На какія части дѣлится хорда BC прямою AD?

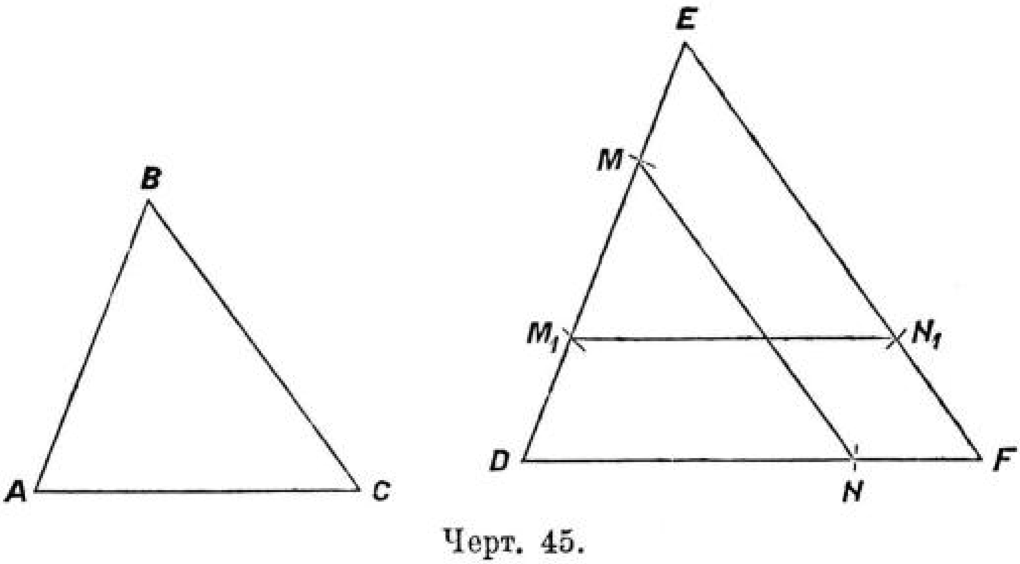
Отвѣтъ: на отрѣзки 14 дюйм. и 10 дюйм.

§ 7. Подобные треугольники.

Опредѣленіе. Треугольники, у которыхъ углы равны, называются подобными. Согласно этому опредѣленію мы можемъ сказать, что если намъ удастся убѣдиться въ равенствѣ угловъ въ двухъ треугольникахъ, то тѣмъ самымъ мы доказываемъ ихъ подобіе. Стороны, лежащія противъ равныхъ угловъ, называются сходственными.

Теорема. Въ подобныхъ треугольникахъ сходственныя стороны пропорціональны.

Возьмемъ два треугольника ABC и DEF съ равными углами $\angle A=\angle D$; $\angle B=\angle E$ и $\angle C=\angle F$; (черт. 45)



Черт. 45.

намъ надо доказать, что $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{EF}{BC}$. Для этого мы на сторонахъ угла A отложимъ части $DM=AB$ и $DN=$ $=AC$ соединимъ точки M и N, получимъ треугольникъ DMN, равный треугольнику ABC.

Вслѣдствіе равенства треугольниковъ $\angle M=\angle B$, а вслѣдствіе равенства угловъ линія MN параллельна EF и мы имѣемъ уголъ, разсѣченный двумя параллельными линіями, а слѣдовательно получимъ пропорціональные отрѣзки $\frac{DE}{DM}=\frac{DF}{DN}$, но $DM=AD$, а $DN=AC$; слѣдовательно $\frac{DE}{AB}=\frac{DF}{DC}$. Чтобы доказать равенство отношеній третьихъ сторонъ, мы сдѣлаемъ тоже построеніе отъ вершины угла E, т.-е. отложимъ $EM_1=AB$ и $EN_1=BC$, тогда соединивъ точки M_1 и N_1, получимъ треугольникъ EM_1N_1, равный треугольнику ABC; изъ равенства треугольниковъ слѣдуетъ равенство угловъ $\angle D=\angle M_1$, а изъ равенства угловъ слѣдуетъ параллельность линій DF и M_1N_1; мы опять получаемъ уголъ E, разсѣченный двумя параллельными линіями, которыя отсѣкаютъ пропорціональные отрѣзки, слѣдовательно $\frac{ED}{EM}=\frac{EF}{EN_1}$ или $\frac{ED}{AB}=\frac{EF}{BC}$. Мы получили двѣ пропорціи $\frac{DE}{AB}=\frac{DF}{AC}$ и $\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}$, въ которыхъ лѣвыя отношенія равны; такія пропорціи принято писать вмѣстѣ слѣдующимъ образомъ

$$\frac{DE}{AB}=\frac{DF}{AC}=\frac{EF}{DC}.$$

Слѣдствіе. 1) Периметры подобныхъ треугольниковъ пропорціональны сходственнымъ сторонамъ.

Слѣдствіе. 2) Въ подобныхъ треугольникахъ основанія пропорціональны высотамъ.

§ 8. **Задачи**.

1) Башня, освѣщаемая солнцемъ, отбрасываетъ тѣнь длиною 12 фут. Вертикальный шестъ, длиною въ 8 фут.,

отбрасываетъ въ то же время тѣнь длиною 2 фут. Опредѣлить высоту башни.
Отвѣтъ: 48 фут.

2) Въ треугольникъ, у котораго всѣ три угла острые, вписанъ квадратъ такъ, что одна изъ сторонъ его лежитъ на основанiи треугольника. Опредѣлить сторону квадрата если основанiе треугольника равно 12 фут., а высота 10 фут.
Отвѣтъ: $5\frac{5}{11}$ фут.

3) Въ двухъ равнобедренныхъ треугольникахъ углы при вершинѣ равны. Боковая сторона и основанiе одного соотвѣтственно равны 17 д. и 10 д. Опредѣлить боковую сторону другого, если его основанiе равно 8 дюйм.
Отвѣтъ: $13\frac{3}{5}$ дюйм.

4) Стороны одного треугольника соотвѣтственно равны 8 см., 16 см. и 20 сант.; периметръ подобнаго ему треугольника равенъ 55 сант. Опредѣлить его стороны.
Отвѣтъ: 10 см.; 20 см. и 25 см.

5) Длины параллельныхъ сторонъ трапецiи 12 см. и 16 см.; длина одной изъ непараллельныхъ сторонъ 7 сант. На сколько нужно ее продолжить, чтобы она встрѣтилась съ другой непараллельной стороной?
Отвѣтъ: На 21 сант.

6) ABD данная трепецiи, при чемъ BC параллельна AD; точка O пересѣченiе дiагоналей; $AO=8$ сант., $OC=10$ сант. и $BD=27$ сант. Опредѣлить OB и OD.
Отвѣтъ: $OB=12$ сант.; $OD=15$ сант.

7) $ABCD$ данная трапецiя, при чемъ BC параллельна AD; точка O пересѣченiе дiогоналей; $BO:OD=\frac{3}{10}:\frac{2}{3}$. Средняя линiя трапецiи равна 29 сант. Опредѣлить оба основанiя. (Стедняя линiя трапепiи равна полусуммѣ основанiй).
Отвѣтъ: $BC=18$ сант.; $AD=40$ сент.

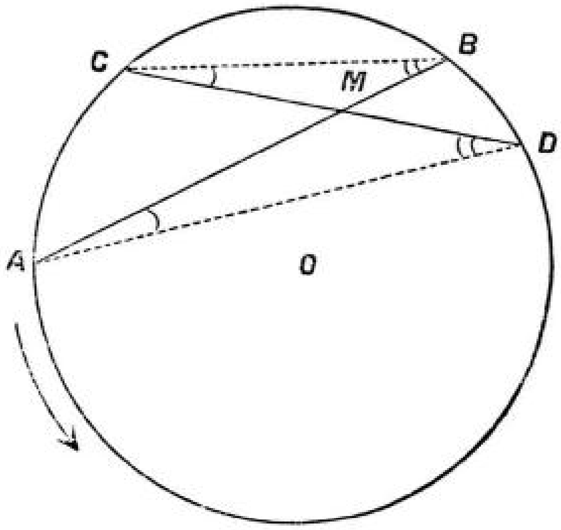
8) Въ трапецiи $ABCD$ уголъ ABC, и уголъ ACD равны. Опредѣлить величину дiогонали AC если верхнее основанiе BC равно 12 сант., а ниже нее AD 27 сант.
Отвѣтъ: $AC=18$ сант.

§ 9. Пропорціональныя линіи въ кругѣ.

Отрѣзки прямыхъ, ограниченныя окружностью, находятся въ опредѣленномъ функціональномъ соотношеніи другъ къ другу. Среди этихъ прямыхъ существуютъ слѣдующія: діаметръ, хорды, сѣкущія и касательныя. Разсмотримъ нѣкоторыя изъ этихъ прямыхъ.

1) *Хорды, пересѣкающіяся внутри круга, дѣлятся на части обратно пропорціональныя.*

Возьмемъ окружность и проведемъ двѣ хорды AB и CD, пересѣкающіяся въ точкѣ M (Черт. 46). Хорда AB



Черт. 46.

дѣлится въ этой точкѣ на два отрѣзка AM и BM; хорда CD дѣлится на отрѣзки CM и DM. Раздѣлимъ эти отрѣзки на лѣвыя и правыя и запишемъ въ видѣ двухъ строкъ такъ:

$$AM - BM$$
$$CM - DM$$

Нетрудно видѣть, что если мы одну изъ этихъ хордъ, наприм. AB, будемъ вращать около точки M въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, то отрѣзокъ AM будетъ увеличиваться, а отрѣзокъ MB будетъ уменьшаться, такъ что, если AM больше CM, то MD будетъ больше MB и можно доказать, что $\frac{AM}{CM}=\frac{MD}{MB}$. Чтобы доказать это, достаточно соединить точки A и D, C и B прямыми, тогда мы получимъ два треугольника AMD и CMD, которые будутъ подобны. Въ самомъ дѣлѣ, $\angle MAD = \angle MCB$, потому что они опираются на одну и ту же дугу BD, а слѣдовательно содержатъ одно и то же число градусовъ; точно также углы MBC и MDA будутъ равны на томъ же основанiи. Изъ подобiя треугольниковъ вытекаетъ пропорцiональность ихъ сходственныхъ сторонъ. Напишемъ стороны треугольника AMD; они будутъ AM, MD, и AD; сторона AM лежитъ противъ угла D, равный ему уголъ въ треугольникѣ CMB будетъ уголъ B, слѣдовательно сторона CM будетъ сходственной. Сторона MD лежитъ противъ угла A, равный ему уголъ будетъ C, противъ него лежитъ сторона MB. Итакъ $\frac{AM}{CM}=\frac{MD}{MB}$.

Перестановка членовъ въ этой пропорцiи намъ не дастъ ничего новаго; но если мы возьмемъ произведенiе ея крайнихъ и среднихъ членовъ, то получимъ $AM.\,MB = CM.\,MD$; это равенство мы можемъ формулировать такъ: *произведенiе отрѣзковъ хордъ, проходящихъ черезъ одну и ту же точку внутри круга, есть величина постоянная.* Такимъ образомъ алгебраическое преобразованiе равенства приводитъ насъ къ новому свойству разсматриваемыхъ величинъ. Такъ какъ указанное преобразованiе пропорцiи не зависитъ отъ числовыхъ его свойствъ, то очевидно, что это есть не свойство чиселъ, а свойство количествъ; чтобы выяснить это свойство, нужно замѣтить, что произведенiе линiй есть площадь, слѣдовательно новое свойство отрѣзковъ хордъ можно формулировать еще и такъ: *площади прямоугольниковъ, смежныя стороны которыхъ равны отрѣзкамъ хордъ, проходящихъ черезъ одну точку внутри круга, всегда равны между собою.*

Мы можемъ найти величину всѣхъ этихъ площадей, не вычисляя ихъ, если проведемъ черезъ точку М дiаметръ, отрѣзки котораго подчиняются очевидно тому же условiю, и площадь прямоугольника, имѣющаго смежными сторонами отрѣзки самого дiаметра, будетъ равна площадямъ всѣхъ прочихъ прямоугольниковъ.

Таково свойство количествъ внѣ зависимости отъ ихъ числовой величины. Но, когда мы эти количества будемъ выражать числами, то у насъ возникнетъ вопросъ, имѣемъ ли мы право измѣрять отрѣзки той и другой хорды въ разныхъ единицахъ. Пусть, наприм., отрѣзокъ CM измѣренъ въ аршинахъ, отрѣзокъ MD—въ дюймахъ и т. д. Для рѣшенія этого вопроса надо уяснить себѣ взаимную зависимость отрѣзковъ. Мы имѣемъ прямую AB, которая въ точкѣ M дѣлится на двѣ части, величина каждой изъ этихъ двухъ частей не зависитъ другъ отъ друга, а опредѣляется величиной радіуса окружности; слѣдовательно мы можемъ часть этой линіи, напримѣръ AM измѣрить одной мѣрой—аршинами, часть той же линіи BM измѣрить другой мѣрой—дюймами. Линія CD совершенно не зависитъ отъ AB, а слѣдовательно ея части мы также можемъ измѣрить въ какихъ угодно мѣрахъ. Но, какъ же тогда опрѣдѣлить числовую величину того или иного отрѣзка, которая не можетъ быть произвольной? Разсмотримъ для этого такую задачу: $AM = 2$ фута; $BM = 14$ дюйм.; $CM=1$ арш., чему равно MD? Чтобы узнать числовую величину MD, составимъ пропорцію $\frac{AM}{CM}=\frac{MD}{MB}$; это есть соотношеніе количествъ, независимо отъ ихъ измѣреній. Теперь мы можемъ поступить двояко: 1) Потребовать, чтобы предварительно подстановкѣ всѣ количества были выражены въ одной и той же единицѣ измѣренія, тогда эти количества дадутъ слѣдующія числа $AM=24$ дюйм., $BM=14$ дюйм., $CM=28$ дюйм. и $MD=x$, очевидно дюймовъ. Тогда количественное соотношеніе можетъ быть переписано въ числовомъ видѣ $\frac{24}{28}=\frac{x}{14}$, откуда $x=\frac{24.14}{28}$ или $x=12$. Мы получили числовую величину отрѣзка MD, который долженъ принять наименованіе дюймы, потому что всѣ измѣренія мы производили въ этой мѣрѣ.

2) Подставимъ вмѣсто количествъ данныя числа тогда $\frac{2 \text{ фута}}{1 \text{ аршину}}=\frac{x}{14 \text{ дюйм.}}$. Здѣсь x оставленъ безъ наименованія, потому что при наличности разныхъ наименованій мы не знаемъ какое наименованіе будетъ имѣть x. Неизвѣстный членъ этой пропорціи мы можемъ вычислить,

исходя изъ соображенiй также двоякаго рода: 1) возьмемъ произведенiе среднихъ и крайнихъ членовъ, тогда 2 фута $\times$ 14 дюйм. $= x$. 1 арш.; 2 фут. $\times$ 14 дюйм. есть площадь прямоугольника, равная 2. 14 (фут. $\times$ дюйм.); x. 1 арш. есть равная первой площадь другого прямоугольника, у котораго одно измѣренiе равно 1 аршину; при равенствѣ этихъ площадей мы можемъ сказать, что другое измѣренiе x будетъ равно

$$x = \frac{2{,}14\ (\text{фут. дюйм.})}{1\ \text{арш.}}$$

или оно будетъ равно $2.14 \frac{\text{фут. дюйм.}}{\text{арш.}}$.

Мы получили сложную единицу мѣры, которую можемъ упростить, зная единичныя соотношенiя входящихъ сюда единицъ. Для этого мы должны выразить всѣ единицы въ одной мѣрѣ, напр., въ дюймахъ, получимъ $\frac{\text{фут. дюйм.}}{\text{арш.}} = \frac{12\ \text{дюйм. дюйм.}}{28\ \text{дюйм.}}$ или, по сокращенiи, $\frac{3}{7}$ дюйма. Тогда $x = 2.14.\frac{3}{7}$ дюйм. или $x = 12$ дюймовъ.

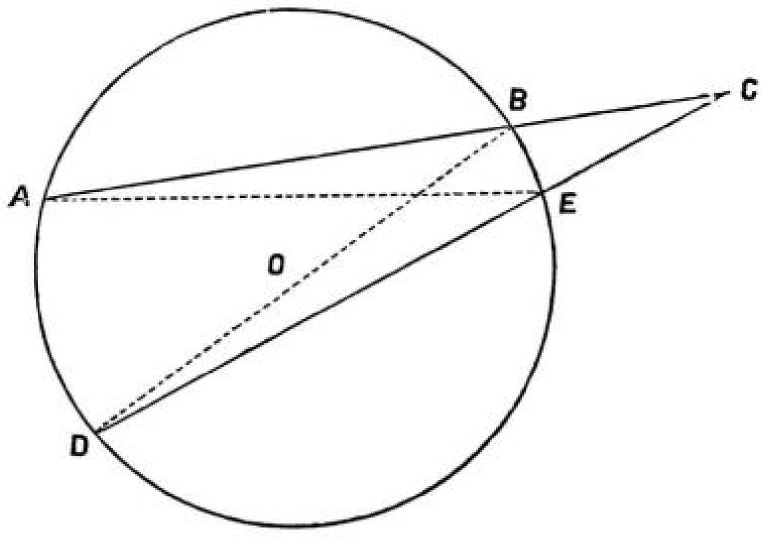
2-ое разсужденiе можетъ быть слѣдующимъ. Намъ извѣстенъ предыдущiй членъ отношенiя $\frac{x}{14\ \text{дюйм.}}$, которое равно отношенiю $\frac{2\ \text{фут.}}{1\ \text{арш.}}$ Знаменатель этого второго отношенiя равенъ $2\frac{\text{фут.}}{\text{арш.}}$; но отношенiе $\frac{\text{футъ}}{\text{арш.}}$ соизмѣримо и равно отношенiю чиселъ $\frac{3}{7}$, тогда наше отношенiе $\frac{2\ \text{фут.}}{1\ \text{арш.}}$ можетъ быть выражено отвлеченнымъ числомъ $2.\frac{3}{7}$ или $\frac{6}{7}$; слѣдовательно и искомое отношенiе $\frac{x}{14\ \text{дюйм.}}$ равно отвлеченному числу $\frac{6}{7}$; но если $\frac{x}{14\ \text{дюйм.}} = \frac{6}{7}$, то $x = 14$ дюйм. $x\frac{6}{7}$ или $x = 12$ дюймовъ.

Въ первомъ рѣшенiи, выраженiе $\frac{\text{фут.}\ x\ \text{дюйм.}}{\text{арш.}}$ есть коэффицiентъ пропорцiональности, который преобразуется въ данномъ случаѣ въ болѣе простое число и это обстоятельство даетъ возможность найти величину отношенія $\frac{2 \text{ фут.}}{1 \text{ арш.}}$; если бы этого сдѣлать было нельзя, то *необходимо и обязательно* оставить его въ томъ сложномъ видѣ, какъ онъ получится.

Тогда бы первое рѣшеніе вопроса въ отвлеченныхъ числахъ было бы невозможно, потому что входящія количества мы не могли бы выразить въ одной и той же мѣрѣ, а также невозможно было бы и второе разсужденіе второго рѣшенія, потому что искомое отношеніе мы не могли бы выразить отвлеченнымъ числомъ. Эти случаи часто встрѣчаются въ физикѣ, напр., при изученіи электрическихъ явленій.

2. *Сѣкущія, проведенныя изъ одной внѣшней точки къ данному кругу, обратно пропорціональны своимъ внѣшнимъ частямъ.*

Проведемъ изъ внѣшней точки C двѣ сѣкущія AC и CD, онѣ пересѣкутся окружностью еще въ точкахъ B и E; (черт. 47) длины сѣкущихъ будутъ AC и DC; длины



Черт. 47.

ихъ внѣшнихъ отрѣзковъ BC и EC. Намъ надо доказать, что $\frac{AC}{DC} = \frac{CE}{CB}$. Соединимъ точки A и E, D и B, получимъ два треугольника ACE и DBC, которые будутъ подобны, потому что имѣютъ общій уголъ C, и углы A и D равны, какъ опирающіеся на одну и ту же дугу BC. Сходственными сторонами въ этихъ треугольникахъ будутъ: AC сходственна съ DC; CE сходственна съ BC; слѣдовательно $\frac{AC}{DC}=\frac{CE}{CB}$.

Если мы въ этой пропорціи возьмемъ произведеніе крайнихъ и среднихъ членовъ, то получимъ $AC.CB=DC.CE$; это равенство можемъ прочитать такъ: *произведеніе сѣкущихъ, проведенныхъ изъ одной внѣшней точки къ окружности, на ихъ внѣшнія части есть величина постоянная*. Или такъ: *площади прямоугольниковъ, смежныя стороны которыхъ равны длинамъ сѣкущихъ и ихъ внѣшнихъ частей, равны между собой*.

§ 10. **Задачи**.

1) Діаметръ круга, длиною въ аршинъ, въ нѣкоторой точкѣ раздѣлится въ отношеніи $3:5$.

Черезъ эту точку проведена хорда, одинъ отрѣзокъ, которой равенъ футу. Опредѣлить длину хорды.

Отвѣтъ: $27\frac{5}{16}$ дюйм.

2) Хорда AMB повернута около точки M такъ, что одинъ изъ ея отрѣзковъ увеличился въ $1\frac{1}{2}$ раза. Какъ измѣнится другой отрѣзокъ?

Отвѣтъ: Уменьшится въ $1\frac{1}{2}$ раза.

3) Одна изъ двухъ пересѣкающихся хордъ раздѣлена на части: въ 1 футъ и 18 дюймовъ, а другая въ отношеніи $1:6$. Опредѣлить длину второй хорды.

Отвѣтъ: 42 дюйм.

4) Радіусъ окружности равенъ 7 дюйм. Изъ точки, удаленной отъ центра на 9 дюм. проведена сѣкущая такъ, что она окружностью дѣлится пополамъ. Опредлить длину сѣкущей.

Отвѣтъ: 8 дюйм.

5) Пусть ADB и AEC двѣ прямыя, пересѣкающія окружность; первая въ точкахъ D и B, вторая въ точкахъ E и C. Требуется: 1) Опредѣлить AE, если $AD=5$ дюйм., $DB=15$ дюйм. и $AC=25$ дюйм. 2) Опредѣлить BD,

если $AB = 45$ арш., $AC = 1$ арш. и $EC = 10$ вершковъ. 3) Опредѣлить AB и AC, если ихъ сумма 50 фут., а $AD:AE = 3:7$.

Отвѣтъ: $AE = 4$ д.; $BD = 20$ вершк.; $AB = 35$ ф.; $AC = 15$ ф.

§ 11. Пропорціональность количествъ.

(Простое тройное правило).

Какъ мы видѣли, пропорціональность геометрическихъ количествъ можетъ быть доказана независимо отъ ихъ числовой величины. Что касается количествъ не геометрическихъ, то эти количества мы имѣемъ исключительно въ видѣ числовыхъ количествъ, при чемъ эти числовыя ихъ выраженія являются средними ариѳметическими. Кромѣ того, негеометрическія количества, вообще говоря, имѣютъ сложную функціональную зависимсть отъ многихъ количествъ, и самая ихъ пропорціональность скорѣе допускается, принимается для простоты, чѣмъ устанавливается изъ изученія ихъ свойствъ. Только физика и вообще естествознаніе старается выяснить истинную функціональную зависимость количествъ, тогда какъ практическая жизнь стремится свести всѣ количества къ прямой или обратной пропорціональной зависимости.

Однако, эта функціональная зависимость продолжаетъ быть свойствомъ самихъ количествъ, а не ихъ числовыхъ выраженій.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ величинъ, наиболѣе употребительныхъ.

1) *Покупка или продажа товара.* Въ этомъ вопросѣ находятъ слѣдующія величины: цѣнность товара, стоимость товара, количество товара. Цѣнность товара обусловливается его качествомъ, его рѣдкостью, количествомъ спроса и другими элементами; цѣнность измѣряется въ рубляхъ; точно также и стоимость товара измѣряется въ рубляхъ. Количество товара можетъ измѣряться: въ вѣсовыхъ единицахъ, въ объемныхъ единицахъ; по счету предметовъ (продажа фуктовъ, яицъ и т. п.), по площади (продажа земли),

по длинѣ (продажа матеріи и т. п.). Кромѣ этого при покупкѣ и продажѣ товара входятъ особые накладные расходы: по перевозкѣ, по упаковкѣ, а главное прибыль, которую долженъ получить продавецъ.

Мы еще вернемся къ вопросу торговли при разсмотрѣніи правила процентовъ, а теперь разсмотримъ рѣшеніе задачъ, повторивъ то, что уже было говорено раньше.

Въ задачахъ на простое тройное правило даются только двѣ величины, при чемъ каждая величина имѣетъ два измѣренія. Такимъ образомъ мы получимъ четыре числа; зная три изъ нихъ, можемъ опредѣлить четвертое. Такъ какъ въ этихъ задачахъ всегда должны быть даны три числа, то оно и получило названіе *тройнаго правила*. Это названіе сохранилось еше отъ того времени, когда люди не знали алгебры и рѣшали задачи по особому шаблону. Такой шаблонъ въ рѣшеніи помогаетъ выяснить сущность рѣшенія, а потому его необходимо разсмотрѣть.

Возьмемъ такую задачу:

«За 12 фунтовъ масла заплачено $7\frac{1}{5}$ рубля. Сколько фунтовъ масла можно купить на $1\frac{4}{5}$ рубля?»

Текстъ задачи записывается въ двухъ вертикальныхъ столцахъ, изъ которыхъ въ одномъ непремѣнно и *обязательно* должны стоять числа, измѣряющія одну величину (количество товара), а въ другомъ числа, измѣряющія другую величину (стоимость товара). Цѣнность товара въ задачѣ предполагается уравненной. Такъ какъ у насъ даны только три измѣренія, а намъ нужно ихъ четыре, то недостигающее измѣреніе—искомое количество товара, мы обозначаемъ буквой, обыкновенно x. Итакъ задача записывается такъ.

$$\begin{aligned} 12 \text{ фунт.} &— 7\tfrac{1}{5} \text{ рубл.} \\ x \text{ фунт.} &— 1\tfrac{4}{5} \text{ рубл.} \end{aligned}$$

Изъ свойствъ количествъ мы знаемъ, что они прямо пропорціональны, т.-е. отношеніе количествъ равно отношенію стоимостей, и такъ какъ во второмъ случаѣ стоимость меньше, то безъ всякихъ вычисленій мы можемъ сказать, что количество будетъ меньше. Поэтому мы говоримъ: **12** фунт. больше x фунт. во столько разъ, во сколько $7\frac{1}{5}$ рубля больше $1\frac{4}{5}$ рубля, и эту фразу записываемъ математически такъ: $12:x=7\frac{1}{5}:1\frac{4}{5}$.

Рѣшая полученную пропорцію, находимъ

$$x=\frac{12.9.5}{5.36}, \text{ откуда } \quad x=3 \text{ фунта.}$$

Здѣсь мы имѣемъ равенство отношеній двухъ разнородныхъ величинъ, а потому намъ необходимо разобрать, полученную формулу. Для этого подставимъ въ нашу пропорцію наименованія 12 ф. : x ф. $=7\frac{1}{5}$ р. : $1\frac{4}{5}$ р. Мы можемъ брать отношенія только въ такомъ видѣ, потому что согласно опредѣленію по Эвклиду, находиться въ отношеніи могутъ только количества одной и той же величины; но въ самой пропорціи мы можемъ переставить мѣста среднихъ членовъ, тогда

$$12 \text{ ф.} : 7\tfrac{1}{5} \text{ руб.} = x \text{ ф.} : 1\tfrac{4}{5} \text{ руб.}$$

Такая перестановка членовъ даетъ намъ новую пропорцію, собственно не пропорцію, а новое равенство. Пропорцію мы можемъ составить только на основаніи правилъ объ отношеніяхъ, всякое другое составленіе пропорціи не имѣетъ теоретическихъ обоснованій; но, такъ какъ составленная пропорція есть равенство, а равенство можетъ быть преобразовано на основаніи аксіомъ, то изъ пропорціи мы можемъ получить рядъ новыхъ равенствъ, изъ которыхъ каждое имѣетъ свой особый смыслъ. Обычно не различаютъ этого и говорятъ, что получена новая пропорція. Итакъ 12 ф. : $7\frac{1}{5}$ руб. $=x$ ф, : $1\frac{4}{5}$ руб. Это равенство показываетъ, что на одинь рубль при первой покупкѣ даютъ такое же количество товара, какое даютъ на одинъ рубль при второй покупкѣ. Этимъ свойствомъ преобразованнаго равенства пользуются при рѣшеніи такихъ задачъ, вводя новое правило: правило приведенія къ единицѣ.

Рѣшая задачу по этому правилу, разсуждаютъ такъ: На $7\frac{1}{5}$ рубля можно купить 12 фунтовъ товара, а на одинъ рубль можно купить товара меньше въ $7\frac{1}{5}$ раза, т.-е. $\frac{12}{7\frac{1}{5}}$ фунтовъ; на $1\frac{4}{5}$ рубля можно купить больше въ $1\frac{4}{5}$, т.-е. $\frac{12.\ 1\frac{4}{5}}{7\frac{1}{5}}$ ф.; Итакъ $x = \frac{12.1\frac{4}{5}}{7\frac{1}{5}}$ фунт. При такомъ способѣ рѣшенія мы скрываемъ свойство пропорціональности и замѣняемъ выраженіе $7\frac{1}{5}$ рубля, выраженіемъ $7\frac{1}{5}$ раза. Но, очевидно, что такая замѣна и есть скрытая форма пропорціональности, потому что она возможна только потому, что отношеніе $7\frac{1}{5}$ руб. : 1 рубл. $= 7\frac{1}{5}$ [если на $7\frac{1}{5}$ рубля даютъ 12 фунтовъ, то на одинъ рубль дадутъ во столько разъ меньше, во сколько 1 рубль меньше $7\frac{1}{5}$ рубля.] Если мы въ пропорціи 12 ф. : $7\frac{1}{5}$ руб. $= x$ ф. : $1\frac{4}{5}$ ф. переставимъ мѣста крайнихъ и среднихъ членовъ, то получимъ новое равенство $7\frac{1}{5}$ руб. : 12 ф. $= 1\frac{4}{5}$ руб. : x фунт., которая показываетъ, что цѣнность первой покупки равна цѣнности второй.

Такое уравниваніе цѣнностей не даетъ ариѳметическаго толкованія, а только алгебраическое, потому что мы можемъ уравнять цѣнности, только при введеніи неизвѣстнаго x при его помощи составить уравненіе.

Какъ мы видѣли въ главѣ V (§ 9) разсматриваемый вопросъ связываетъ три величины:

Стоимость = цѣнности x количество товара, гдѣ цѣнность можетъ разсматриваться какъ коэффиціентъ пропорціональности и даетъ возможность уравниванія различныхъ величинъ: стоимости и количества. Въ разобранномъ примѣрѣ мы имѣли соотношеніе между стоимостью и количествомъ, предполагая цѣнность одинаковой; но очевидно можно предположить одинаковой стоимость, тогда мы будемъ имѣть соотношеніе между цѣнностью и количествомъ, а если мы предположимъ одно и то же количество товара, то получимъ соотношеніе между стоимостью и цѣнностью. Разсмотримъ оба эти случая, начавъ съ послѣдняго. Возьмемъ такую задачу: Портниха для отдѣлки платья купила на $1\frac{1}{5}$ рубля лентъ, цѣною по 9 копеекъ за аршинъ; въ другой разъ, за то же количество лентъ, она заплатила $1\frac{3}{4}$ рубля. Сколько стоили ленты, купленныя во второй разъ?

Обозначивъ черезъ x цѣнность лентъ второй покупки запишемъ задачу такъ:

$$1\tfrac{4}{5} \text{ — } 9 \text{ к.}$$
$$1\tfrac{3}{5} \text{ — } x.$$

Такъ какъ, чѣмъ больше цѣнность, тѣмъ больше будетъ и стоимость, то x будетъ меньше 9, и мы можемъ написать:

$x : 9 = 1\frac{3}{5} : 1\frac{4}{5}$ откуда $x = \dfrac{9.8.5}{5.9}$ по сокращеніи найдемъ, что $x = 8$ коп.

Отмѣтимъ здѣсь, что рубли, измѣряющіе стоимость, и копейки, измѣряющія цѣнность, суть разныя единицы мѣры, не только потому, что это рубли и копейки, но потому, что они измѣряютъ различныя величины, а именно рубли измѣряютъ стоимость, въ копейки—цѣнность. Если въ пропорцію подставить наименованія, то получимъ
x коп. : 9 коп. $= 1\frac{3}{5}$ руб. : $1\frac{4}{5}$ руб., т.-е. отношеніе цѣнностей равно отношенію стоимостей. Переставимъ здѣсь мѣста среднихъ, получимъ $1\frac{3}{5}$ руб. : x коп. $= 1\frac{4}{5}$ руб. : 9 коп. Равенство въ такомъ видѣ уравниваетъ число аршинъ той и другой покупки, что даетъ способъ ея ариѳметическаго рѣшенія, которое требуетъ нахожденія количества товара.

Теперь разсмотримъ вопросъ, когда стоимость одна и та же; возьмемъ такую задачу: Два купца мѣняются товаромъ: одинъ даетъ 128 арш. сукна, цѣною по 5 руб. за аршинъ, а другой на ту же сумму даетъ чай, цѣною по $2\frac{1}{2}$ руб. за фунтъ. Сколько фунтовъ чаю онъ долженъ дать?

Эта задача рѣшается весьма простымъ ариѳметическимъ разсужденіемъ. 1) Сколько стоитъ товаръ перваго купца?

Отв. 128×5 рублей; слѣдовательно столько же долженъ стоить и чай, котораго фунтъ стоитъ $2\frac{1}{2}$ руб.; отсюда вытекаетъ второй окончательный вопросъ: сколько фунтовъ чаю было дано?

Отвѣтъ: $\dfrac{128.5.2}{5} = 256$ фунтовъ.

Изъ этого разсужденія вытекаетъ независимость наименованія товара и способа его измѣренія отъ обмѣна. Оба товара уравниваются по ихъ стоимости, а въ вопросъ стоимости не входятъ способъ измѣренія количества товара. Въ силу этого, если мы попробуемъ рѣшить эту задачу по нашей схемѣ и напишемъ ее въ видѣ

$$\begin{aligned} &128 \text{ арш.} — 5 \text{ руб.} \\ &x \text{ фун.} — 2\tfrac{1}{2} \text{ руб.} \end{aligned}$$

то получимъ невозможное отношеніе 128 арш. къ x фунт. Невозможность такого отношенія только кажущаяся; она происходитъ отъ того, что цѣнность товара измѣрена въ однихъ и тѣхъ же единицахъ,—рубляхъ, и въ этомъ измѣреніи скрыта разнородность измѣреній количества. Чтобы выяснить сущность, мы должны цѣнность обозначить сложной единицей $\frac{\text{рубль}}{\text{арш.}}$ въ первомъ случаѣ и $\frac{\text{рубль}}{\text{фунт.}}$ во второмъ, тогда:

$$\begin{aligned} &128 \text{ арш.} — 5\ \frac{\text{рубль}}{\text{арш.}} \\ &x \text{ фунт.} — 2\tfrac{1}{2}\ \frac{\text{рубль}}{\text{фунт.}} \end{aligned}$$

При составленіи пропорціи отмѣтимъ, что цѣнность и количество суть величины обратно пропорціональныя, ибо при одной и той же стоимости чѣмъ больше цѣнность, тѣмъ меньше количество. Тогда числовая величина аршинъ меньше числовой величины фунтовъ во столько разъ, во сколько $2\frac{1}{2}\ \frac{\text{рубль}}{\text{фунт.}}$ меньше $5\ \frac{\text{рубль}}{\text{арш.}}$, т.-е.

$\frac{128 \text{ арш.}}{x \text{ фунт.}} = \frac{2\frac{1}{2}\ \frac{\text{рубль}}{\text{фунт.}}}{5\ \frac{\text{рубль}}{\text{арш.}}}$, откуда $x = \frac{128 \text{ арш. } 5\ \frac{\text{рубль}}{\text{арш.}}}{2\frac{1}{2}\ \frac{\text{рубль}}{\text{фунт.}}}$ или

$X = \frac{128.5}{2\frac{1}{2}} \left(\frac{\text{арш. } \frac{\text{рубль}}{\text{арш.}}}{\frac{\text{рубль}}{\text{фунт.}}}\right)$. Упрощая единицу, находимъ

$\text{арш.} \times \frac{\text{рубль}}{\text{арш.}} = \text{рубль}.$

Рубль : $\frac{\text{рубль}}{\text{фунт.}} = \frac{\text{рубль. фунт.}}{\text{рубль}} = \text{фунт.}$ Слѣдов.

$x = \frac{128.5}{2\frac{1}{2}}$ фунтовъ. Итакъ, въ основѣ рѣшенія всѣхъ задачъ на покупку и продажу мы имѣемъ формулу: стоимость = цѣнности, умноженной на количество. Если мы каждую изъ этихъ величинъ обозначимъ буквой: стоимость—a, цѣнность—m, количество—p, то получимъ алгебраическую формулу.

$$a = m.p.$$

Въ этой формулѣ будутъ содержаться всѣ типы задачъ. 1) Положимъ, что мы имѣемъ два товара, стоимость которыхъ a и a_1, цѣнность одна и тоже m, а количество p и p_1. Тогда $a = mp$ и $a_1 = mp_1$. Раздѣливъ одно равенство на другое, получимъ $a : a_1 = p : p_1$, количество m при дѣленіи сокрашается. 2) Если мы имѣемъ два товара въ одномъ и томъ же количествѣ p, цѣнность одного m, другого m_1; стоимость одного a, другого a_1; тогда $a = mp$ и $a_1 = m_1p$. Раздѣливъ эти равенства другъ на друга, получимъ $a : a_1 = m : m_1$.

3) Пусть оба товара имѣютъ одну и ту же стоимость a, цѣнность одного m, другого m_1; количество перваго p, другого p_1.

Тогда $a = mp$ и $a = m_1p_1$; если первыя части равны, то и вторыя равны

$$mp = m_1p_1$$

или

$$m : m_1 = p : p_1,$$ т.-е.

при одной и той же стоимости цѣнности обратно пропорціональны количествамъ.

§ 13. Пропорціональныя количества.

(Движеніе).

Въ вопросѣ о движеніи, принимая его равномѣрнымъ, мы въ главѣ V нашли формулу $S = v.t$, гдѣ S — проходимое разстояніе, v — средняя скорость, и t — время. Изъ этой формулы вытекаютъ слѣдующія заключенія: 1) разстоянія, проходимыя движущимся тѣломъ будутъ прямо пропорціональны времени при одной и той же скорости.

Положимъ, что одно тѣло прошло разстояніе S, другое S_1; время движенія перваго тѣла t, другое t_1; скорость одна и та же v. Тогда $S = vt$ и $S_1 = vt_1$; раздѣливъ одно равенство на другое, находимъ $S : S_1 = t : t_1$.

Для поясненія возьмемъ такую задачу: Поѣздъ желѣзной дороги въ $2\frac{1}{2}$ часа прошелъ 75 верстъ; сколько верстъ онъ пройдетъ въ 3 часа, двигаясь съ той же скоростью?

Расположимъ задачу по указанной схемѣ, получимъ:

$2\frac{1}{2}$ часа — 75 верст.
3 часа — x верст.

Съ увеличеніемъ времени увеличивается разстояніе, слѣдовательно x больше 75, и мы можемъ написать

$x : 75 = 3 : 2\frac{1}{2}$. Откуда $x = \dfrac{15.3.2}{5} = 90$ вер.

Подстановка наименованій въ этой пропорціи и преобразованіе равенства даетъ рядъ вопросовъ, анологичныхъ предыдущему примѣру.

2) Если скорость движенія будетъ измѣняться, но время останется то же самое, то легко видѣть, что разстояніе будетъ пропорціонально скорости. Положимъ, что два тѣла двигаются со скоростями v и v_1, разстоянія, проходимыя ими въ одно и то же время t, будутъ S и S_1. Тогда $S = vt$ и $S_1 = v_1 t$, раздѣливъ, получимъ

$$S : S_1 = v : v_1$$

«Поѣздъ желѣзной дороги, двигаясь со скоростью 50 $\frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}}$ проходитъ въ нѣкоторое время разстояніе въ 500 верстъ. Съ какой скоростью долженъ двигаться пароходъ, чтобы въ то же время пройти разстояніе въ 400 верстъ?

Записывая эту задачу по нашей схемѣ получимъ

500 верстъ — 50 $\frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}}$
400 — x $\frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}}$

Чѣмъ больше разстояніе, тѣмъ большая должна быть и скорость, чтобы пройти его въ то же время, слѣдовательно $500 : 400 = 50 : x$. Отсюда:

$$X = \frac{400.50}{500} = 40 \ \frac{\text{верстъ}}{\text{часовъ}}.$$

3) При одномъ и томъ же разстояніи, скорость обратно пропорціональна времени. Положимъ, что S одно и то же для двухъ тѣлъ, изъ которыхъ одно, двигаясь со скоростью v, проходитъ его въ t', а другое, двигаясь со скоростью v_1 проходитъ въ t_1'. Тогда мы имѣемъ $S = v.t$ и $S_1 = v_1 t_1$. Уравнивая обѣ величины находимъ, что $vt = v_1 t_1$ или $v : v_1 = t_1 : t$.

Разстояніе отъ Москвы до Петербурга можно проѣхать на различныхъ поѣздахъ. Пассажирскій поѣздъ, двигаясь со скоростью $50 \frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}}$, проходитъ его въ 12 часовъ, а курьерскій проходитъ въ 10 часовъ. Какъ велика скорость курьерскаго поѣзда?

Расположивъ задачу по схемѣ, имѣемъ:

$$50 \frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}} \text{ — } 12 \text{ часовъ}$$
$$x \frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}} \text{ — } 10 \text{ часовъ}$$

Очевидно, что скорость должна быть тѣмъ больше, чѣмъ меньше времени полагается на прохожденіе одного и того же разстоянія и мы можемъ написать

$$50 : x = 10 : 12, \text{ откуда } x = \frac{50.12}{10} = 60 \frac{\text{вер.}}{\text{час.}}.$$

Во всѣхъ этихъ случаяхъ подстановка наименованій и анализъ возможныхъ преобразованій равенства даютъ исчерпывающую возможность для изученія вопроса о движеніи, давая при каждомъ преобразованіи новыя свойства и указывая возможность ариѳметическихъ вычисленій.

Напримѣръ произведеніе крайнихъ и среднихъ членовъ послѣдняго равенства даютъ $50 \frac{\text{верстъ}}{\text{часовъ}}. 12$ часовъ $= x \frac{\text{вер.}}{\text{час.}} \times 10$ час. Каждое произведеніе даетъ разстояніе отъ Москвы до Петербурга; зная это разстояніе мы можемъ рѣшить задачу ариѳметически.

§ 13. **Пропорціональность величинъ.**

(Работа).

Въ механикѣ работой называется произведеніе изъ величины силы на перемѣщеніе по направленію силы. Напримѣръ, если 5 пудовъ подняты на высоту 4 футовъ, то работа будетъ 20 пудо-футовъ. Пудо-футъ есть единица работы, которая иногда замѣняется еднницей килограммометръ. Въ житейской практикѣ въ понятіе работы входятъ болѣе сложные элементы; содержаніе этихъ элементовъ входитъ въ понятіи о силѣ. Практическая сила есть или мощность паровой машины, электирическаго двигателя или физическая сила человѣка. Въ послѣднемъ случаѣ эта сила обусловливается количествомъ рабочихъ и является такимъ образомъ величиною сложной. Кромѣ того въ механикѣ въ понятіи о работѣ не входитъ время, тогда какъ практически время является существенной частью работы. Но, вводя время въ вычисленіе работы, мы должны различить его на число рабочихъ дней и число рабочихъ часовъ въ день.

Введеніе этого элемента настолько существенно, что самую работу мы можемъ измѣрять новой единицей, принявъ за величину работы произведеніе числа рабочихъ на время работы. Возьмемъ, напримѣръ, такую задачу: 5 работниковъ окончили нѣкоторую работу въ 7 дней; во сколько времени могли бы окончить эту работу 20 работниковъ? Эту задачу ариѳметически мы можемъ рѣшить такъ: 1) Какъ велика величина работы?

Отвѣтъ. Она равна 5 рабоч. $\times$ 7 дней или 5.7 (рабочій $\times$ день).

2) Во сколько дней окончатъ эту работу 20 работниковъ? Отвѣтъ. Такъ какъ работа есть произведеніе числа дней на число рабочихъ, то чтобы узнать, во сколько дней окончатъ 20 рабочихъ, мы должны ея величину 5 . 7 (рабоч. $\times$ ден.) раздѣлить на 20 рабочихъ, получимъ:

$$\frac{5\,.\,7\,(\text{рабочій} \times \text{день})}{20\ \text{рабочихъ}} = \frac{7}{4}\ \text{дня}.$$

Кромѣ величины работы практически имѣетъ большое значеніе еще и стоимость ея, которая зависитъ отъ величины работы, цѣнности рабочей силы, времени работы и количества рабочихъ, при чемъ время работы опять распадается на число рабочихъ часовъ и число рабочихъ дней.

Чтобы вычислить зависимость всѣхъ этихъ величинъ, необходимо разобрать ихъ сначала попарно, предположивъ, что всѣ прочія количества равны между собою.

1) *Число рабочихъ и количество работы* суть величины прямо пропорціональныя; ибо чѣмъ больше будетъ рабочихъ, тѣмъ больше они сдѣлаютъ при прочихъ равныхъ условіяхъ.

25 рабочихъ вырыли каналъ въ 36 саженъ; какой длины каналъ могутъ вырыть 15 рабочихъ?

Записывая задачу въ указанномъ шаблонѣ мы будемъ имѣть

$$25 \text{ рабоч.} = 36 \text{ саж.}$$
$$15 \text{ рабоч.} = x \text{ саж.}$$

откуда $x = \frac{36 . 15}{25}$ саж., что можно представить въ видѣ

$x = 36 \times \frac{15}{25}$ саж.

2) *Количество работы и продолжительность работы* тоже величины прямо пропорціональныя, потому что чѣмъ больше количество работы, тѣмъ дольше ее придется дѣлать, при прочихъ равныхъ условіяхъ.

Рабочіе вырыли каналъ длиною въ 36 саженъ, работая 12 дней, какой длины каналъ они выроютъ въ 10 дней?

Записывая задачу,

$$12 \text{ дней} = 36 \text{ саж.}$$
$$10 \text{ дней} = x \text{ саж., получимъ:}$$

$$12 : 10 = 36 : x; \quad x = \frac{36 . 10}{12} \text{ саж. или}$$

$$x = 36 \times \frac{10}{12} \text{ саж.}$$

Соединимъ теперь оба эти условія въ одну задачу.

25 рабочихъ въ 12 дней вырыли каналъ длиною въ 36 саженъ; какой длины каналъ 15 рабочихъ выроютъ въ 10 дней?

Такая задача называется задачей на сложное тройное правило и записывается въ слѣдующемъ видѣ.

$$25 \text{ раб.} — 12 \text{ дней} — 36 \text{ саж.}$$
$$15 \text{ раб.} — 10 \text{ дней} — x \text{ саж.}$$

Для рѣшенія подобныхъ задачъ существуютъ два способа: способъ пропорціи и способъ приведенія къ единицѣ. Оба они основаны на томъ, что приводятъ данную задачу къ задачѣ на простое тройное правило, уравнивая одно изъ условій. Положимъ, что время работы въ обоихъ случаяхъ равно 12 днямъ, тогда—сколько саженъ выроютъ 15 рабочихъ въ эти 12 дней.

Затѣмъ по способу приведенія къ единицѣ разсуждаютъ такъ: 25 рабочихъ выкапываютъ 36 саженъ, 1 рабочій выкапываетъ въ 25 разъ меньше, т.-е. $\frac{35}{25}$ саж. а 15 рабочихъ выкапываютъ въ 15 разъ больше, т.-е. $\frac{36.15}{25}$ саж.

Способъ пропорцій.

Обозначимъ длину канавы черезъ x, тогда

$$25:15=36:x_1 \text{ откуда}$$

$$x_1=\frac{36.15}{25} \text{ саж.}$$

Такой длины канаву выкапываютъ 15 рабочихъ въ 12 дней; какой длины канаву они выкапаютъ въ 10 дней?

Запишемъ это въ слѣдующей схемѣ:

$$\begin{array}{ll} x_1 \left(\frac{36.15}{25}\right) \text{ саж} & \text{— 12 дней} \\ x \text{ саж.} & \text{— 10 дней.} \end{array}$$

Итакъ, въ 12 дней рабочіе выкапываютъ $\frac{36.15}{25}$ саж.

въ 1 день они выкапаютъ въ 12 разъ меньше,

т.-е. $\frac{36.15}{25.12}$ саж.

а въ 10 дней выкапаютъ въ 10 разъ болѣе,

т.-е. $\frac{36.15.10}{25.12}$ саж.

Второй способъ:

Такъ какъ количество работы прямо пропорціонально времени, то

$$x_1:x=12:10 \text{ откуда}$$

$x = \frac{10 . x_1}{12}$ подставимъ вмѣсто x_1 его величину, получимъ $x = \frac{36 . 15 . 10}{25 . 12}$ саж.

Мы получили одну и ту же окончательную формулу отвѣта, которую можемъ написать такъ $x = 36 \times \frac{15}{25} \times \frac{10}{12}$; если мы эту формулу сравнимъ съ рѣшеніемъ двухъ предварительно разобранныхъ задачъ, то увидимъ, что она получается отъ умноженія 36 саженъ послѣдовательно на отношеніе чиселъ рабочихъ и на отношеніе числа дней.

Такая формула очень удобна для ариѳметическаго способа рѣшенія, но она не даетъ алгебраическаго выраженія зависимости, входящихъ въ нее величинъ. Эту алгебраическую зависимость мы получимъ, если напишемъ ту же формулу въ другомъ видѣ:

$$x = \frac{36 \text{ саж.}}{25 \text{ раб. } 12 \text{ дней}} \times 15 \text{ раб.} \times 10 \text{ дней.}$$

Количество $\frac{36 \text{ саж.}}{25 \text{ раб. } 12 \text{ дней}}$ показываетъ, сколько саженъ рабочій данной артели, выкапываетъ въ одинъ день; это количество можно назвать коэффиціентомъ пропорціональности. Оно опредѣляется изъ первой строчки задачи и останется постояннымъ для рабочихъ данной артели. Это есть средній коэффиціентъ работы. Зная его, мы можемъ разсчитать величину работы для всякаго числа рабочихъ и для всякаго числа дней, умножая этотъ коэффиціентъ на новое число рабочихъ и новое число дней. Тогда получимъ формулу.

Количество работы = коэффиціенту, умноженному на число рабочихъ, умноженному и на число дней.

Обозначимъ коэффиціентъ буквой k, число рабочихъ—n, время работы t, а количество работы T, тогда получимъ алгебраическую формулу:

$$T = k . n . t$$

изъ которой видно, что количество работы прямо пропорціонально числу рабочихъ и времени работы.

Изъ этой формулы мы видимъ:

1) что при $k=1$ работа можетъ быть выражена, какъ произведеніе числа рабочихъ на время работы; 2) что при одномъ и томъ же количествѣ работы число рабочихъ обратно пропорціонально времени работы. При помощи этой формулы мы можемъ рѣшать задачи на сложное тройное правило, въ которыхъ разсматривается нѣкоторая работа.

Возьмемъ для примѣра такую задачу;

54 землекопа, работая въ день по 10 часовъ, сдѣлали въ 33 дня насыпь, длиною въ 124 сажени, шириною въ $5\frac{1}{2}$ аршинъ и высотою въ $6\frac{3}{4}$ фута. Сколько надо имѣть землекоповъ, чтобы они, занимаясь ежедневно по $7\frac{1}{2}$ часовъ, сдѣлали въ 30 дней насыпь, длиною въ 0,31 версты, шириною въ $7\frac{1}{2}$ аршинъ и вышиною въ $3\frac{6}{7}$ аршина?

Запишемъ эту задачу по нашей схемѣ, получимъ:

54 земл. — 10 часов. — 33 дня — 124 саж. $5\frac{1}{2}$ арш. $6\frac{3}{4}$ фут.
x земл. — $7\frac{1}{2}$ часов. — 30 дней — 0,31 верст. $7\frac{1}{2}$ арш. $3\frac{6}{7}$ арш.

Для рѣшенія этой задачи, намъ надо опредѣлить коэффиціентъ пропорціональности изъ первой строчки; онъ будетъ равенъ количеству работы, дѣленному на число рабочихъ и время работы. Количество работы выразится объемомъ (124 саж. $\times 5\frac{1}{2}$ арш. $\times 6\frac{3}{4}$ фут.); время работы надо взять въ рабочихъ часахъ; оно будетъ равно 10×33; число рабочихъ 54; слѣдовательно коэффиціентъ

$$k=\frac{(124 \text{ саж.} \times 5\tfrac{1}{2} \text{ арш.} \times 6\tfrac{3}{4} \text{ фут.})}{54 \text{ раб.} \times (10\times 33) \text{ час.}}.$$

Новое количество работы будетъ (0,31 версты $\times$ $\times\ 7\frac{1}{2}$ арш. $\times 3\frac{6}{7}$ арш.); новое число рабочихъ x и время работы $7\frac{1}{2}\times 30$ рабочихъ часовъ. Итакъ, по формулѣ мы получимъ:

$$(0{,}31 \text{ верст.} \times 7\tfrac{1}{2} \text{ арш.} \times 3\tfrac{6}{7} \text{ арш.}) =$$
$$=\frac{124 \text{ саж.} \times 5\tfrac{1}{2} \text{ арш.} \times 6\tfrac{3}{7} \text{ фут.}}{54 \text{ раб.} \times (10\times 33) \text{ час.}} (x\times 7\tfrac{1}{2}\times 30) \text{ час.}$$

откуда

$$x=\frac{(0{,}31 \text{ верст.} \times 7\tfrac{1}{2} \text{ арш. } 3\tfrac{6}{7} \text{ арш.}) \times 54 \text{ раб. } (10\times 33) \text{ час.}}{(124 \text{ саж.} \times 5\tfrac{1}{2} \text{ арш.} \times 6\tfrac{3}{4} \text{ фут.}) \times (7\tfrac{1}{2}\times 30) \text{ час.}}$$

При вычисленіи этой формулы, мы должны объемъ выразить въ одинаковыхъ мѣрахъ, выберемъ эту мѣру въ единицахъ (саж. $\times$ арш. $\times$ фут.), тогда 0,31 версты составитъ 155 саж., а $3\frac{6}{7}$ арш. $= \frac{27 \times 28}{7 \times 12}$ фут., что послѣ сокращенія дастъ 9 фут. Сократимъ одинаковыя наименованія, получимъ окончательно:

$$x = \frac{155 . 15 . 9 . 54 . 10 . 33 . 2 . 7 . 2}{2 . 124 . 11 . 45 . 15 . 30} \text{ раб.} = 189 \text{ рабоч.}$$

Стоимость работы зависитъ отъ цѣнности рабочаго часа, количества работы и времени ея. Чтобы выяснить зависимость между этими величинами, разсмотримъ задачу:

8 работниковъ, занимаясь въ день по 7 часовъ, окончили нѣкоторую работу въ 30 дней и получили за это 201,6 рубля. Сколько получатъ 14 работниковъ, если они будутъ работать въ теченіи 10 дней по 4 часа въ день, предполагая, что часовая плата рабочаго одинакова?

Запишемъ условіе этой задачи по схемѣ:

8 работ. — 7 часов. — 30 дней — 201,6 рубля
14 работ. — 4 часа — 10 дней — x рублей.

Эту запись мы очевидно можемъ упростить, вычисливъ число рабочихъ часовъ въ томъ и другомъ случаѣ, тогда:

8 рабоч. — 210 рабоч. час. 201,6 руб.
14 рабоч. — 40 рабоч. час. x руб.

Будемъ рѣшать способомъ пропорцій. Уравняемъ числа рабочихъ часовъ, т.-е. положимъ, что и вторые рабочіе работали 210 часовъ, тогда

8 рабоч. получатъ 201,6 руб.
14 рабоч. получатъ x_1 руб.

$8 : 14 = 201,6 : x_1$ откуда

$$x_1 = \frac{201,6 \times 14}{8}.$$

Итакъ, при работѣ въ 210 часовъ 14 рабочихъ второй артели получатъ x_1 $\left(\frac{201,6 \times 14}{8}\right)$ рублей; сколько они получатъ, работая по 40 часовъ?

$$210 \text{ часовъ } x_1$$
$$40 \text{ часовъ } x$$
$$210:40 = x_1 : x \text{ откуда}$$
$$X = \frac{201{,}6 \times 14 \times 40}{8 \times 210},$$

а это послѣ упрощенія и сокращенія дастъ 67,2 руб.

Чтобы изъ этой формулы вывести алгебраическую зависимость входящихъ величинъ, напишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$X = \frac{201{,}6 \text{ руб.}}{8 \text{ раб. } 210 \text{ часовъ}} \times 14 \text{ раб.} \times 40 \text{ часовъ.}$$

Принявъ $\frac{201{,}6}{8 \text{ раб. } 210 \text{ часовъ}}$ за коэффиціентъ пропорціональности, который показываетъ цѣнность работы одного рабочаго въ часъ, мы обозначимъ его буквой k. Если цѣнность работы одного рабочаго въ часъ будетъ установлена, то стоимость работы опредѣляется, какъ произведеніе числа рабочихъ на число часовъ. Назовемъ ее черезъ C, число рабочихъ черезъ n, время работы t, получимъ

$$C = k \,.\, n \,.\, t$$

Новая формула имѣетъ такой же внѣшній видъ, какъ и прежняя, но совершенно иное значеніе; изъ общаго вида этихъ двухъ формулъ $T = k \,.\, n \,.\, t$ и $C = k \,.\, n \,.\, t$, мы заключаемъ, что количество работы и стоимость ея находятся въ одинаковой функціональной зависимости отъ числа рабочихъ и времени работы; но коэффиціентъ пропорціональности будетъ разный. Въ первой формулѣ онъ даетъ количество работы одного рабочаго въ часъ; а во второй цѣнность рабочаго часа одного рабочаго.

При помощи этой формулы мы можемъ опредѣлять стоимость работы при разныхъ условіяхъ. Изъ разсмотрѣнія этихъ формулъ мы можемъ установить очень важное положеніе: если какая-либо величина прямо пропорціональна ряду другихъ величинъ, то въ алгебраической формулѣ мы должны произведеніе этихъ величинъ умножить на коэффиціентъ пропорціональности.

§ 14. Заготовка продовольствія.

Въ задачахъ часто встрѣчается заготовка продовольствія для прокормленія какихъ-либо живыхъ существъ, при этомъ предполагается, что каждое живое существо въ среднемъ требуетъ одинаковаго количества ѣды. Тогда въ задачи этого рода будутъ входить слѣдующія величины: 1) число продовольствуемыхъ живыхъ существъ, 2) количество продовольствія; 3) продолжительность продовольствія; 4) количество расходуемой ѣды въ единицу времени (день, недѣлю, мѣсяцъ).

Задача. Для продовольствія нѣкотораго числа солдатъ было заготовлено хлѣба на 60 дней, предполагая, что каждому солдату будутъ выдавать по $2\frac{1}{2}$ фунта въ день. На сколько времени хватитъ $\frac{3}{4}$ этого запаса, если число солдатъ будетъ уменьшено на $\frac{3}{8}$ прежняго числа, а ежедневная порція увеличена на 1 фунта?

Такія задачи принято рѣшать способомъ приведенія къ единицѣ. Задачу записываютъ по указанному шаблону, принявъ число солдатъ въ первомъ условіи за единицу тогда

1 (число солдатъ) — 60 дней $2\frac{1}{2}$ фунт.

$\frac{5}{8}$ (число солдатъ) — x дней $3\frac{3}{4}$ фунт.

и разсуждаютъ такъ: Если число солдатъ уменьшится, то число дней, на которое хватитъ провіанта увеличится во столько же разъ; такъ какъ новое число солдатъ составляетъ $\frac{5}{8}$ первоначальнаго, то провіанта хватитъ не на 60 дней а больше въ $\frac{8}{5}$ раза, т.-е. $\frac{60.8}{5}$ дней, если каждому солдату выдавать по $2\frac{1}{2}$ фунта, а если выдавать по 1 фунту, то число дней еще увеличится въ $2\frac{1}{2}$ раза и будэтъ $60.\frac{8}{5}.2\frac{1}{2}$ дней.

Но если выдавать не по 1 фунту, а $3\frac{3}{4}$ фунта, то число дней станетъ меньше въ $3\frac{3}{4}$ раза, то-есть

$$x = \frac{60.\frac{8}{5}.2\frac{1}{2}}{3\frac{3}{4}}$$

а это послѣ упрощенія и сокращенія дастъ 64 дня.

Такія задачи можно рѣшать иначе, исходя, изъ совершенно иныхъ соображеній. Опредѣлимъ количество провіанта; для этого замѣтимъ, что это количество прямо пропорціонально числу продовольствуемыхъ, количеству выдачи въ день и числу дней. Мы можемъ написать:

Количество провіанта = (Число продовольствуемыхъ) $\times$ $\times$ (Число дней) $\times$ (Величину выдачи).

Опредѣлимъ по этой схемѣ, сколько было заготовлено хлѣба, опять принимая число солдатъ за единицу. Тогда:

Количество хлѣба = 60 (дней) $\times\, 2\frac{1}{2}$ (фунта).

Число солдатъ можно не принять за единицу, а обозначить какой либо буквой, напримѣръ a, тогда

Количество хлѣба $= a$ (солдатъ) $\times$ 60 (дней) $\times\, 2\frac{1}{2}$ фунта.

Здѣсь $2\frac{1}{2}$ фунта не совсѣмъ точное обозначеніе количества потому что въ составъ этого количества входитъ время, которое полезно обозначать явно; окончательно получимъ слѣдующее равенство.

$$\text{Количество хлѣба} = a\ (\text{солдатъ}) \times 60\ (\text{дней}) \times 2\tfrac{1}{2}\ \frac{\text{фунтъ}}{\text{день}}$$

Составимъ то же условіе по второй строчкѣ обозначивъ число дней черезъ x, а число солдатъ очевидно будетъ $\frac{5}{8}\ a$, тогда

$$\text{Количество хлѣба} = \tfrac{5}{8}\, a\,(\text{солдатъ}) \times x\,(\text{дней}) \times 3\tfrac{3}{4} \left(\frac{\text{фунтъ}}{\text{день}}\right)$$

Уравнявъ оба эти произведеніе получимъ уравненіе.

$$\tfrac{5}{8}\ a\,(\text{солдат}) \times x\,(\text{дней}) \times 3\tfrac{3}{4}\left(\frac{\text{фунт.}}{\text{день}}\right) = a\,(\text{сол.}) \times 60\,(\text{дней}) \times 2\tfrac{1}{2}\left(\frac{\text{фунт.}}{\text{день}}\right)$$

отсюда

$$x = \frac{a\,(\text{солд.}) \times 60\,(\text{дней}) \times 2\frac{1}{2}\left(\frac{\text{фунт.}}{\text{день}}\right)}{\frac{5}{8}\ a\,(\text{солд.}) \times 3\frac{3}{4}\left(\frac{\text{фунт.}}{\text{день}}\right)}$$

Если мы разсмотримъ полученную формулу рѣшенія то увидимъ, что въ числителѣ у насъ количество провіанта а въ знаменателѣ количество расхода въ день на всѣхъ солдатъ при новыхъ условіяхъ. Количество провіанта опредѣляется изъ первой строки задачи, мы можемъ обозначить его буквой k, тогда всякое новое условіе выдачи провіанта можетъ быть выражено формулой.

$x = \frac{k}{m.n}$, гдѣ m есть число потребителей, а n ежедневная выдача.

Если мы послѣднюю формулу представимъ въ видѣ $mn.x = k$, то получимъ слѣдующія задачи: 1) Опредѣлить число дней x; задача, которую мы рѣшили; 2) Опредѣлить число солдатъ; 3) Опредѣлить ежедневную выдачу. Обѣ послѣднія задачи рѣшаются по той же формулѣ.

Къ типу тѣхъ же задачъ относятся задачи вродѣ слѣдующей.

На 4 лампы, которыя зажигаютъ ежедневно на $7\frac{1}{2}$ часовъ, въ теченіе 30 вечеровъ израсходовано $2\frac{1}{2}$ пуда керосина. Какъ великъ долженъ быть запасъ керосина, чтобы онъ сгорѣлъ въ 32 вечера, если каждый вечеръ будетъ зажигаться 5 такихъ же лампъ по $4\frac{1}{2}$ часа?

Запишемъ эту задачу по схемѣ.

4 лампы $7\frac{1}{2}$ часовъ 30 вечеровъ $2\frac{1}{4}$ пуда
5 лампъ $4\frac{1}{2}$ часа 32 вечера x пуда

Упростимъ задачу, введя вмѣсто числа вечеровъ и числа часовъ въ вечеръ только число часовъ горѣнія. Тогда

4 лампы $(7\frac{1}{2} \times 30)$ часовъ $2\frac{1}{4}$ пуда
5 лампъ $(4\frac{1}{2} \times 32)$ часовъ x пуда

Теперь легко видѣть, что каждая лампа сжигаетъ въ часъ $\frac{2\frac{1}{4}}{4 \times (7\frac{1}{2} \times 30)} \frac{\text{пудовъ}}{\text{ламп. час.}}$ Обозначимъ это количество буквой K; тогда очевидно $X = K.\ 5.\ (4\frac{1}{2}.32)$. Подставивъ вмѣсто K его величину, получимъ.

$$X = \frac{2\frac{1}{4}.\,5.\,4\frac{1}{2}.\,32}{4\,.\,7\frac{1}{2}.\,30} = 1\tfrac{4}{5} \text{ пуда.}$$

Если мы обозначимъ число лампъ черезъ p, число часовъ горѣнія черезъ n, то получимъ формулу $x = k.p.n$. Изъ этой формулы, зная x и n можемъ опредѣлить p; зная x и p можемъ опредѣлить n.

§ 15. **Задачи.**

1) За 3 аршина 8 вершковъ ситцу заплачено 0, 63 рубля. Сколько нужно заплатить за 12 вершковъ того же ситцу? Отвѣтъ: 0,135 руб.

2) На 5 рублей 80 копеекъ можно купить 2 фунта 40 золотниковъ чаю; сколько фунтовъ этого чаю можно купить на 7, 2 рубля?

Отвѣтъ: 3 фунта.

3). Цибикъ чаю, цѣнностью въ 1, 5 $\frac{\text{руб.}}{\text{фун.}}$, стоитъ 120 рублей. Сколько слѣдуетъ заплатить за цибикъ того же вѣса, если чай будетъ имѣть цѣнность 1, 8 $\frac{\text{руб.}}{\text{фун.}}$

Отвѣтъ 144 рубля.

4). Два купца мѣняются товаромъ: одинъ даетъ 45 фунтовъ кофе цѣнностью въ 0,8 $\frac{\text{руб.}}{\text{фун.}}$, а другой предлагаетъ 9 пудовъ сахару. Опредѣлить цѣнность сахара?

Отвѣтъ: 4 $\frac{\text{руб.}}{\text{пуд.}}$

5). Два купца мѣняются товаромъ: одинъ предлагаетъ $28\frac{4}{5}$ аршинъ ситцу, цѣнностю $12\frac{3}{4}$ $\frac{\text{коп.}}{\text{арш.}}$, а другой сукно цѣнностью по 3 $\frac{\text{руб.}}{\text{арш.}}$; Сколько аршинъ сукна онъ долженъ дать?

Отвѣтъ: 1,224 арш.

6) Поѣздъ желѣзной дороги въ 4 часа прошелъ разстояніе въ 100 верстъ. Во сколько времени онъ пройдетъ разстояніе въ 75 верстъ, двигаясь съ той же скоростью?

Отвѣтъ: Въ 3 часа.

7) Пароходъ въ $2\frac{1}{2}$ часа прошелъ 75 верстъ. Сколько онъ пройдетъ въ 3 часа, двигаясь съ той же скоростью?

Отвѣтъ: 90 верстъ.

8) Почтальонъ на велосипедѣ, двигаясь со скоростью

$12\frac{1}{2}\ \frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}}$, проѣзжаетъ разстояніе между городами въ 6 часовъ. Во сколько времени онъ прошелъ бы это разстояніе пѣшкомъ со скоростью $3\frac{3}{4}\ \frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}}$?

Отвѣтъ: Въ 20 часовъ.

9) Курьерскій поѣздъ проходитъ 204 версты, двигаясь со скоростью $50\ \frac{\text{вер.}}{\text{час.}}$, съ какой скоростью будетъ двигаться товарный поѣздъ, чтобы въ то же время пройти 69,36 верстъ?

Отвѣтъ: $17\ \frac{\text{верстъ}}{\text{час.}}$.

10) Два путешественника выѣхали одновременно навстрѣчу другъ-другу изъ двухъ городовъ, находящихся на разстояніи 300 верстъ. Черезъ сколько времени они встрѣтятся, если скорость перваго $12\ \frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}}$, а второго $13\ \frac{\text{вер.}}{\text{час.}}$

Отв. 12 ч.

11) Съ двухъ станцій желѣзной дороги A и B, находящихся на разстояніи 77 верстъ, выходятъ одновременно два поѣзда по направленію отъ A къ B и дальше. Первый, выходящій изъ A, движется со скоростью $31\frac{1}{2}\ \frac{\text{верстъ}}{\text{часъ}}$, а второй, выходящій изъ B, движется со скоростью $18\frac{2}{3}\ \frac{\text{верст.}}{\text{час.}}$ Черезъ сколько времени они встрѣтятся?

Отв.: 6 час.

12) Въ 9 часовъ утра со станціи выходитъ пассажирскій поѣздъ и движется со скоростью $28\ \frac{\text{верст.}}{\text{час.}}$ Черезъ часъ съ четвертью съ той же станціи выходитъ курьерскій поѣздъ и движется со скоростью $40\ \frac{\text{верст.}}{\text{час.}}$

Въ которомъ часу курьерскій поѣздъ догонитъ пассажирскій?

Отвѣтъ: Въ первомъ часу.

13) Если предположить, что лошадь бѣжитъ въ четверо медленнѣе поѣзда желѣзной дороги, то она будетъ отставать отъ него на одну версту въ каждыя 3 минуты. Опредѣлить скорость поѣзда?

Отв. $26\frac{2}{3}\,\frac{\text{вер.}}{\text{час.}}$

14) Локомотивъ шелъ отъ A къ B со скоростью $30\,\frac{\text{верст.}}{\text{час.}}$, обратно со скоростью $40\,\frac{\text{верст.}}{\text{час.}}$. На весь путь туда и обратно онъ употребилъ $3\frac{1}{2}$ часа. Сколько верстъ отъ A до B?

Отв. 60 верстъ.

15) Два тѣла движутся въ одну сторону по направленію отъ A къ B и далѣе: разстояніе между A и B равно 100 саж. Первое изъ мѣста A движется со скоростью $3\,\frac{\text{фут.}}{\text{секунд.}}$, а второе изъ B со скоростью въ 3 раза меньше. Гдѣ первое нагонитъ второе?

Отв. 150 саж. отъ A.

16) Два тѣла движутся въ одномъ и томъ же направленіи по окружности круга, которая равна 100 футамъ, начавъ движеніе съ одного и того же мѣста; первое движется со скоростью $5\,\frac{\text{фут.}}{\text{сек.}}$, а второе $3\,\frac{\text{фут.}}{\text{сек.}}$. Черезъ сколько секундъ они будутъ вновь въ одномъ и томъ же мѣстѣ?

Отв. черезъ 50 сек.

17) 20 работниковъ оканчиваютъ работу въ $1\frac{3}{4}$ дня; во сколько времени окончаетъ эту работу 5 работниковъ?

Отвѣтъ; Въ $9\frac{1}{3}$ дн.

18) 12 рабочихъ могутъ окончить кирпичную кладку дома въ 130 дней; сколько надо нанять рабочихъ, чтобы окончить кладку въ 60 дней?

Отвѣтъ: 26 рабоч.

19) Насосъ можетъ выкачать $\frac{2}{3}$ бассейна въ $7\frac{1}{2}$ минутъ; какую часть бассейна онъ выкачаетъ въ 0,15 часа?

Отвѣтъ: $\frac{4}{5}$ части бассейна.

20) 45 рабочимъ заплачено 216 рублей за 6 дней работы; сколько слѣдуетъ заплатить 30 рабочимъ за 8 дней?

Отвѣтъ: 192 руб.

21) Бассейнъ, емкостью въ 1800 ведеръ, можетъ бытъ опорожненъ въ теченіе 3 часовъ, если будутъ работать 5 насосовъ. Сколько ведеръ воды выкачиваютъ 4 насоса въ 4 часа?

Отвѣтъ: 1920 ведеръ.

22) Каналъ, длиною въ 36 саженъ, могутъ вырыть 25 рабочихъ въ 12 дней. Какой длины каналъ могутъ вырыть 15 рабочихъ въ 10 дней?

Отвѣтъ: 18 саж.

23) 36 плотниковъ, занимаясь ежедневно по 12 часовъ, могутъ построить деревянный домъ въ 30 дней. По скольку часовъ ежедневно должны работать 27 плотниковъ, чтобы выстроить такой же домъ въ 50 дней?

Отвѣтъ: $9\frac{3}{5}$ час.

24) Бассейнъ наполняется водой при помощи двухъ насосовъ; первый, дѣйствуя одинъ, могъ бы наполніть его въ 3 часа, а второй безъ перваго можетъ наполнить его въ 5 часовъ. Во сколько времени наполнится бассейнъ, если оба насоса будутъ дѣйствовать вмѣстѣ?

Отвѣтъ: Въ $1\frac{7}{8}$ часа.

25) Два работника оканчиваютъ нѣкоторую работу въ 3 часа 36 минутъ; одинъ первый могъ бы окончить ее въ 6 часовъ. Во сколько времени окончитъ эту работу одинъ второй?

Отвѣтъ: Въ 9 часовъ.

26) Изъ трехъ трубъ, проведенныхъ въ бассейнъ, первая наполняетъ его въ 6 часовъ, вторая въ 18 часовъ, а черезъ третью трубу вся вода вытекаетъ изъ бассейна въ 3 часа. Во сколько времени полный бассейнъ опустѣетъ, если открыть всѣ три трубы?

Отв.: Черезъ 9 часовъ.

27) Бочка, въ которой продѣланы два крана, можетъ опорожниться въ 20 минутъ, когда будетъ открытъ одинъ первый кранъ, и въ 30 минутъ, если будетъ открытъ одинъ второй. Во сколько времени опустѣетъ полная бочка, если открыть оба крана?

Отв.: 15 мин.

28) Двумъ работникамъ поручено нѣкоторое дѣло. Одинъ берется его окончить въ 5 часовъ, а другой въ 3. Во сколько часовъ они вмѣстѣ окончатъ работу?

Отвѣтъ: Въ $1\frac{7}{8}$ часа.

29) Въ бассейнъ проведены 3 трубы. Черезъ первую бассейнъ наполняется въ 6 часовъ, черезъ вторую—въ 8 часовъ, а черезъ третью вся вода изъ полнаго бассейна вытекаетъ въ 12 часовъ. Черезъ сколько времени наполнится бассейнъ, если открыть всѣ три трубы?

Отв. 4 ч. 48 м.

30) 15 работниковъ и 12 работницъ, занимаясь по $10\frac{1}{2}$ часовъ вь день сжали хлѣбъ съ поля въ 12 дней. Во сколько дней 21 работникъ и 8 работницъ, занимаясь въ день по 8,4 часа, уберутъ хлѣбъ съ поля, площадь котораго относится къ площади перваго, какъ $0{,}153 : \frac{17}{150}$, при чемъ сила мужчины относится къ силѣ женщины какъ $\frac{4}{15} : \frac{1}{5}$?

Отвѣтъ: 18 дней.

31) Для выкачиванія воды изъ бассейна поставили 3 большихъ и 5 малыхъ насосовъ, которые, дѣйствуя вмѣстѣ, могли бы вылить всю воду въ 6 часовъ. По прошествіи $2\frac{1}{2}$ часовъ ихъ совмѣстнаго дѣйствія два большихъ насоса испортились и были замѣнены 5 малыми. Зная, что сила каждаго малаго относится къ силѣ большого какъ $2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{6}$, опредѣлить во сколько времени была выкачена вода изъ бассейна?

Отвѣтъ: 5 ч. 30 м.

32) Одинъ рабочій, сдѣлавъ въ 5 дней седьмую часть работы, приглашаетъ на помощь своего товарища, съ

которымъ работалъ $12\frac{1}{2}$ дней, вплоть до окончанія работы. За всю работу имъ было заплачено 25,2 рубля. Сколько получитъ каждый?

Отв. 12, 6 рубля.

33) Въ 40 дней въ 15 лампахъ сгорѣло 31 ф. 24 золот. керосину, при чемъ каждая лампа горѣла ежедневно по 5 часовъ. Въ сколькихъ лампахъ сгоритъ 16 фунтовъ 64 золотника керосину въ 20 дней, если каждая лампа будетъ горѣть по 8 часовъ?

Отвѣтъ: 10 лампъ.

34) Въ 8 лампахъ въ 25 дней сгорѣло керосину $12\frac{1}{2}$ фунтовъ, при чемъ лампы горѣли по 6 часовъ въ день. По скольку часовъ въ день горѣли 9 такихъ же лампъ, если извѣстно, что въ 15 дней они сожгли 8 фунтовъ 6 золотниковъ керосину?

Отвѣтъ: 5 часовъ 44 минуты

35) Если выдавать каждому человѣку по 2 фунта 12 золотниковъ провіанту въ день, то провіанта хватитъ для 400 человѣкъ на 45 дней. По скольку можно выдавать каждому, чтобы того же запаса хватило на 800 человѣкъ на 24 дня?

Отвѣтъ: 1 фунт. $95\frac{1}{4}$ золотниковъ.

36) Семь трубъ наполняютъ въ 8 часовъ водоемъ въ 5 саженей длины, $7\frac{1}{2}$ аршина ширины и 5 футовъ глубины. Сколько нужно такихъ же трубъ, чтобы вь 15 часовъ наполнить водоемъ въ 25 саженей длины 15 саженей ширины, 3 фута глубины?

Отв. 112 трубъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Глава I. О числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними:

Глава 2. Количества и дѣйствія надъ ними.

Глава 3. Равенства и ихъ свойства.

Глава 4. Понятіе о функціи.

Глава 5. Рѣшеніе уравненій первой степени съ одной неизвѣстной.

Глава 6. Отношеніе.

Глава 7. Правило пропорціональнаго дѣленія.

Глава 8. Пропорціи.

Глава 9. Понятіе о пропорціональности.