Д. Галанинъ.

Методика ариѳметики.

ПЕРВЫЙ ГОДЪ ОБУЧЕНІЯ.

Цѣна 50 коп.

МОСКВА.
Типографія О. Л. Сомовой, Б. Никитская, д. Шапошниковой.
1910.

Д. Галанинъ.

Методика ариѳметики.

ПЕРВЫЙ ГОДЪ ОБУЧЕНІЯ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Предисловіе.

Предлагая на судъ читателя свой курсъ методики начальнаго обученія по ариѳметикѣ, я долженъ указать причины, почему я считаю именно курсъ такого рода болѣе нормальнымъ, чѣмъ тотъ, который является общепринятымъ въ настоящее время. Современный курсъ ариѳметики построенъ на представлении числа, какъ результата счета отдѣльныхъ единицъ. Такое обученіе является слѣдствіемъ того, что число мыслится какъ бы разсыпающимся на отдѣльныя единицы, и эти единицы или прикладываются или отнимаются, такъ что во внутреннемъ самосознании число представляется собраніемъ однородныхъ единицъ, которыя можно прибавлять и отнимать по группамъ, и на этомъ свойствѣ основывается выводъ правилъ умноженія и дѣленія, при чемъ приложеніе этихъ правилъ къ производству дѣйствій надъ именованными числами возможно вообще только тогда, когда мы, опустивъ наименованіе, представимъ себѣ число, какъ группу отвлеченныхъ единицъ, и производимъ надъ этими единицами соотвѣтственныя дѣйствія, а результату припишемъ то наименованіе, которое слѣдуетъ по смыслу задачи. Такимъ образомъ, при рѣшеніи задачи какъ бы происходитъ два психическихъ процесса: одинъ — счетный, подчиненный правиламъ ариѳметики, другой — логическій, подчиненный функціональнымъ соотношеніямъ входящихъ въ задачу величинъ. Такъ, напр., если мы съ этой точки зрѣнія разсмотримъ задачу: „каждому мальчику дано 2 яблока, сколько яблокъ дано 7 мальчикамъ“? При рѣшеніи этой задачи обыкновенно разсуждаютъ такъ: каждый мальчикъ получилъ 2 яблока, а 7 мальчиковъ получатъ въ 7 разъ больше, слѣдовательно, они получатъ 14 яблокъ. Здѣсь наименованіе „мальчики“ опускается и замѣняется словами: „семь разъ“. Вслѣдствіе этого опущенія самое наименованіе становится неважнымъ и его можно замѣнить всякимъ другимъ наименованіемъ, подчиненнымъ только логическимъ житейскимъ соотношеніямъ; такъ, напр., нельзя спросить, сколько яблокъ получатъ 7 фунтовъ, не потому, что ариѳметически такое соотношеніе является неправильнымъ, а потому, что житейскія яблоки не вступаютъ въ соотношеніе съ фунтами.

Въ данномъ примѣрѣ наименованіе „мальчики" и наименованіе „яблоки" являются, такимъ образомъ, совершенно случайными, не находящимися другъ съ другомъ въ какой-либо органической связи или въ функціональномъ отношеніи, а потому ариѳметически становятся безразличны, а потому и замѣна слова мальчики словами „въ 7 разъ" становится допустимой и не возбуждаетъ никакихъ сомнѣній; эта замѣна позволяетъ только логически перевести житейскую задачу на ариѳметическій языкъ и дать для нея нѣкоторый общій методъ рѣшенія. Но если мы возьмемъ ту же задачу, но введемъ въ нее такія величины, которыя находятся другъ съ другомъ въ органическомъ функціональномъ соотношеніи, тогда такая замѣна становится не всегда логически ясной. Пусть, напр., предложена задача: „стаканъ песку вѣситъ 2 фунта, сколько будетъ вѣсить 7 стакановъ"? Къ рѣшенію этой задачи мы прилагаемъ тотъ же методъ и то же разсужденіе, т. е. говоримъ: „одинъ стаканъ песку вѣситъ 2 фунта, а 7 стакановъ будутъ вѣсить въ 7 разъ больше, слѣдовательно, 7 стакановъ песку вѣсятъ 14 фунтовъ". Однако, здѣсь слово „стаканъ" не можетъ быть замѣнено никакимъ другимъ словомъ, а потому его замѣна словами: „въ 7 разъ больше" уже не является логически безспорной, и прилагаемый методъ рѣшенія является не органически связаннымъ съ содержаніемъ задачи, а обобщеннымъ или распространеннымъ на это содержаніе. Въ этомъ именно распространеніи метода рѣшенія, и его обобщенія и содержится тотъ логическій процессъ, при помощи котораго ученикъ доходитъ до рѣшенія новыхъ задачъ. Въ этомъ логическомъ процессѣ онъ связываетъ извѣстный ему методъ съ неизвѣстнымъ соотношеніемъ и, найдя эту связь, считаетъ задачу рѣшенной. Такъ, напр., пусть будетъ дана такая задача: „сколько вѣситъ литръ ртути, если ея удѣльный вѣсъ 13,6"? Ученикъ разсуждаетъ: что значитъ удѣльный вѣсъ? Это значитъ, что ртуть тяжелѣе воды въ 13,6 раза; но литръ воды вѣситъ килограммъ, слѣдовательно, литръ ртути будетъ вѣсить 13,6 килограмма. Если мы сравнимъ теперь это разсужденіе съ первоначальнымъ, когда мы опредѣлили, сколько яблокъ получатъ 7 мальчиковъ, то не найдемъ въ нихъ не только общихъ ариѳметическихъ представленій, но не найдемъ сущности того логическаго процесса, при помощи котораго можно было бы подойти къ рѣшенію послѣдней задачи методомъ первой, и всякій не математикъ скажетъ, что послѣдняя задача трудна,—она непосильна не только для дѣтей, но и для взрослыхъ, которые не вращались въ средѣ такихъ вопросовъ. Почему же эта задача такъ рѣзко отличается отъ задачи съ яблоками и даже отъ задачи съ пескомъ? Она отличается тѣмъ, что въ ней пропадаетъ представленіе числа, какъ совокупность счетныхъ единицъ. Если мы даже слово „удѣльный вѣсъ“ замѣнимъ фразой „ртуть тяжелѣе воды въ 13,6 раза“, то и отъ этой замѣны ясность задачи только немного выиграетъ, потому что въ понятіи „больше въ нѣсколько разъ“ содержится понятіе отношенія. которое не содержитъ въ себѣ представленія числа, какъ совокупности счетныхъединицъ. Итакъ, въ силу того, что мы представляемъ себѣ число, какъ совокупность счетныхъ единицъ, для насъ становится труднымъ, съ одной стороны, усвоеніе отношенія, а съ другой —выясненіе понятія „больше въ нѣсколько разъ“. Эта трудность всецѣло обусловливается тѣмъ, что въ отношеніи, съ которымъ тѣсно связано понятіе „больше въ нѣсколько разъ“, число не только не разсыпается на счетныя единицы, но въ него входитъ понятіе несоизмѣримости и оно не подчиняется произвольной замѣнѣ наименованій одно другимъ. Правда, что все это далеко отстоитъ отъ начальнаго обученія, но связь есть несомнѣнно и связь внутренняя, психическая, связь познавательныхъ процессовъ, вообще говоря, довольно однородная у ребенка со взрослымъ. Послѣднюю мысль я позволю себѣ пояснить иначе, во избѣжаніе ея неправильныхъ толкованій. Я думаю, что это непониманіе отношеній и эта трудность усвоенія понятія „больше въ нѣсколько разъ“ зависятъ отъ того, что въ начальномъ обученіи не содержится никакихъ элементовъ этихъ понятій, а не содержится ихъ потому, что начальное обученіе особенно настойчиво проводитъ мысль о томъ, что число есть совокупность однородныхъ счетныхъ единицъ, а въ этой мысли совершенно не содержится идеи отношенія. Болѣе того, мнѣ кажется, что и само опредѣленіе числа въ этомъ направленіи одностороннее и неправильно. Я думаю, что понятіе числа скорѣе содержится въ отношеніи, для котораго совокупность счетныхъ единицъ есть частный случай. Но не находя возможнымъ въ данномъ случаѣ вступить въ споръ по этому вопросу, я утверждаю только, что понятіе числа психологически получается какъ результатъ измѣреній, и только въ этомъ послѣднемъ случаѣ содержитъ тѣ психологическія ассоціаціи, которыя даютъ рядъ идей какъ функціональной зависимости, такъ и конкретныя представленія количества.

Въ самомъ дѣлѣ, современный процессъ преподаванія, подчиняя всѣ операціи надъ числами, съ рѣшеніемъ задачъ включительно, правиламъ, выведеннымъ для отвлеченныхъ чиселъ, забываетъ, что въ именованномъ числѣ, кромѣ его количественнаго содержанія, заключается еще и функціональная зависимость этого именованнаго числа отъ его наименованія. Эта функціональная зависимость дѣлаетъ число инымъ, т. е. съ иными свойствами и качествами, чѣмъ число отвлеченное. Такъ, напр., мы всегда можемъ сложить 5 и 3; но если каждому изъ нихъ припишемъ наименованіе, то дѣйствіе сложенія можемъ произвести только въ томъ случаѣ, когда эти наименованія будутъ тождественны. Мы не только не можемъ сложить 5 пудовъ и 3 аршина, но дѣйствіе не можемъ выполнить безъ дополнительныхъ вычисленій, если дано 5 пудовъ и 3 фунта; 5 саженъ и 3 вершка. Это обстоятельство не является элементарнымъ и требуетъ не только своего разъясненія, но и соотвѣтственной педагогической обработки, т. е. начальное обученіе не можетъ считать эту подробность существующей органически, а должно обратить на нее вниманіе и соотвѣтственно направить самосознаніе ученика.

Для поясненія своей мысли возьму слѣдующій примѣръ. Въ настоящее время, чтобы получить число 5, ребенокъ считаетъ 5 скамеекъ, 5 пальцевъ, 5 карандашей, 5 стульевъ и т. п. Въ этомъ счетѣ однородныхъ предметовъ у него есть слуховой образъ—число пять, есть рядъ конкретныхъ представленій: скамейки, пальцы, карандаши, стулья, въ каждомъ изъ этихъ представленій есть представленіе единичности и совокупности, но совершенно нѣтъ представленія количественности. Само число 5, какъ опредѣленное количество, не содержится въ указанныхъ предметахъ, и ребенокъ долго въ началѣ путаетъ наименованіе пять съ семью, съ десятью, понимая, очевидно, подъ этими терминами только представленіе множественности. Но если мы возьмемъ 5 стакановъ воды и сольемъ ее въ графинъ, то количество воды въ графинѣ дастъ конкретное представленіе числа пять, какъ опредѣленнаго объема, съ одной стороны, а съ другой—опредѣленнаго количества. При этомъ здѣсь не только 5 отдѣльныхъ стакановъ слились въ нѣчто цѣлое, но и это слитіе произошло совмѣстно съ непрерывнымъ измѣненіемъ количественности. Вода, сливаясь, образовала новое цѣлое—графинъ, куда вошло 5 стакановъ. Оно можетъ распасться на эти 5 стакановъ, но это распаденіе не есть разсыпаніе на отдѣльныя счетныя единицы, какъ разсыпаются 5 карандашей, а дѣлимость нѣкотораго цѣлаго на составныя части, т. е. количество воды въ графинѣ больше количества воды въ стаканѣ въ 5 разъ. Эта мысль, хотя не высказанная, уже содержится въ самомъ полученіи числа 5, она является обязательнымъ слѣдствіемъ конкретнаго воспріятія факта. Если мы теперь эти 5 стакановъ воды взвѣсимъ, то въ нихъ будетъ, положимъ, 5 фунтовъ вѣсу (стаканы можно подобрать). Новое число 5 является опять опредѣленнымъ цѣлымъ, производящимъ опредѣленное мускульное ощущенiе. Это мускульное ощущенiе тяжести, связанное со зрительнымъ воспрiятiемъ равновѣсiя вѣсовъ, устанавливаетъ за числомъ 5 новое конкретное воспрiятiе, которое въ связи съ предыдущимъ обязательно влечетъ за собой мысль о функцiональной зависимости объема и вѣса. Эта идея функцiональной зависимости является не только естественнымъ слѣдствiемъ произведеннаго опыта съ объемомъ и вѣсомъ воды, но оно есть развитiе и, какъ бы сказать, нѣкоторый болѣе точный подсчетъ общей идеи тѣхъ зависимостей, которыя устанавливаетъ наука и природныя свойства. Въ психическомъ самосознанiи ребенка эта зависимость не является изолированно стоящимъ фактомъ, но связывается съ общимъ содержанiемъ самосознанiя, а потому имѣетъ обобщительное свойство. Однако, самую идею слѣдуетъ разработать, выяснить ее, такъ какъ она въ будущемъ должна лечь какъ фундаментъ будущаго знанiя. Здѣсь должно быть установлено, что непрерывное измѣненiе объема влечетъ за собою непрерывное измѣненiе вѣса. Отливая по стакану воду изъ графина, мы видимъ, какъ она непрерывно убываетъ. Это непрерывное убыванiе откладывается въ подсознательной области, гдѣ уже благодаря ему закладывается идея непрерывности. Если мы теперь это непрерывное убыванiе будемъ измѣрять вѣсомъ, накладывая гири на ту чашку вѣсовъ, гдѣ находится вода, то эти гири какъ бы прерываютъ непрерывное теченiе, ставя отмѣтки на опредѣленномъ мѣстѣ. Теченiе прерывается на опредѣленномъ промежуткѣ, и это прерыванiе даетъ одновременно и идею измѣренiя, и идею функцiональной зависимости объема и вѣса. Въ этихъ идеяхъ сосредоточивается именно та способность ума, которая необходима для рѣшенiя задачъ. Она затрагиваетъ ту мыслительную способность, гдѣ возникаютъ новыя построенiя въ связи съ изученными, гдѣ умъ находитъ соотношенiя не путемъ логическаго разбора словесной фразы или приложенiя даннаго метода, а внутреннимъ путемъ творческой способности. Но кромѣ того, если ребенокъ самъ будетъ производить эти измѣренiя объема, вѣса, длины и пр., то въ процессѣ этого измѣренiя, въ томъ промежуткѣ времени, которое идетъ на эти измѣренiя, его умъ будетъ искать уясненiя факта, т. е. уясненiя процесса измѣренiя и уясненiя числа. Вода, вытекая изъ еосуда непрерывной струей, самымъ фактомъ своего вытеканiя даетъ идею непрерывности, а прерыванiя этого вытеканiя даютъ идею измѣренiя, идею соотношенiя между объемомъ и количествомъ жидкости, идею зависимости вытеканiя и времени; короче говоря, опытъ непосредственнаго измѣренiя закладываетъ именно то, что составляетъ сущность и основу логическаго мышленія. Собственно само логическое мышленіе есть уже вторичный актъ психической дѣятельности, который наступаетъ послѣ творческаго акта построенія. Самымъ лучшимъ примѣромъ въ этомъ отношеніи можетъ служить слѣдующее наблюденіе. Положимъ, что вамъ нужно рѣшить задачу, рѣшенія которой вы не знаете. Вы думаете надъ ней, прикидывая разныя возможности; всѣ эти возможности не даютъ идеи рѣшенія, тогда вы отбрасываете всякую мысль, и въ вашемъ самосознаніи какъ будто нѣтъ ни словъ, ни мыслей, есть что-то, что не выражается ни тѣмъ, ни другимъ. Вдругъ блеснула идея, къ этой идеѣ вы прикидываете условія, они подходятъ: вы задачу рѣшили, а когда вы ее рѣшили, то излагаете это рѣшеніе, подчиняясь логической конструкціи мысли. Вы какъ будто провѣряете рѣшеніе путемъ логическаго построенія, но самое рѣшеніе вами получено инымъ путемъ; этотъ путь есть творчество. Этотъ процессъ творчества питается не знаніемъ, а наблюденіемъ надъ явленіями природы и фактами общей соціальной жизни. Ребенокъ, наблюдая теченіе воды въ ручьѣ, плаваніе бумажныхъ корабликовъ по этой водѣ, наблюдая движеніе мяча или полетъ стрѣлы, впитываетъ въ себя элементы творческихъ построеній, и потому всѣ эти процессы такъ для него занимательны, что онъ можетъ цѣлыми часами заниматься ими. Наблюдая въ классѣ нѣчто похожее, онъ и здѣсь будетъ впитывать элементы творчества; но эти элементы, направленные учителемъ, дадутъ ему идею функціональныхъ соотношеній и идею числа. Творческій процессъ не находится въ стаціонарномъ состояніи, онъ развивается, расширяется и углубляется, но для этого необходимо упражненіе именно въ этой области, тогда какъ современное обученіе, вводя шаблонъ и типъ, мѣшаетъ этому упражненію, и многіе ученики никогда не испытывали радости творчества, слѣдуя за указкой учителя въ области внутренней мысли. Изученіе функціональныхъ соотношеній не даетъ методовъ мысли, оно даетъ факты, и мысль учащагося сама должна изъ этихъ фактовъ сдѣлать выводы. Каждый выводъ будетъ открытіемъ, дающимъ внутреннее удовлетвореніе, полное радости и счастья. Полное отсутствіе этихъ творческихъ переживаній дѣлаетъ въ современной школѣ такой тяжелой учебную работу, радость и счастье ищутъ для себя иного выхода; не знаніе даетъ счастье, а удовлетвореніе честолюбія, тотъ или иной баллъ, похвала учителя, нѣкоторая высота среди учениковъ въ классѣ и т. п. Чистыя радости творчества ученики переживаютъ рѣдко вообще и почти никогда въ области школьнаго дѣла обученія, именно потому что обученіе даетъ шаблонъ, указку, готовую форму, а не идею, не матеріалъ для созданія формы и для отысканія методовъ рѣшенія вопросовъ. Вопросъ мнѣ кажется настолько важнымъ, что я позволю себѣ еще немного на немъ задержать вниманіе читателя. Пусть ученикъ отмѣриваетъ аршиномъ 10 аршинъ тесемки. Процессъ этого измѣренія, время для него необходимое, мускульное чувство самаго измѣренія, зрительный образъ непрерывно движущейся тесьмы,—все это складывается въ своеобразный комплексъ психическихъ ассоціацій, въ которыхъ полученное число 10 занимаетъ совершенно иное мѣсто, чѣмъ когда ученикъ отсчитываетъ 10 палочекъ и связываетъ ихъ въ пучекъ. Первое даетъ идею функціональной зависимости длины, времени и работы, второе даетъ мгновенное ощущеніе шаблонной счетной работы. Отсчитывая аршины, ученикъ можетъ думать о способахъ болѣе удобнаго отсчета, о томъ, какъ лента мало-по-малу ложится на аршинъ, и сравнивать это воспріятіе съ тѣмъ, когда дорога мало-по-малу уходитъ куда-то назадъ, и движущійся экипажъ достигаетъ до мѣста назначенія. Связь движенія, времени и пространства здѣсь получаетъ нѣкоторый матеріалъ, котораго совершенно не даетъ пучекъ въ 10 палочекъ.

Я, конечно, не могу ручаться, что предложенный мною методъ обученія дастъ возможность проникнуть въ область творческихъ идей, но онъ представляетъ собой попытку въ этомъ отношеніи.

Скажу теперь нѣсколько словъ о недостаткахъ предлагаемаго курса. Главнымъ недостаткомъ я считаю его теоретическое построеніе, лишенное провѣрочнаго опыта. Современный курсъ, соприкасаясь непосредственно съ мыслью учащихся, невольно воспринялъ отъ нихъ тѣ психологическіе элементы мысли, которые въ нихъ заложены. Новый курсъ, не имѣя этого соприкосновенія, лишенъ этой доли восполненія; но я думаю, что если найдутся лица, сочувствующія моей основной идеѣ, то они по указаніямъ опыта переработаютъ мою мысль и дадутъ тотъ практическій курсъ, который можетъ съ выгодой замѣнить существующій шаблонъ, неудобство котораго ясно сознается очень многими преподавателями.

Я выпускаю пока только первый годъ обученія, такъ какъ считаю, что именно этотъ годъ и является основнымъ для всѣхъ учащихся; въ теченіе его закладываются тѣ психическія ассоціи, которыми человѣкъ уже живетъ всю жизнь, иногда совершенно отказываясь понять, зачѣмъ нужно учиться ариѳметикѣ. Очень часто встрѣчаются даровитые люди, которые считаютъ себя совершенно неспособными къ математикѣ и только изъ уваженія къ этой обширной области знанія не рѣшаются утверждать, что она совершенно безцѣльна и является лишней въ кругу общеобразовательныхъ предметовъ. Причиной такого печальнаго явленія я считаю первые шаги ихъ математическаго обученія и думаю, что ихъ молодой и пытливый умъ въ раннемъ уже дѣтствѣ не могъ помириться съ установившимся шаблономъ обученія и задавалъ вопросы, на которые не могъ получить отвѣтовъ, а потому и ушелъ въ иныя области, гдѣ эти отвѣты имъ были получены. Первый годъ обученія есть основа всего будущаго знанія, и его недостатки гораздо болѣе серьезны, чѣмъ это кажется на первый взглядъ.

Мнѣ могутъ поставить въ упрекъ то, что предлагаемый курсъ очень дорогъ. Всѣ рекомендуемыя мною пособія требуютъ большихъ затратъ, особенно при многолюдствѣ классовъ. Но я думаю, что практика многое удешевитъ. Кромѣ того, очень желательно, чтобы многое было сдѣлано учениками старшихъ классовъ или самими дѣтьми. Къ числу такихъ приборовъ относятся вѣсы, о которыхъ вообще нужно сказать нѣсколько словъ. Школьные вѣсы для перваго года обученія не должны быть чувствительны, чтобы тѣмъ самымъ облегчить возможность полученія равновѣсія при неточномъ взвѣшиваніи. Въ силу этого они должны быть или особо приготовлены, или, еще лучше, сдѣланы самими дѣтьми изъ линейки или деревяннаго стержня, въ средину котораго вставленъ металлическій стержень, опирающійся на какія-либо подставки. Эти подставки могутъ быть заказаны столяру или пріобрѣтены въ магазинѣ. На концахъ стержня можно высверлить углубленія, въ которыя ставить предметы и разновѣсъ, чтобы оба груза всегда приходились на одномъ и томъ же мѣстѣ. Такіе вѣсы будутъ лучшими вѣсами для перваго года: они и дешевы и удобны, потому что мало чувствительны. Въ классѣ должны быть хорошіе настоящіе вѣсы торговаго типа, быть можетъ, не въ одномъ экземплярѣ, но они должны находиться или у учителя или на особыхъ мѣстахъ; на этихъ вѣсахъ ученики могутъ взвѣшивать съ большею точностью и приготовлять гири. Вопросъ о гиряхъ также важенъ. Разновѣсъ вообще стоитъ дорого, а между тѣмъ, очень желательно, чтобы каждый ученикъ могъ съ нимъ оперировать. Въ силу этого они или сами или ихъ старшіе товарищи могутъ надѣлать или свинцовыхъ плитокъ даннаго вѣса, или мѣшечковъ съ пескомъ, или деревянныхъ коробочекъ съ дробью, или что-либо иное. Но въ это же время въ классѣ у учителя долженъ быть настоящій торговый разновѣсъ въ нѣсколькихъ экземплярахъ.

По поводу разновѣса слѣдуетъ сказать еще нѣсколько словъ. Дѣло въ томъ, что въ обыденной жизни наиболѣе распространенная мѣра вѣса есть фунтъ, но если самый фунтъ вообще очень удобенъ, то накопленіе фунтовъ уже совершенно неудобно по своему вѣсу. Если мы будемъ взвѣшивать фунтами, то 5 фунтовъ тяжело для ребенка, 10 ему будетъ трудно поднять. Вотъ почему для непосредственнаго взвѣшиванія самими учениками я ввожу вѣсовую мѣру лотъ, которая по своему вѣсовому достоинству очень удобна, но въ жизни настолько мало извѣстна, что многіе предлагаютъ ее совершенно выбросить изъ курса школы. Во всякомъ случаѣ это мѣра искусственная, и эта искусственность нѣсколько мѣшаетъ ея введенію: приходится учениковъ знакомить съ мѣрой, о которой они ничего не слышали. Золотникъ взять тоже неудобно, такъ какъ онъ очень малъ. Такимъ образомъ, вводя фунтъ, какъ мѣру вѣса при объясненіи учителя, я взялъ все-таки лотъ для самихъ учениковъ, сознавая его неудобство. Въ вѣсовомъ отношеніи лотъ оказался очень удобенъ, такъ какъ даетъ хорошія числовыя отношенія къ золотникамъ, а потому позволяетъ поставить рядъ задачъ; онъ даетъ достаточное по объему количество песку, не слишкомъ большое и не слишкомъ малое.

Если бы кому показалось, что лотъ является мѣрой неудобной, то ничто не мѣшаетъ тѣ же задачи перевести на фунты или на золотники; здѣсь, конечно, на первомъ планѣ стоитъ идея, и предлагаемое есть только форма и, быть можетъ, не наилучшая. Теперь слѣдуетъ сказать еще о пескѣ и приготовленіи для него сосудовъ. Практически это выходитъ нѣсколько неудобно, такъ какъ если каждому ученику дать по 5 сосудовъ, а въ классѣ будетъ 50 учениковъ, то приходится приготовить 250 сосудовъ. Кромѣ того, ихъ нужно разставить, каждому дать чашку съ пескомъ, и этотъ песокъ будетъ просыпаться и сориться. Все это вѣрно, и въ этомъ отношеніи могутъ быть только два выхода: или предложить ученикамъ запастись такими сосудами по типу, или же отмѣнить задачи съ пескомъ, оставивъ ихъ въ классѣ для упражненія учениковъ по вызову. Тогда ученики не всѣ имѣютъ сосуды, а все это находится на отдѣльномъ столикѣ, гдѣ помѣщаются и вѣсы; учитель вызываетъ ученика, и онъ производитъ взвѣшиваніе передъ классомъ. Такая конструкція вполнѣ возможна; мнѣ лично только кажется, что одновременный личный опытъ каждаго ученика въ классѣ дастъ ему больше, чѣмъ совокупность наблюденій, и самый урокъ мнѣ рисуется какъ-то стройнѣе при этомъ; но соглашаюсь, что необходимость можетъ привести и къ такой упрощенной постановкѣ, которая все-таки будетъ много лучше современнаго сосчитыванія палочекъ.

Быть можетъ, скажутъ также и то, что опыты съ пескомъ, интересные вначалѣ, будутъ утомительны при ихъ повтореніи,— этого я не знаю и думаю, что если учитель замѣтитъ утомленіе и усталость, то ничто ему не мѣшаетъ опустить эти опыты, оставивъ остальные, или введя что-либо новое. Повторяю, что при отсутствіи опытной повѣрки очень трудно сказать, какъ это дѣло можетъ пойти практически, и мнѣ лично очень бы хотѣлось вызвать самодѣятельность учителя, давъ ему одну только идею и указавъ приблизительно ея выполненіе.

Указанное далеко не исчерпываетъ всѣхъ недостатковъ курса, а потому, выпуская свою методику, я разсчитываю, что критика очиститъ мою основную идею отъ увлеченій и дастъ возможность построить болѣе правильный курсъ обученія. За всякія указанія приношу заранѣе мою искреннюю благодарность.

Дм. Галанинъ.

Наглядныя пособія.

1. Деревянныя линейки длиною въ 1 аршинъ, раздѣленныя на вершки.

2. Деревянныя линейки длиною въ 1 футъ, раздѣленныя на дюймы.

3. Клубокъ тесемки въ нѣсколько аршинъ.

4. Листъ бѣлой бумаги, раздѣленный на квадраты въ 1 кв. д., при чемъ по линіямъ дѣленія пробиты дырочки, чтобы квадраты легко можно было оторвать.

5. Такой же листъ бумаги съ квадратами въ 1 кв. вершокъ.

6. Нѣсколько листовъ цвѣтной бумаги.

7. Десть бѣлой бумаги, сложенная такъ, какъ она продается, въ тетради по 6 листовъ.

8. Цилиндрическія кружки, подобранныя по объему такъ, чтобы кружка съ пескомъ, въ нее насыпаннымъ, вѣсила 1 лотъ, такихъ кружекъ должно быть 5; потомъ двѣ кружки емкостью по 2 лота каждая; кружка емкостью въ 5 лотовъ и кружка въ 10 лотовъ съ пескомъ.

9. Чашки съ пескомъ.

10. Коробочка съ мелкой дробью въ количествѣ 3-хъ фунт.

11. Коробочка съ какимъ-либо зерномъ въ количествѣ 3-хъ фунт.

12. Вѣсы самодѣльные.

13. Разновѣсъ: 5 гирекъ по 1 лоту, 2 гирьки по 2 лота, гирьки въ 5 лотовъ, гирьки въ 10 лотовъ, 2 гирьки по 20 лотовъ, гирьки въ 50 лотовъ и гирьки въ 100 лотовъ.

14. Обыкновенный торговый фунтъ разборный.

15. Гирьки по 1 золотнику, по 2 золотника, по 3 золотника, по 4 золотника, по 5 золотниковъ.

16. Оловянныя плитки вѣсомъ въ 1 лотъ, 1 золотникъ, 2, 3, 4 и 5 лотовъ и такія же въ 2, 3, 4, 5 золотниковъ. Плитка вѣсомъ въ 1 фунтъ, $1/2$ фунта и $1/4$ фунта.

17. 10 бумажныхъ моделей монетъ по 1 копейкѣ; монеты въ 2, 3, 5 и 10 к.

Кромѣ того, въ классѣ должна находиться модель сажени и разборная модель квадратной сажени, которую можно было бы заполнить кв. аршинами и кв. футами. Должны быть хорошіе вѣсы, всего удобнѣе Роберваля, и высокій цилиндрическій сосудъ съ краномъ внизу для наполненія водой. По стѣнкѣ сосуда должны быть проведены черты, отмѣчающія стаканы, при чемъ стаканы я предполагаю мѣрные, такъ чтобы вода въ стаканѣ вѣсила 1 фунтъ.

Глава I.

Счетъ до 10 включительно.

§ 1. Понятіе объ единицѣ.

Число одинъ. Изображеніе числа I. Понятіе о количествахъ равныхъ и неравныхъ. Величины однородныя и разнородныя.

Дѣти, поступающія въ школу, несутъ съ собой запасъ опыта и наблюденій изъ обыденной жизни; но въ то же время они въ школѣ попадаютъ въ новую обстановку, въ которой и отъ которой они ждутъ новыхъ впечатлѣній, подобно тому, какъ путешественникъ, пріѣзжающій въ новый городъ, ожидаетъ въ немъ испытать новыя освѣжающія впечатлѣнія и наблюденія. Если школа не дастъ этого новаго, если она не будетъ отличаться отъ обыденной будничной жизненной обстановки, то дѣти разочаруются въ ней, какъ будетъ разочарованъ путешественникъ, не найдя на новомъ мѣстѣ ничего занимательнаго и ничего интереснаго. Школа не должна забывать, что, какъ бы то ни было, она составляетъ новую страницу въ жизни ученика, и эта новая страница должна содержать новый матеріалъ, связанный съ предыдущимъ, логически вытекающій изъ предыдущаго и психологически обоснованный на предыдущемъ, но непремѣнно новый, понятный и интересный.

Въ настоящее время мы присутствуемъ на первомъ урокѣ ариѳметики, когда ученики еще только осматриваются въ новомъ положеніи, когда ихъ вниманіе полно новыми наблюденіями новой обстановки; они еще не освоились со всѣми подробностями своего новаго положенія, но въ этомъ положеніи что-нибудь должно концентрировать на себѣ ихъ вниманіе, занять ихъ мысль, дать содержаніе ихъ наблюденію.

Вотъ почему въ началѣ обученія необходимо концентрировать вниманіе на небольшомъ числѣ объектовъ, но эти объекты не должны быть взяты изъ обыденной жизни и хотя по своему существу должны быть настолько просты, чтобы не затруднять учениковъ, но въ то же время нѣсколько необычны, чтобы новыя понятія ассоціировались съ новыми представленіями, а не уходили въ область обычныхъ житейскихъ ассоціацій, гдѣ трудно уже выдѣлить новое понятіе и найти для него особое конкретное воплощеніе. Поэтому я считаю необходимымъ, чтобы на первомъ урокѣ ученики получили на руки только часть указанныхъ наглядныхъ пособій, а именно: листъ съ отрывными квадратами въ 1 дюймъ и 1 вершокъ, два листа цвѣтной бумаги, на которыхъ полезно начертить нѣсколько такихъ же квадратовъ, но не однородныхъ, а такъ, чтобы рядомъ съ квадратомъ въ 1 кв. дюймъ находился квадратъ въ 1 кв. вершокъ. Кромѣ этихъ листовъ бумаги, ученикамъ можно дать гирю въ 1 фунтъ, положить у каждаго очиненный карандашъ и обыкновенную ученическую тетрадь съ клѣточками.

У учителя должны находиться подъ рукой два одинаковыхъ графина, изъ которыхъ одинъ можно наполнить водой, а другой оставить пустымъ; два стакана и гири въ 1 фунтъ и 5 фунтовъ. На доскѣ нужно прикрѣпить кнопками два квадрата въ 1 кв. футъ и 1 кв. аршинъ, эти квадраты должны быть разныхъ цвѣтовъ; кромѣ того, нужно, чтобы подъ руками находились два одинаковыхъ бѣлыхъ квадрата, положимъ, въ 1 квадр. аршинъ каждый.

Урокъ начинается съ выясненія однородныхъ и разнородныхъ предметовъ. Учитель ставитъ на столъ гирю и графинъ, называя эти предметы и заставляя учениковъ ознакомиться съ этими наименованіями. Потомъ спрашиваетъ, можно ли вмѣсто гири взять графинъ и обратно, почему этого нельзя сдѣлать? Какъ можно назвать (характеризовать) эти предметы? (они различные). Затѣмъ учитель называетъ квадраты, наклеенные на доску, и знакомитъ учениковъ съ наименованіемъ „квадратъ“, потомъ спрашиваетъ, что графинъ, гиря и квадратъ какіе будутъ предметы— одинаковые или разные? Когда ученики достаточно ознакомятся съ различными предметами и поймутъ сущность ихъ различія по тому признаку, что одинъ предметъ нельзя замѣнить другимъ и что каждый имѣетъ свое особое употребленіе, имъ слѣдуетъ показать однородные предметы: два одинаковыхъ бѣлыхъ квадрата, два стакана, два карандаша и т. п. Всѣ эти упражненія, конечно, не займутъ много времени, потому что понятіе однородности уже есть у учениковъ, но въ школѣ необходимо на него указать и этимъ выдѣлить его изъ прочихъ житейскихъ понятій, какъ особо важное при обученіи ариѳметикѣ. Послѣ того, какъ дѣти будутъ вполнѣ правильно выдѣлять однородные и разнородные предметы, имъ можно назвать число одинъ и спросить ихъ: сколько графиновъ стоитъ на столѣ? Сколько синихъ квадратовъ наклеено на доскѣ? Сколько у каждаго карандашей? Сколько тетрадей? Сколько гирь? Число одинъ само по себѣ также не представитъ затрудненія, а потому не слѣдуетъ особенно долго на немъ останавливаться и перейти къ сравненію величинъ. Вотъ на доскѣ наклеены два квадрата, красный и синій, одинаковы ли они? Что въ нихъ разнаго? (Цвѣтъ и величина). Который изъ нихъ больше? Какъ убѣдиться, что одинъ больше другого? (Наложить одинъ на другой). Возьмите по одной гирькѣ въ каждую руку, какъ вы думаете, одинаковыя ли онѣ? Учитель ставитъ на столъ двѣ свои гири и спрашиваетъ учениковъ, которая изъ нихъ тяжелѣе, почему? Оторвите отъ листа одинъ квадратикъ и вырѣжьте изъ красной бумаги такой же квадратъ. Какъ это сдѣлать? Оторвите отъ другого листа одинъ квадратъ и вырѣжьте изъ синей бумаги такой же квадратъ. Сколько у васъ красныхъ квадратовъ? Сколько синихъ? Одинаковы ли они? Сколько бѣлыхъ, равныхъ красному? Сколько равныхъ синему?

Затѣмъ учитель показываетъ, что число одинъ изображается черточкой, и заставляетъ дѣтей нарисовать ее въ тетрадяхъ нѣсколько разъ.

Въ вышеизложенномъ я, конечно, не разсматриваю урока во всемъ цѣломъ, а указываю только методъ, предоставляя самодѣятельности учителя его разработку. Основная цѣль урока есть разработка понятій объ однородныхъ и разнородныхъ предметахъ, при чемъ самая однородность указываетъ не на полную тождественность, а только въ сравненіи по какому-либо признаку. Такъ, цвѣтные квадраты на доскѣ не тождественны, но однородны по своей величинѣ. Хотя на эту сторону и не обращено вниманіе учениковъ, но легко можетъ быть, что именно это и возбудитъ въ ихъ самосознаніи вопросы и недоумѣнія, а если эти вопросы не будутъ разрѣшены учителемъ, даже затронуты имъ, тогда такой методъ явится ошибочнымъ, и нужно будетъ его замѣнить другимъ, гдѣ наглядныя пособія были бы не только однородны, но и тождественны. Указывая на возможность психологической ошибки перваго урока, я, однако, предоставляю это провѣркѣ опыта, такъ какъ думаю, что, съ другой стороны, именно эта нетождественность дастъ ученикамъ идею однородности или идею сравнимости предметовъ по какому-либо признаку. Въ методикѣ Лайя рекомендуется названіе единичныхъ предметовъ въ классѣ: одинъ шкафъ, одна каѳедра; потомъ единичныхъ частей тѣла: носъ, ротъ, голова; потомъ зданія: школа, церковь и прочее. Я бы съ своей стороны думалъ, что такое упражненіе по своей идеѣ не отвѣчаетъ цѣли даннаго урока, который долженъ выяснить не единичность, а понятіе о счетной единицѣ, т. е. дать представвленіе объ единицѣ среди множества. Въ силу этого я думаю, что разговоры на тему объ единичности, если они возникнутъ по почину самихъ учениковъ, умѣстны, но методическое указаніе на единичность является ошибочнымъ. Гораздо плодотворнѣе другое указаніе Лайя, это понятіе о множествѣ, единицѣ и нулѣ при помощи счетнаго прибора, когда учитель кладетъ много косточекъ и спрашиваетъ, сколько косточекъ положено. (Много). Кладетъ одну косточку и спрашиваетъ, сколько косточекъ положено. (Одна). Не кладетъ ни одной косточки. Это понятіе единичности и множественности имѣетъ большое психологическое значеніе, и, быть можетъ, было бы полезно и на предложенныхъ мною наглядныхъ пособіяхъ сказать нѣсколько словъ, хотя бы спросивъ дѣтей, сколько квадратовъ находится въ листѣ? Сколько такихъ, какіе они видятъ на доскѣ? (Ни одного).

Совершенно также я считаю въ высшей степени важной и ту подробность въ указаніяхъ Лайя, когда онъ говоритъ о воспріятіи звуковъ, о представленіи объекта счета съ закрытыми глазами.

Что касается до звуковъ, напр., счета удара метронома, то я воспользуюсь имъ въ дальнѣйшемъ, не затрудняя дѣтей на первомъ урокѣ обиліемъ разнообразнаго матеріала; но упражненіе въ представленіи видѣнныхъ предметовъ я бы рекомендовалъ ввести съ перваго урока. Такъ, я бы предложилъ ученикамъ, закрывъ глаза, представить себѣ квадратъ на доскѣ и квадратъ, вырѣзанный ими изъ листа квадратовъ, и спросилъ бы ихъ, который больше. Представьте себѣ синій и красный квадратъ, вырѣзанный вами, какой изъ нихъ больше? (Они равны).

Итакъ, главная цѣль урока есть выясненіе того, что изъ ряда однородныхъ предметовъ мы должны взять одинъ, и этотъ одинъ является числомъ одинъ, которое и можетъ быть изображено въ видѣ палочки. Въ разработкѣ именно этой идеи я и вижу цѣль и смыслъ перваго урока, указывая для него подходящій матеріалъ. Повторяю еще разъ, что эта идея должна быть только воспринята, разработана, но не формулирована словами. Ученики отвѣчаютъ на вопросы, и по ихъ отвѣтамъ учитель судитъ, насколько хорошо они его понимаютъ.

§ 2. Ознакомленіе съ числомъ два.

Выработка понятій „прибавить“ и „отнять“. Понятіе объ остаткѣ. Знакомство съ новыми наглядными пособіями. Изображеніе числа два II.

Дѣти имѣютъ у себя на рукахъ листы бумаги съ квадратами, которые они имѣли на первомъ урокѣ, цвѣтную бумагу и сосудъ съ пескомъ, изъ котораго песокъ можно насыпать въ кружки; у каждаго стоятъ три кружки: двѣ одинаковыхъ и одна вдвое больше. На столѣ у учителя находится также песокъ и такія же кружки, но, кромѣ того, еще графинъ съ водой, два одинаковыхъ стакана и стеклянный цилиндрическій сосудъ емкостью больше двухъ стакановъ.

Урокъ начинается съ того, что учитель спрашиваетъ, одинаковы ли стаканы, стоящіе на столѣ, потомъ наливаетъ въ одинъ стаканъ воды и спрашиваетъ, сколько стоитъ стакановъ съ водой и сколько пустыхъ? Затѣмъ наливаетъ водой другой стаканъ и говоритъ самъ, что на столѣ стоятъ два стакана съ водой. Число два ученики повторяютъ. Оба стакана учитель выливаетъ въ большой стеклянный сосудъ и спрашиваетъ, сколько стакановъ воды налито? Потомъ одинъ стаканъ отливаетъ,—сколько стакановъ осталось? Сколько кружекъ для песка находится на столѣ? Насыплемъ одну кружку пескомъ,—сколько кружекъ съ пескомъ и сколько пустыхъ?

Насыплемъ обѣ кружки пескомъ, сколько кружекъ съ пескомъ?

Высыплемъ песокъ въ большую кружку, сколько кружекъ песку въ большой кружкѣ?

Далѣе учитель переходитъ къ самостоятельнымъ упражненіямъ учениковъ и предлагаетъ имъ насыпать пескомъ одну изъ своихъ кружекъ, при этомъ является вопросъ, какъ насыпать кружку пескомъ? Здѣсь важно до какого предѣла слѣдуетъ насыпать кружку. Учитель говоритъ, что кружка должна быть полная, но практически необходимо, чтобы она не была полна до краевъ, а чтобы сверху было пространство, не засыпанное пескомъ; благодаря этому удобнѣе песокъ пересыпать. Вслѣдствіе этихъ затрудненій на эту манипуляцію придется потратить время, научивъ учениковъ, какъ это нужно дѣлать, при чемъ, конечно, нельзя требовать какой-либо точности; если кружка насыпана больше половины, то можно считать, что она насыпана сполна. Этотъ перерывъ въ занятіи, по моему мнѣнію, важенъ, такъ какъ онъ на время отвлекаетъ вниманіе отъ счета и въ то же время психологически ассоціируется со счетомъ. Въ самосознаніи учениковъ еще бродитъ число 2 и число 1, эти числа только что ассоціировались съ пескомъ, а теперь нужно самимъ насыпать тотъ же песокъ: ассоціація растетъ, къ ней присоединяется зрительное и мускульное воспріятіе въ той гарантіи, которая соотвѣтствуетъ собственному опыту. Когда дѣло наладилось и ученики насыпали по кружкѣ, учитель спрашиваетъ, сколько кружекъ насыпано пескомъ? Насыпьте пескомъ другую кружку, сколько теперь кружекъ съ пескомъ? Пересыпьте песокъ въ большую кружку сколько тамъ насыпано песку? Насыпьте еще одну кружку песку и высыпьте ее въ большую кружку, сколько теперь кружекъ песку насыпано? Разсыпьте этотъ песокъ по кружкамъ, сколько кружекъ у васъ съ пескомъ? Пересыплемъ песокъ опять въ большую кружку, сколько тамъ песку? Отсыплемъ одну кружку,—сколько осталось?

Во всѣхъ этихъ упражненіяхъ встрѣчаются слова: „оба", „другой", „два". Комбинація этихъ словъ и ихъ индивидуальный смыслъ не должны быть указаны, но ихъ употребленіе само собой ассоціируетъ другъ съ другомъ, и самосознаніе должно уже само выдѣлить въ нихъ количественное и порядковое понятія. Кромѣ того, разрабатывая понятія прибавить и отнять, по моему, не слѣдуетъ здѣсь употреблять эти слова, такъ какъ раннее употребленіе словъ можетъ помѣшать установленію самыхъ понятій въ самосознаніи. Естественное выраженіе присыпать и отсыпать совершенно достаточно, чтобы зародить идею прибавленія, и этой идеи пока совершенно достаточно. Слово „остается" слѣдуетъ употребить, какъ житейское понятіе, которое въ данномъ случаѣ трудно замѣнить другимъ.

Покончивъ съ пескомъ, учитель переходитъ къ квадратамъ и предлагаетъ ученикамъ отнять одинъ квадратъ отъ листа, затѣмъ еще одинъ квадратъ,—сколько квадратовъ вы отняли? Наклеимъ эти квадраты на красный листъ съ обратной стороны и вырѣжемъ полученную полоску. Оторвите еще два квадрата и, наклеивъ ихъ на синюю бумагу, вырѣжьте другую полоску. Сколько полосокъ бумаги вы вырѣзали? Наложите эти полоски на бѣлый листъ и оторвите полученную фигуру. Согните каждую полоску пополамъ и разрѣжьте по линіи сгиба. Сколько красныхъ квадратовъ вы получили? Сколько синихъ? Уложите эти квадраты въ большомъ квадратѣ, какъ это можно сдѣлать? Снимите съ большого квадрата одинъ красный квадратъ, сколько красныхъ квадратовъ осталось? Сколько синихъ? Снимите еще одинъ синій квадратъ, сколько теперь осталось синихъ квадратовъ?

Всѣ эти упражненія займутъ, вѣроятно, болѣе одного урока, а потому ихъ придется раздѣлить на два урока, тогда часть каждаго урока необходимо посвятить письму, записывая число два въ видѣ двухъ черточекъ, какъ римскую цифру.

§ 3. Ознакомленіе съ числомъ три.

Дальнѣйшее развитіе понятій прибавить и отнять. Прибавленіе по одному; отниманіе по одному. Новое наглядное пособіе—аршинъ. Изображеніе числа три III. Выясненіе понятій больше и меньше. Понятіе, насколько одна величина больше другой.

Ученики получаютъ на руки тѣ же листы бумаги съ квадратными клѣтками; цвѣтные листы въ три цвѣта: красный, синій и желтый. У нихъ находится тотъ же песочный приборъ и по три стакана маленькихъ, стаканъ вдвое большій и стаканъ втрое большій, кромѣ того, линейка въ 1 аршинъ, раздѣленный на вершки. Въ классѣ находится модель сажени въ видѣ стоящаго столбика на тяжелой подставкѣ. Въ рукахъ у учителя находится такой же аршинъ, такіе же стаканы и, кромѣ того, графинъ съ водой, три стеклянныхъ стакана и большой стеклянный сосудъ емкостью больше трехъ стакановъ. Кромѣ того, очень полезно, чтобы классная доска и парты имѣли точныя мѣры: длина доски въ 1 сажень, а классная парта имѣла бы верхнюю доску ровно въ 2 аршина длины. Кромѣ того, дѣтямъ раздается клубокъ тесьмы по 1 сажени. Урокъ начинается съ того, что учитель знакомитъ дѣтей съ новымъ нагляднымъ пособіемъ—аршиномъ и заставляетъ запомнить это слово. Потомъ аршины сравниваются другъ съ другомъ, и дѣти убѣждаются не только въ однородности величинъ и въ ихъ равенствѣ, но и въ полномъ тождествѣ всѣхъ аршинъ въ классѣ. Отсюда слѣдуетъ сдѣлать выводъ, что измѣреніе длины чего-нибудь не зависитъ отъ того, какимъ аршиномъ эта длина будетъ измѣряться. Указывается еще на то, что вмѣсто того, чтобы сложить два аршина одинъ къ одному, можно переложить одинъ и тотъ же аршинъ два раза. Вначалѣ учитель предлагаетъ измѣрить длину стола, его ширину и спрашиваетъ, сколько аршинъ въ длинѣ стола и сколько въ ширинѣ. Слова „длина“ и „ширина“ могутъ и не фигурировать въ объясненіи, а можно только показать, что именно надо измѣрить. Затѣмъ учитель предлагаетъ дѣтямъ отмѣрить аршинъ тесемки и отрѣзать этотъ кусокъ. Измѣрить оставшуюся часть тесемки, сколько въ ней аршинъ? Смѣряйте, сколько аршинъ въ длинѣ парты. Когда такимъ образомъ дѣти достаточно познакомятся съ новымъ нагляднымъ пособіемъ, учитель измѣряетъ модель сажени и говоритъ, что здѣсь 3 аршина.

Число три ученики должны повторить нѣсколько разъ, чтобы оно хорошо запомнилось. Ученики измѣряютъ классную доску и находятъ, что въ ней тоже три аршина. Здѣсь полезно вновь показать, что можно по длинѣ доски уложить три отдѣльныхъ аршина и, что все равно, можно переложить одинъ аршинъ три раза. Полезно, чтобы это измѣреніе было сдѣлано многими учениками, притомъ тѣмъ и другимъ способомъ. Затѣмъ измѣряется тесемка, въ которой находятъ также 3 аршина. Эта тесемка сравнивается съ разрѣзанной тесемкой и ставится вопросъ,—что обѣ тесемки были одинаковой длины или нѣтъ? Какъ узнать, что больше,–2 аршина или 3 аршина? Сколько останется, если отъ трехъ аршинъ отрѣзать одинъ? Сколько останется, если отъ трехъ аршинъ отрѣзать два? Сколько будетъ, если къ 2 аршинамъ прибавить одинъ? Возьмемъ аршинъ, отмѣримъ его длину на тесемкѣ, потомъ прибавимъ еще одинъ аршинъ тесемки, сколько аршинъ мы отмѣряли? Сколько будетъ, если къ одному аршину прибавить 2 аршина?

Я думаю, что какъ самое слово аршинъ, такъ еще болѣе способъ измѣренія при помощи аршина не являются настолько простыми, чтобы всѣ ученики могли хорошо усвоить въ одинъ урокъ. Мнѣ кажется далѣе, что это обстоятельство не должно мѣшать ни введенію этого пособія при изученіи числа 3, ни тому, чтобы опасаться, что нѣкоторая неясность понятій у нѣкоторыхъ учениковъ можетъ вредно отразиться на обученіи. Здѣсь важно то, что ученикамъ дана идея, затронуто ихъ мышленіе, и надо время, чтобы процессъ этого мышленія могъ протечь въ самосознаніи учениковъ. Вотъ почему я думаю, что особенно настаивать на полномъ выясненіи указаннаго метода новаго измѣренія не стоитъ, а, продѣлавъ вышеизложенное, перейти къ уже знакомымъ нагляднымъ пособіямъ и на каждомъ изъ нихъ вновь проработать тѣ же вопросы.

Итакъ, учитель оставляетъ аршинъ до слѣдующаго урока, переходитъ къ измѣренію объемовъ. Поставивъ на столѣ 3 одинаковыхъ стакана, спрашиваетъ учениковъ, сколько стакановъ стоитъ на столѣ? Одинаковы ли они? Можно ли употреблять каждый изъ нихъ для отмѣриванія воды? Онъ наливаетъ всѣ три стакана водой и спрашиваетъ, сколько стакановъ налито водой? Потомъ выставляетъ большой сосудъ и переливаетъ эту воду въ этотъ сосудъ и спрашиваетъ, сколько налито стакановъ воды. Какъ можно то же самое сдѣлать иначе? (Ученики должны сказать, что можно налить по одному стакану три раза). Отольемъ теперь одинъ стаканъ, сколько стакановъ воды осталось въ сосудѣ? Отольемъ еще одинъ стаканъ, сколько теперь осталось? Выльемъ всю воду въ графинъ и отольемъ изъ него одинъ стаканъ, можно ли сказать, сколько стакановъ воды осталось въ графинѣ? Почему этого нельзя сказать? Что надо сдѣлать, чтобы можно было сказать, сколько воды осталось въ графинѣ?

Тѣ же упражненія продѣлываются съ пескомъ, при чемъ главное вниманіе обращается на то, что пересыпать три стакана въ большой сосудъ все равно, что насыпать три раза по одному стакану, и здѣсь можно возбудить вопросъ о томъ, почему это все равно, можно ли бы было сказать то же самое, если бы стаканы были не одинаковы? Потомъ учитель беретъ стаканъ, равный единицѣ, и стаканъ, равный двумъ, насыпаетъ пескомъ первый и пересыпаетъ песокъ во второй, сколько песку насыпано въ стаканъ? Насыплемъ еще одинъ стаканъ песку и пересыплемъ его туда же, сколько теперь насыпано песку? Пересыплемъ песокъ изъ двойного стакана въ тройной, сколько насыпано песку? (2 стакана). Сколько стакановъ еще можно насыпать? Насыплемъ тройной сосудъ пескомъ, сколько стакановъ песку въ немъ? Отсыплемъ одинъ стаканъ, сколько осталось? Отсыплемъ еще стаканъ, сколько осталось? Повторимъ то же упражненіе, но отсыплемъ сразу не одинъ, а два стакана, сколько песку осталось? Въ сосудѣ насыпанъ стаканъ песку, сколько стакановъ надо присыпать, чтобы было 3 стакана?

Всѣ эти упражненія ученики продѣлываютъ каждый на своемъ песочномъ приборѣ и опытомъ получаютъ остатки, суммы, которыя можно повѣрять каждый разъ. Такимъ образомъ, въ ихъ самосознаніи начинаетъ укладываться идея, что емкость сосуда въ три стакана равна тремъ емкостямъ сосуда въ одинъ стаканъ, и попутно съ этимъ выясняется счетъ по одному, сумма 2 и 1; 1 и 2; 3 безъ 1; 3—2 и пр. Съ переходомъ къ отвлеченному счету я бы повременилъ до полнаго выясненія понятія о числѣ. Полученныя конкретныя представленія, связанныя со способомъ измѣренія, даютъ одновременно идеи о количествѣ и числѣ; разъединять эти идеи въ данный моментъ я считаю преждевременнымъ, да и само число три еще нужно проработать на квадратахъ. Здѣсь полезно произвести рядъ слѣдующихъ упражненій.

Оторвите отъ листа бумаги одинъ квадратъ, потомъ еще одинъ и еще одинъ, сколько квадратовъ вы оторвали? Наклеите эти квадраты одинъ на синій листъ, другой на красный, третій на желтый и вырѣжьте эти цвѣтные квадраты. Одинаковы ли они? Что въ нихъ одинаково и что нѣтъ? Оторвите отъ бѣлаго листа полоску въ 3 квадрата, на сколько отдѣльныхъ квадратовъ ее можно разрѣзать? Оторвемъ отъ нея одинъ квадратъ, сколько квадратовъ осталось? Оторвите еще полоску въ 3 квадрата и оторвемъ отъ нея два квадрата. Сколько квадратовъ осталось? Наложимъ полоску въ одинъ квадратъ на полоску въ 2 квадрата, которая изъ нихъ больше? На сколько она больше? Сравнимъ полоски въ 3 квадрата и въ 2 квадрата, которая изъ нихъ больше и насколько?

Оторвемъ теперь три полоски по 3 квадрата въ каждой, наклеимъ одну изъ нихъ на синюю, другую на красную, третью на желтую бумаги, и выръжемъ цвътныя полоски, какъ велика величина каждой? Сложимъ ихъ другъ съ другомъ длинными сторонами и положимъ на бѣлую бумагу. Оторвемъ кусокъ, равный всѣмъ этимъ полоскамъ.

Разрѣжемъ каждую полоску на 3 квадрата, сколько мы получимъ красныхъ квадратовъ? Сколько синихъ и сколько желтыхъ? Наложимъ эти квадраты на большой квадратъ, какъ это можно сдѣлать? Здѣсь получается около 16 комбинацій, и дѣтямъ самимъ слѣдуетъ предоставить нахожденіе каждой изъ нихъ; сравнивая различныя комбинаціи, слѣдуетъ спросить у нихъ, въ чемъ замѣчается разница, какая изъ комбинацій будетъ наиболѣе красивой. Эти комбинаціи полезно продѣлать на доскѣ, при чемъ самъ учитель остановился бы на тѣхъ, когда синіе, красные и желтые квадраты расположены по діагонали; въ силу того, что эти комбинаціи указаны учителемъ, онѣ рѣзче выдѣлятся среди другихъ и заложатъ первую идею діагонали.

Ознакомленіе съ числомъ три, несомнѣнно, займетъ нѣсколько уроковъ, на каждомъ изъ нихъ слѣдуетъ удѣлить часть времени для начертанія числа три въ видѣ трехъ палочекъ, перечеркнутыхъ вверху и внизу III, какъ римская цифра. Эта запись фиксируетъ въ умѣ число три, какъ зрительный образъ, и въ то же время какъ бы выдѣляетъ изъ всѣхъ упражненій нѣчто общее, а именно число три. Написанныя числа полезно отдѣлять другъ отъ друга или промежутками или какими-либо знаками. Быть можетъ, здѣсь можно показать запятую или ввести разноцвѣтные карандаши, такъ чтобы каждое три отличалось отъ своего сосѣда цвѣтомъ. Это замѣчаніе относится и къ числу два, гдѣ оно также имѣетъ мѣсто; но тамъ еще можно не особенно останавливаться на этой изолированности, но здѣсь это уже необходимо, чтобы глазъ выдѣлялъ изъ общей суммы написанныхъ палочекъ тѣ, которыя изображаютъ число.

Изложенный въ этомъ параграфѣ методъ обученія нуждается въ нѣкоторыхъ оговоркахъ и объясненіяхъ. Это, во-первыхъ, относится къ дороговизнѣ самаго способа. Если положимъ, что въ классѣ 50 учениковъ, то нарѣзать каждому 3 аршина тесемки да еще по два раза составляетъ 300 аршинъ, что будетъ стоить очень дорого, и такой расходъ не могутъ выдержать даже богатыя городскія школы. Соглашаясь вполнѣ съ этимъ, я въ то же время думаю, что непосредственное конкретное воспріятіе отмѣриванія аршина тесемки—необходимый актъ обученія, но, можетъ быть, и даже съ выгодой его можно замѣнить наблюденіемъ, заставивъ не каждаго ученика отмѣрить по аршину, а раздѣлить учениковъ на группы, и пусть одинъ изъ группы отмѣряетъ передъ классомъ одинъ аршинъ тесемки и его отрѣжетъ фактически. Тогда у остальныхъ учениковъ получится только наблюдаемый опытъ; это наблюденіе въ нѣкоторыхъ случаяхъ вполнѣ можетъ замѣнить непосредственный опытъ и значительно удешевить урокъ. Болѣе серьезное возраженіе можетъ быть сдѣлано въ томъ, что кусокъ отрѣзанной тесемки психически не будетъ такъ ясенъ, какъ кусокъ той же тесемки, отмѣченный, напримѣръ, красной ниткой. Если тесемку не рѣзать, а только отмѣчать на ней длину аршина, то урокъ еще болѣе удешевится, но я не знаю, будетъ ли это воспріятіе длины столь же ясно, какъ воспріятіе отрѣзаннаго куска. Рѣшеніе этого вопроса я предоставляю опыту.

Слѣдующее замѣчаніе относится къ песку. Здѣсь, во-1-хъ, можно сказать, что, выставляя 5 стакановъ: 3 по одному, одинъ въ 2 и третій въ 3 стакана, мы психологически путаемъ дѣтей, ибо они легко могутъ принять всѣ стаканы за однородные, и тогда число 3 спутается съ представленіемъ 5 стакановъ. Мнѣ кажется, что такое опасеніе неосновательно, ибо ученики должны къ этому времени достаточно освоиться съ идеей однородности; но я согласенъ съ тѣмъ, что въ данномъ случаѣ должно быть предварительно указано на разнородность стакановъ и отсчитано число только однородныхъ стакановъ. Кромѣ того, ничто не мѣшаетъ большіе стаканы поставить потомъ, выдѣливъ ихъ такимъ образомъ въ совершенно отдѣльную группу отдѣльныхъ представленій. Въ то же время самое упражненіе съ пескомъ можетъ вызвать постороннія неудобства: 1) соръ, 2) лишнее обремененіе учителя, 3) неудобство слѣдить за манипуляціями каждаго изъ 50 учениковъ, разставить передъ каждымъ по 5 стакановъ, имѣть въ запасѣ 250 стакановъ и прочее. Всѣ эти неудобства могутъ быть устранены, если тѣ же упражненія будутъ производиться не каждымъ ученикомъ, а отдѣльными учениками передъ классомъ, т. е. непосредственный опытъ будетъ замѣненъ наблюденіемъ вообще и отдѣльнымъ индивидуальнымъ опытомъ для какого-нибудь числа. Собственно обученіе ариѳметикѣ отъ этой замѣны можетъ не только не потерпѣть ущерба, но даже выиграть, такъ какъ комбинація наблюденія и опыта во многихъ случаяхъ лучше непосредственнаго опыта. Въ опытѣ приходится считаться съ ловкостью и тѣми непосредственными мускульными движеніями, на которыя уходитъ иногда слишкомъ много вниманія. Но я считаю именно эту сторону очень важной и думаю, что навыкъ въ насыпаніи песку, навыкъ въ отмѣриваніи аршина, поглощая вниманіе вначалѣ и затрудняя этимъ усвоеніе идеи, дастъ въ общемъ цѣнную привычку аккуратности и способности производить подѣлки, а идея, при усвоеніи которой иногда нѣсколько отвлекалось вниманіе, будетъ тѣмъ рельефнѣе вырисовываться своими другими сторонами. Вотъ почему я ввожу непосредственный опытъ; но думаю, что самый методъ не пострадаетъ, если при его примѣненіи будетъ введено главнымъ агентомъ наблюденіе, что удешевляетъ урокъ и дѣлаетъ его доступнымъ для всѣхъ школъ. Здѣсь возможенъ очень удобный компромисъ. Раздѣлить учениковъ на группы, и пусть каждая группа продѣлываетъ фактическіе опыты. Въ группѣ могутъ быть 5 учениковъ, могутъ быть и больше; но уже при 5 ученикахъ въ группѣ стоимость и хлопотливость урока сильно сократятся. И я думаю, что практически такое дѣленіе по группамъ и будетъ самымъ удобнымъ.

§ 4. Ознакомленіе съ числомъ четыре.

Наглядныя пособія остаются тѣ же, что и въ предыдущемъ §. Знаки числа IIII.

Въ виду того, что измѣреніе длины, какъ методъ, я не считаю выясненнымъ въ предыдущемъ параграфѣ, здѣсь слѣдуетъ вновь къ нему вернуться, снабдивъ дѣтей тесемкой въ 4 аршина длиной. На доскѣ нужно установить разноцвѣтные квадраты въ 1 кв. аршинъ. На столѣ у учителя можетъ быть клубокъ длинной бумажной ленты. Кромѣ того, у дѣтей на рукахъ имѣются тѣ же пособія, но число стакановъ увеличивается на одинъ и прибавляется еще стаканъ въ 4 стакана; точно также у учителя ставится 4 стакана и сосудъ больше 4 стакановъ по объему. Листы съ квадратами остаются на рукахъ учениковъ, остается также и цвѣтная бумага.

Урокъ начинается съ того, что учитель объясняетъ, что край крадрата на доскѣ называется его стороной и проситъ учениковъ указать стороны въ другихъ квадратахъ, помѣщенныхъ на доскѣ. Когда слово сторона будетъ достаточно выяснено, учитель мѣряетъ сторону одного изъ квадратовъ аршиномъ и спрашиваетъ учениковъ, чему равняется эта сторона. Измѣривъ всѣ другія стороны одного и того же квадрата, учитель выясняетъ свойство квадрата, что эта фигура имѣетъ всегда равныя стороны. Ученики измѣряютъ сами своими аршинами стороны другихъ квадратовъ на доскѣ и убѣждаются въ ихъ равенствѣ. Здѣсь можно поставить вопросъ, какъ можно назвать фигуру, наклеенную на доску? (Квадратъ въ аршинъ, а быть можетъ, и квадратный аршинъ). Когда это свойство квадрата выяснено, то можно сосчитать число сторонъ; число четыре, какъ и предыдущія числа, должно быть повторено и запомнено. Считаются числа сторонъ другихъ квадратовъ на доскѣ, потомъ переходятъ къ квадратамъ на рукахъ, указываются ихъ стороны и сосчитываются. Затѣмъ учитель заставляетъ учениковъ смѣрить аршиномъ свою тесемку, сколько въ ней аршинъ? Отъ тесемки отрѣзается одинъ аршинъ и мѣряется оставшаяся часть,—сколько аршинъ осталось? Отрѣзается еще одинъ аршинъ и также измѣряется оставшаяся часть. Сколько аршинъ отрѣзано? Сколько осталось? Равны ли эти части? Затѣмъ ученики подходятъ къ столу учителя и отмѣриваютъ своимъ аршиномъ 4 аршина ленты; это дѣлаетъ каждый изъ двухъ учениковъ; отмѣренную ленту онъ передаетъ сосѣду, который отъ нея отмѣриваетъ 3 аршина, учитель спрашиваетъ, сколько аршинъ у каждаго? У кого больше и насколько? Отъ ленты отрѣзается еще одинъ аршинъ, какъ теперь раздѣлилась лента? Сколько аршинъ у каждаго? Какъ иначе можно сказать: „раздѣлить 4 аршина ленты поровну“ (Раздѣлить пополамъ). Отрѣжьте еще 4 аршина ленты и раздѣлите ее пополамъ, сколько аршинъ въ половинѣ?

Этотъ вопросъ о половинѣ и дѣленіи пополамъ можно разработать, переходя отъ квадратнаго аршина къ тѣмъ квадратамъ, которые находятся у учениковъ; но выгоднѣе взять не квадратный дюймъ, а квадратный вершокъ, предложить ученикамъ согнуть его пополамъ и еще пополамъ и предложить сосчитать, сколько получилось квадратовъ. Новое дѣйствіе—перегибаніе квадрата требуетъ упражненія, а потому полезно взять еще цвѣтные квадраты въ одинъ вершокъ и сдѣлать то же самое. Затѣмъ разрѣзать по линіямъ сгиба и непосредственнымъ наложеніемъ убѣдиться, что всѣ полученныя части равны между собой. У каждой части можно отыскать стороны и сосчитать ихъ число.

Вырѣзать полоску въ 4 квадрата и по этой полоскѣ вырѣзать цвѣтныя полоски: красную, синюю, желтую и зеленую. Сложивъ эти полоски, мы получимъ квадратную четверть.

Разрѣжемъ каждую полоску на квадраты. Сколько квадратовъ получимъ каждаго цвѣта? Уложимъ вырѣзанные квадраты въ различныхъ комбинацiяхъ на бѣломъ квадратѣ и сравнимъ полученныя фигуры. Самъ учитель укладываетъ одноцвѣтные квадраты по дiагонали и этимъ указываетъ на это направленiе. Число комбинацiй вообще здѣсь настолько велико, что классъ не исчерпаетъ его, но сравненiе различныхъ положенiй цвѣтныхъ квадратовъ позволяетъ повторить счетъ, чтобы указать мѣсто различныхъ квадратовъ въ одномъ и томъ же узорѣ. На томъ же квадратѣ можно рѣшать задачи, отнимая по одному и по два квадрата различныхъ цвѣтовъ и сосчитывая остатки. То обстоятельство, что при этомъ одноцвѣтные квадраты занимаютъ различное положенiе, заставляетъ учениковъ болѣе внимательно слѣдить за зрительнымъ впечатлѣнiемъ и различать цвѣта. Кромѣ того, раскладка узора позволяетъ вновь вернуться къ дѣленiю на 2 и предложить рядъ вопросовъ, гдѣ приходится 4 дѣлить пополамъ. Напримѣръ, составьте такой узоръ, гдѣ въ первой сторонѣ сверху квадрата была бы половина красныхъ, половина синихъ квадратовъ, въ слѣдующей половина красныхъ, половина желтыхъ, въ слѣдующей половина желтыхъ, половина зеленыхъ и, наконецъ, половина зеленыхъ и половина синихъ.

Здѣсь собственно трудно исчерпать всѣ возможныя задачи, и на урокѣ могутъ притти въ голову весьма интересныя комбинацiи, которыя позволятъ и повторить пройденное и разработать новое понятiе до полной очевидности. На этихъ задачахъ можно остановиться подольше, чтобы числа 1, 2, 3, 4 усвоить вполнѣ основательно и съ ними можно было бы производить всѣ ариѳметическiя дѣйствiя на конкретныхъ примѣрахъ. Понятiя объ углахъ я бы еще не далъ, хотя, быть можетъ, оно уже само-собою возникнетъ; тогда къ счету сторонъ можно присоединить счетъ угловъ.

Собственно здѣсь получается очень большое число упражненiй, которыя какъ бы дѣлаютъ излишними упражненiя съ пескомъ. Но я думаю, что полезно произвести и эти упражненiя, повторяя счетъ по одному, отсыпая песокъ, опредѣлять остатки. Потомъ провести счетъ по 2 при помощи двойного стакана. Эти задачи можно осложнить новыми терминами, напримѣръ, разсыпать песокъ въ 4 стакана по одному стакану, потомъ спросить, какъ раздѣлить песокъ на 4 равныя части? Какъ раздѣлить на 2 равныя части? Какъ будетъ называться каждая часть?

Всѣ эти упражненiя займутъ довольно много времени, но система должна остаться такой же: на каждомъ урокѣ ученики должны часть времени посвятить изображенію числа 4 въ видѣ четырехъ черточекъ IIII, покрывая ихъ чертой сверху и снизу.

§ 5. Выработка понятія о дѣленіи пополамъ.

Понятіе о половинѣ. Новое наглядное пособіе—вѣсы.

Разсмотрѣнныя числа 1, 2, 3, 4 настолько просты, что сами по себѣ они не вызывали и не вызываютъ необходимости въ ихъ усиленной разработкѣ; но я главное вниманіе обращаю не на самыя числа, а на методы ихъ полученія и на зависимость числа отъ величины или количества предмета. Въ этомъ отношеніи я думаю, что матеріалъ, предложенный дѣтямъ для первыхъ уроковъ, достаточно обширенъ, и потому, не расширяя объема числа, слѣдуетъ нѣсколько остановиться и, воспользовавшись этой остановкой, дать новое понятіе о дѣленіи пополамъ и необходимое въ будущемъ знакомство съ вѣсами.

Дѣленіе пополамъ уже встрѣчалось въ предыдущемъ параграфѣ, какъ текстъ задачи. Здѣсь слѣдуетъ на немъ остановиться подробнѣе, посвятивъ его полной разработкѣ отдѣльное время. Для этого нужно взять тѣ же наглядныя пособія, которыя были на предыдущихъ урокахъ, и начать дѣленіе съ единицы. Всего удобнѣе взять аршинъ тесемки, перегнуть ее пополамъ и спросить, какъ можно назвать эту часть аршина? Сколько въ аршинѣ половинъ? Сколько половинъ въ 2 аршинахъ? Чему равняется половина 2 аршинъ? Можно ли раздѣлить пополамъ 3 аршина? Сколько аршинъ будетъ въ $^1/_2$ сажени? Всѣ отвѣты на эти вопросы слѣдуетъ иллюстрировать конкретнымъ измѣреніемъ, при чемъ указать, что $^1/_2$ аршина отмѣчена особымъ знакомъ на ученическихъ аршинахъ.

Совершенно тѣ же задачи можно продѣлать съ водой или пескомъ, разсыпавъ или разливъ стаканъ воды пополамъ. Въ этомъ случаѣ необходимо, чтобы на стаканѣ была черта, отмѣчающая половину. Большихъ упражненій здѣсь не нужно, потому что важно только впечатлѣніе, что объемъ, какъ и длина, можетъ дѣлиться пополамъ, хотя можно, конечно, поставить задачи о дѣленіи 2-хъ стакановъ, 3-хъ стакановъ пополамъ.

Такія упражненія должны познакомить дѣтей съ половиной. Когда это знакомство будетъ достигнуто, то можно перейти къ ознакомленію ихъ съ вѣсами. Какъ я уже говорилъ при описаніи наглядныхъ пособій, вѣсы могутъ быть самодѣльные и во всякомъ случаѣ съ пониженной чувствительностью. На столѣ учителя должны быть настоящіе вѣсы торговаго типа

Роберваля съ предѣльнымъ вѣсомъ до 20 фунтовъ. Учитель знакомитъ учениковъ съ вѣсами и со способами взвѣшиванія, показываетъ имъ фунтъ и полфунта и доказываетъ взвѣшиваніемъ, что 2 полфунта составляютъ фунтъ, затѣмъ беретъ гирю въ 2 фунта и взвѣшиваніемъ устанавливаетъ ея вѣсъ. Спрашиваетъ, сколько полуфунтовыхъ гирь нужно, чтобы взвѣсить 2 фунта? Затѣмъ можно подобрать различные предметы точнаго вѣса: книги, металлическія пластинки и т. п. и показать, какъ найти вѣсъ каждой изъ нихъ. Всѣ эти упражненія будутъ вестись въ предѣлѣ счета до 4, при чемъ могутъ быть рѣшены задачи въ родѣ слѣдующихъ: на одной чашкѣ вѣсовъ лежитъ гиря въ 4 фунта, а на другой книга вѣсомъ 1 фунтъ, сколько фунтовъ нужно доложить, чтобы вѣсы были въ равновѣсіи? Взята оловянная пластинка вѣсомъ въ 3 ф., какъ найти ея вѣсъ при помощи гирь въ 2 ф. и 1 фунтъ?

После того, какъ методъ взвѣшиванія достаточно выяснится, учитель знакомитъ учениковъ съ гирей, находящейся у нихъ на рукахъ, и говоритъ, что вѣсъ этой гири называется лотъ; потомъ предлагаетъ ученикамъ насыпать въ сосудъ маленькій песку такъ, чтобы онъ вѣсилъ 1 лотъ, потомъ въ большій сосудъ 2 лота и т. д. При этихъ упражненіяхъ необходимо принять во вниманіе то, что сказано въ § 3 относительно песку.

§ 6. Выработка понятія о числѣ пять.

Соотношеніе между вѣсомъ и объемомъ однороднаго тѣла. Знакъ числа V.

Нагляднымъ пособіемъ служатъ вѣсы, при чемъ на столѣ учителя стоятъ большіе вѣсы, разновѣсъ по 1 фунту—5 гирь, и гиря 5 фунтовъ, графинъ съ водой, 5 стакановъ и стеклянный сосудъ емкостью болѣе 5 стакановъ. Учитель вмѣстѣ съ учениками сосчитываетъ число стакановъ и говоритъ, что ихъ пять. Число пять повторяется и запоминается учениками. Затѣмъ стаканы наливаются водой и вновь сосчитываются самими учениками; вода переливается въ стеклянный сосудъ, сколько стакановъ воды налито? Какъ иначе можно отмѣрить то же количество воды? Почему можно отмѣрить воду однимъ стаканомъ? Отольемъ изъ сосуда одинъ стаканъ,—сколько стакановъ осталось? Отольемъ еще одинъ стаканъ,—сколько стакановъ осталось? Сколько стакановъ отлито? Отольемъ еще одинъ стаканъ,—сколько стакановъ осталось? Сколько отлито? Сколько стакановъ нужно прилить, чтобы получилось 4 стакана? Какъ эти 4 стакана раздѣлить пополамъ? Сколько стакановъ воды надо прилить къ 4 стаканамъ, чтобы получилось 5 стакановъ?

Затѣмъ учитель знакомитъ учениковъ съ гирей въ 1 ф., ученики пробуютъ на ощущеніе вѣсъ этой гири, сравниваютъ по ощущенію гирь между собой и при помощи вѣсовъ убѣждаются, что всѣ фунтовыя гири одинаковаго вѣса. Возбуждается вопросъ, сколько вѣситъ вода въ стаканѣ? Какъ отвѣсить фунтъ воды? Ученики уже видѣли на предыдущемъ урокѣ, что тара имѣетъ вѣсъ, а потому имъ легко будетъ догадаться, что прежде, чѣмъ вѣсить воду, слѣдуетъ взвѣсить стаканъ; но учитель имъ говоритъ, что можно стаканъ не взвѣшивать, а поставивъ его на вѣсы, на другую чашку насыпать песку, тогда вѣсъ стакана не будетъ входить въ вѣсъ воды. Выяснивъ это обстоятельство, учитель наполняетъ стаканъ водой и уравновѣшиваетъ воду гирей въ 1 фунтъ (стаканы должны быть подобраны).

Итакъ, вѣсъ воды въ стаканѣ 1 фунтъ,—сколько вѣситъ вода въ двухъ стаканахъ? Уравновѣшиваются пескомъ 2 стакана и наполняются водой, находятъ, что вѣсъ воды въ двухъ стаканахъ равенъ 2 фунтамъ. Спрашивается, сколько вѣсятъ 2 стакана воды? То же самое можно продѣлать съ 3 стаканами, съ 4-мя, вообще до тѣхъ поръ, пока у учениковъ не составится яснаго представленія, что вѣсъ воды, налитой въ отдѣльные стаканы, всегда равенъ вѣсу воды, отмѣренной этими стаканами и налитой въ графинъ. Тогда можно задать вопросъ, сколько вѣсятъ 5 стакановъ воды? Уравновѣсивъ на вѣсахъ большой сосудъ, наливаютъ въ него 5 стакановъ воды и на другую чашку кладутъ 5 гирь по 1 фунту. Вливаютъ одинъ стаканъ и снимаютъ одну гирю,—сколько стакановъ воды осталось въ сосудѣ? Сколько вѣсятъ 4 стакана воды? Въ виду того, что здѣсь число стакановъ и число фунтовъ будетъ одно и то же, отвѣтъ на эти вопросы можетъ быть механическимъ, а потому самые вопросы могутъ быть немногочисленны, и главная ихъ задача состоитъ въ томъ, чтобы установить фактъ, что число стакановъ всегда будетъ равно числу фунтовъ. Когда этотъ фактъ прочно установленъ, то необходимо перейти къ возможности замѣны гирь гирями большаго вѣса. Для этого сначала знакомятъ учениковъ съ гирями въ 2 фунта, 3 фунта, показываютъ на вѣсахъ, что гиря въ 2 фунта равняется по вѣсу 2-мъ гирямъ по одному фунту каждая, а гиря въ 3 фунта равняется тремъ фунтовымъ гирямъ.

Гиря въ 5 фунтовъ по вѣсу равна 5 фунтовымъ гирямъ, суммѣ 2 фунта и 3 фунта; 2 гири по два фунта и гиря въ 1 фунтъ. Эти соотношенія необходимо проработать, спрашивая учениковъ, заставляя ихъ выходить и взвѣшивать, а также разсказать словами, чѣмъ можно замѣнить 5-фунтовую гирю.

Когда это будетъ усвоено большинствомъ класса, то учитель ставитъ на чашку вѣсовъ сосудъ съ водой, на другую чашку кладетъ песокъ (вѣсъ сосуда) и 5 фунтовыхъ гирь, потомъ спрашиваетъ, какими гирями можно замѣнить эти 5 фунтовыхъ гирь? Замѣнимъ ихъ одной гирей въ 5 фунтовъ и отольемъ изъ сосуда 1 стаканъ воды, какъ можно уравновѣсить вѣсы, не снимая гири въ 5 фунтовъ? Почему къ водѣ нужно добавить 1 фунтъ? Отольемъ еще одинъ стаканъ воды, какъ теперь можно уравновѣсить вѣсы? Какими гирями можно замѣнить 2 фунтовыхъ гири? Отольемъ еще одинъ стаканъ и добавимъ 1 фунтъ, какой гирей можно замѣнить 2 фунта и 1 фунтъ?

Этими указаніями, я думаю, учитель можетъ закончить свое объясненіе и перейти къ самостоятельнымъ упражненіямъ ученика со взвѣшиваніемъ песку, при чемъ мѣрой вѣса будетъ 1 лотъ.

Заставивъ ихъ продѣлать тѣ же упражненія съ пескомъ, какія онъ самъ дѣлалъ съ водой, учитель добавляетъ къ нимъ еще слѣдующія. Отсыпьте изъ большого сосуда 3 кружки песку, какую гирю надо будетъ добавить къ нему, чтобы вѣсы были въ равновѣсіи? При этомъ предполагается, что песокъ насыпанъ въ большую кружку и уравновѣшенъ гирей въ 5 лотовъ.

Знакъ числа пять въ видѣ римской цифры V ученики записываютъ въ тетрадяхъ. Здѣсь полезно разнообразить письменныя упражненія введеніемъ рисованія однородныхъ предметовъ, при чемъ сюжетъ долженъ быть выбранъ самими учениками. Это рисованіе можетъ быть введено и ранѣе, какъ дополнительное занятіе, при которомъ затрагивается воображеніе.

Кромѣ того, не слѣдуетъ упустить изъ виду и указанное въ методикѣ Лайя умственное представленіе изученныхъ количествъ, предлагая ученикамъ время отъ времени представить то 4 квадрата, то 3 стакана воды, то 5 аршинъ длины или гирю того или иного вѣса. Я думаю, что эти представленія сами собой соединятся съ рисунками, и ученики будутъ рисовать то, что имъ при объясненіи бросилось въ глаза, привлекло ихъ вниманіе. Но, несомнѣнно, найдутся и такіе, которые, обладая болѣе живой фантазіей, нарисуютъ 5 домиковъ, 5 какихъ-либо животныхъ и т. п. Во всякомъ случаѣ соединеніе рисованія съ изученіемъ счета позволяетъ контролировать то пониманіе сущности счета, которое составляетъ цѣль обученія. Ученикъ, нарисовавшій сосудъ и отмѣтившій на немъ 5 равныхъ объемовъ, несомнѣнно, вполнѣ освоился съ предметомъ изученія и хорошо представляетъ себѣ способы измѣренія.

§ 7. Продолженіе изученія числа 5.

Для дальнѣйшаго изученія числа 5, гдѣ уже приходится считаться съ групповымъ счетомъ $2+3$, я предлагаю воспользоваться квадратами и аршиномъ. Такимъ образомъ, на рукахъ у учениковъ находится бѣлый листъ съ клѣтками въ 1 квадр. дюймъ, цвѣтные листы; число цвѣтовъ можетъ быть и 5 и меньше. По моему, все-таки лучше ихъ взять пять, напримѣръ, красный, желтый, зеленый, блѣдно-голубой, синій. Вводя цвѣтную бумагу, я имѣю въ виду ея практическую пользу при изученіи фигуръ; но эта польза будетъ только тогда, когда дѣти легко различаютъ цвѣта. Пока мы пользовались краснымъ, синимъ и желтымъ, то эти цвѣта большинство дѣтей различаетъ, но когда пришлось ввести зеленый и теперь блѣдно-голубой, то легко возможно, что много дѣтей не различатъ этихъ оттѣнковъ. Я бы думалъ, что на обязанности учителя лежитъ познакомить дѣтей съ цвѣтами, но если почему-либо учителю покажется это неудобнымъ, тогда, конечно, можно ограничиться только тремя цвѣтными полосками, при чемъ нѣкоторыя задачи придется выбросить и замѣнить другими. Для болѣе удобнаго различенія я ввожу цвѣтъ блѣдно-голубой, чтобы рѣзче отличить его отъ синяго; точно также я взялъ бы свѣтло-зеленый, чтобы онъ рѣзче отличался отъ синяго. Ознакомивъ дѣтей съ цвѣтами, сосчитавъ число цвѣтныхъ листовъ, учитель предлагаетъ дѣтямъ оторвать отъ листа по одному квадрату пять разъ и спрашиваетъ, сколько квадратовъ они оторвали? Вырѣзать такіе квадраты изъ цвѣтной бумаги по одному каждаго цвѣта, сколько цвѣтныхъ квадратовъ мы получили? Уложить эти цвѣтные квадраты въ группы, какъ это можно сдѣлать? Сколько квадратовъ въ каждой полоскѣ? Оторвать отъ бѣлаго листа полоску въ 5 квадратовъ и вырѣзать такія же полоски изъ цвѣтной бумаги, сколько полосокъ мы получили? Разрѣжемъ каждую полоску на квадраты, сколько квадратовъ выходитъ изъ каждой цвѣтной полоски? Оторвемъ полоску въ 3 квадрата, потомъ полоску въ 5 квадратовъ, которая длиннѣе и насколько? Составить полоску въ 5 квадратовъ изъ красныхъ и синихъ квадратовъ, можно ли помѣстить ихъ поровну? Какихъ больше, красныхъ или синихъ, и на сколько? Можно ли изъ 5 цвѣтныхъ полосокъ составить квадратъ? Изъ скольких полосокъ можно составить квадратъ? Составьте два квадрата изъ всѣхъ цвѣтныхъ квадратовъ (будетъ 9 и 16). Сосчитайте число квадратовъ каждаго цвѣта въ томъ и другомъ. Если это упражненіе окажется труднымъ, то его можетъ сдѣлать учитель на доскѣ, пользуясь картонными цвѣтными квадратами въ 1 квадратн. четверть. Само по себѣ оно очень цѣнно, ибо позволяетъ складывать группы числа 5 въ самыхъ разнообразныхъ сочетаніяхъ, въ то же время каждая группа находится въ отдѣльномъ квадратѣ и не ассоціируется ни съ отдѣльной полоской, ни съ однимъ и тѣмъ же квадратомъ, какъ это было въ предыдущихъ упражненіяхъ. Но оно возможно только при наличности различенія цвѣтовъ, въ противномъ случаѣ отъ него придется отказаться. Конечно, здѣсь мы имѣемъ дѣло съ большими числами, но я считаю важнымъ упражненіе способности дѣтей выбирать изъ большого числа нужные элементы; въ то же время самое упражненіе получаетъ чисто геометрическое психологическое содержаніе и даетъ идею квадратныхъ мѣръ. Здѣсь ученикъ не мыслитъ ариѳметически число квадратовъ 16 – 9, а геометрически—большой и малый квадратъ, составленныхъ изъ цвѣтныхъ квадратиковъ, при чемъ число этихъ послѣднихъ для каждаго цвѣта можетъ быть сосчитано.

Измѣреніе длины при помощи аршина я поставилъ въ самый конецъ, такъ какъ по своей неуклюжести оно довольно трудно и можетъ служить только для повѣрки, насколько ученики усвоили групповый счетъ. У учениковъ должна быть тесемка длиною въ 5 аршинъ, которую нужно измѣрить аршиномъ, потомъ отъ нея отрѣзается 2 аршина, сколько аршинъ осталось? Отрѣжемъ еще одинъ аршинъ, сколько аршинъ мы отрѣзали? Сколько осталось? Отмѣряемъ бумажную ленту въ 5 аршинъ, можно ли эту ленту раздѣлить пополамъ? Сколько аршинъ будетъ въ каждой половинѣ? Сколькимъ ученикамъ можно раздать кусокъ ленты въ 5 аршинъ, отмѣряя каждому по 1 аршину?

§ 8. Выработка понятія числа шесть.

Новое наглядное пособіе—десть бумаги. Понятіе о дѣленіи на равныя части. Понятіе о достоинствѣ товара. Знакъ числа VI.

Основнымъ нагляднымъ пособіемъ служитъ десть бумаги въ тетрадкѣ по шести листовъ каждая; кромѣ этой бумаги, слѣдуетъ раздать ученикамъ тетрадки бумаги по 6 листовъ высшихъ сортовъ, такъ, чтобы бумага низшаго сорта рѣзко отличалась отъ бумаги другихъ сортовъ. Урокъ начинается съ того, что учитель знакомитъ учениковъ съ понятіемъ десть и говоритъ, что десть всегда состоитъ изъ 4 тетрадокъ. Десть бумаги можно подѣлить поровну, можно произвести вычитаніе по одной тетрадкѣ; вообще предложить рядъ вопросовъ, въ отвѣтѣ на которые упоминалась бы десть, чтобы ученики достаточно ознакомились съ этимъ словомъ. Затѣмъ учитель пересчитываетъ листы бумаги въ одной тетрадкѣ и говоритъ, что ихъ всегда бываетъ шесть. Число шесть ученики повторяютъ и стараются запомнить. Затѣмъ учитель предлагаетъ пересчитать другія тетрадки бумаги, при чемъ обращаетъ вниманіе учениковъ на однородность листовъ какъ по размѣру, такъ и по достоинству. Конечный выводъ изъ всѣхъ разсужденій будетъ тотъ, что листы бумаги совершенно однородны, и всегда можно ихъ замѣнить одинъ другимъ, если мы беремъ бумагу одного сорта. Послѣ этого переходятъ къ бумагѣ второго сорта, обращается вниманіе на то, что эта бумага лучше, хотя въ каждой тетрадкѣ остается тотъ же счетъ—6 листовъ. При этомъ полезно установить взвѣшиваніемъ, что бумага лучшаго сорта тяжелѣе бумаги низшаго сорта. Это обстоятельство важно только въ томъ отношеніи, что даетъ идею цѣнности, но въ данный моментъ разработкѣ не подвергается.

Далѣе учитель предлагаетъ ученикамъ рядъ слѣдующихъ задачъ. Отнимите у тетрадки одинъ листъ, сколько листовъ осталось? Отнимите еще одинъ листъ, сколько теперь осталось листовъ? Сколько листовъ вы отняли? Раздѣлите и остальные листы пополамъ, сколько листовъ въ половинѣ? Соберите всѣ листы вновь въ тетрадку и скажите, можно ли тетрадку въ 6 листовъ раздѣлить пополамъ? Сколько листовъ въ каждой половинѣ? Можно ли тетрадку въ 6 листовъ раздѣлить на три части поровну? Сколько листовъ будетъ въ каждой части? Сколькимъ ученикамъ можно раздать тетрадку по 1 листу каждому? Сколькимъ ученикамъ можно раздать по 2 листа? Сколькимъ по 3 листа? Отнимите отъ тетрадки 4 листа, сколько листовъ осталось? Отнимите 5 листовъ, сколько листовъ осталось? Возьмите двѣ тетрадки, раздѣлите каждую изъ нихъ пополамъ, на сколько частей раздѣлилась бумага? Сколько листовъ въ каждой части? Сколькимъ ученикамъ можно раздать эти новыя тетрадки по 3 листа? Соберите всю бумагу опять въ тетрадки и раздѣлите каждую тетрадку на 3 равныя части, сколько листовъ въ каждой? Сколькимъ ученикамъ можно теперь раздать новыя тетрадки?

Возьмите 3 тетрадки, раздѣлите каждую изъ нихъ пополамъ, сколько частей вы получили?

Здѣсь мнѣ могутъ сказать, что идея дѣленія на части можетъ быть демонстрирована на какомъ угодно учебномъ пособіи, что вмѣсто бумаги можно взять спички, косточки счетовъ, коробочки отъ спичекъ и т. п.; но моя цѣль дать понятіе объ измѣреніи бумаги, и я настойчиво указываю, что тетрадка бумаги въ 6 листовъ не является такимъ же объектомъ воспріятія, какъ 6 спичекъ или 6 коробочекъ; здѣсь есть понятіе цѣлаго, нѣкоторой группы, не только распадающейся на части, но и представляющей собою нѣчто законченное и цѣлое, тогда какъ всѣ современныя наглядныя пособія этой идеи цѣлаго и законченнаго не содержатъ.

Кромѣ того, я опускаю здѣсь присчитываніе по одному; оно едва ли нужно, когда въ предыдущемъ съ нимъ ученики достаточно познакомились, а то обстоятельство, что за пятью слѣдуетъ шесть, по моему, просто удерживается въ памяти, какъ фактъ, безъ всякой его особенной разработки. Но если бы встрѣтилась необходимость разработать именно этотъ фактъ, то ничто не мѣшаетъ подольше остановиться на сосчитываніи листовъ бумаги, и послѣ того, какъ ученики отняли 5 разъ по одному листу, заставить сложить ихъ, просчитавъ листы еще разъ. Надо только отмѣтить въ самомъ началѣ, что тетрадка бумаги сосчитывается не вся, а ея половина, до разгиба въ цѣлый листъ.

Послѣ того, какъ на листахъ бумаги ученики выяснили себѣ число 6, ихъ слѣдуетъ познакомить съ саженью. Заставить запомнить слово сажень, измѣрить ее аршиномъ и выучить, что сажень содержитъ 3 аршина. Сколько аршинъ въ 2 саженяхъ? Если этотъ вопросъ будетъ труденъ для учениковъ, то нужно взять тесемку въ двѣ сажени и измѣрить ее аршиномъ, при чемъ это измѣреніе ученики должны дѣлать сами. Когда этотъ фактъ будетъ просто установленъ, т. е. всѣ ученики поймутъ, что въ 2 саженяхъ содержится 6 аршинъ, ихъ слѣдуетъ спросить обратно—сколько саженъ въ 6 аршинахъ. Этотъ обратный вопросъ можетъ быть рѣшенъ перегибаніемъ тесемки пополамъ. Затѣмъ ученики отмѣриваютъ себѣ кусокъ бумажной ленты длиною въ 6 аршинъ и рѣшаютъ рядъ слѣдующихъ задачъ: отрѣжьте отъ ленты въ 6 аршинъ одну сажень, сколько аршинъ осталось? Сколько это будетъ саженъ? Отрѣжьте отъ ленты въ 2 сажени 2 аршина, сколько аршинъ осталось? Отмѣряйте ленту въ 6 аршинъ и раздѣлите ее на части по 2 аршина въ каждой, сколько такихъ частей будетъ? Отрѣжьте еще ленту въ 6 аршинъ и раздѣлите ее на 3 равныя части, по скольку аршинъ будетъ въ каждой? Сколько саженъ составитъ 4 аршина? Какъ можно сказать: 4 аршина составляютъ... что? Сколько саженъ составляютъ 5 аршинъ? Какъ можно иначе выразить 5 аршинъ? Сколько останется, если отъ 2 саженъ отрѣзать 2 аршина? Сколько будетъ, если отрѣзать 4 аршина? Можно ли 2 сажени раздѣлить на 4 равныя части? Какъ велика будетъ каждая часть? Эти задачи можно рѣшить при помощи тесемки, которую сложить два раза пополамъ и измѣрить аршиномъ. Что больше—$^1/_2$ сажени или 2 аршина? На сколько частей можно раздѣлить 6 аршинъ поровну? (Отвѣтъ двойной: на 2 по 3 аршина и на 3 по 2 аршина).

§ 9. Продолженіе изученія числа шесть.

Иллюстрированіе дѣленія на части при помощи объема и вѣса. Повтореніе предыдущаго при помощи квадратовъ.

Учитель наливаетъ въ сосудъ 6 стакановъ воды, при чемъ можно повторить еще разъ ранѣе указанный способъ: сначала налить воду въ 6 отдѣльныхъ стакановъ и сосчитать ихъ, потомъ каждый перелить въ сосудъ, при этомъ показать, что количество воды будетъ то же, если мы выльемъ 6 разъ по одному стакану.

Итакъ, въ сосудѣ 6 стакановъ воды, отольемъ одинъ стаканъ, сколько осталось? Отольемъ еще одинъ стаканъ, сколько теперь осталось? Сколько отлито? Можно ли оставшуюся воду раздѣлить пополамъ? Сколько стакановъ въ каждой половинѣ? На сколько равныхъ частей можно раздѣлить 6 стакановъ? (Здѣсь отвѣтъ только одинъ—на 3, ибо 2 стакана мы отлили да по 2 получили въ каждой части). Можно ли раздѣлить 6 стакановъ воды пополамъ? Сколько будетъ въ каждой части? На сколько частей можно раздѣлить 6 стакановъ воды по 1 стакану? по 2 стакана? по 3 стакана?

Всѣ эти упражненія ученики продѣлываютъ сами съ пескомъ, при чемъ, пользуясь двойнымъ стаканомъ, можно считать группами по 2, т. е. сначала насыпается 6 стакановъ песку по одному, а отсыпается по 2 стакана и сосчитывается, сколько разъ можно отсыпать изъ 6 стакановъ по 2. Затѣмъ взять третій стаканъ и имъ насыпать песокъ, тогда можно поставить вопросъ, сколькими способами можно насыпать 6 стакановъ песку, отсыпая каждый разъ поровну? Затѣмъ взять стаканъ въ 4 лота и 2 лота и, наполнивъ ихъ пескомъ, пересыпать въ большой стаканъ, сколько стакановъ песку насыпано? Отсыпьте 5 стакановъ, сколько осталось?

Изучивъ объемы, учитель переходитъ къ вѣсу и показываетъ ученикамъ, изъ какихъ гирь можно составить 6 фунтовъ. Онъ беретъ сначала 6 фунтовыхъ гирь и становитъ на одну чашку вѣсовъ, а на другую кладетъ 3 двухфунтовыхъ и спрашиваетъ учениковъ, сколько двухфунтовыхъ гирь содержится въ 6 фунтахъ? Затѣмъ тѣ же 6 фунтовыхъ гирь уравновѣшиваетъ двумя трехфунтовыми гирями и спрашиваетъ, сколько нужно гирь по 3 фунта, чтобы составить 6 фунтовъ. Наконецъ, 2 трехфунтовыхъ гири уравновѣшиваетъ 3 двухфунтовыми и получаетъ, что вѣсъ первыхъ равенъ вѣсу вторыхъ.

Затѣмъ беретъ сосудъ, уравновѣшиваетъ его пескомъ, наливаетъ туда 6 стакановъ воды и кладетъ 6 фунтовыхъ гирь. Сколько гирь нужно снять, когда мы отольемъ одинъ стаканъ воды? Сколько гирь придется снять, когда мы отольемъ два стакана воды? Три стакана? Четыре стакана? Сколько гирь надо добавить, когда къ оставшейся водѣ прильемъ еще два стакана? Когда прильемъ 3 стакана? Сколько воды у насъ теперь налито въ сосудъ? Сколько фунтовъ она вѣситъ? Нальемъ 6 стакановъ и уравновѣсимъ 6 фунтовыми гирями, какъ можно ихъ замѣнить болѣе тяжелыми гирями—по 2 фунта? по 3 фунта? У насъ есть 4 фунтовыхъ гири, сколько гирь надо прибавить, чтобы уравновѣсить 6 стакановъ воды?

Выяснивъ при помощи объема и вѣса число 6, его дѣлимость и его полученіе, учитель вновь проходитъ все пройденное при помощи листа съ квадратными дюймами, при чемъ, чтобы не затруднять учениковъ введеніемъ новаго цвѣта, онъ пользуется бѣлымъ цвѣтомъ; такимъ образомъ, въ распоряженіи учителя слѣдующіе цвѣта: красный, синій, желтый, ярко-зеленый, свѣтло-голубой и бѣлый.

Упражненія начинаются съ того, что учитель предлагаетъ ученикамъ оторвать 6 квадратовъ по одному, положить ихъ на цвѣтные листы и отрѣзать цвѣтные квадраты, сколько цвѣтныхъ квадратовъ вы получили? Затѣмъ оторвать 6 полосъ по 6 квадратовъ каждая, наклеить ихъ на цвѣтную бумагу и отрѣзать полосу бумаги каждаго цвѣта по 6 квадратовъ, сколько цвѣтныхъ полосъ вы получили? Уложите эти полосы одна около другой, получимъ ли мы квадратъ? Почему да? Разрѣзать каждую полоску на 6 отдѣльныхъ квадратовъ, сколько квадратовъ каждаго цвѣта мы получаемъ? Уложить эти квадраты въ узоръ изъ разныхъ цвѣтовъ и сосчитать, сколько въ каждой полосѣ получилось одноцвѣтныхъ квадратовъ. Сложить эти квадраты въ кучки такъ, чтобы въ каждой кучкѣ были всѣ цвѣта, сколько мы получимъ кучекъ? Сложить ихъ въ кучки такъ, чтобы въ каждой было по 2 одноцвѣтныхъ квадрата, сколько получимъ кучекъ? Составить узоръ, въ которомъ было бы 3 синихъ, два красныхъ и 1 бѣлый квадратъ, повторить этотъ узоръ еще разъ, можно ли составить еще такой узоръ? Почему нѣтъ? Составить узоръ, въ который входили бы по 3 красныхъ, по 2 зеленыхъ и 1 синій квадратъ, сколько такихъ узоровъ можно составить? Почему только 2 ? Какъ можно составить 3 одинаковыхъ узора?

Разложить голубые квадраты на кучки по 2 квадрата, сколько получимъ такихъ кучекъ? Разложить зеленые квадраты на кучки по 3 квадрата въ каждой, сколько можно сложить такихъ кучекъ? Кромѣ того, какъ и на предыдущихъ урокахъ, ученики часть каждаго урока посвящаютъ записыванію числа шесть въ своихъ тетрадяхъ въ видѣ римской цифры VI. Такое обозначеніе числа я считаю очень удобнымъ, ибо оно выдѣляетъ V въ особую группу и такимъ образомъ служитъ подготовленіемъ къ нумераціи.

§ 10. Выработка понятія числа семь. Знакъ числа VII.

Ознакомленіе съ новой мѣрой длины—футъ. Соотношеніе между футомъ и саженью. Полученіе числа семь при помощи гирь въ 2 и 1 фунтъ (лотъ). Полученіе того же числа при помощи гирь въ 3 и 1 фунтъ (лотъ). Тѣ же задачи для объемовъ при помощи кружекъ.

Учитель раздаетъ ученикамъ линейки по 1 футу и знакомитъ ихъ съ этимъ наименованіемъ. На доскѣ нарисованъ квадратъ въ 1 кв. футъ, котораго стороны измѣряются новой мѣрой. Футъ сравнивается съ аршиномъ, при чемъ ученики находятъ, что аршинъ больше 2-хъ футовъ. Можно еще сдѣлать нѣсколько измѣреній тесемки длиною въ 6 футовъ, чтобы ученики вполнѣ ознакомились съ новой мѣрой. Затѣмъ учитель измѣряетъ этой мѣрой классную сажень и находитъ въ ней 7 футовъ. Число семь повторяется и заучивается. Тогда ученики сами измѣряютъ своими футами тесемку въ 1 сажень, классную доску, отрѣзываютъ бумажныя ленты по 7 футовъ и рѣшаютъ рядъ слѣдующихъ задачъ. Оторвите отъ своей ленты 1 футъ, сколько футовъ у васъ останется? Оторвите еще одинъ футъ, сколько футовъ теперь осталось? Оторвите еще одинъ футъ и остатокъ раздѣлите пополамъ, сколько футовъ содержится въ каждой половинѣ? Оторвите отъ тесемки 2 фута, смѣряйте остатокъ, сколько футовъ осталось? Оторвите еще два фута, сколько футовъ вы оторвали? Сколько осталось? Возьмите ленту въ сажень и оторвите отъ нея 3 фута, сколько футовъ осталось?

Раздѣлите сажень на 2 части такъ, чтобы въ одной было 2 фута, сколько футовъ будетъ въ другой? Раздѣлите сажень на 2 части такъ, чтобы въ одной было 3 фута, сколько будетъ въ другой? Раздѣлите сажень пополамъ, сколько футовъ будетъ въ каждой? Разрѣжьте сажень на 7 кусковъ по 1 футу, сколько частей вы получите? Сколькимъ ученикамъ можно раздать сажень ленты, если каждый получилъ по 1 футу? Можно ли раздать по 2 фута? Вотъ нарѣзана тесемка кусками по 2 фута, по 3 фута и по одному футу, какъ изъ этихъ кусковъ составить сажень?

Послѣ того, какъ мѣра футъ достаточно выяснилась, можно перейти къ объемамъ. Учитель беретъ пустой сосудъ стеклянный, цилиндрическій и наливаетъ въ него семь стакановъ воды, отсчитывая по одному стакану,—сколько стакановъ воды налито въ сосудъ? Затѣмъ беретъ сосудъ въ 2 стакана и отливаетъ изъ сосуда сначала одинъ стаканъ, потомъ другой стаканъ въ сосудъ въ 2 стакана,—сколько стакановъ воды отлито? Сколько осталось? Отливается еще 2 стакана воды сразу,—сколько теперь стакановъ воды отлито? Сколько осталось? Можно ли налить еще 2 стакана воды? Сколько тогда останется? Сколько разъ можно изъ сосуда отлить по 2 стакана? Сколько будетъ воды, если мы нальемъ 3 раза по 2 стакана и еще одинъ стаканъ? Эта задача повѣряется на опытѣ. Затѣмъ берется стаканъ тоже цилиндрическій емкостью въ 3 стакана, измѣряется при помощи стакана, и вода выливается въ большой сосудъ,—сколько стакановъ воды налито? То же самое дѣлается еще разъ, сколько стакановъ воды будетъ налито въ большой сосудъ? (6 стакановъ). Сколько еще стакановъ нужно налить, чтобы было 7 стакановъ? Въ сосудъ налить одинъ стаканъ, сколько разъ нужно налить туда по 3 стакана, чтобы было 7 стакановъ? Какими стаканами можно налить 7 стакановъ (3 раза по 2 стакана и одинъ, или 2 раза по три стакана и одинъ, или 2 раза по 2 стакана и 3 стакана). Въ графинѣ налита вода, какъ узнать, сколько воды налито въ графинъ? (Ее надо измѣрить при помощи стакана). Какъ измѣрить количество воды въ графинѣ, если у насъ есть только одинъ двойной стаканъ? У насъ есть графинъ, какъ узнать, сколько воды можно въ него налить? Можно ли наливать воду двойными стаканами? Возьмемъ стаканы въ 1, 2, 3 и 5 стакановъ емкостью, какъ при ихъ помощи можно налить 7 стакановъ воды въ графинъ? При рѣшеніи этой задачи повторяется весь проработанный урокъ; здѣсь возможны слѣдующія рѣшенія: 7 разъ по 1 стакану, 3 раза по 2 стакана и одинъ; 2 раза по 3 и одинъ; 2 раза по два и 3; два раза по одному и 5; одинъ разъ 2 и одинъ разъ 5. Всѣ задачи рѣшаются до полнаго выясненія всѣхъ возможныхъ сочетаній для числа 7, при чемъ каждая задача рѣшается непосредственнымъ опытомъ.

Всѣ задачи на объемы ученики продѣлываютъ сами съ пескомъ, пользуясь своими стаканами, при чемъ особенное вниманіе обращается на тѣ соотношенія, которыя остались невыясненными въ самосознаніи учениковъ при опытахъ учителя.

Выяснивши объемы, учитель переходитъ къ выясненію числа 7 при помощи вѣса. Для этого на чашку вѣсовъ ставится сосудъ большій 7 стакановъ и уравновѣшивается дробью. Затѣмъ, какъ и прежде, въ него наливается по стакану воды и на каждый стаканъ приходится добавить 1 фунтъ; такимъ образомъ, 7 стакановъ будутъ вѣсить 7 фунтовъ. Учитель спрашиваетъ, сколько стакановъ налито воды? Сколько фунтовъ стоитъ на чашкѣ вѣсовъ? Сколько вѣсятъ 7 стакановъ воды? Какими гирями можно замѣнить поставленныя фунтовыя гири? Здѣсь для вѣса повторяются тѣ же соотношенія, какія были указаны для длины и объема. Затѣмъ окончательно полезно уравновѣсить воду особо приготовленной гирей въ 7 фунтовъ и начать отливать воду, спрашивая каждый разъ, сколько фунтовъ надо доложить вмѣсто отлитой воды для равновѣсія? Затѣмъ отливаютъ воду по 2 стакана и провѣряютъ, какими гирями можно уравновѣсить вѣсы; потомъ по 3 стакана. Сколько разъ можно отлить по 2 стакана? Сколько разъ нужно при этомъ прибавить на чашку по 2 фунта? Сколько фунтовъ надо добавить, если отлить 5 стакановъ воды? Сколько стакановъ воды осталось? Сколько вѣситъ оставшаяся вода?

Всѣ эти упражненія ученики продѣлываютъ съ пескомъ, пользуясь гирями въ 1 лотъ.

Эти же упражненія слѣдуетъ еще разъ продѣлать, взявъ листы бумаги, какъ наглядное пособіе, при чемъ начать съ того, что вновь установить фактъ состава продажной тетради бумаги изъ 6 листовъ. Но такъ какъ листъ бумаги довольно великъ, то можно не оперировать съ цѣлыми листами, а предложить дѣтямъ разрѣзать ихъ на полулисты и отсчитать 7 полулистовъ, согнувъ ихъ въ отдѣльную тетрадь. Затѣмъ попросить сосчитать, сколько полулистовъ осталось; сколько къ нимъ надо добавить, чтобы было также 7 полулистовъ? Сдѣлать изъ каждой тетради двѣ такъ, чтобы въ одной было 4 полулиста, а въ другой три. Сдѣлать изъ тетради въ 7 полулисторъ двѣ тетради по 3 полулиста, сколько полулистовъ осталось? То же самое сдѣлать изъ второй тетради въ 7 полулистовъ, можно ли изъ оставшейся бумаги сдѣлать новую такую же тетрадь? Сколько полулистовъ надо добавить, чтобы это можно было сдѣлать?

Сколько тетрадей мы получили? Сдѣлать изъ тетради въ 7 полулистовъ двѣ тетради въ 5 и 2 полулиста, то же самое сдѣлать изъ второй тетради. Сдѣлать тетради въ 2 полулиста; сколько ихъ можно сдѣлать изъ каждой тетради? Сколько листовъ осталось отъ каждой тетради? Сколько тетрадокъ вышло всего? Послѣ упражненія съ листами бумаги можно повторить тѣ же вычисленія на цвѣтныхъ квадратахъ, составивъ 7 полосъ изъ цвѣтной бумаги, разрѣзать каждую полосу на отдѣльные квадраты и составить цвѣтной квадратъ, въ которомъ отдѣльные цвѣтные квадраты составляли бы узоръ, по этому узору нужно сосчитать, сколько будетъ 1+6, 2+5, 3+4 и т. д.

§ 11. Выработка понятія о числѣ восемь. Знакъ числа VIII.

Дальнѣйшее развитіе геометрическихъ представленій, понятіе о треугольникѣ. Понятіе о цѣнности и соотношеніе между цѣнностью, длиною, вѣсомъ и объемомъ.

Возьмемъ 4 квадрата, сложимъ каждый изъ нихъ пополамъ съ угла на уголъ и разрѣжемъ по линіи сгиба, получимъ фигуру, которая называется треугольникомъ, по числу угловъ. Здѣсь я предложилъ бы не вводить понятія уголъ, но только наименованіе угла; само понятіе дано уже въ предыдущемъ опытѣ жизни, и этого общаго понятія въ данномъ случаѣ я считаю достаточнымъ, чтобы наименованіе ассоціировалось съ конкретнымъ представленіемъ треугольника, какъ фигуры, имѣющей 3 угла. Новое слово треугольникъ конечно должно быть проработано, и полезно посчитать въ немъ углы, а также предложить вопросъ, сколько угловъ въ 2-хъ треугольникахъ, который рѣшается непосредственнымъ сосчитываніемъ. Затѣмъ учитель, который самъ производитъ отсчитываніе квадратовъ и разрѣзаніе ихъ на треугольники, обращаетъ вниманіе дѣтей на то, что изъ каждаго квадрата получается два треугольника, при чемъ спрашиваетъ, сколько треугольниковъ получится изъ двухъ квадратовъ? Сколько изъ трехъ? Затѣмъ самъ считаетъ число всѣхъ полученныхъ треугольниковъ и находитъ ихъ восемь. Новое число восемь должно быть заучено. Потомъ учитель предлагаетъ дѣтямъ оторвать самимъ 4 квадрата и разрѣзать каждый на 2 треугольника,—сколько треугольниковъ вы получили? Какъ можно ихъ сложить другъ съ другомъ, какія фигуры при этомъ получаются? Нужно вырѣзать 8 синихъ треугольниковъ, какъ это сдѣлать? Вырѣжьте еще 8 красныхъ, соедините каждый синій съ краснымъ ихъ длинными сторонами, какія фигуры мы получимъ и сколько? Сложите теперь треугольники короткими сторонами такъ, чтобы получились также треугольники въ 2 цвѣта, сколько треугольниковъ вы получили?

Затѣмъ учитель знакомитъ учениковъ съ монетой въ 1 копейку, раздаетъ имъ 8 копеечныхъ монетъ, 4 двухкопеечныхъ, монету въ 3 копейки и въ 5 копеекъ. Здѣсь, конечно, возможно замѣнить монеты какими-либо кружочками, хотя бы картонными, имѣющими видъ этихъ монетъ. Однако модель непремѣнно и обязательно должна быть точной копіей самой монеты. Я не думаю далѣе, чтобы ученики не были знакомы съ цѣнностью монетъ; но все-таки предварительно ихъ слѣдуетъ опросить, какъ они себѣ представляютъ цѣнность монеты въ 2 копейки, въ 3 и т. д. Если ихъ общія знанія окажутся достаточно точными, то учитель проситъ сосчитать копейки, потомъ замѣнить каждыя двѣ копейки одной монетой въ 2 копейки и задаетъ рядъ вопросовъ о томъ, какъ можно составить 8 копеекъ изъ монетъ по одной и по двѣ копейки, при чемъ выясняется, что 2 копейки содержатся въ 8 копейкахъ 4 раза. Точно также копейки замѣняются 3-копеечными монетами, и изъ нихъ составляется число 8 копеекъ, при чемъ обращается вниманіе на остатокъ. То же самое продѣлывается съ пятачкомъ. Тогда является общій вопросъ, какъ составить 8 копеекъ изъ монетъ въ 5, 3, 2 и 1 копейку.

Послѣ изученія числа 8 на монетахъ его полезно прослѣдить, пользуясь всѣми другими пособіями, длиной, объемомъ и вѣсомъ, при чемъ каждое изъ нихъ связать съ цѣнностью. Эта связь не можетъ быть установлена непосредственнымъ соотношеніемъ, приходится прибѣгнуть къ условности. Однако эта условность здѣсь необходима и по существу дѣла, такъ какъ она является какъ бы введеніемъ къ рѣшенію отвлеченныхъ задачъ.

Всего удобнѣе начать съ измѣренія длины, при чемъ хорошо взять тесемку цвѣтную, не имѣющую обычнаго вида веревки или бумажной ленты. Учитель подзываетъ учениковъ къ своему столу и предлагаетъ отмѣрить по 8 аршинъ ленты, при чемъ измѣреніе слѣдуетъ произвести аршиномъ учителя. Когда $^1/_3$ учениковъ отмѣрили по 8 аршинъ ленты, устанавливается стоимость ленты по 1 копейкѣ за аршинъ. Учитель предлагаетъ продать одному сосѣду 2 аршина, сколько это будетъ стоить? У сосѣда нѣтъ 2 копеекъ, но есть 3, сколько сдачи ему нужно получить?

Сколько аршинъ ленты осталось? Отрѣжьте еще другому сосѣду 3 аршина, сколько за нихъ слѣдуетъ заплатить?

У сосѣда есть только 5 к., сколько ему нужно получить сдачи? Сколько аршинъ ленты осталось? Сколько она стоитъ? Сколько копеекъ выручено отъ продажи? Далѣе другая $^1/_3$ класса отмѣриваетъ себѣ ленту другого цвѣта по 8 аршинъ, при чемъ устанавливается цѣна аршина въ 2 копейки. Въ виду большей трудности счета ученики сначала отмѣриваютъ по одному аршину для каждаго изъ своихъ сосѣдей и получаютъ отъ нихъ стоимость ленты, при чемъ также приходится давать сдачу. Сколько аршинъ ленты у васъ осталось? Отмѣряйте еще одному сосѣду 2 аршина и другому 3, сколько стоятъ 2 аршина ленты? Сколько стоятъ 3 аршина ленты? Сколько аршинъ осталось? Затѣмъ отмѣривается тесемка, находящаяся у учениковъ въ количествѣ 8 аршинъ, и требуется раздѣлить пополамъ, сколько аршинъ будетъ въ половинѣ? Раздѣлите тесемку на 2 неравныхъ куска такъ, чтобы въ одномъ было 5 аршинъ, сколько будетъ въ другомъ? На сколько частей можно раздѣлить тесемку, чтобы въ каждой части было 2 аршина? Эти трудныя задачи дѣленія рѣшаются при помощи непосредственнаго измѣренія: отмѣриваются фактически 2 аршина и отрѣзаются, затѣмъ еще 2 и еще 2 и потомъ считается число частей.

Послѣ упражненія съ длиной учитель переходитъ къ тѣмъ же задачамъ съ объемомъ. На столѣ учителя находится, положимъ, квасъ, налитый въ графинъ. Какъ узнать, сколько стакановъ квасу содержится въ графинѣ? Учитель измѣряетъ и находитъ, что у него есть 8 стакановъ квасу. Потомъ устанавливается цѣна кваса по одной копейкѣ за стаканъ. Учитель отмѣриваетъ 2 стакана и спрашиваетъ, сколько слѣдуетъ за нихъ заплатить? Сколько стакановъ осталось? Отмѣривается еще два стакана, сколько денегъ выручено за квасъ? Оставшійся квасъ продается по 2 копейки за стаканъ, сколько копеекъ за него нужно заплатить? Упражненія съ цѣнностью и ея соотношеніе съ объемомъ на этомъ можно закончить, такъ какъ идея соотношенія уже выяснена на предыдущихъ задачахъ, на которыхъ и нужно добиться полнаго выясненія; но здѣсь сама идея должна распространиться и на объемы, съ одной стороны, а съ другой—ея новая иллюстрація поможетъ тѣмъ, кто вообще плохо усвоилъ ее или не вполнѣ еще съ ней освоился.

Во всякомъ случаѣ я находилъ бы, что упражненій здѣсь больше можно не дѣлать, а перейти къ изученію самаго числа 8 на объемахъ при помощи кружекъ съ пескомъ, гдѣ слѣдуетъ заставить учениковъ разсыпать кружку въ 8 по кружкамъ въ 1, по кружкамъ въ 2 и сосчитать, сколько получается кружекъ въ томъ и другомъ случаѣ. Насыпать кружку въ 3 столько разъ, сколько возможно, и опредѣлить остатокъ; разбить песокъ на двѣ кружки въ 5 и 3 и тому подобное. На этомъ пособіи долженъ выясниться составъ числа 8 въ томъ его объемѣ, какъ это принято въ настоящее время и какъ это было указано раньше для числа 7.

Теперь мы переходимъ къ слѣдующему учебному пособію—къ вѣсу. Здѣсь вновь полезно возстановить соотношеніе между цѣнностью и вѣсомъ. Для этого нужновзять какой-либо товаръ, я предлагаю воспользоваться сѣмячками, которыя можно вѣшать на лоты по цѣнѣ хотя нѣсколько высокой, но возможной, а именно по 1 копейкѣ за 2 лота. Это дастъ довольно трудную задачу на вычисленіе. Эту задачу вполнѣ можно упростить, оцѣнивая лотъ по копейкѣ; но мнѣ кажется, что при достаточномъ изученіи числа 8 задача первая не будетъ непосильна. Итакъ, ученики получаютъ сѣмячки, отвѣшиваютъ ихъ по 2 лота три раза, сколько лотовъ отвѣшено? Сколько они стоятъ, если каждые 2 лота стоятъ 1 копейку? Сколько стоятъ 4 лота? Сколько 6 лотовъ? Сколько 8 лотовъ? Сколько стоитъ одинъ лотъ? Сколько стоятъ 3 лота? Отвѣсьте одному покупателю 6 лотовъ, другому 2 лота, на сколько одинъ платитъ больше другого? Отвѣсьте одному покупателю 5 лотовъ, другому 3 лота, сколько придется заплатить каждому? На сколько копеекъ одинъ заплатитъ больше другого?

Возьмемъ другой товаръ, напр., оловянные кусочки, такъ, чтобы въ одномъ кусочкѣ было вѣсу 1 лотъ, въ другомъ 2 и т. д. до 4 лотовъ, и положимъ, что лотъ олова стоитъ 2 копейки, сколько будетъ стоить пластинка въ 2 лота? въ 3 лота? въ 4 лота? Продана пластинка въ 2 лота по 2 копейки за каждый лотъ, сколько сдачи придется получить съ пятачка? Продана пластинка въ 3 лота, какими монетами можно заплатить за нее?

Сколько копеечныхъ монетъ будутъ вѣсить 1 лотъ? (4 монеты). Сколько двухкопеечныхъ вѣсятъ 1 лотъ? Сколько лотовъ будутъ вѣсить 8 копеекъ? Провѣрьте, все ли равно, какими мѣдными монетами положить 8 копеекъ? Сколько копеечныхъ монетъ надо положить, чтобы уравновѣсить оловянную пластинку въ 2 лота? Сколько лотовъ сѣмячекъ дадутъ вмѣсто оловянной пластинки въ 1 лотъ, если лотъ сѣмячекъ стоитъ $^1/_2$ копейки, а лотъ олова 2 коп.? Въ заключеніе можно показать, что площадь квадрата, построеннаго на діагонали, вдвое больше площади даннаго квадрата, при чемъ, конечно, не можетъ быть и рѣчи о терминологіи, но это можно показать, какъ фактъ, складывая бумагу сначала съ угла на уголъ, потомъ еще съ угла на уголъ, затѣмъ загнуть углы внутрь квадрата такъ, чтобы вершины сходились въ центрѣ, мы получимъ 8 треугольниковъ, которые всѣ попарно равны, и внутри очеркъ квадрата вдвое меньшаго.

§ 12. Выработка понятія числа 9.

Знакъ числа VIIII.

Мы подходимъ уже къ новому и очень важному понятію 10, какъ особой счетной единицы; въ этомъ понятіи содержится идея соединенія счетныхъ единицъ въ опредѣленную счетную группу, которая сама уже въ дальнѣйшемъ можетъ служить счетной единицей. Хорошимъ пособіемъ для выработки этой идеи можетъ служить монета гривенникъ, но въ виду того, что эта монета является мѣриломъ цѣнности, она входитъ въ самосознаніе съ этой идеей, а это мѣшаетъ ей обобщиться на всѣ другія измѣренія и дать понятіе о нумераціи. Если бы было возможно на первыхъ ступеняхъ обученія воспользоваться метрической системой, то обобщеніе идеи измѣренія и идеи нумераціи явилось бы само собой. Къ сожалѣнію, метрическая система настолько еще удалена отъ жизни, что ея введеніе въ первый годъ обученія было бы и очень трудно и безполезно, какъ чисто школьное знаніе, не имѣющее корней въ опытѣ жизни. Въ силу этого необходимо поискать иныхъ путей для разработки идеи новой счетной единицы, при которыхъ ея введеніе имѣло бы готовую подоплеку и явилось бы по существу только обобщеніемъ готоваго матеріала.

Во всемъ предыдущемъ я пытался какъ бы навязать эту идею, производя измѣренія групповыми единицами, сливая отдѣльныя единицы въ новое цѣлое и тѣмъ самымъ наталкивая мысль учащагося, что измѣреніе и счисленіе можно производить какъ отдѣльными счетными единицами, такъ и ихъ совокупностью. Теперь полезно при изученіи числа 9 особенно подчеркнуть эту мысль на числѣ 3, которое даетъ возможность перейти при помощи сажени (3 аршина) и лота (3 золотника) къ этому новому счету. Но начинать, мнѣ кажется, всего удобнѣе не съ этихъ мѣръ, а съ разсмотрѣнія квадрата въ 9 квадратныхъ дюймовъ и въ 9 квадратныхъ вершковъ. Эти пособія уже были въ рукахъ учениковъ, но они еще не знаютъ наименованій дюймъ и вершокъ, но ихъ и не нужно вводить, замѣняя словомъ квадратъ.

Ходъ урока мнѣ рисуется въ слѣдующемъ видѣ. Учитель беретъ 9 дощечекъ величиной въ квадратный футъ и отсчитываетъ ихъ число вмѣстѣ съ дѣтьми, которыя должны запомнить наименованіе 9. Затѣмъ эти дощечки онъ укладываетъ на доскѣ въ особой рамѣ по 3 въ рядъ и получаетъ квадратъ въ 9 кв. футовъ. Число квадратовъ вновь сосчитывается и указывается при этомъ, что они расположены въ 3 ряда, по 3 въ каждомъ. Теперь вмѣсто 3-хъ квадратовъ верхняго ряда вставляется сплошная дощечка, сколько въ ней квадратовъ? Потомъ замѣняется 2 рядъ сплошной дощечкой, сколько въ ней квадратовъ? Сколько квадратовъ въ 2-хъ дощечкахъ? Затѣмъ послѣдній рядъ замѣняется дощечкой, и сосчитывается вновь число квадратовъ. Мы имѣемъ теперь 3 дощечки, изъ которыхъ въ каждой содержится по 3 квадрата, что дастъ два числа или двѣ единицы мѣры: дощечку и квадратъ. Измѣривъ площадь первой единицей, мы получимъ число 3, измѣривъ ту же площадь второй единицей, получимъ 9; единичное соотношеніе между этими единицами будетъ 3.

Всѣ эти упражненія я повторилъ бы еще разъ, пользуясь квадратной саженью и квадратнымъ аршиномъ, устанавливая ихъ въ отдѣльной рамкѣ. При этомъ можно познакомить учениковъ съ наименованіемъ; они знаютъ аршинъ, знаютъ футъ, знаютъ квадратъ, соединеніе этихъ словъ—квадратная сажень, квадратный аршинъ, квадратный футъ не только вполнѣ умѣстно, но само собой навязывается. Я думаю, что уже помимо учителя ученики знаютъ и квадратный дюймъ и квадратный вершокъ, такъ что, вообще говоря, вѣроятно можно пользоваться и этими словами, но въ виду того, что ученики еще не знаютъ соотношенія между футомъ и дюймомъ, между вершкомъ и аршиномъ, въ ихъ самосознаніи, конечно, эти мѣры не будутъ связаны и пока будутъ мыслиться, какъ отдѣльныя мѣры—класснаго объясненія и самостоятельныхъ упражненій.

Послѣ того, какъ они усвоили на классной модели число 9, какъ число, состоящее изъ 3-хъ троекъ, можно предложить имъ вырѣзать 9 квадратовъ изъ бумаги, при чемъ дѣлать цвѣтныя полоски въ 3 квадрата. Это упражненіе важно въ томъ отношеніи, что полоска въ цѣломъ даетъ понятіе о площади въ 3 кв. дюйма или вершка, а полоска, разрѣзанная на отдѣльные квадраты, уже не даетъ этого понятія, она разбивается на мелкія счетныя единицы и перестаетъ служить крупной счетной единицей. Уложивъ цвѣтные квадраты въ квадратъ и перемѣшавъ цвѣта, мы получаемъ наглядное представленіе этого уничтоженія. Если мы возьмемъ 2 синихъ полоски и одну красную, то можемъ дать упражненіе въ сложеніи $6+3$. Затѣмъ возьмемъ три одноцвѣтныхъ полоски и одну изъ нихъ разрѣжемъ на отдѣльные квадраты, тогда получимъ счетъ $6+1$, $6+2$, $6+3$. Этимъ упражненіемъ, т. е. усвоеніемъ этой идеи, я бы ограничился при изученіи числа 9 при помощи квадрата, повторивъ его, если нужно, на пособіи въ квадр. вершокъ. Затѣмъ перешелъ бы къ измѣренію длины аршиномъ и саженью. Отмѣряемъ на тесемкѣ одну сажень аршиномъ и завяжемъ цвѣтной лентой эту длину. Отмѣряемъ еще одну сажень аршиномъ и вновь завяжемъ эту длину; и еще одну сажень; кусокъ отрѣжемъ. Сколько аршинъ мы отрѣзали? Сколько саженъ отрѣзано? Отрѣжемъ теперь одинъ аршинъ, сколько аршинъ осталось? Сколько саженъ осталось? Какъ выразить остатокъ при помощи сажени и аршина? (2 саж., 2 арш.). Отрѣжемъ еще одинъ аршинъ, — сколько аршинъ осталось? Какъ теперь можно измѣрить остатокъ при помощи сажени и аршина? Отрѣжемъ еще одинъ аршинъ,—сколько аршинъ отрѣзано? Сколько саженъ отрѣзано? Сколько аршинъ осталось? Сколько саженъ осталось? Отрѣжемъ еще одинъ аршинъ,—сколько аршинъ осталось? Сколько отрѣзано? Какъ выразить то же самое при помощи сажени и аршина? Сколько аршинъ еще нужно отрѣзать, чтобы осталась одна сажень? Отмѣримъ новую ленту въ 3 сажени и отрѣжемъ отъ нея одну сажень,—сколько саженъ осталось? Сколько аршинъ осталось? Сколько аршинъ отрѣзано?

Аршинъ тесемки стоитъ 1 копейку, сколько стоитъ сажень? Сколько стоятъ 2 сажени? Какими монетами можно заплатить эту сумму? Сколько копеекъ въ 3-хъ монетахъ по 3 копейки? Сколько слѣдуетъ заплатить за 2 саж. и 1 аршинъ тесемки, если 1 аршинъ стоитъ 1 копейку? Какими монетами можно уплатить эту сумму? Сколько аршинъ тесемки можно получить на 5 копеекъ? Сколько здѣсь будетъ саженъ и аршинъ? Сколько саженъ тесемки можно получить на 9 копеекъ? Изъ какихъ монетъ можно составить 9 копеекъ? Куплено 4 аршина тесемки и въ уплату дано 5 копеекъ, сколько сдачи слѣдуетъ получить? Куплено 4 аршина тесемки и въ уплату даны 2 трехкопеечныя монеты, сколько сдачи слѣдуетъ получить? Куплено 7 аршинъ тесемки и въ уплату даны три трехкопеечныя монеты, сколько сдачи слѣдуетъ получить? Аршинъ тесемки стоитъ 2 копейки, сколько стоятъ 2 аршина? Сколько стоитъ сажень? Сколько стоятъ 4 аршина? По цѣнѣ 2 копейки за аршинъ куплена сажень тесемки и въ уплату дано 5 копеекъ и 3 копейки, сколько слѣдуетъ получить сдачи?

Всѣ эти задачи я не считаю трудными, и думаю, что большинство класса рѣшитъ ихъ въ умѣ; но если бы оказалось, что часть класса ихъ не усвоила, то полезно, не отказываясь отъ этихъ задачъ, продѣлать ихъ фактически: пусть одинъ ученикъ продаетъ другому требуемое количество тесемки, получитъ въ уплату указанныя монеты и даетъ сдачу. Этотъ процессъ я бы особенно рекомендовалъ даже и въ томъ случаѣ, если ученики хорошо сосчитаютъ, такъ какъ фактическая продажа и уплата даетъ такой рядъ ассоціацій, который необходимъ еще на данной ступени обученія.

Ознакомившись теперь достаточно съ числомъ девять, ученики переходятъ къ изученію его посредствомъ вѣса, при чемъ имъ указывается новая вѣсовая единица—золотникъ, которую они непосредственно на вѣсахъ сравниваютъ съ лотомъ и находятъ, что лотъ по вѣсу равняется 3 золотникамъ. Сколько золотниковъ въ 2-хъ лотахъ? Сколько въ 3-хъ лотахъ?

Предметы для взвѣшиванія приходится сдѣлать искусственные, для этого могутъ служить конверты съ бумагой; ихъ легко подобрать такъ, чтобы они были вѣсомъ соотвѣтственно въ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 золотниковъ. Тогда по отношенію къ нимъ возможны тѣ же вопросы, какъ и по отношенію къ сажени. Напримѣръ, сколько вѣситъ конвертъ № 3, какой гирей можно замѣнить 3 золотника? Сколько золотниковъ вѣситъ конвертъ № 5? Сколько здѣсь будетъ лотовъ? Какъ выразить вѣсъ этого конверта? (1 лотъ 2 зол.).

Послѣ этихъ упражненій, главная цѣль которыхъ ознакомить учениковъ съ новой вѣсовой единицей и укрѣпить въ нихъ идею групповой единицы, слѣдуетъ взять какое-либо сыпучее тѣло, напримѣръ, сѣмечки и предложить ученикамъ отвѣсить 3 лота сѣмячекъ, затѣмъ отсыпать 1 золотникъ, сколько золотниковъ осталось? Отсчитать еще одинъ золотникъ, сколько золотниковъ теперь осталось? Сколько лотовъ и золотниковъ въ этомъ остаткѣ?

Положимъ, что золотникъ сѣмячекъ стоитъ 1 копейку; сколько будетъ стоить лотъ? Сколько стоятъ 2 лота? Сколько стоятъ 3 лота? Сколько золотниковъ дадутъ на 5 копеекъ? Продано 2 лота 1 золотникъ сѣмячекъ, за нихъ уплачено 3 трехкопеечныхъ монеты, сколько получить сдачи?

Лотъ сѣмячекъ стоитъ 6 копеекъ, сколько стоитъ золотникъ? Сколько золотниковъ дадутъ на 8 копеекъ? Лотъ сѣмячекъ стоитъ 2 копейки, сколько нужно заплатить за 3 лота? Сколько слѣдуетъ заплатить за 4 лота? Куплено 4 лота сѣмячекъ по 2 копейки за лотъ и дано въ уплату 3 трехкопеечныхъ монеты, сколько приходится получить сдачи?

§ 13. Новая единица счета,—число десять. Знакъ числа X.

Изученіе числа десять должно имѣть своей главной цѣлью то, что это есть новая единица счета, состоящая изъ десяти единицъ основныхъ, поэтому всѣ наглядныя пособія необходимо должны содержать эту единицу конкретно. Изученіе ея всего лучше можно начать съ монетъ, гдѣ серебряный гривенникъ по своему виду уже рѣзко отличается отъ мѣдной копейки и представляетъ собою новую единицу цѣнности. Урокъ мнѣ представляется въ слѣдующемъ видѣ. Учитель считаетъ десять мѣдныхъ копеекъ, и когда получаетъ число десять, то говоритъ ученикамъ, что цѣнность этихъ 10 копеечныхъ монетъ равна цѣнности серебрянаго гривенника, при этомъ обращается вниманіе на то, что новая монета сдѣлана изъ другого, болѣе цѣннаго матеріала — серебра, что она имѣетъ совершенно другой видъ, затѣмъ спрашиваетъ, сколько копеекъ въ гривенникѣ? Повѣрьте это на своихъ моделяхъ, замѣните каждыя двѣ копейки одной монетой, сколько въ гривенникѣ двухкопеечниковъ? Возьмите опять десять копеечныхъ монетъ и замѣните каждыя пять копеекъ пятачкомъ, сколько въ гривенникѣ пятаковъ? Можно ли составить гривенникъ изъ трехкопеечниковъ? Сколько надо добавить къ 3 трехкопеечникамъ, чтобы получить 10 копѣекъ? За товаръ заплачено 7 копеекъ, сколько слѣдуетъ получить сдачи съ гривенника? Эта задача обязательно рѣшается слѣдующимъ пріемомъ: надо гривенникъ размѣнять на 10 копеекъ, отсчитать 7 и отдѣлить остальныя 3, которыя и будутъ служить сдачей. Такихъ задачъ надо дать побольше, обращая главное вниманіе на то, что 1 гривенникъ мѣняется на 10 копеечныхъ монетъ.

Къ сожалѣнію, какъ я уже говорилъ выше, деньги есть единственное наглядное пособіе, совпадающее съ системой нумераціи. Хотя въ настоящее время намъ не особенно важно десять, какъ новая единица счета,—о чемъ будетъ рѣчь дальше, но все-таки чрезвычайно важно поставить дѣтямъ на видъ, что она въ состояніи распадаться на отдѣльныя единицы, и что такихъ единицъ будетъ 10.

Въ силу этого полезно еще разъ повторить всѣ задачи на новомъ наглядномъ пособіи: взять 10 палочекъ, сосчитать ихъ и связать въ пучекъ; этотъ пучекъ и дать дѣтямъ, сказавъ, что здѣсь содержится десятокъ палочекъ. Дѣти разбиваютъ этотъ пучекъ на отдѣльныя палочки и сосчитываютъ ихъ, потомъ раскладываютъ въ группы по 2 палочки, сколько получится такихъ группъ? Можно ли разложить по 3 палочки? Сколько останется? По четыре,—сколько группъ и сколько остается? Сколько группъ по 5?

Такой счетный пучекъ является очень важнымъ пособіемъ въ счетѣ десятками, а потому съ нимъ необходимо раньше познакомиться.

Указанныя пособія разбиваютъ десятокъ на счетныя единицы, теперь необходимо показать, что счетныя единицы могутъ сливаться въ нѣчто цѣлое. Для этого можно воспользоваться квадратами. Отсчитаемъ десять кв. дюймовъ и возьмемъ цвѣтную полоску этого размѣра. Въ этой полоскѣ счетныя единицы слиты въ одно цѣлое, а потому полезно ее разрѣзать на отдѣльные куски по 1 кв. дюйму каждый. Отрѣжемъ еще красную полоску въ 10 кв. дюймовъ и раздѣлимъ ее пополамъ, сколько квадратовъ на $^1/_2$ полоски? Можно ли разрѣзать полоску на равныя части по 2 квадрата въ каждой? Соединимъ теперь синіе и красные квадраты. Составить полоску въ 10 квадратовъ, въ которой красныхъ квадратовъ 7, сколько надо взять синихъ? Составить полоску въ 10 квадратовъ, въ которой синихъ 6, сколько надо взять красныхъ? Отрѣзать еще желтую полоску въ 10 квадратовъ, можно ли составить полоску въ 10 квадратовъ такъ, чтобы въ ней было по 3 квадрата каждаго цвѣта? Составить изъ 3-хъ цвѣтовъ полоску въ 10 квадратовъ такъ, чтобы въ ней было 2 синихъ и 3 желтыхъ, сколько надо взять синихъ?

Здѣсь могутъ быть предложены довольно разнообразныя задачи на сложеніе въ 3 и 4 слагаемыхъ, упражненіе въ которыхъ очень важно для будущаго и позволяетъ изучить число 10, какъ сумму. Здѣсь же получаются задачи на вычитаніе. Упражненія въ тѣхъ и другихъ даютъ просторъ для составленія разнообразныхъ задачъ, составленіе которыхъ можетъ быть предложено самимъ ученикамъ, вызывая возможность новыхъ построеній.

Слитіе единицъ необходимо еще разъ демонстрировать на объемахъ и вѣсѣ. Демонстрація на объемахъ можетъ быть ведена примѣрно такъ. Взять высокій цилиндрическій сосудъ въ 10 стакановъ, на которомъ должны быть отмѣчены черными чертами объемы отдѣльныхъ стакановъ съ указаніемъ особымъ знакомъ числа 5. Этотъ сосудъ имѣетъ внизу кранъ. Онъ наполняется водой по стакану, считая число стакановъ и наблюдая, какъ съ прилитіемъ воды по стакану она поднимается отъ черты до черты. Потомъ можно отливать воду по стакану, сосчитывая число оставшихся и число отлитыхъ стакановъ. Тѣ же задачи можно еще разъ продѣлать, приливая и отливая по 2 стакана, потомъ по 3. Число упражненій будетъ обусловливаться тѣмъ, насколько ученики свободно считаютъ и ясно представляютъ себѣ объемы. Я думаю, что число упражненій здѣсь можетъ быть не особенно велико, такъ какъ, вѣроятно, ученики уже хорошо будутъ считать до 10, представлять себѣ объемы и имъ придется только пополнить рядъ этихъ задачъ, предложивъ самимъ составить задачи на эту тему, въ связи съ цѣнностью, полученіемъ остатковъ и сдачи.

Вѣсъ 10 фунтовъ все-таки долженъ быть демонистрированъ или отдѣльно, какъ взвѣшиваніе кусковъ олова, или въ связи съ объемами, какъ это было указано выше. Но самымъ важнымъ я считалъ бы показаніе на гиряхъ, какъ вѣсъ 10 отдѣльныхъ фунтовыхъ гирь сливается въ вѣсъ гири въ 10 фунтовъ, какія комбинаціи могутъ быть съ данными гирями, чтобы получить изъ нихъ 10 фунтовъ. Эти упражненія можно провести еще съ пескомъ, когда сами дѣти будутъ производить взвѣшиваніе въ связи съ наблюденіемъ, какъ при этомъ увеличивается объемъ песку.

Задачи на зависимость объема и вѣса, вѣса и цѣнности, объема и цѣнности, быть можетъ, можно и не ставить практически, а предложить въ отвлеченномъ видѣ, предлагая дѣтямъ самимъ составить задачи по данному образцу.

Здѣсь уже получается возможность довольно сложныхъ комбинацій, но не надо забывать, что если упражненія ставятся безъ нагляднаго пособія, то необходимо убѣдиться, что дѣти отчетливо представляютъ себѣ какъ конкретныя мѣры, такъ и соотношеніе между взятыми величинами. При отстутствіи ясныхъ представленій необходимо и здѣсь проработать то же самое конкретно.

Какъ пособіе для перехода къ отвлеченнымъ представленіямъ, я бы рекомендовалъ промежуточную стадію, а именно рисунки, предлагая дѣтямъ, нарисовать себѣ задачу въ видѣ или вѣсовъ или заданнаго объема.

По отношенію къ этому упражненію я позволю себѣ указать, что оно само по себѣ распадается на 2 категоріи: къ первой относятся рисунки на заданную тему, въ которыхъ были бы указаны тѣ величины, которыя необходимо разсмотрѣть, напр., вѣсъ, объемъ, цѣнность; ко второй категоріи принадлежатъ тѣ рисунки, гдѣ свободно проявляется творческая фантазія самихъ дѣтей, въ которыхъ дѣти свободно изображаютъ объекты задачи и сами придумываютъ самую задачу.

То же упражненіе я считалъ бы необходимымъ переходомъ къ упражненіямъ въ счетѣ отвлеченномъ, который будетъ разсмотрѣнъ въ слѣдующей главѣ.

Глава II.

Изображеніе чиселъ арабскими цифрами. Знаки дѣйствій. Рѣшеніе задачъ.

§ 1. Число и цифра въ психологическомъ отношеніи. Слуховой и зрительный числовой образъ.

Въ предыдущихъ урокахъ я стремился къ тому, чтобы въ самосознаніи ребенка возникъ и упрочился числовой образъ, какъ количественное представленіе. Для этого я стремился, чтобы числовой образъ ассоціировался не только съ зрительнымъ представленіемъ множественности, но и съ мускульнымъ чувствомъ; чтобы число не только разсыпалось на счетныя единицы, какъ это происходитъ при счетѣ палочекъ, но и представляло собой опредѣленное количество нѣкотораго объема, нѣкотораго вѣса и пр. Мнѣ кажется, что когда число ассоціируется съ количественными представленіями длины, объема, вѣса, цѣнности, то въ самосознаніи ученика необходимо и обязательно оно должно связаться съ этими ассоціаціями, и личная мысль, подчиняясь законамъ логической дѣятельности, изъ этихъ разнородныхъ ассоціацій должна выбрать нѣчто общее, находящееся въ каждой изъ нихъ. Это общее будетъ число. Понятно, что ни одинъ ребенокъ не сможетъ формулировать эту идею словами, даже болѣе, едва ли онъ способенъ заполнить словесное опредѣленіе числа, если бы ему дать это опредѣленіе; но всего этого пока еще совершенно и не нужно. Важно то, что понятіе числа есть въ самосознаніи, и оно прочно связалось съ нѣкоторыми конкретными ассоціаціями, какъ одно цѣлое. Теперь надо дать этому понятію нѣкоторый также конкретный образъ; одинъ такой образъ ученики имѣютъ уже,—какъ словесное наименованіе числа, выражающее собой измѣненія количества; они имѣютъ и зрительный образъ въ видѣ римской цифры, изображающей это количество и измѣняющійся почти соотвѣтственно съ его измѣненіемъ. Эти представленія чиселъ I, II, III, IIII содержатъ именно то, что наблюдается въ опытѣ,—увеличеніе или уменьшеніе объема, вѣса, длины на одинъ. Числовой знакъ V представляется символическимъ, но дальше VI, VII, VIII, VIIII числа слѣдуютъ тому же закону. Здѣсь опытная ассоціація и изображенія чиселъ однородны, что и связываетъ ихъ въ одно цѣлое.

Новое изображеніе чиселъ арабскими цифрами нарушаетъ эту цѣльность зрительнаго воспріятія и его связь съ количественнымъ представленіемъ; оно вводитъ въ самосознаніе символическій знакъ, въ которомъ есть условное количество, но не конкретное его содержаніе. Съ этими символами дѣти уже встрѣчались какъ въ опытѣ жизни, такъ и въ школѣ, разсматривая цифры на монетахъ и гиряхъ. Мало того, уже за время обученія они научились изображать эти числа и узнавать ихъ, научились сами собой, помимо школы. И даже является очень большой педагогическій вопросъ о томъ, слѣдуетъ ли вводить римскія цифры, слѣдуетъ ли выдѣлить начертаніе цифръ въ отдѣльную главу методики? Не правильнѣе ли психологически вмѣсто римскихъ показать прямо арабскія цифры и тѣмъ самымъ заложить сразу необходимый для дальнѣйшаго фундаментъ? На эти вопросы я не могу дать категорическаго рѣшительнаго отвѣта, ибо такой отвѣтъ можетъ дать только опытъ. Располагая матеріалъ по нѣкоторой логической схемѣ, я принужденъ тѣмъ самымъ дать мѣсто отдѣльной главѣ о цифрахъ. Цѣль предыдущихъ уроковъ—знакомство съ величинами и ихъ измѣреніемъ, и мнѣ кажется, что именно на эту сторону и должно быть обращено все вниманіе учителя. Когда же это знакомство состоялось, то является необходимымъ показать, какъ измѣренія величинъ можно выразить символически при помощи цифръ. Но я не знаю, пойдетъ ли по этому пути внутреннее логическое мышленіе ученика, оно легко можетъ намѣтить для себя иной путь, путь болѣе близкій къ современному обученію, т. е. сразу обнять и цифровую символику и воспріятіе величинъ. Я представляю себѣ возможность такого пути и потому не могу дать категорическаго отвѣта на поставленные вопросы. Если это такъ, то, конечно, весь курсъ долженъ быть переработанъ въ этомъ новомъ направленіи. Но я думаю, что большинство дѣтей потратятъ всю свою энергію на ознакомленіе съ величинами, и тогда для нихъ новый повторительный курсъ съ символическими образами дастъ именно тотъ коррективъ, къ которому они подходятъ сами и какъ бы подсказываютъ учителю его необходимость.

Введеніе арабскихъ цифръ въ самомъ началѣ обученія трудно еще и потому, что начертаніе ихъ своеобразно и технически трудно. Ребенокъ, не умѣющій писать, не можетъ начертать цифровой знакъ, а въ силу этого ему трудно и изображеніе производства дѣйствій. То, что проходилось въ предыдущей главѣ, есть только счетъ, который необходимо совершенно отдѣлить отъ ариѳметическихъ дѣйствій, и эти дѣйствія связать непосредственно съ изображеніемъ чиселъ арабскими цифрами. До сихъ поръ онъ зналъ количество, представлялъ себѣ количество, мыслилъ это количество, онъ понималъ, что количества могутъ быть сосчитаны, и это давало ему идею числа и идею дѣйствія; теперь обѣ эти идеи получаютъ символическое изображеніе въ видѣ знака дѣйствія и знака числа; если преподаватель встанетъ на эту точку зрѣнія, то передъ нимъ раскроется именно та задача, которую я и имѣю въ виду, выдѣляя цифры и дѣйствія въ отдѣльную главу. А именно научить дѣтей при помощи условныхъ символовъ изобразить тѣ задачи, которыя у нихъ были въ конкретныхъ образахъ, т. е. перейти отъ конкретнаго счета къ символическому и тѣмъ самымъ отъ конкретныхъ представленій къ отвлеченному мышленію. Я не думаю, чтобы этотъ переходъ былъ простъ, думаю, что и въ этомъ случаѣ надо помочь дѣтямъ его совершить, т. е. дать имъ подходящій матеріалъ, на которомъ возможно его обработать и выяснить. Этимъ матеріаломъ и будетъ служить арабская цифра, какъ символическій образъ или изображеніе числа. Такимъ образомъ въ самосознаніи идея количества замѣнится символомъ, цифрой, а слѣдовательно при помощи этой замѣны въ самосознаніе войдетъ необходимость мыслить количество, въ видѣ символовъ или чиселъ. Эта символика тѣсно примкнетъ къ другой символикѣ—къ знакамъ дѣйствій, гдѣ функціональныя соотношенія даютъ возможность надъ этими символами совершать ариѳметическія дѣйствія. Разработкѣ этихъ вопросовъ и будетъ посвящена 2-ая глава.

§ 2. Знакъ ариѳметическихъ дѣйствій и его психологическое значеніе въ примѣненіи къ рѣшенію задачъ.

При ознакомленіи дѣтей со знаками ариѳметическихъ дѣйствій слѣдуетъ имѣть въ виду, что ариѳметически записанное дѣйствіе есть нѣкоторая логическая мысль, изображенная символическими знаками совершенно такъ же, какъ она выражается въ словесномъ изложенiи. Слова и знаки имѣютъ одно и то же содержанiе, а поэтому важно не только умѣть передавать мысль посредствомъ того и другого символа, но и понимать, что это есть только иная передача того же самаго. Когда мы говоримъ 3 да 2 составляютъ 5, то эти слова записываемъ символически ариѳметическимъ равенствомъ $3+2=5$. Эта запись и словесная фраза составляютъ одно и то же, и эту тождественность особенно важно отмѣтить, когда мы начинаемъ обучать дѣтей этому новому языку. Такой переходъ съ однихъ символовъ--словъ на языкъ другихъ символовъ—ариѳметическихъ знаковъ является психологически довольно труднымъ, и ему не только надо научить, но надо, чтобы самосознанiе дѣтей освоилось съ этимъ переходомъ. Въ этомъ отношенiи очень важно, чтобы дѣти переводили не только слова на ариѳметическiе знаки, но и эти послѣднiе умѣли формулировать словами, а потому я считалъ бы не только полезнымъ, но и въ высшей степени важнымъ установить, какiя понятiя передаются тѣмъ или инымъ ариѳметическимъ знакомъ. Такъ, напр., слова „прибавить", „присыпать", „привѣсить", добавить" и т. п. не являются столь простыми, чтобы ребенокъ безъ особаго указанiя могъ догадаться, что каждое изъ нихъ можетъ быть замѣнено знакомъ $+$. На эту особенность пониманiя слѣдуетъ обратить особое вниманiе при прохожденiи этого отдѣла.

Совершенно такъ же должны быть указаны тѣ выраженiя, которыя отмѣчаются знакомъ минусъ, знакомъ умноженiя и знакомъ дѣленiя. Другими словами, съ самыхъ первыхъ шаговъ обученiя нужно стремиться къ тому, чтобы ученики умѣли записать рѣшенiе задачи въ видѣ математической формулы, которую потомъ и вычислили бы. Это обстоятельство я считаю существенно важнымъ. Дѣло въ томъ, что въ процессѣ рѣшенiя задачи есть два фактора психическаго мышленiя: вычисленiе и логическая конструкцiя. Въ задачахъ простыхъ оба эти фактора сливаются въ одно цѣлое и нераздѣлимы въ самосознанiи, но въ задачахъ сложныхъ они рѣзко разъединяются; обыкновенно можно запомнить вычисленiе, но трудно уловить логическую конструкцiю, т. е. то внутреннее пониманiе, которое помогаетъ ясно себѣ представить, почему нужно сдѣлать именно этотъ, а не другой рядъ дѣйствiй. Чтобы выяснить себѣ это, возьмемъ, напр., такую задачу: „два яблока и 1 груша стоятъ вмѣстѣ 7 копеекъ; 3 яблока и 1 груша стоятъ 9 копеекъ. Сколько стоитъ яблоко и сколько стоитъ груша"? Вычисленiе въ этой задачѣ крайне просто и легко запоминается, но пониманiе этого вычисленiя довольно трудно. Внѣшнимъ образомъ совершенно нельзя отличить, что ученикъ запомнилъ рѣшеніе или понялъ его, и обычно даже самъ ученикъ, умѣющій рѣшить трудную задачу процессомъ запоминанія, не всегда уясняетъ себѣ, что онъ не понимаетъ рѣшенія, и очень часто путемъ механическаго случайнаго подбора заданныхъ чиселъ задача выходитъ по отвѣту, и тогда кажется, что она рѣшена, хотя весь процессъ рѣшенія совершенно непонятенъ. Изъ этого затрудненія современная школа выходитъ, заставляя учениковъ расчленять задачу и ставить промежуточные вопросы; этотъ пріемъ несомнѣнно имѣетъ большое значеніе, но онъ пріобрѣтаетъ еще большее значеніе, когда при отвѣтахъ не будутъ вычисляться результаты, а только указываться соотвѣтственныя дѣйствія. Такъ, напр., въ приведенной задачѣ мы ставимъ вопросъ: насколько вторая покупка дороже первой? Отвѣтъ на (9—7) копейки. На сколько во второй разъ купили больше, чѣмъ въ первый? Отвѣтъ (3 яблока и 1 груша)—(2 яблока и 1 груша), т. е. во второй разъ было куплено больше, чѣмъ въ первый, на одно яблоко. Сколько стоитъ яблоко? Отвѣтъ—2 коп.

Въ приведенномъ примѣрѣ взята задача трудная для перваго года обученія, мнѣ только хотѣлось на ней иллюстрировать свою мысль. Но самый методъ въ примѣненіи къ простымъ задачамъ позволяетъ углубиться въ содержаніе задачи и даетъ возможность введенія чисто логическихъ построеній безъ осложненія ихъ числами. Въ этомъ логическомъ построеніи самую важную часть его будутъ занимать знаки ариѳметическихъ дѣйствій и представленіе тѣхъ соотношеній, которыя ими выражены. Здѣсь необходимо введеніе скобокъ; но я думаю, что скобки скорѣе помогутъ, чѣмъ затруднятъ ученика, конечно, если имъ дать тотъ характеръ психологическаго значенія, который бы совпадалъ со строемъ мысли ученика.

Я не буду здѣсь болѣе останавливаться на этомъ, такъ какъ въ дальнѣйшемъ дамъ примѣры, поясняющіе эту мысль; но считаю нужнымъ указать, что въ первой главѣ ученикъ познакомился съ величинами, ихъ измѣненіемъ и ихъ соотношеніями, теперь ему необходимо сдѣлать необходимые выводы изъ этого знакомства, т. е. умѣть переложить свои мысли на языкъ числовыхъ символовъ, и въ этомъ умѣньи состоитъ значеніе предлагаемыхъ упражненій. Кромѣ того, отмѣчу еще и то, что въ настоящее время очень большое значеніе придаютъ словесной формулировкѣ добытыхъ результатовъ; эту формулировку я откладываю пока еще въ дальній ящикъ и въ настоящее время интересуюсь исключительно внутренними психологическими прооессами выясненія, т. е. процессомъ накопленія и разработки идей, которыя сдѣлаются гораздо позднѣе вполнѣ ясными, до ихъ словесной формулировки включительно. Слѣдить за этимъ выясненіемъ можно только по умѣнію справиться съ задачей, дать задачу, т. е. въ ихъ практическомъ приложеніи. Другими словами, мнѣ хочется, чтобы все обученіе сосредоточилось на психологической самостоятельной работѣ внутренняго самосознанія учащагося, и учитель только наблюдалъ бы постепенное развитіе этого самосознанія и научился бы помочь ему въ тѣхъ случаяхъ, когда силъ ученика становится мало, и его умъ тщетно ищетъ для себя точекъ опоры.

§ 3. Понятіе о равенствѣ.

Сравнимость разнородныхъ величинъ.

Понятіе о равенствѣ считается въ школьной практикѣ апріорнымъ, и учителя употребляютъ знакъ *равно* безъ всякаго сомнѣнія, допуская какъ его необходимость, такъ и его свойства, и только позднѣе, когда уже въ средней школѣ возникаетъ вопросъ объ уравненіи, тогда возникаетъ необходимость и разсмотрѣнія понятія равенства. Такое отношеніе къ этому понятію всецѣло обусловливается тѣмъ, что учителя положительно не встрѣчаютъ никакой трудности въ отношеніи пониманія слова *равно* со стороны учениковъ. Имъ, ученикамъ, и вмѣстѣ съ ними и учителямъ кажется, что замѣна слова равно двумя черточками = есть все, что исчерпываетъ самое понятіе. Даже больше: введеніе самаго вопроса въ курсъ начальнаго обученія скорѣе можетъ затемнить ясное естественное представленіе, чѣмъ его улучшить и углубить. Это, по моему, не совсѣмъ такъ, и неясность понятія уже въ начальной школѣ при рѣшеніи задачъ, гдѣ вопросъ уравниванія встрѣчается, какъ основной вопросъ рѣшенія, хотя о немъ и не поднимается рѣчь при самомъ рѣшеніи. Въ виду этой важности самаго вопроса по существу я и позволю себѣ разсмотрѣть его возможно подробнѣе, чтобы тѣмъ самымъ дать учителю матеріалъ для его использованія на урокахъ.

Здѣсь, во-первыхъ, въ самосознаніи учениковъ нужно выдѣлить тождественность (это слово я предлагаю замѣнить словомъ одинаковость) и это понятіе отдѣлить отъ равенства. Тождественными можно назвать такія величины, которыя обладаютъ свойствомъ неизмѣнности при замѣнѣ однихъ другими. Напримѣръ, фунтовая гиря всегда тождественна самой себѣ: какую бы фунтовую гирю мы ни взяли, вѣсъ каждой изъ нихъ будетъ одинъ и тотъ же. Такимъ же свойствомъ обладаетъ аршинъ, мѣра объема и прочее.

На это обстоятельство было уже указано въ 1-й главѣ, но здѣсь о немъ необходимо напомнить, такъ какъ оно въ высшей степени важно. Здѣсь нужно предложить ученикамъ рядъ слѣдующихъ вопросовъ. Вѣсъ книги 2 фунта, можно ли вмѣсто этихъ двухъ фунтовыхъ гирь взять какія-либо другія фунтовыя гири? Почему это можно сдѣлать? Можно ли вмѣсто стоящаго здѣсь стакана взять другой стаканъ? Когда это можно сдѣлать и когда нельзя? Какъ можно опредѣлить то условіе, что можно вмѣсто одного стакана взять другой? Назовите мѣры жидкости, которыя всегда одинаковы? (Бутылка молока, бутылка пива и пр.). Какъ мѣряется керосинъ? Можно ли его измѣрить по объему, какъ молоко?

Рядомъ подобныхъ вопросовъ слѣдуетъ просто установить и обосновать идею о тождественности единицъ измѣренія.

Затѣмъ слѣдуетъ указать, что въ силу этой тождественности (однородности) мы имѣемъ право устанавливать равенство, записывая, что II фунта да еще III фунта = V фунтамъ; III аршина, да еще V аршинъ = VIII аршинамъ. Здѣсь знакъ равенства есть знакъ тождественности, полной одинаковости данныхъ величинъ и величины полученной. Послѣ того, какъ будетъ установлена тождественность, слѣдуетъ перейти къ способамъ сравнимости величинъ разнородныхъ, указавъ, что онѣ уравниваются по какому-либо однородному признаку. Для этого всего удобнѣе воспользоваться объемомъ и вѣсомъ, такъ какъ ихъ соотношеніе было разработано въ первомъ полугодіи, и предложить рядъ вопросовъ въ родѣ слѣдующихъ. Какъ мѣряютъ картофель? огурцы? пшено, крупу и т. п.? Какъ еще можно ихъ измѣрить? Можно ли продавать яблоки на вѣсъ? Рѣшите задачу: фунтъ яблокъ стоитъ 8 копеекъ, въ фунтѣ 4 яблока, сколько стоитъ пятокъ? Стаканъ квасу вѣситъ 2 фунта; въ графинѣ налито 10 фунтовъ, сколько налито стакановъ? Какъ можно записать эти задачи?

Отъ этой сравнимости можно перейти къ сравнимости по стоимости. Здѣсь можно разсмотрѣть рядъ слѣдующихъ задачъ. Куплено яблоко и заплачено за него 2 копейки, затѣмъ нужно было купить аршинъ тесемки, который также стоитъ 2 коп., можно ли въ уплату дать яблоко? Почему нельзя этого сдѣлать? Рѣшите такую задачу: мальчикъ купилъ 3 яблока по 2 копейки за каждое; сколько аршинъ тесемки онъ можетъ купить на тѣ же деньги, если аршинъ стоитъ 2 копейки? Разскажите, какъ вы будете рѣшать эту задачу? Почему можно въ разсужденіи полагать, что за аршинъ можно заплатить яблокомъ, а на самомъ дѣлѣ этого сдѣлать нельзя? Этотъ вопросъ является, вообще говоря, труднымъ и неожиданнымъ, но онъ необходимъ, потому что впослѣдствіи именно это сомнѣніе мѣшаетъ ученикамъ правильно разобраться въ задачѣ; между тѣмъ какъ по своей сущности онъ настолько жизнененъ, что его можно разобрать въ разсматриваемый періодъ, пользуясь указаніями на то, что ученику, которому хочется пріобрѣсти перья или бабки, они кажутся цѣнными, но ихъ цѣнность совершенно пропадаетъ, если на нихъ попытаться купить яблокъ или пряниковъ. Въ отношеніи разсматриваемаго вопроса я повелъ бы учениковъ дальше, чтобы добиться отъ нихъ словеснаго опредѣленія, словесной формулировки въ отношеніи равенства. Такъ, можно ли написать, что 3 яблока = 3 аршинамъ тесемки? Почему этого нельзя сдѣлать? Какъ можно записать это равенство (стоимость III яблокъ = стоимости III аршинъ). Можно ли записать, что 5 стакановъ = 5 фунтамъ? Почему нельзя? Какъ это можно записать? (Вѣсъ V стакановъ = вѣсу 5 фунтовъ). Рѣшите такую задачу: мальчикъ на 10 копеекъ купилъ 5 яблокъ; въ школѣ ему дали вмѣсто каждаго яблока 2 перышка. Сколько стоитъ каждое перышко? Запишите рѣшеніе этой задачи (стоимость V яблокъ = стоимости X перышекъ; но V яблокъ стоятъ X копеекъ, слѣдовательно, X перышекъ стоятъ X коп., а каждое стоитъ I копейку).

Выяснивъ такимъ образомъ ариѳметическій смыслъ понятія *равно*, слѣдуетъ указать еще, какія слова можно замѣнить этимъ знакомъ, такъ, напр., слова: „столько же“, „то же самое“, „все равно, что“. Здѣсь могутъ быть равенства количественныя, числовыя и символическія, напр., II = 2; сторона квадрата = аршину и т. п.

§ 4. Начертаніе чиселъ 1 и 2.

Понятіе сложенія, знакъ сложенія +. Изслѣдованіе тѣхъ выраженій словесной рѣчи, которыя замѣняются этимъ знакомъ.

Согласно заголовку этого параграфа, изложеніе распадается на двѣ части: полученіе начертанія 1 и 2 и выясненіе дѣйствія сложенія. Что касается до первой части, то начертаніе числа 1 не представляетъ никакой трудности, и о немъ нечего и говорить. Вопросъ сосредоточивается на числѣ 2, начертаніе котораго механически весьма трудно. Чтобы облегчить способъ этого начертанія, позволю себѣ предложить слѣдующій пріемъ.

Пусть будетъ кусочекъ ариѳметической тетради (рис. 1), клѣточки которой мною взяты въ 1/2 сантим. Тогда мы раздѣлимъ ее по длинѣ на два квадратика по 4 клѣточки и приба-

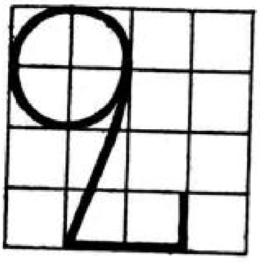

Рис. 1.

вимъ еще одну полоску. Въ первомъ квадратикѣ напишемъ кружечекъ, отъ него проводимъ линію къ первой полоскѣ и вдоль нижней линіи въ двѣ стороны квадрата. Такимъ образомъ получаемъ довольно приличную цифру 2, начертаніе которой приближается къ рисунку, и тѣмъ самымъ облегчается самый способъ.

Послѣ того, какъ дѣти такъ или иначе познакомятся съ начертаніемъ числа 2 и достаточно навыкнутъ въ немъ, необходимо перейти къ выясненію дѣйствія сложенія. При этомъ надо указать, что тамъ, гдѣ слова, данныя въ задачѣ, можно замѣнить словомъ прибавить, вездѣ это слово надо обозначать знакомъ + плюсъ — прямой крестикъ. Это надо выяснить на рядѣ задачъ, гдѣ по возможности исчерпывалась бы разнообразная терминологія этого слова. Я приведу нѣсколько такихъ задачъ.

Какъ изобразить знаками слѣдующую задачу: къ одной кружкѣ песку присыпана еще одна. Сколько кружекъ мы получимъ? Отв. $1+1=2$. Какимъ словомъ можно замѣнить слово „присыпано"? Почему „прибавлено", „присыпано" будетъ одно и то же? (Въ обоихъ случаяхъ мы наблюдаемъ увеличеніе). Какъ можно сказать, когда увеличивается вѣсъ? Какъ записать такую задачу: отрѣзали фунтъ хлѣба и къ нему дали еще фунтъ привѣса, сколько было отвѣшено фунтовъ?

Вы знаете, какъ пекутъ хлѣбъ. Что значитъ припекъ? Было взято фунтъ муки, и когда испекли хлѣбъ, то получили 1 фунтъ припеку, сколько вѣситъ испеченый хлѣбъ? Что значитъ прибыль? Купленъ карандашъ за копейку, а при продажѣ получили копейку прибыли. За сколько копеекъ продали карандашъ?

Рѣшенія всѣхъ этихъ задачъ должны быть записаны, причемъ каждый разъ указано, что каждое изъ этихъ выраженій можетъ быть замѣнено словомъ прибавить, а слово прибавить обозначается знакомъ +. Въ школьной практикѣ употребляется еще слово присчитать, которое вошло и въ нѣкоторыя методики, однако слѣдуетъ замѣтить, что оба эти слова значатъ не одно и то же, и я думаю, что „прибавить" точнѣе характеризуетъ тѣ операціи, которыя нужно выполнить при рѣшеніи задачъ, тогда какъ слово присчитать имѣетъ нѣсколько болѣе узкій счетный смыслъ.

Когда дѣти достаточно выяснили смыслъ термина прибавить, слѣдуетъ обратно дать задачу $1+1=2$ и спросить, какія задачи можно рѣшить по этой формулѣ. Текстъ задачъ долженъ быть придуманъ дѣтьми, и на немъ вновь повторить, какія слова обыденной рѣчи соотвѣтствуютъ термину прибавить и ихъ можно выразить знакомъ плюсъ. Наименованіе плюсъ можно не употреблять, замѣнивъ словами „прямой крестикъ“.

§ 5. Начертаніе чиселъ 3 и 4.

Понятіе вычитанія. Знакъ дѣйствія. Изслѣдованіе понятій вычесть, т. е. уменьшить, взять меньше.

Я ввожу сразу обученіе начертанію двухъ числовыхъ знаковъ 3 и 4 въ виду того, что начертаніе 4 очень просто. Способъ начертанія указанъ на рис. 2 по клѣткамъ. Когда дѣти достаточно овладѣютъ начертаніемъ, слѣдуетъ повторить и то употребленіе знака $+$, давъ соотвѣтственно задачи на сложеніе и заставивъ записать ихъ рѣшеніе по формуламъ $2+1=3$ и $3+1=4$; $2+2=4$. Темы для задачъ можно взять тѣ же и главное вниманіе обратить на тѣ слова, которыя выражаютъ прибавить и обозначаются знакомъ $+$. Однимъ словомъ, повторить предыдущій § съ новыми числовыми знаками и только послѣ этого перейти къ вычитанію.

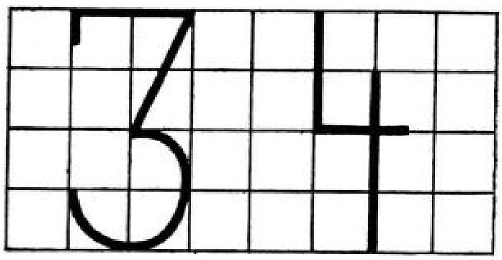

Рис. 2.

Вычитаніе, какъ ариѳметическое дѣйствіе, имѣетъ нѣсколько самостоятельныхъ оттѣнковъ, и всѣ они должны быть указаны и разработаны въ порядкѣ ихъ нарастающей трудности. Первое основное свойство вычитанія есть свойство обратное сложенію; сложеніе есть увеличеніе, вычитаніе есть уменьшеніе, и это свойство должно занять первое мѣсто. При этомъ нужно напомнить дѣтямъ, что всѣ тѣ слова обыденной рѣчи, которыя указываютъ на уменьшеніе, отнятіе, выражаются ариѳметическимъ знакомъ — (минусъ—чертою). Для этого предложить рядъ слѣдующихъ задачъ. Какъ записать, что отъ 3 кружекъ песку отсыпана одна кружка, сколько осталось? Что значитъ слово отсыпано? Какимъ словомъ его можно замѣнить? У мальчика было 3 яблока, онъ отдалъ 2 изъ нихъ, сколько у него осталось? Что значитъ отдать? Какимъ словомъ его можно замѣнить? Какъ записать рѣшеніе этой задачи? У мальчика было 4 перышка, изъ нихъ онъ 2 проигралъ, сколько у него осталось? Какимъ словомъ можно замѣнить слово проигралъ? Когда жарится кофе, то вѣсъ его уменьшается. Куплено 4 фунта сырого кофе, а когда его изжарили, то 1 ф. пропалъ, сколько фунтовъ жаренаго кофе осталось? Что значитъ убытокъ? Купленъ карандашъ за 3 копейки и проданъ за 2 копейки, сколько получено убытку?

Рядомъ подобныхъ задачъ выясняется понятіе вычитанія, какъ уменьшеніе какого-либо количества; изъ этого понятія слѣдуетъ и другое—понятіе объ остаткѣ.

Къ этому понятію уменьшенія тѣсно примыкаетъ слово меньше, которое само по себѣ даетъ рядъ новыхъ задачъ и представляетъ собою новый оттѣнокъ вычитанія, что будетъ видно изъ ряда нижеприведенныхъ задачъ. Дѣтямъ должно быть указано, что слово меньше выражается знакомъ минусъ, и это понятіе можетъ быть разработано на слѣдующемъ рядѣ примѣровъ.

У мальчика было 4 яблока, а у его товарища однимъ яблокомъ меньше. Сколько яблокъ было у товарища?

Отрѣзано 2 куска ленты: въ одномъ было 4 аршина, а въ другомъ на 2 аршина меньше. Сколько аршинъ во второмъ кускѣ?

Въ графинѣ налито 3 стакана квасу, а въ другомъ графинѣ на 1 стаканъ меньше, сколько стакановъ въ другомъ графинѣ?

Взяты 2 полоски бумаги: въ одной 4 квадрата, а въ другой на 2 квадрата меньше. Сколько квадратовъ въ другой полоскѣ?

Затѣмъ могутъ быть предложены формулы: $4-3=1$; $4-2=2$; $4-3=1$; $3-2=1$; $3-1=2$, къ которымъ дѣти должны придумать соотвѣтственныя задачи.

Въ заключеніе полезно связать новыя вычисленія со старыми, предложивъ дѣтямъ вычислить строчки.

$1+1+4-2$; $3+2-4+1$; $3+1-2+4-3$ и т. п.

Въ этихъ строчкахъ не должно быть скобокъ; все вычисленіе слѣдуетъ производить послѣдовательно; число членовъ можетъ быть взято сначала 3 или 4, а потомъ ихъ можно взять гораздо больше, чтобы дѣти могли бѣгло вычислять. Но число такихъ упражненій во время урока не должно быть велико: не больше 3-хъ, 4-хъ строчекъ.

§ 6. Начертаніе числа 5.

Изученіе понятій больше и меньше. Употребленіе скобокъ.

Начертаніе числа 5 можетъ быть дано по схемѣ (рис. 3), гдѣ оно располагается въ полоскѣ, состоящей изъ двухъ квадратовъ. Я предлагаю дать здѣсь начертаніе только одного числа, чтобы не загромождать сразу самосознаніе учениковъ обиліемъ начертаній и концентрировать ихъ вниманіе на логическомъ выясненіи понятій „больше“ и „меньше“. Изъ предыдущаго § мы знаемъ, что слово „меньше“ выражается знакомъ минусъ, и теперь нужно указать ученикамъ, что слово „больше“ выражается знакомъ плюсъ. Потомъ предложить рядъ простыхъ задачъ на упражненіе въ этомъ обозначеніи, при чемъ окончательный предѣлъ счета долженъ быть число 5.

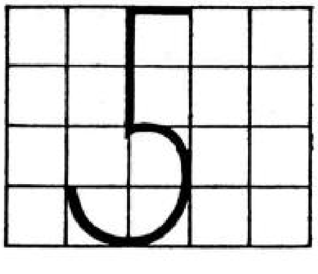

Рис. 3.

1) У одного мальчика было 2 пряника, а у другого тремя больше, сколько пряниковъ было у другого мальчика? Отвѣтъ $2+3=5$.

2) Въ одной полоскѣ находится 3 квадрата, а въ другой на 2 квадрата больше. Сколько квадратовъ въ другой полоскѣ?

Надо помнить, что во всѣхъ этихъ задачахъ главное вниманіе должно быть обращено на запись формулы рѣшенія, т. е. на обозначеніе знакомъ слова больше. Когда это слово достаточно проработано, то слѣдуетъ повторить выраженіе слова меньше на рядѣ подходящихъ задачъ, потомъ перейти къ болѣе сложнымъ примѣрамъ, на которыхъ познакомить учениковъ съ употребленіемъ скобокъ. Здѣсь можно дать рядъ слѣдующихъ задачъ: у одного мальчика было 2 пряника, а у другого однимъ больше. Сколько пряниковъ было у обоихъ? Рѣшеніе этой задачи слѣдуетъ расположить во вопросамъ:

1) Сколько пряниковъ было у перваго мальчика? Отвѣтъ— 2 пряника.

2) Сколько пряниковъ было у второго мальчика? Отвѣтъ $(2+1)$ пряника. Число $2+1$ мы ставимъ въ скобки, чтобы показать, что это есть одно число, число пряниковъ у второго мальчика.

3) Сколько пряниковъ было у обоихъ мальчиковъ. Отвѣтъ — $2+(2+1)=5$ пряникамъ.

Въ одномъ кускѣ было 3 аршина ленты, а въ другомъ на одинъ аршинъ меньше. Сколько было въ обоихъ кускахъ?

Рѣшеніе будетъ то же самое, но при вычисленіи слѣдуетъ указать, что всегда надо сначала сосчитать то, что стоитъ въ скобкахъ, а потомъ уже все вмѣстѣ. Такъ, въ формулѣ предложенной задачи $3+(3-1)=3+2=5$. При этомъ лучше пріучить не дѣлать такой задачи, какъ указано, но переписать это выраженіе въ двѣ строки слѣдующимъ образомъ:

$$3+(3-1)=3+2$$
$$3+2=5.$$

Къ этимъ задачамъ можно присоединить и болѣе сложныя, хотя предѣлъ 5 не допускаетъ увлеченія въ этомъ отношеніи, однако можетъ быть предложена и такая задача: въ трехъ коробкахъ находятся деньги: въ первой лежатъ 2 копейки, въ другой столько же, а въ третьей на копейку меньше, чѣмъ въ первой. Сколько копеекъ во всѣхъ коробкахъ?

Отв. $2+2+(2-1)=5$ копеекъ.

Здѣсь является вопросъ, гдѣ приписывать наименованія. Я бы предложилъ держаться слѣдующаго правила: числа, входящія въ формулу, не должны содержать наименованія, а они приписываются только къ результату, который и ставится отдѣльно отъ вычисленій въ самомъ концѣ задачи. Такъ предложенная задача должна быть записана такъ:

1) Сколько копеекъ въ первой коробкѣ? *Отв.*—2 копейки.
2) Сколько копеекъ во второй коробкѣ? *Отв.*—2 копейки.
3) Сколько копеекъ въ третьей коробкѣ? *Отв.* (2—1) копейка.
4) Сколько копеекъ во всѣхъ коробкахъ?

$$2+2+(2-1)=2+2+1$$
$$2+2+1=5.$$
Отв.—5 копеекъ.

Это составляетъ, конечно, мелкую подробность, на которую я указываю только въ виду того, чтобы на каждомъ равенствѣ можно было повторить общую идею равенства, указанную въ § 3.

Къ этому § я сдѣлаю замѣчаніе, которое будетъ относиться ко всѣмъ параграфамъ этой главы, относительно пріема наученія начертанію цифръ. Начертанію цифръ должно быть посвящено начало каждаго урока, при чемъ каждый разъ должны быть повторены всѣ предыдущія цифры. Это повтореніе можно производить, или заставляя учениковъ писать по строчкѣ каждой цифры, начиная съ 2, или на каждой строчкѣ писать подъ рядъ 1, 2, 3, 4, 5. При этомъ можно въ эти упражненія ввести равенства римскихъ и арабскихъ обозначеній въ видѣ III = 3, IIII = 4, V = 5 и т. д.

Знаки дѣйствій и скобки должны имѣть опредѣленные размѣры; такъ, если тетрадь имѣетъ клѣтки въ $^1/_2$ сантиметра, то знаки + и — должны занимать пространство одной клѣтки, а

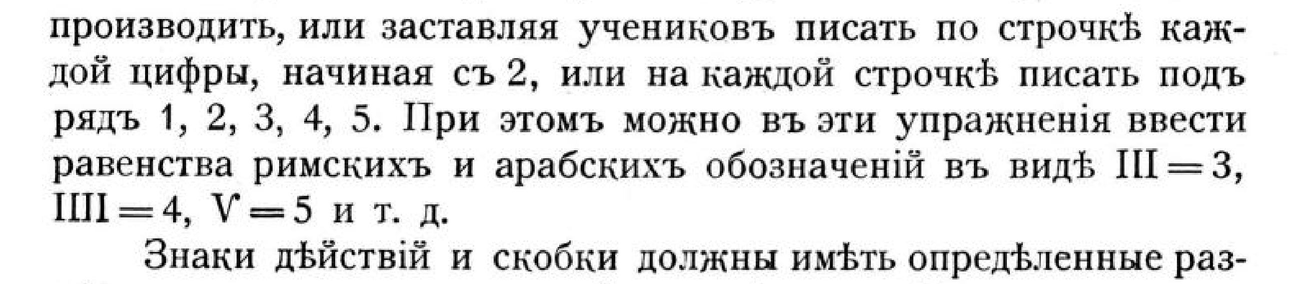

Рис. 4.

скобки во всю длину строки, въ которой пишутся цифры, какъ это показано на рис. 4.

Вслѣдствіе того, что на начертаніе чиселъ уйдетъ время, само прохожденіе этой части растянется, а потому ученики будутъ имѣть возможность болѣе глубоко вдуматься въ сущность понятій, изъ которыхъ понятія больше и меньше наиболѣе трудныя, а потому съ ними полезно продѣлать повтореніе и на дальнѣйшихъ числовыхъ знакахъ.

§ 7. Начертаніе чиселъ 6 и 7.

Дальнѣйшая разработка вопроса о вычитаніи. Вычитаніе, какъ дѣйствіе обратное сложенію.

Я уже говорилъ, что начертаніе чиселъ слѣдуетъ повторять аккуратно, начиная съ 2, и постепенно добавлять къ нимъ новые числовые знаки. Здѣсь можно показать два знака, такъ какъ начертаніе обоихъ довольно просто. Само начертаніе можно показать согласно рис. 5.

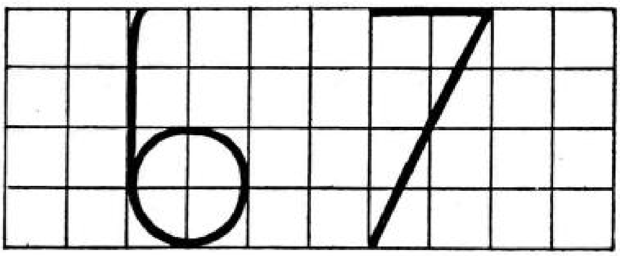

Рис. 5.

Потомъ на этихъ числахъ слѣдуетъ повторить задачи для выясненія понятій больше и меньше какъ въ виду трудности самихъ понятій, такъ и потому, что главная трудность счета начинается съ этихъ чиселъ, а потому чѣмъ больше упражненій будетъ съ ними, тѣмъ прочнѣе запомнятся такія суммы, какъ $3+4$; $5+2$ и т. п. На это повтореніе уйдетъ вѣроятно урока два, вмѣстѣ съ упражненіями въ начертаніи уже довольно большого количества чиселъ. Замѣчу здѣсь, что въ началѣ обученія не надо жалѣть времени на уясненіе какъ счета, такъ и понятій, съ нимъ связанныхъ, только надо слѣдить за тѣмъ, не являются ли уроки уже скучными вслѣдствіе того, что взято времени больше, чѣмъ нужно, на усвоеніе новаго матеріала. Я думаю, что при достаточно большомъ разнообразіи задачъ этого не будетъ, тѣмъ болѣе, что здѣсь въ усвоеніи новыхъ понятій надо очень остерегаться шаблона, а придумать рядъ такихъ задачъ, гдѣ необходимо было бы вдуматься въ сущность и нельзя примѣнить шаблонъ. Эти задачи должны носить смѣшанный характеръ, затрогивая какъ вопросы измѣренія, такъ и рядъ вопросовъ съ отвлеченнымъ характеромъ. Здѣсь можетъ быть дано разстояніе между городами въ верстахъ, стоимость покупокъ въ рубляхъ, вѣсъ товара въ пудахъ, но тема задачи будетъ та же,—вопросы больше и меньше.

Когда это будетъ достаточно разработано, слѣдуетъ перейти къ задачамъ, въ которыхъ дана сумма двухъ слагаемыхъ и одно изъ нихъ. Особенность этихъ задачъ та, что здѣсь нѣтъ слова, которое можно замѣнить знакомъ минусъ, а этотъ знакъ нужно поставить по смыслу задачи, или, говоря точнѣе, по опредѣленію дѣйствія, какъ обратнаго сложенія. Мнѣ кажется, что это свойство можетъ быть указано прямо на числовыхъ примѣрахъ; но оно вѣроятно усвоится, если мы возьмемъ рядъ слѣдующихъ задачъ:

У двухъ мальчиковъ было 7 картинъ; у одного изъ нихъ было 3 картины. Сколько было у другого?

Въ двухъ графинахъ налито 6 стакановъ воды; въ одномъ 4 стакана, сколько въ другомъ?

Въ двухъ полоскахъ бумаги 7 квадратовъ; въ одной изъ нихъ 5 квадратовъ, сколько въ другой?

Всѣ подобныя задачи могутъ представить неожиданную трудность только потому, что въ нихъ нѣтъ слова, указывающаго дѣйствіе, а потому, быть можетъ, полезно въ началѣ ихъ показать фактически на конкретныхъ примѣрахъ, чтобы у учениковъ создалось представленіе о томъ, что дана сумма двухъ количествъ и одно изъ нихъ и, чтобы получить другое, надо первое вычесть изъ суммы. Если это станетъ яснымъ, то будетъ ясно и само вычитаніе и весь методъ рѣшенія, а также и причина, почему нужно сдѣлать именно такъ, а не иначе. Когда это будетъ усвоено, то слѣдуетъ перейти къ задачамъ, гдѣ не указано, что частей 2, а задача формулирована приблизительно такъ. Въ полоскѣ изъ 7-ми квадратовъ находятся синіе и красные квадраты. Синихъ квадратовъ 4, сколько красныхъ? Въ пачкѣ находятся карандаши и грифеля, всего 6 штукъ. Карандашей 4, сколько грифелей?

Отъ этихъ задачъ, гдѣ части не однородныя, можно перейти къ вопросу о прибыли, указавъ, что въ продажной цѣнѣ есть также 2 части: покупная цѣна и прибыль. При этомъ предложить рядъ задачъ въ родѣ слѣдующихъ. Мальчикъ продалъ карандашъ за 7 копеекъ, а самъ заплатилъ за него 5 копеекъ, сколько прибыли онъ получилъ? Торговка продаетъ яблоки за 6 копеекъ, при чемъ получаетъ 2 копейки прибыли. Сколько стоятъ яблоки ей самой?

Здѣсь же послѣ того, какъ будетъ совершенно выясненъ вопросъ о прибыли, можно познакомить учениковъ съ убыткомъ, предложивъ имъ рядъ соотвѣтствующихъ задачъ.

Послѣ прибыли и убытка слѣдуетъ вновь просмотрѣть тѣ задачи, гдѣ получается припекъ, привѣсъ, для того, чтобы ученики обобщили эти понятія, а главное ясно представили бы себѣ, что тамъ, гдѣ прибавляется къ какому-либо количеству новое количество, мы можемъ вычислить и то и другое, если знаемъ общее и одно изъ нихъ.

Такія задачи полезно предложить ученикамъ придумать самимъ, хотя въ общемъ говоря содержаніе ихъ довольно ограничено, и прибыль съ убыткомъ занимаетъ среди нихъ доминирующее мѣсто.

§ 8. Начертаніе числа 8 и 9.

Сравненіе однородныхъ величинъ посредствомъ вычитанія. Сравненіе величинъ разнородныхъ по ихъ общему признаку (ариѳметическое отношеніе).

Начертаніе чиселъ 8 и 9 можно показать по клѣточкамъ, согласно указанному рис. 6.

Когда ребенокъ приступаетъ къ изученію ариѳметики, то онъ вступаетъ въ новую область, и мы до нѣкоторой степени можемъ судить о тѣхъ затрудненіяхъ, которыя онъ здѣсь встрѣчаетъ, если представимъ себѣ тѣ затрудненія, которыя встрѣчаетъ взрослый, приступая къ изученію новой области знанія, напримѣръ, изучая электричество. Здѣсь, между прочими трудностями, является вопросъ о количествѣ, установленіе равенства количествъ, возможности сужденія о томъ, какое количество больше, какое меньше, какъ можно сравнивать количества и ихъ измѣрять. Въ силу этого я думаю, что тѣ же вопросы встрѣчаетъ и ребенокъ, приступая къ изученію ариѳметики, а потому вопросъ о сравненіи величинъ долженъ занять видное мѣсто въ обученіи. Сравненіе величинъ происходитъ двумя способами: 1) по вопросу, на сколько одна величина больше другой и 2) во сколько разъ одна величина больше другой. Второй вопросъ мы не можемъ еще разсмотрѣть, а потому разсмотримъ первый. Сначала необходимо остановиться на однородныхъ величинахъ, при чемъ понятіе однородности попрежнему будетъ исчерпываться понятіемъ одинаковости. Это можно сдѣлать на рядѣ слѣдующихъ задачъ.

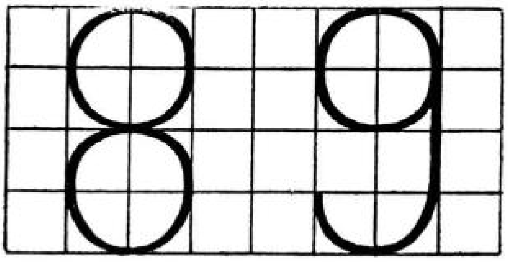

Рис. 6.

Сосчитайте, на сколько 8 копеекъ больше 3 копеекъ? Въ одной тетрадкѣ 9 листовъ, а въ другой 5 листовъ, на сколько листовъ въ первой больше, чѣмъ во второй? Отмѣрена лента въ 8 аршинъ и другая лента въ 4 аршина, на сколько аршинъ первая лента больше второй? На сколько фунтовъ 7 фунтовъ больше 4-хъ фунтовъ? 9 лотовъ больше 2 лотовъ?

Такія же задачи слѣдуетъ предложить обратно со словомъ меньше. На сколько футовъ 4 фута меньше 9 футовъ? На сколько карандашей 2 карандаша меньше 8 карандашей и т. п.

Каждая изъ этихъ задачъ записывается, при чемъ выясняется, что знакъ дѣйствія является не записью слова, а результатомъ сравненія двухъ однородныхъ величинъ.

Когда ученики ясно поймутъ, какъ производится это сравненіе, и что оно возможно только тогда, когда взятыя величины однородны, то слѣдуетъ указать имъ, что и разнородныя величины могутъ сравниваться по общему признаку.

Этотъ признакъ полезно умѣть выдѣлить, и это выдѣленіе нужно проработать, чтобы оно было вполнѣ ясно. Здѣсь возможны два теченія мысли: одно есть обобщеніе данныхъ элементовъ задачи и другое—нахожденіе общаго свойства. Для выясненія перваго можно предложить рядъ слѣдующихъ вопросовъ: торговка продаетъ яблоки, груши и апельсины, какимъ словомъ можно замѣнить эти названія? (фрукты). Въ комнатѣ находятся стулья, столы, диваны и кресла, какимъ словомъ можно замѣнить эти названія? (мебель). Въ ученическомъ столѣ лежатъ задачники, азбуки, какъ можно это назвать однимъ словомъ? (учебники). Въ копилкѣ лежатъ пятачки и трехкопеечники, что лежитъ въ копилкѣ? На рядѣ подобныхъ примѣровъ можно выяснить обобщающія понятія, которыя могутъ въ области сравненій охватывать въ высшей степени разнородные предметы подъ словомъ вещи. Насколько далеко можно итти въ этомъ направленіи, зависитъ отъ такта учителя, который въ данномъ классѣ можетъ опредѣлить предѣлъ отвлеченія и сообразно съ этимъ поставить рядъ задачъ въ родѣ слѣдующихъ. Въ стадѣ находятся 7 лошадей и 5 коровъ, какихъ животныхъ больше и на сколько? Въ копилкѣ лежитъ 9 пятачковъ и 2 трехкоппеечника. Какихъ монетъ больше и на сколько?

Другой элементъ сравненія однородныхъ величинъ есть измѣреніе ихъ; въ этомъ отношеніи надо выяснить идею общаго признака, по которому разнородныя величины могли бы быть сравнимы. Эти общіе признаки я укажу въ возможной полнотѣ.

1) *Сравненіе по длинѣ.* Куплено 9 аршинъ веревки и 3 аршина ленты. Чего больше куплено и на сколько аршинъ?

Здѣсь необходимо выяснить, что веревка и лента суть величины разнородныя, но имѣютъ нѣчто общее, а именно длину, по отношенію къ которой и могутъ быть сравниваемы. Какіе предметы будутъ имѣть тотъ же признакъ? Составьте задачи, гдѣ нужно было бы сравнить предметы по ихъ длинѣ. Какіе предметы нельзя сравнивать по длинѣ?

2) *Сравненіе по вѣсу.* Куплено 8 фунтовъ чаю и 3 фунта сахару. На сколько фунтовъ чаю куплено больше, чѣмъ сахару? Здѣсь опять чай и сахаръ суть величины разнородныя, но мы можемъ ихъ сравнивать по ихъ общему признаку: и тотъ и другой продаются по вѣсу. Я бы въ этомъ случаѣ пошелъ нѣсколько дальше и спросилъ бы учениковъ, можно ли чай и сахаръ сравнивать по длинѣ? Какіе предметы еще можно сравнивать по вѣсу? Нѣтъ ли такихъ предметовъ, которые мы можемъ сравнивать по длинѣ и по вѣсу? Этотъ вопросъ нѣсколько труденъ въ элементарномъ изложеніи, но очень важенъ. Дѣло въ томъ, что однородные предметы мы можемъ сравнивать какъ угодно, напр., куски веревки можемъ измѣрить по длинѣ, по вѣсу, по объему; но предметы разнородные мы можемъ сравнивать только почему-либо одному, и если намъ приходится имѣть дѣло съ сравненіемъ разнородныхъ предмеметовъ, то мы должны уравнять всѣ прочіе ихъ признаки. Такъ, напр., нельзя спросить, на сколько цѣпочки тяжелѣе тесемки, но можно сказать, на сколько аршинъ цѣпочка тяжелѣе аршина тесемки. Это уравниваніе составляетъ сущность многихъ задачъ, и сама задача становится ясной только тогда, когда ясно будетъ, что именно уравнено, и по какому признаку идетъ сравненіе. Такой рядъ задачъ здѣсь можетъ быть данъ по отношенію къ вѣсу и длинѣ, только очень полезно предварительно выяснить это самое свойство на непосредственныхъ опытахъ съ подобранными элементами. Такъ, напримѣръ, можно взять мѣдную цѣпочку и тесемку такъ, чтобы небольшое число аршинъ того и другого разложить на цѣлое число лотовъ, меньше 10, и тогда, отмѣривъ одинаковое число аршинъ, сравнить ихъ по вѣсу фактически и, отвѣсивъ одинаковое число лотовъ, сравнить ихъ по длинѣ. Такія же задачи можно предложить съ бумагой, число листовъ которой будетъ зависѣть отъ вѣса и вѣсъ отъ числа листовъ и достоинства бумаги.

3) *Сравненіе по объему.* Въ графинѣ помѣщается 9 стакановъ, а въ кофейникѣ 5 стакановъ. На сколько стакановъ графинъ больше кофейника?

Въ кастрюлю налили 7 стакановъ молока, а въ кофейникъ 5 стакановъ воды, на сколько стакановъ молока больше, чѣмъ воды?

Здѣсь для учениковъ, съ которыми въ первое полугодіе было проработано соотношеніе между вѣсомъ и объемомъ, легко поставить вопросы, какъ можно сравнить между собою однородныя жидкости? Что нужно знать, чтобы сравнить жидкости разнородныя? Какъ измѣряются жидкости? молоко? керосинъ? квасъ? и т. п. Можно ли сравнивать жидкости по длинѣ? Можно ли веревку измѣрить объемомъ? Что нужно для того, чтобы это было возможно? Чѣмъ отличается одна веревка отъ другой? Можно ли измѣрить по объему чай и сасаръ? Можно ли ихъ сравнивать по объему? Какія вещества можно сравнивать по объему? Во всемъ этомъ самымъ важнымъ будетъ вопросъ уравниванія, въ которомъ одинаковые объемы разнородныхъ жидкостей будутъ разнаго вѣса и одинаковыя вѣса разнаго объема. Если розможно подобрать жидкости или сыпучія тѣла, то полезно поставить непосредственные опыты въ этомъ отношеніи, изъ которыхъ бы дѣти могли конкретно убѣдиться въ значеніи подобныхъ сравненій.

4) ***Сравненіе по цѣнности.*** Аршинъ ленты стоитъ 9 копеекъ, а яблоко стоитъ 2 копейки. На сколько копеекъ аршинъ ленты дороже яблока? Карандашъ стоитъ 8 копеекъ, а грифель 3 копейки. На сколько копеекъ карандашъ стоитъ дороже грифеля? При изученіи этого вопроса слѣдуетъ указать, что цѣнность есть очень важный элементъ сравненія, а потому также важно разобрать, отъ чего зависитъ цѣнность, указавъ на то, что здѣсь играютъ роль нѣсколько факторовъ, изъ которыхъ наиболѣе важные есть достоинство товара, рѣдкость его, величина спроса и т. п. Товары цѣнные и не имѣющіе цѣны; цѣна продажная и цѣна покупная. Вновь поставить вопросъ о прибыли и убыткѣ, и въ то же время съ особенной настойчивостью провести ту мысль, что сравниваніе необходимо должно быть или по цѣнѣ покупной или по цѣнѣ продажной.

Мальчикъ купилъ яблоко за 5 копеекъ, и продалъ его за 8 копеекъ, на сколько копеекъ онъ взялъ за него больше, чѣмъ заплатилъ самъ? Въ лавкѣ куплена лента за 9 копеекъ, но она не понравилась и ее продали за 7 копеекъ? На сколько копеекъ за ленту взяли меньше, чѣмъ заплатили?

Куплено 2 ленты: одна за 9 коп., а другая за 5 коп., на сколько копеекъ первая дороже второй.

Яблоко стоитъ 5 коп., а груша 8 коп. На сколько копеекъ груша дороже яблока? На сколько копеекъ яблоко дешевле груши?

Кромѣ разработки этихъ вопросовъ, здѣсь необходимо еще коснуться вопроса о томъ, какъ назначается цѣна: можно ли назначить цѣну по длинѣ и когда? Какіе товары мѣряются на аршинъ?

По объему и когда? Что измѣряется объемомъ? По вѣсу и когда?

Точно также поставить рядъ вопросовъ уравниванія, при одинаковой цѣнности разныя длины, разные вѣса, разные объемы и обратно при одинаковыхъ длинахъ, вѣсахъ и объемахъ разныя цѣнности. Рядъ задачъ въ этомъ отношеніи можетъ быть составленъ въ родѣ слѣдующихъ: 3 аршина ленты стоятъ 9 копеекъ, а 3 аршина тесемки 6 коп. На сколько копеекъ лента дороже тесемки? Что мы узнали? Какъ можно было бы точнѣе спросить? Какъ отвѣтить точно на заданный вопросъ? На 8 копеекъ даютъ 4 лота сѣмячекъ и 2 лота мятныхъ пряниковъ. На сколько лотовъ сѣмячекъ даютъ больше, чѣмъ пряниковъ? Что можно сказать о томъ и другомъ? (Сѣмячки дешевле пряниковъ).

Разсматривая всѣ эти вопросы, нужно имѣть въ виду, что все изложеніе разсчитано на учителя, а не на ученика; учитель разрабатываетъ всѣ эти вопросы на рядѣ примѣровъ и старается выяснить ученикамъ только сущность изложеннаго, а не формулировать эту сущность. Другими словами, онъ указываетъ имъ рядъ задачъ и рѣшаетъ эти задачи, спрашивая, что именно въ каждой задачѣ заслуживаетъ вниманія. Мнѣ могутъ сказать, что эта сущность есть предметъ не первоначальнаго, а дальнѣйшаго обученія; но это едва ли будетъ вѣрно, потому что предлагаемые вопросы настолько общеупотребительны, что и въ задачникахъ для начальнаго обученія ихъ всегда можно встрѣтить. Все дѣло въ томъ, что слѣдуетъ или не слѣдуетъ обращать вниманіе дѣтей на эти подробности. Можно думать, что этого дѣлать не слѣдуетъ, ибо всѣ эти вопросы рѣшаются дѣтьми по общему ихъ разумѣнію, какъ бы путемъ естественной мысли, и указаніе на нихъ сбиваетъ эту мысль, отвлекаетъ вниманіе въ сторону, гдѣ логически дѣти не въ состояніи разобраться, и это обстоятельство всегда можетъ дать путаницу въ самосознаніи. Я лично держусь обратнаго. По моему, недостатокъ разработки именно этихъ сторонъ въ задачахъ и составляетъ ту трудность ихъ рѣшенія, которая обычно наблюдается. Эта разработка необходима именно потому, что въ задачахъ вопросъ затрогивается, и учитель не можетъ и не долженъ полагаться на ходъ естественной мысли ученика, и ему необходимо освѣтить эту мысль, фиксировать ее, расширить и углубить. Какъ это сдѣлать, это другой вопросъ, но сдѣлать это необходимо. И я убѣжденъ, что недостатокъ этого углубленія и этой ясности мѣшаетъ ученику охватить задачу и выяснить способъ ея рѣшенія.

§ 9. Начертаніе 0.

Понятіе о нулѣ. Счетъ со скобками.

Вопросъ о томъ, что такое нуль, относится къ тѣмъ вопросамъ, относительно которыхъ возбуждается сильное сомнѣніе, на сколько умѣстно ихъ затрагивать въ начальномъ обученіи. На первый взглядъ кажется, что это понятіе настолько естественно и просто, что всякія поясненія способны его только затемнить. Это возраженіе вполнѣ правильно, когда мы будемъ говорить о словесныхъ опредѣленіяхъ, словесной формулировкѣ, но не тогда, когда рѣчь идетъ о самомъ процессѣ выработки понятія. Отсутствіе вопросовъ и даже сомнѣній далеко не ручается за ясность термина и понятія, оно обусловливается только малымъ знакомствомъ съ предметомъ и тѣмъ обстоятельствомъ, что само понятіе принято какъ фактъ и какъ фактъ удержано памятью. Въ дальнѣйшемъ, когда приходится пользоваться этимъ понятіемъ, то фактъ, удержанный памятью, является неподвижнымъ, неспособнымъ ни къ деформаціи, ни къ развитію, а потому приходится запоминать и все то, что изъ этого факта вытекаетъ, какъ изъ понятія, и на одно запоминаніе накладывать другое, безъ всякой возможности сдѣлать какой-либо выводъ или внутренне логически связать эти факты.

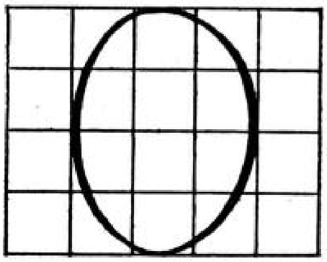

Рис. 7.

Кромѣ того, нельзя ручаться за то, что вопросы не возникаютъ въ умѣ ребенка; но эти вопросы онъ не можетъ еще какъ-нибудь формулировать, а потому молчитъ о нихъ; но всего чаще онъ считаетъ вопросы несущественными и, подчиняясь авторитету учителя, отбрасываетъ ихъ, внося въ свое міровоззрѣніе неясность: его личная мысль не совпадаетъ съ личной мыслью учителя, и это несовпаденіе онъ не можетъ для себя выяснить, и считаетъ себя неспособнымъ къ изученію предмета. Вотъ почему я думаю, что въ самомъ началѣ обученія каждое понятіе должно быть добыто, выяснено по его внутреннему содержанію, чтобы въ умѣ учащагося была соотвѣтственная идея, а не фактъ, удержанный памятью.

Съ этой точки зрѣнія и понятіе нуля необходимо должно быть выяснено не словесно, а по существу въ той его идейной области, какъ онъ мыслится человѣчествомъ. Само это понятіе далеко не такъ просто, какъ это кажется съ перваго взгляда: нуль имѣетъ очень много и условныхъ значеній и значеній по существу, изъ послѣднихъ самое важное есть понятіе равенства или уравниванія. Всѣ эти тонкости, конечно, не нужны въ данномъ случаѣ, здѣсь важны только двѣ идеи: нуль, какъ числовой знакъ, и нуль, какъ разность двухъ равныхъ величинъ. Въ данномъ параграфѣ я разсмотрю только это послѣднее, при чемъ рѣчь моя будетъ предназначаться для учителя, и онъ уже самъ долженъ найти возможность передать ее ученикамъ словами, доступными ихъ пониманію, и примѣрами, ее иллюстрирующими.

Знакъ нуль выражаетъ собою ту же идею, которая содержится въ словѣ „ничего“, но идею не абсолютнаго „ничего“, а относительнаго, т. е. по отношенію къ разсматриваемой категоріи вещей. Такъ, напр., на столѣ находятся тетради, карандаши, но нѣтъ перьевъ, число перьевъ мы выражаемъ знакомъ 0 и можемъ сказать, что на столѣ находятся 2 тетради, 3 карандаша и 0 перьевъ. Это понятіе „ничего“ примыкаетъ къ слову „нѣтъ“. У меня нѣтъ денегъ, я могу эту фразу выразить такъ: „у меня 0 копеекъ“. Итакъ, если чего-нибудь нѣтъ, то по отношенію къ этому я могу слово нѣтъ выразить знакомъ 0, который и будетъ выражать не абсолютное ничто, а относительное.

Такія упражненія обыкновенно не предлагаются дѣтямъ, и они обыкновенно считаютъ 0, какъ абсолютное ничто, вслѣдствіе чего въ дальнѣйшемъ имъ трудно бываетъ выяснить себѣ именно эту относительность, да и въ начальномъ курсѣ здѣсь несомнѣнно существуютъ и вопросы и сомнѣнія; вотъ почему я нахожу, что знакъ 0 долженъ быть выясненъ именно съ этой стороны путемъ подходящихъ вопросовъ и задачъ.

Затѣмъ учитель указываетъ, что тѣмъ же знакомъ обозначаются слова: „ничего не осталось“. Въ этомъ отношеніи опять-таки полезно выяснить относительность, а не абсолютность нуля. Если мы возьмемъ такую задачу: у меня было 8 коп., и я ихъ отдалъ, сколько копеекъ у меня осталось? Въ этой задачѣ отвѣтъ нуль имѣетъ оттѣнокъ абсолютнаго „ничего“, и этимъ наводитъ на рядъ сомнѣній. Въ воображеніи рисуется хорошо одѣтый господинъ, который отдалъ случайно имѣющіяся у него 8 коп., и говоритъ, что у него больше ничего нѣтъ; вся эта картина возбуждаетъ сомнѣніе,—какъ это ничего нѣтъ? Почему ничего нѣтъ? Что значитъ ничего нѣтъ? Если вы поставите вопросъ такъ: вотъ у тебя яблоко, и я его возьму, сколько яблокъ у тебя осталось? Такая задача даетъ тотъ же искусственный характеръ, возбуждая въ умѣ идею, что можно гдѣ-нибудь взять яблоко, что это временное условіе; хорошо было бы, если бы яблоко осталось, и прочее. Всѣ эти сомнѣнія и вопросы возникаютъ только потому, что съ понятіемъ 0 связывается абсолютное, а не относительное „ничего". Чтобы избѣжать этого, я предложилъ бы измѣнить характеръ задачъ въ ихъ относительномъ значеніи, въ родѣ, напримѣръ, слѣдующей: у мальчика было 9 коп., онъ купилъ себѣ 2 яблока, за одно заплатилъ 4 коп., а за другое 5 коп. Сколько копеекъ осталось у мальчика? Здѣсь ставятся вопросы: сколько копеекъ было у мальчика? Отв.—9 к. Сколько копеекъ онъ истратилъ? $(4+5)$ копеекъ. Сколько копеекъ у него осталось? $9-(4+5)=0$ копеекъ. Что выражаетъ здѣсь 0? Почему можно написать $=0$? Дѣйствительно ли у мальчика ничего не осталось? Что у него осталось? (Яблоко и карандашъ). Почему же получился 0? (У него не осталось денегъ).

Отсюда можно перейти къ нулю, какъ разности равныхъ величинъ, т. е. къ вопросу объ уравниваніи. Относительно этого вопроса у меня возникаютъ сомнѣнія въ его посильности для дѣтей и подъ знакомъ этихъ сомнѣній я и изложу его содержаніе. Здѣсь я имѣю въ виду рядъ слѣдующихъ задачъ.

У мальчика было 2 копейки, и онъ хотѣлъ купить карандашъ, за который просили 5 копеекъ. Сколько копеекъ не хватило на эту покупку?

Бутылка съ молокомъ вѣситъ 5 фунтовъ; у насъ есть гиря въ 3 фунта, какую гирю еще надо взять, чтобы взвѣсить бутылку?

Такія задачи обыкновенно рѣшаются такъ, что изъ стоимости карандаша вычитается количество имѣющихся денегъ; изъ вѣса бутылки —вѣсъ гири, и разность этихъ количествъ считается отвѣтомъ на вопросъ. Въ такомъ рѣшеніи мы по существу сравниваемъ разнородные элементы: стоимость карандаша и количество копеекъ у мальчика; вѣсъ бутылки и имѣющуюся у насъ гирю. Но такъ какъ это сравненіе идетъ въ однородной плоскости стоимости и вѣса, то разнородность величинъ не бросается въ глаза. Моя мысль состоитъ въ томъ, чтобы выяснить эту разнородность и показать, какъ она можетъ быть сведена на однородность. Для этого я предложилъ бы измѣнить ходъ разсужденія, положивъ въ основу, что разность равныхъ величинъ всегда равна нулю. Тогда, съ одной стороны, мы имѣемъ количество денегъ у мальчика, съ другой—стоимость карандаша, и спрашиваемъ, сколько копеекъ долженъ былъ бы имѣть мальчикъ, чтобы купить карандашъ? Отв.—5 копеекъ. Сколько копеекъ у него есть? Сколько ему не хватаетъ?

Точно также при рѣшенiи второй задачи первый вопросъ будетъ, какую гирю мы должны имѣть, чтобы взвѣсить бутылку? Отв.—5 фунтовъ. Сколько фунтовъ у насъ есть? Сколько не хватаетъ? Разграниченiе понятiй или, вѣрнѣе, ихъ раздѣльность даетъ нѣчто новое въ разсмотрѣнiи вопроса, которое въ болѣе сложныхъ задачахъ позволитъ принять надлежащiй методъ рѣшенiи. Однако, повторяю, что боюсь, какъ бы самая идея уравниванiя не оказалось непосильной.

§ 10. Изображенiе числа 10.

Таблица сложенiя и вычитанiя.

При изображенiи числа 10 приходится указать дѣтямъ, что нуль имѣетъ еще особое значенiе особаго числового знака, который передвигаетъ единицу на новое мѣсто и тѣмъ мѣняетъ ея значенiе. Собственно этотъ вопросъ едва ли нужно особенно разрабатывать въ данномъ мѣстѣ курса, просто можно указать, что число десять пишется такъ. Главная задача будетъ состоять въ составленiи таблицъ сложенiя и вычитанiя. Хорошо было бы, если бы эти таблицы составлялись въ большомъ видѣ самими дѣтьми и вѣшались на стѣну; онѣ должны быть подробными, т. е. содержать всѣ случаи сложенiя и вычитанiя въ порядкѣ ихъ постепенности въ слѣдующемъ видѣ.

$0+1=1$	$0+2=2$	$0+3=3$
$1+1=2$	$1+2=3$	$1+3=4$
$2+1=3$	$2+2=4$	$2+3=5$
$3+1=4$	$3+2=5$	$3+3=6$
$4+1=5$	$4+2=6$	$4+3=7$
$5+1=6$	$5+2=7$	$5+3=8$
$6+1=7$	$6+2=8$	$6+3=9$
$7+1=8$	$7+2=9$	$7+3=10$ и т. д.
$8+1=9$	$8+2=10$	
$9+1=10$		

Совершенно такъ же для вычитанiя.

$1-1=0$	$2-2=0$
$2-1=1$	$3-2=1$
$3-1=2$	$4-2=2$
$4-1=3$	$5-2=3$

$5-1=4$	$6-2=4$
$6-1=5$	$7-2=5$
$7-1=6$	$8-2=6$
$8-1=7$	$9-2=7$
$9-1=8$	$10-2=8$ и т. д.
$10-1=9$	

Эта работа можетъ быть сдѣлана учениками не въ классѣ, а дома по частямъ, такъ, чтобы она не являлась элементомъ утомленія. При этомъодинъ можетъ написать одну таблицу, напр., прибавленіе по одному, другой вторую—прибавленіе по 2 и т. д.

Въ классѣ же въ это время хорошо поставить вычисленіе со скобками, въ которыхъ можно было бы поупражнять въ счетѣ. Эти задачи не должны имѣть много скобокъ, но непремѣнно содержать разности, равныя нулю. Напримѣръ,

$$(3+5)-(4+3)+(2-2)=?$$

Этимъ и закончится изученіе перваго десятка.

Глава III.

Вычисленіе въ предѣлѣ 20.

§ 1. Переходя теперь къ числамъ второго десятка, слѣдуетъ оглянуться на пройденное и дать себѣ отчетъ въ томъ, что дѣти знаютъ и каково приблизительно ихъ ариѳметическое самосознаніе. Что касается до класса, то можно съ увѣренностью утверждать, что какъ знаніе чиселъ, такъ и пониманіе функціональныхъ соотношеній индивидуально разнообразны. Но въ общемъ можно думать, что дѣти имѣютъ понятіе о числѣ, знаютъ, что надъ числами можно производить дѣйствія сложенія, вычитанія, что при помощи этихъ дѣйствій можно получать новыя числа, которыя позволяютъ судить о результатѣ нѣкоторыхъ вычисленій, т.-е. дѣлать расчеты и напередъ узнавать, что мы должны получить изъ опыта. Они знаютъ, что величины могутъ быть однородныя и разнородныя, что разнородныя величины могутъ находиться другъ отъ друга въ зависимости, и мы на основаніи этой зависимости можемъ узнавать, какъ измѣняется одна величина, если мы измѣняемъ другую. Такъ, напримѣръ, вѣсъ мѣняется въ зависимости отъ объема, и если величины однородныя, то вѣсъ будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше объемъ; стоимость зависитъ и отъ объема и отъ вѣса, а цѣнность является условной и зависитъ отъ достоинства товара. Всѣ эти знанія даютъ дѣтямъ умѣніе рѣшать задачи, т.-е. разбираться въ предложенныхъ вопросахъ и соотношеніяхъ; но числовой объемъ ихъ знанія такъ малъ, что многаго еще нельзя у нихъ спросить. Расширенію этого числового объема и должны быть посвящены дальнѣйшіе уроки. Но здѣсь мы находимся на рубежѣ отвлеченнаго мышленія, и передъ нами лежитъ сложный вопросъ о томъ, что все предыдущее дѣйствительно ли усвоено дѣтьми, или они только запомнили многое, наткнулись на мысль, но еще не освоились съ ней; наконецъ, что всѣ указанныя знанія имѣютъ ли существенное значеніе, или они могутъ быть иногда опущены безъ особаго вреда для дѣла. Другими словами, нужно ли при изученіи 2-го десятка повторить предыдущее, или можно итти дальше, считая его прочно установленнымъ. Вотъ въ этомъ-то отношеніи классъ и будетъ представлять большое разнообразіе, и мы должны выбрать тотъ средній путь, при которомъ хорошимъ ученикамъ не было бы скучно, а плохіе ученики могли бы итти впередъ, усваивая мало-по-малу изучаемый матеріалъ. Однако, я долженъ сказать, что въ этотъ именно моментъ всего полезнѣе отдѣлить отсталыхъ учениковъ на повторительный курсъ. Въ этомъ отношеніи полугодичные курсы имѣютъ въ высшей степени важное значеніе, спасая многихъ именно въ тотъ моментъ, когда для нихъ всего важнѣе повтореніе пройденнаго. Такихъ учениковъ я не имѣю въ виду; они все равно ничего не вынесутъ изъ новаго изученія, но я говорю о среднемъ ученикѣ, который по тѣмъ или инымъ условіямъ еще не вполнѣ освоился съ пройденнымъ; онъ можетъ итти дальше, но въ этомъ дальнѣйшемъ для него очень важно повтореніе и дальнѣйшее развитіе тѣхъ идей, которыя были въ прошломъ. Въ силу этого я думаю, что не слѣдуетъ покидать конкретный путь изученія числа, но можно итти болѣе ускореннымъ темпомъ. Изучать число не на всѣхъ наглядныхъ пособіяхъ, а только на нѣкоторыхъ, брать сразу два числа, затрогивать при измѣреніи болѣе сложные вопросы, искать болѣе точныхъ соотношеній. Остается сказать о геометрическихъ представленіяхъ. Мы остановились на треугольникѣ. Всего удобнѣе здѣсь выдѣлить геометрію въ отдѣльный урокъ и разсматривать ее, какъ самостоятельный предметъ. Она не можетъ намъ болѣе помочь при наученіи счету, но она важна, какъ самостоятельная наука о свойствахъ пространства, какъ особое изученіе, необходимое для общаго математическаго развитія. Въ силу этого для геометрическаго изученія я привожу особую главу.

Теперь нѣсколько словъ относительно изложенія дальнѣйшаго изученія чиселъ 2-го десятка. Передъ нами два вопроса: разсмотрѣніе чиселъ и разсмотрѣніе дѣйствій умноженія и дѣленія. Эти вопросы можно разсматривать совмѣстно, т.-е. одновременно съ изученіемъ, напримѣръ, числа 12,—изучить умноженіе, а вмѣстѣ съ ознакомленіемъ съ числомъ 15 познакомить съ дѣленіемъ. Но, мнѣ кажется, что такой путь прохожденія будетъ психологически неправиленъ и гораздо выгоднѣе раздѣлить оба эти вопроса. Ученики уже знаютъ почти дальнѣйшій счетъ, а если и не знаютъ, то легко поймутъ механизмъ этого счета, а въ пониманіи этого механизма и лежитъ сущность ознакомленія съ числами 2-го десятка, т.-е. ученики легко навыкнутъ считать подъ рядъ 11, 12, 13 и т. д.; но этотъ навыкъ есть только одна сторона знанія и самая легкая. У учителя остается другая болѣе сложная задача—научить сосчитыванію суммъ, разностей, произведеній и частныхъ, а также рѣшенію тѣхъ задачъ, гдѣ нужно производить эти дѣйствія. Все это, главнымъ образомъ, сосредоточивается какъ разъ въ этомъ моментѣ обученія и составляетъ его сущность.

Итакъ, въ этой главѣ передъ нами 3 задачи: 1) наученіе счету по нормальному ряду чиселъ; 2) наученіе сосчитыванію суммъ и разностей въ объемѣ 2-го десятка; 3) ознакомленіе съ произведеніемъ и частнымъ въ связи съ рѣшеніемъ задачъ, сюда относящихся.

Эти 3 вопроса я и изложу въ послѣдовательномъ порядкѣ и думаю, что и практически первый вопросъ надо поставить вполнѣ въ окончательной формѣ, а два другихъ взять вмѣстѣ, разсматривая ихъ въ связи съ числами первоначальными, какъ 11, 13, 17 и т. п. и кратными.

§ 2. Ознакомленіе съ числами 2-го десятка.

Устный и письменный счетъ. Значеніе нуля въ нумераціи. Счетъ по одному устный и письменный.

Переходя къ числамъ 2-го десятка, мы имѣемъ здѣсь такую группу чиселъ, которыя по своей величинѣ не могутъ уже такъ удобно и просто имѣть конкретный образъ, какъ это было съ числами перваго десятка, а потому въ обученіи должны выдѣлить устный счетъ, т.-е. наименованіе чиселъ отъ ихъ письменнаго изображенія. Кромѣ того, въ этой стадіи обученія мы должны настойчиво провести ту мысль, что десять есть особая самостоятельная группа, къ которой присчитываются новыя отдѣльныя единицы. Эту мысль необходимо связать съ конкретнымъ представленіемъ. Для этого можно воспользоваться счетомъ палочекъ, связывая отсчитанныя 10 палочекъ въ одну пачку. Сосчитайте число палочекъ, которыя лежатъ у каждаго изъ васъ. Считайте вслухъ. Одинъ, два, три и т. д. до десяти. Свяжемъ эти палочки въ пачку, какъ можно сказать, сколько палочекъ мы отсчитали? (Десятокъ). Будемъ присчитывать къ нимъ по одной. Одиннадцать, двѣнадцать, тринадцать. Сколько палочекъ мы присчитали къ десятку? Итакъ, число тринадцать состоитъ изъ чиселъ 10 и три. Какъ можно записать это число? $10+3$. Принято вмѣсто этой суммы писать одно число, поставивъ вмѣсто 0 число 3. Итакъ, тринадцать изобразится 13. Какъ можно записать двѣнадцать? Что выражаетъ это число? (Сумму $10+2$).

Вмѣсто чего написано 2? Какъ можно записать одиннадцать? Будемъ считать дальше. Намъ уже не нужно снова отсчитывать десятокъ, онъ у насъ есть. Приложимъ къ нему вновь по одной палочкѣ. Считаемъ сначала: одиннадцать, двѣнадцать, тринадцать, четырнадцать, пятнадцать. Здѣсь вновь повторить прежніе вопросы и такъ продолжать дальше, пока не будетъ сосчитанъ весь второй десятокъ. Новыя десять палочекъ связать опять вмѣстѣ. Сколько десятковъ мы получили? Какъ можно изобразить это число? Далѣе тѣ же упражненія продѣлать еще разъ, взявъ листъ квадратовъ, въ которомъ каждая полоска содержитъ 10 кв. дюймовъ. Оторвавъ эту полоску и спросивъ, какъ изобразится это число, будемъ присчитывать къ ней по одному квадрату и записывать сосчитанное количество.

Я думаю, что этихъ двухъ упражненій достаточно для ознакомленія съ числами 2-го десятка. Но если бы учитель нашелъ, что этого мало, то можно сюда присоединить счетъ денегъ, указавъ, что десятокъ копеекъ называется гривенникомъ и имѣетъ совершенно особый внѣшній видъ и внутреннее достоинство. Здѣсь, когда рѣчь зашла о деньгахъ, нужно сказать о томъ, изъ чего они дѣлаются и какъ различаются. Почему для гривенника берется серебро, и показать гривенникъ, пятіалтынный и двугривенный.

Когда такимъ образомъ будетъ выяснено количественное значеніе чиселъ второго десятка, необходимо затронуть вопросъ о томъ, что такое нуль, какъ числовой знакъ, и что онъ показываетъ? Это можно сдѣлать, предложивъ рядъ слѣдующихъ вопросовъ. Напишите рядомъ 1 и 10; 2 и 20, чѣмъ отличается одно число отъ другого? Что собой выражаетъ 0? Для чего его нужно писать? При этомъ, связывая это изложеніе съ предыдущимъ, слѣдуетъ указать, что нуль не измѣняетъ своего характера и показываетъ также отсутствіе единицъ въ данномъ числѣ; что онъ передвигаетъ цифру на второе мѣсто и тѣмъ указываетъ на ея новое значеніе—десятковъ.

§ 3. Составленіе суммъ въ предѣлахъ 2-го десятка.

Повтореніе статьи по вопросамъ больше и меньше.

Сосчитываніе суммъ въ предѣлахъ 2-го десятка составляетъ наиболѣе трудную область счета не только въ данный моментъ обученія, но и вообще. Слѣдуетъ замѣтить, что это сосчитываніе бываетъ индивидуально различно, а потому было бы полезно произвести въ этомъ отношеніи психологическое изслѣдованіе не только надъ дѣтьми даннаго возраста, но и вообще. Это изслѣдованіе несомнѣнно дало бы простую руководящую идею, какъ практически выгоднѣе начинать это обученіе и какой методъ сосчитыванія наиболѣе удобенъ. Я лично не знаю, есть ли такое изслѣдованіе, а потому предлагаю тотъ методъ, который мнѣ кажется наиболѣе удобнымъ по нѣкоторымъ другимъ соображеніямъ.

Методъ состоитъ въ слѣдующемъ: меньшее слагаемое разлагается на два такъ, чтобы одно изъ нихъ дополняло большее до 10. Такъ, напримѣръ, нужно сложить $5+7$; я предлагаю это дѣлать такъ: $2+3+7$ или $2+10=12$.

Чтобы ввести этотъ методъ, надо предварительно подсчитать такія суммы: $10+2=12$; $10+5=15$ и т. д. Потомъ научить разлагать меньшее слагаемое на двѣ группы и тогда уже переходить къ сложенію болѣе сложныхъ слагаемыхъ. Для этого могутъ служить два ряда задачъ: на скобки и на изученіе вопросовъ больше и меньше. Первый рядъ задачъ долженъ быть данъ въ постепенности, т.-е. начиная съ простѣйшихъ, напримѣръ, $9+2$; $9+(2+1)$; потомъ $8+3$; $8+(2+3)$.

Рядомъ подобныхъ упражненій можно пріучить къ нахожденію сложныхъ суммъ. Задачи 2-го ряда представляютъ собою слѣдующій видъ.

1) Сколько орѣховъ имѣютъ 2 мальчика, если извѣстно, что у одного изъ нихъ 7 орѣховъ, а у другого на 3 больше?

2) Сколько орѣховъ у двухъ мальчиковъ, если у одного изъ нихъ 8 орѣховъ, а у другого на 6 орѣховъ меньше?

3) Сколько квадратовъ въ трехъ полосахъ, если въ перрой 6 квадратовъ, во второй на 4 квадрата больше, а въ третьей на 2 квадрата меньше, чѣмъ въ первой? $6+(6+4)+(6-2)=20$.

На рядѣ подобныхъ задачъ можно выяснить вопросъ о нахожденіи суммъ и научить счету, при чемъ конкретные примѣры понадобятся только въ тѣхъ случаяхъ, когда абстрактный счетъ будетъ труденъ.

§ 4. Сложеніе равныхъ слагаемыхъ.

Выработка понятія „нѣсколько разъ“. Умноженіе. Знакъ умноженія $\times$.

Сосчитайте, сколько разъ я хлопнулъ въ ладоши? Сколько разъ пробили часы? Сколько разъ на доскѣ нарисовалъ крестикъ? Сколько разъ въ квадратномъ футѣ встрѣчается синій квадратъ? Сколько разъ встрѣчается красный? Сколько разъ желтый? Нарисуйте одно и то же 3 раза. Нарисуйте что-нибудь 5 разъ.

Сколько разъ надо налить въ графинъ по 1 стакану, чтобы получить 6 стакановъ воды? Сколько разъ надо взять по 1 фунту, чтобы взвѣсить 8 фунтовъ? Сколько разъ надо перекинуть аршинъ, чтобы отмѣрить 12 аршинъ? Сколько разъ надо на томъ же разстояніи перекинуть сажень? Сколько дюймовъ въ футѣ? Сколько разъ дюймъ уложится въ футѣ?

Напишите сумму, въ которой 2 было сложено само съ собой 3 раза.

Напишите сумму, гдѣ 3 было бы сложено само съ собой 4 раза.

Сосчитайте, сколько будетъ, если я напишу $2+2+2+2=8$; $3+3+3=9$; $(2+2+2)+(3+3+3)=15$; можно ли написать, что $15=5+5+5$?

На этихъ задачахъ слѣдуетъ останавливаться подольше, осложняя суммы числомъ слагаемыхъ. Такъ, будемъ считать по 2: 2 да 2 четыре, да 2 шесть, да 2 восемь и т. д. до двадцати; потомъ по 3 до 18 и т. д. Сюда же могутъ быть отнесены и такія задачи: сколько золотниковъ въ 5 лотахъ? Сколько аршинъ въ 6 саженяхъ? И только, когда эти суммы будутъ легко сосчитываться, можно показать, что ихъ принято изображать особымъ знакомъ, при чемъ впереди ставится число, которое складываютъ, потомъ знакъ $\times$ и за нимъ число, показывающее, сколько разъ число берется слагаемымъ. На этомъ нужно поупражнять отдѣльно, т.-е. задать рядъ вопросовъ, въ родѣ: Какъ записать иначе такую сумму: $2+2+2+2$; $3+3+3$; $4+4+4+4$ и т. п. Потомъ обратно: записано 5×3, что это значитъ? Какъ можно это записать иначе?

Потомъ составить для памяти таблицу и показать, какъ по этой таблицѣ можно находить произведенія.

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20

Здѣсь же полезно показать, что сумма натуральнаго ряда нечетныхъ чиселъ будетъ всегда равна квадрату ихъ числа, пользуясь слѣдующимъ квадратомъ (рис. 7). Здѣсь рядъ незачерненныхъ квадратовъ и рядъ зачерненныхъ идутъ въ порядкѣ нечетныхъ чиселъ $1+3+5+7+9$, а число всѣхъ квадратовъ даетъ сумму этихъ чиселъ. Если сдѣлать эти полоски цвѣтными, то самая фигура выигрываетъ въ своей наглядности. Окончательный предѣлъ получается 25, больше изслѣдуемой области счета; если это обстоятельство кажется опаснымъ, то можно остановиться на 16, т.-е. указать, что $1+3+5+7=16$. При этомъ, конечно, самый вопросъ надо разработать. Сначала взять квадратъ ***ABMC*** и показать, что $1+3=4$; потомъ квадратъ *ADHE*, гдѣ $1+3+5=9$ и наконецъ квадратъ *AEGF*, гдѣ уже $1+3+5+$ $+7=16$. Если удастся, добиться, чтобы эти суммы прямо ассоціировались съ фигурой квадрата, и дѣти хорошо бы усвоили, какъ можно всегда ихъ сосчитать. При этомъ окончательный результатъ можно сосчитать, какъ рядъ одинаковыхъ суммъ $3+3+3$; $4+4+4+4$, которыя уже и переходятъ въ соотвѣтственныя произведенія.

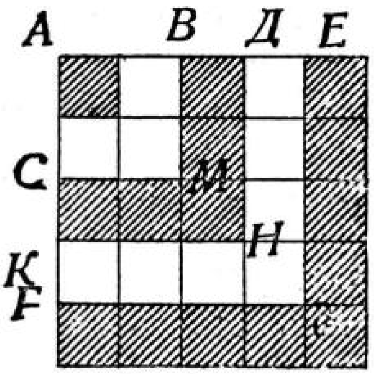

Рис. 8.

§ 5. Выясненіе понятія „умноженіе".

Задачи на это дѣйствіе.

Мы ввели умноженіе, какъ сложеніе равныхъ слагаемыхъ, а потому и выясненіе самаго дѣйствія слѣдуетъ начать съ рѣшенія задачъ, гдѣ бы сохранялся этотъ смыслъ.

1) Куплено 4 аршина тесемки по 3 копейки за аршинъ. Сколько слѣдуетъ заплатить за тесемку?

Такъ какъ каждый аршинъ тесемки стоитъ 3 копейки, то за всю тесемку слѣдуетъ заплатить столько копеекъ, сколько будетъ въ суммѣ $3+3+3+3$; но мы условились такую сумму записывать въ видѣ 3×4, что будетъ 12 копеекъ.

2) Стаканъ песку вѣситъ 2 фунта. Сколько будетъ вѣсить 8 стакановъ песку?

На рядѣ подобныхъ задачъ слѣдуетъ понемногу уничтожать писаніе суммъ и рѣшеніе задачи замѣнить такимъ разсужденіемъ: каждый стаканъ песку вѣситъ 2 фунта, а чтобы узнать, сколько вѣсятъ 8 стакановъ, надо 2 сложить само съ собою 8 разъ или 2 умножить на 8, получимъ $2\times 8=16$ фунтовъ. Къ этимъ задачамъ полезно сразу же присоединить и такія:

3) Фунтъ сѣмячекъ можно насыпать въ 3 стакана. Сколько нужно стакановъ, чтобы насыпать 5 фунтовъ сѣмячекъ?

Сравненіе этого типа задачъ съ предыдущими даетъ необходимость одинъ разъ считать число стакановъ, какъ число отвлеченное, и другой разъ число фунтовъ. Такимъ образомъ можно выяснить, какъ слѣдуетъ думать при рѣшеніи задачи; но объ этомъ должна быть особая рѣчь. Надо выяснить смыслъ задачи, т.-е. что спрашивается и что дано. Такъ, въ задачѣ 2-й слѣдуетъ поставить вопросъ: что нужно узнать? Вѣсъ песку. Что дано? Данъ вѣсъ стакана песку и число стакановъ. Что же нужно сдѣлать, чтобы узнать вѣсъ песку? Приложить къ вѣсу стакана вѣсъ всѣхъ слѣдующихъ. Какимъ дѣйствіемъ замѣняется это сложеніе? Умноженіемъ; надо вѣсъ стакана умножить на 8. Что показываетъ число 8? Оно показываетъ, сколько разъ складывается 2 фунта.

При рѣшеніи задачи 3-й слѣдуетъ поставить тѣ же вопросы, но отвѣты на нихъ будутъ другіе. При этомъ слѣдуетъ очень строго держаться принятаго метода и не употреблять выраженія въ 8 разъ больше, въ 5 разъ больше, такъ какъ эти выраженія являются въ данномъ случаѣ взятыми изъ другой области мысли. Этотъ родъ задачъ можно нѣсколько осложнить въ концѣ, введя сюда сдачу или прибыль. Напримѣръ, предложить рядъ такихъ задачъ:

1) Мальчикъ купилъ у торговки 4 яблока по 3 копейки за штуку. Сколько ему слѣдуетъ получить сдачи съ 15 копеекъ?

2) Было куплено 5 карандашей по 3 копейки за штуку, а продали ихъ по 4 копейки за штуку. Сколько копеекъ прибыли получили на этой продажѣ?

Рѣшеніе этой задачи можетъ быть двоякое; оба способа должны быть показаны.

3) Было сшито 5 тетрадей по 2 листа въ каждой. На сколько листовъ надо взять бумаги больше, чтобы сшить 7 такихъ же тетрадей?

4) Сшили 4 тетради по 3 листа въ каждой; затѣмъ оказалось, что эти тетради малы и пришлось добавить еще по одному листу въ каждую. Сколько листовъ бумаги слѣдуетъ взять?

5) Мальчикъ имѣлъ 20 копеекъ и купилъ себѣ 2 карандаша по 4 копейки каждый и 3 ручки по 2 копейки каждая. Сколько копеекъ у него осталось?

Относительно рѣшенія этихъ задачъ нужно вспомнить, что я говорилъ раньше, т.-е. рѣшеніе записывать въ видѣ формулы. Такъ, послѣдняя задача можетъ быть записана въ слѣдующемъ видѣ $20-(2\times4+3\times2)$, при чемъ произведеніе и частное въ скобки не заключаются; но формула вычисляется такъ, что сначала 2×4, потомъ 3×2 и произведенія складываются.

§ 6. Выясненіе понятія „больше въ нѣсколько разъ“.

Слово „умноженіе“ часто замѣняютъ словомъ „повтореніе“ и часто говорятъ, что умножить это значитъ повторить слагаемыя, сложить число само съ собой; умноженіе есть сокращенное сложеніе.

Во всѣхъ этихъ сужденіяхъ нѣтъ анализа самаго слова умноженіе, а потому они носятъ характеръ нѣкоторой искусственности и нѣкотораго ограниченія сущности самаго понятія. По предложенію Коши во многихъ учебникахъ было введено новое опредѣленіе умноженія: „умножить — это значитъ составить новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы". Это новое опредѣленіе было введено для того, чтобы подъ общее понятіе умноженія подвести случаи умноженія дробей и алгебраическое правило знаковъ. Не входя въ сущность новаго опредѣленія, я укажу только на ту его особенность, что въ немъ содержится сущность понятія—„умноженіе". Умножить—значитъ составить новое число,—въ этой формулировкѣ дѣйствію отводится особое мѣсто; оно не отождествляется съ понятіемъ сложенія, но заключаетъ въ себѣ нѣчто новое, чего не было въ сложеніи. Теперь является вопросъ, что это новое входитъ, начиная съ дробей, или оно содержится въ цѣлыхъ числахъ?

Другими словами, что умноженіе цѣлыхъ чиселъ есть только сокращенное сложеніе, или и въ немъ уже необходимо долженъ быть нѣкоторый новый оттѣнокъ? На первый взглядъ на этотъ вопросъ опредѣленіе Коши не даетъ отвѣта, а если и даетъ, то въ смыслѣ того, что новаго ничего нѣтъ, а есть только сокращенное сложеніе, потому что цѣлый множитель есть сумма цѣлыхъ единицъ, а слѣдовательно, и умноженіе является исключительно сокращеннымъ сложеніемъ равныхъ слагаемыхъ.

Такъ обыкновенно трактуется этотъ случай въ общей теоріи ариѳметики. Но если мы глубже всмотримся въ самый текстъ, то слова „составить новое число" позволяютъ расширить это элементарное представленіе и допустить, что множитель можетъ и не представлять собою сумму нѣкоторыхъ отвлеченныхъ единицъ, а можетъ быть отношеніемъ нѣкоторой величины къ единицѣ мѣры. Тогда и новое число не будетъ представлять собою суммы равныхъ слагаемыхъ, а будетъ представлять новое число, которое относилось бы къ множимому такъ, какъ множитель относится къ единицѣ. Въ такомъ пониманіи дѣйствія мы имѣемъ возможность распространить его и придать выраженію „больше въ нѣсколько разъ" особое, ему только свойственное значеніе—умноженія. Короче говоря, мы можемъ условиться, что слова „больше въ нѣсколько разъ" символически записываются знакомъ умноженія. Такъ что если намъ дана задача: первый разъ куплено 5 фунтовъ чаю, а во второй въ 3 раза больше, сколько фунтовъ куплено въ другой разъ? то рѣшеніе этой задачи мы не будемъ сводить къ случаю сложенія, а прямо скажемъ: чтобы узнать, сколько чаю куплено второй разъ, надо 5 умножить на 3, такъ какъ словесное выраженіе „больше въ 3 раза“ передается ариѳметическимъ дѣйствіемъ умноженія. Говоря иначе, мы въ данномъ случаѣ разсматриваемъ 3, какъ знаменатель отношенія, и говоримъ, что отношеніе числа фунтовъ новой покупки къ числу фунтовъ первой равно 3. Въ этомъ значеніи умноженія и будетъ содержаться то, что множитель можетъ быть полученъ не какъ сумма, а какъ знаменатель отношенія, а слѣдовательно, можетъ быть разсматриваемъ, какъ знаменатель всякаго другого отношенія. Напр., куплено за 5 рублей 4 фунта; сколько фунтовъ можно купить за 20 рублей? Отношеніе 20 къ 5 равно 4, слѣдовательно, за вторую покупку заплачено въ 4 раза больше, а въ силу прямой пропорціональности и куплено въ 4 раза больше.

Всѣ эти разсужденія, конечно, далеко отстоятъ отъ того элементарнаго курса, который мы разсматриваемъ, и были бы совершенно неумѣстными, если бы новое слово „умноженіе“ не вызывало въ умѣ совершенно новыхъ представленій, не требовало бы новагг анализа, не содержало бы въ себѣ ясной идеи увеличенія. Эта же идея одинаково близка какъ уму взрослаго, такъ и ребенка, а потому, оставляя умъ ребенка въ области идеи сложенія, мы не даемъ ему той ясности мысли, которую онъ отъ насъ требуетъ, и онъ отказывается признать за нами право на эту ампутацію: онъ запоминаетъ и отказывается понимать. Идея пропорціональной зависимости, совершенно заглушенная въ начальномъ курсѣ, находится въ умѣ ребенка и мѣшаетъ ему усвоить именно то, что говоритъ учитель; она вводитъ ученика въ лабиринтъ какихъ-то новыхъ соображеній, новаго направленія мысли, которое не встрѣчаетъ ни поддержки, ни опоры въ изложеніи учителя. Вотъ почему я думаю, что гораздо правильнѣе указать сразу на общій смыслъ умноженія, что оно означаетъ увеличеніе. Хотя этому смыслу противорѣчитъ умноженіе на дробь, но этимъ противорѣчіемъ пока можно пренебречь и коснуться его позднѣе, когда ученикъ будетъ изучать дроби. Здѣсь важно то, что понятіе умноженія, какъ увеличенія, не противорѣчитъ прямой пропорціональности, а потому я считаю возможнымъ точно и категорически установить съ самаго начала курса, что слова: „больше въ нѣсколько разъ“ записываются въ ариѳметической символикѣ знакомъ умноженія и означаютъ умножить на данное число.

Здѣсь надо указать дѣтямъ и особо выдѣлить, что задачи предыдущаго параграфа представляли собою упрощенное нахожденіе суммъ равныхъ слагаемыхъ, а теперь мы получаемъ новое число.

Такимъ образомъ я соединяю въ одну психическую ассоціацію словесное выраженіе и знакъ дѣйствія. Такая ассоціація, конечно должна запомниться какъ фактъ, однако психологическое значеніе этого запоминанія нѣсколько иное, чѣмъ то, которое дается въ современномъ курсѣ; гдѣ этотъ вопросъ приводится также къ сложенію равныхъ слагаемыхъ. Мнѣ хочется выяснить наоборотъ его совершенно новое значеніе и на это новое значеніе я и обращаю главное вниманіе.

Итакъ, я предлагаю слѣдующее: дѣти запоминаютъ, какъ фактъ, что увеличить въ нѣсколько разъ—значитъ умножить, при этомъ хорошо было бы, чтобы они подъ словомъ умножить представляли себѣ—составить новое число; но это послѣднее не такъ важно, а важно только усвоеніе первой половины, которую и нужно разработать на рядѣ примѣровъ.

1) У ученика 3 карандаша, а у другого въ 5 разъ больше. Сколько карандашей у другого ученика?

2) Аршинъ тесемки одного сорта стоитъ 3 коп., а аршинъ другого сорта въ 6 разъ больше. Сколько стоитъ аршинъ другого сорта?

Рѣшеніе этихъ задачъ излагается такъ, что если у одного ученика 3 карандаша, а у другого въ 5 разъ больше, то, чтобы узнать, сколько карандашей у другого, мы должны 3 увеличить въ 5 разъ или 3×5. Результатъ этого умноженія можно искать по таблицѣ Пиѳагора, которую полезно всегда имѣть особо составленной въ началѣ урока.

Послѣ того какъ ученики усвоятъ выраженіе „больше въ нѣсколько разъ“, имъ нужно указать, что слово больше часто замѣняется въ задачахъ словомъ дороже, длиннѣе и т. п., и на это предложить новый рядъ задачъ. Одна груша стоитъ 2 копейки, а другая въ 3 раза дороже. Сколько копеекъ стоитъ другая груша? Въ первый разъ продали тесемку въ 4 аршина, а въ другой разъ въ 4 раза длиннѣе. Какой длины была вторая тесемка?

Такое разъясненіе я считаю существенно необходимымъ (хотя оно и кажется лишнимъ), потому что нельзя ручаться, что въ самосознаніи дѣтей слова длиннѣе, тяжелѣе, дороже и т. п. легко совпадаютъ со словомъ больше.

§ 7. Ученіе о прямой пропорціональности.

Когда дѣти вполнѣ хорошо усвоятъ значеніе увеличенія въ нѣсколько разъ, имъ необходимо указать на зависимость величинъ прямо пропорціональныхъ, въ рядѣ слѣдующихъ задачъ.

1) Продано 6 аршинъ тесемки за 5 копеекъ. Въ другой разъ продали въ 3 раза больше аршинъ той же тесемки, сколько аршинъ куплено въ другой разъ и сколько копеекъ за нихъ нужно заплатить?

Рѣшеніе этой задачи должно сопровождаться разсужденіемъ въ родѣ слѣдующаго: чѣмъ больше тесемки будетъ продано, тѣмъ больше за нее нужно заплатить; въ задачѣ сказано, что за 6 аршинъ заплачено 5 копеекъ, а въ другой разъ продано въ 3 раза больше, слѣдовательно, и заплатить нужно въ 3 раза больше, т. е. $5 \times 3 = 15$ копеекъ.

2) 5 яблокъ вѣсятъ 2 фунта. Сколько будетъ вѣсить то же число 5 яблокъ, если каждое будетъ въ 3 раза тяжелѣе?

Здѣсь число 5 является лишнимъ, но въ ходѣ мысли оно играетъ роль конкретнаго указанія, и такимъ образомъ формулированная задача мнѣ кажется легче, чѣмъ безъ указанія числа. Но на это обстоятельство слѣдуетъ обратить вниманіе учениковъ и добиться отъ нихъ отчетливой мысли, что можно въ условіи задачи не давать нѣкоторыхъ чиселъ, однако задача можетъ быть рѣшена, если извѣстна зависимость между данными величинами.

Это можно установить, переходя отъ задачъ указаннаго типа къ задачамъ, гдѣ количество не дано, напримѣръ: за веревку для змѣя было заплачено 6 копеекъ, но оказалось мало, и пришлось купить вмѣсто нея другую въ 3 раза длиннѣе. Сколько нужно заплатить за новую веревку?

Итакъ, я считаю самой важной частью изученія дѣйствія умноженія изученіе прямой пропорціональной зависимости между величинами и это изученіе разбиваю на слѣдующія рубрики: 1) разсмотрѣніе умноженія, какъ сложенія разныхъ слагаемыхъ; 2) разсмотрѣніе умноженія, какъ самостоятельнаго дѣйствія, посредствомъ котораго находится новое число, больше даннаго въ нѣсколько разъ; 3) изученіе пропорціональной зависимости величинъ. Къ этимъ рубрикамъ необходимо присоединить еще одну, а именно: различіе между увеличеніемъ на нѣсколько единицъ и въ нѣсколько разъ. Это послѣднее можно сдѣлать на задачахъ, въ родѣ слѣдующихъ.

1) Куплено 5 аршинъ проволоки по 2 копейки за аршинъ. Сколько нужно заплатить, если проволоки придется купить на 3 аршина больше?

Въ рѣшеніи этой и подобныхъ задачъ слѣдуетъ указать 2 способа. По первому узнаемъ, сколько аршинъ проволоки слѣдуетъ купить во второй разъ, а потомъ, сколько она стоитъ.

Такое рѣшеніе запишется формулой $(5+3)\times 2$. Другое рѣшеніе будетъ слѣдующее: сколько стоитъ проволока, купленная въ первый разъ? Отв.—5×2 копеекъ. На сколько аршинъ проволоки купили больше во 2-й разъ? Отв.—на 3 аршина. Сколько они стоятъ? Отв.—3×2 копеекъ. Сколько придется заплатить за всю проволоку? Отв.—$(5\times 2+3\times 2)$ копеекъ.

2) Куплено 3 яблока по 2 копейки за штуку; сколько копеекъ нужно заплатить, если купить такихъ же яблокъ въ 3 раза больше?

Эту задачу можно также рѣшить двоякимъ разсужденіемъ, изъ которыхъ каждое должно быть проработано. 1) Сколько яблокъ куплено во второй разъ? Отв.—3×3 яблокъ. Сколько копеекъ будутъ стоить эти яблоки? Отв.—$2\times(3\times 3)$ копеекъ. 2) Сколько стоятъ купленныя яблоки? Отв.—2×3 копеекъ. Сколько копеекъ нужно заплатить во 2-й разъ? Отв.—Такъ какъ съ увеличеніемъ числа яблокъ увеличивается ихъ стоимость, то во 2-й разъ придется заплатить во столько разъ больше, во сколько разъ куплено больше яблокъ, т. е. $(2\times 3)\times 3$ копеекъ.

Въ практическомъ приложеніи самымъ труднымъ моментомъ обученія является именно тотъ, который, съ моей точки зрѣнія, имѣетъ наибольшее значеніе, а именно то, что съ увеличеніемъ числа яблокъ въ нѣсколько разъ и стоимость ихъ увеличивается во столько же разъ. Здѣсь двѣ психологическихъ трудности: 1) увеличеніе въ нѣсколько разъ и 2) идея прямой пропорціональности. Я предлагаю съ этими трудностями бороться слѣдующимъ образомъ. Первую изъ нихъ запомнить чисто формально: увеличить въ нѣсколько разъ—значитъ умножить, при чемъ пока безъ ограниченій утверждать справедливость и обратнаго заключенія: умножить—значитъ увеличить въ нѣсколько разъ. На мой взглядъ, это есть условіе, а не логическимъ путемъ выведенное правило, а потому оно недоступно психологическому выясненію, а потому я особенно подчеркиваю, что это должно запомниться на рядѣ подходящихъ задачъ. Идея прямой пропорціональности должна выясниться отчасти изъ перваго полугодія, отчасти здѣсь при непосредственномъ разсмотрѣніи различныхъ величинъ, при чемъ она нуждается въ особой разработкѣ на конкретныхъ примѣрахъ, въ родѣ слѣдующихъ: если увеличивается число купленныхъ яблокъ въ нѣсколько разъ, то во сколько разъ увеличивается ихъ стоимость? Если увеличивается количество песку въ нѣсколько разъ, то во сколько разъ увеличивается его вѣсъ? Когда еще можетъ увеличиться вѣсъ? Когда увеличивается стоимость?

Здѣсь во всѣхъ этихъ примѣрахъ самымъ важнымъ является не столько содержаніе, сколько языкъ съ его обобщеніями, а потому слѣдуетъ давать самые простые примѣры, чтобы на нихъ выяснить только идею. Преодолѣвъ эту трудность, мы спасаемъ все остальное; но пока она не ясна, трудно итти дальше въ изученіи дѣленія. Быть можетъ, здѣсь будетъ полезно еще разъ конкретно повторить опыты перваго полугодія, взявъ предметы разнаго вѣса или различнаго объема. Напр., взвѣсить 3 стакана песку, потомъ 9 стакановъ. Если 3 стакана вѣсятъ 2 фунта, то, увеличивъ ихъ число въ 3 раза, т. е. взвѣсивъ 9 стакановъ, найдемъ, что они тоже вѣсятъ въ 3 раза больше. Какъ бы то ни было, но идея пропорціональности должна быть выяснена вполнѣ безъ ея словесной формулировки, а когда это будетъ достигнуто, то къ этимъ задачамъ слѣдуетъ присоединить задачи со слѣдующимъ характеромъ.

1) Мальчикъ хотѣлъ купить 4 яблока по 3 копейки за каждое, но у него не хватило денегъ, а когда онъ пришелъ въ другой разъ, то за яблоко просили на 1 копейку дороже. Сколько денегъ долженъ былъ заплатить мальчикъ?

2) Мальчикъ хотѣлъ купить 3 груши по 2 копейки за каждую, но у него не хватило денегъ, а когда онъ пришелъ другой разъ, то каждая груша стала въ 3 раза дороже. Сколько денегъ ему пришлось заплатить?

Въ этихъ задачахъ желательно одно и то же содержаніе, такъ чтобы каждая отличалась только условіемъ въ нѣсколько разъ и на нѣсколько единицъ.

Хорошо было бы, если бы дѣти сами придумали рядъ задачъ на указанныя темы, тогда ясно было бы, насколько они поняли сущность самихъ вопросовъ. Изъ подобныхъ задачъ хорошо составить сборники, которые будутъ лучшими сборниками задачъ для перваго года обученія. Въ этихъ сборникахъ хорошо сохранить дѣтскій языкъ и дѣтскую формулировку вопросовъ, исправляя ее только настолько, чтобы не искажать смысла.

Намъ остается разсмотрѣть 3-й случай умноженія: умноженіе именованнаго числа на именованное; но этотъ случай я считаю по своему содержанію недоступнымъ первому году обученія и отношу его ко второму.

§ 8. Общій взглядъ на дѣленіе.

Дѣленіе на части равныя и неравныя. Дѣленіе пополамъ, на 4 и 8 частей.

Теоретически дѣленіе разсматривается, какъ дѣйствіе, обратное умноженію, и исходя изъ этого опредѣленія строится вся теорія производства дѣйствія, т. е. весь его внутренній смыслъ. Но въ психологическомъ отношеніи такое построеніе является труднымъ, и потому необходимо найти другой исходный пунктъ для построенія обученія. Такимъ исходнымъ пунктомъ можетъ быть анализъ слова дѣленіе, который приводитъ насъ къ однороднымъ словамъ: раздаваніе, разрѣзаніе, развѣшиваніе и т. п. Во всѣхъ этихъ понятіяхъ житейскаго обихода содержится идея дѣленія, и, исходя изъ нихъ, можно попытаться построить и само дѣйствіе. При этомъ необходимо съ перваго же раза установить разницу въ дѣленіи на равныя и неравныя части, начиная съ самаго простѣйшаго случая—дѣленія пополамъ, о которомъ уже хотя и была рѣчь, но здѣсь нужно еще разъ разсмотрѣть этотъ вопросъ; затѣмъ необходимо перейти къ дѣленію на 4 части, потомъ на 8 и затѣмъ уже къ дѣленію на 3 и на 5 частей. Я позволю себѣ предложить слѣдующую схему этого объясненія.

Какъ раздѣлить яблоко на 2 части? (Разломить его или разрѣзать). Что эти части будутъ равны или неравны? Какъ можно въ этомъ убѣдиться? (Взвѣшиваніемъ). Какъ раздѣлить пряникъ, бумагу и т. п. на 2 части? Какъ можно убѣдиться въ равенствѣ или неравенствѣ частей? Какъ раздѣлить воду въ графинѣ или песокъ въ стаканѣ пополамъ? Можно ли это сдѣлать? Всегда ли это можно сдѣлать? Что нужно, чтобы это сдѣлать? Здѣсь я имѣю въ виду рядъ возможностей: когда число стакановъ въ графинѣ четное, когда есть мѣра, позволяющая разлить воду пополамъ, напр., мензурка, и попутно можно затронуть вопросъ о томъ, какъ это можно вообще сдѣлать, но не заходя, конечно, въ область несоизмѣримости. Какъ можно раздѣлить пополамъ полоску бумаги? (Согнуть ее и разрѣзать). Всегда ли это можно сдѣлать? Возьмемъ полоску съ квадратами, какъ можно ее раздѣлить пополамъ?

Здѣсь опять явятся тѣ же вопросы, какъ и при раздѣленіи воды; но въ разсмотрѣніе вопроса войдетъ счетъ квадратовъ, и это дастъ возможность перейти къ слѣдующей задачѣ. Раздѣлить пополамъ тетрадку, кучку карандашей, перьевъ и т. п. Когда это можно сдѣлать? Отсюда понятіе о четныхъ числахъ.

Отъ этихъ примѣровъ можно перейти къ числовымъ задачамъ, при чемъ вначалѣ эти задачи должны имѣть конкретное содержаніе; напр., раздѣлить пополамъ 12 стакановъ воды? 6 чашекъ песку? 8 фунтовъ орѣховъ? и т. п. Слѣдуетъ показать знакъ дѣленія и какъ записать рѣшеніе задачи. При этомъ я бы предложилъ въ этомъ случаѣ ставить знакъ — и писать такъ $\frac{12}{2}$, $\frac{6}{2}$ и т. п., оставляя знакъ : для дѣленія по содержанію. Хотя это и не представляетъ собой большой важности, но даетъ идею дроби и возможность записать и такія частныя $\frac{15}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{1}{2}$ и т. п. Проработавъ дѣленіе на 2, можно перейти къ дѣленію на 4 части, дѣля пополамъ каждую половину, сосчитать число и записать полученный результатъ. При этомъ получаются новые вопросы. Напр., раздѣлить 12 фунтовъ песку на 4 равныя части. Здѣсь слово равныя слѣдуетъ подчеркнуть. Само дѣленіе дѣти производятъ такъ: сначала дѣлятъ пополамъ, потомъ каждую половину еще пополамъ. Найдя, такимъ образомъ, что каждая часть содержитъ 3 фунта, учитель указываетъ, что этотъ результатъ можетъ быть полученъ короче, если мы въ таблицѣ умноженія отыщемъ число 12 и число 4, то можемъ найти и число 3, такимъ образомъ можемъ запомнить, что $\frac{12}{4}$ всегда $= 3$. Надо убѣдиться, что четвертая часть 12 всегда равна 3, для этого возьмемъ другія мѣры: вѣсъ, число листовъ бумаги, число квадратовъ, число копеекъ, и на этихъ примѣрахъ дѣйствительно увидимъ, что 12, раздѣленное на 4, всегда равно 3, а потому такія задачи можемъ рѣшать прямо по таблицѣ умноженія Пиѳагора. Отъ четвертей мы переходимъ къ 8 долямъ; но здѣсь имѣемъ только одно число 16, которое дѣлится на 8 въ предѣлахъ нашего счета. Поэтому я бы здѣсь особенно остановился на остаткахъ и показалъ, что дѣленіе не всегда возможно, но не затрагивая дробей. Отъ этихъ примѣровъ можно перейти къ дѣленію на 3 и на 9, а затѣмъ къ дѣленію на 5, сохраняя тотъ же методъ и указывая въ предѣлахъ счета на точное и неточное дѣленіе. Но здѣсь уже прямо нужно указать, что искомыя частныя мы можемъ или запомнить или находить по таблицѣ умноженія, которую слѣдуетъ записывать каждый урокъ на доскѣ и въ тетрадяхъ.

Я бы считалъ совершенно безцѣльнымъ обременять дѣтскій умъ прямымъ сосчитываніемъ, которое въ общемъ дастъ очень мало для ясности производства дѣйствія, тогда какъ умѣнье пользоваться таблицею вообще очень нужно, а потому введеніе этого метода и облегчитъ счетъ дѣтей и дастъ имъ полезный навыкъ, а въ то же время пріучитъ глазъ къ отысканію кратныхъ чиселъ.

§ 9. Дѣленіе по содержанію.

Вопросы дѣленія, особенно тѣ, гдѣ такъ или иначе входитъ отношеніе, являются очень трудными по своему внутреннему смыслу, и полная разработка ихъ должна быть отнесена ко второму году обученія, куда я отношу и вопросъ объ уменьшеніи въ нѣсколько разъ. На первый годъ обученія совершенно достаточно разсмотрѣть только существенныя подробности двухъ кардинальныхъ вопросовъ: дѣленіе на части и дѣленіе по содержанію. До сихъ поръ мы разсматривали дѣленіе на части, теперь перейдемъ къ дѣленію по содержанію, при чемъ въ самой простѣйшей его формѣ, когда это дѣленіе представляетъ собою какъ бы сокращенное вычитаніе. Здѣсь на первое мѣсто слѣдуетъ поставить именно то, что въ предыдущемъ было неясно, а именно обратность умноженію. Вслѣдствіе этого намѣчается и самый методъ изученія вопроса. Мы беремъ задачу: изъ 15 листовъ сшить тетради такъ, чтобы въ каждой было по 5 листовъ. Сколько можно сшить такихъ тетрадей? Беремъ 5 листовъ и сшиваемъ одну тетрадь, потомъ другіе 5 листовъ, сшиваемъ другую; у насъ остается еще 5 листовъ, изъ которыхъ можемъ сшить третью тетрадь. Какъ можно сосчитать, сколько тетрадей мы можемъ сшить? Будемъ думать обратно, возьмемъ 5 листовъ и прибавимъ къ нимъ еще 5 листовъ и еще 5 листовъ, какъ можно узнать, сколько листовъ у насъ будетъ? Итакъ, зная суммы равныхъ слагаемыхъ по таблицѣ умноженія, нельзя ли обратно узнать число слагаемыхъ, зная величину слагаемаго? Придумайте задачи на этотъ случай. Дана веревка, длиною въ 18 аршинъ, сколько въ ней саженъ? Какъ это узнать? Какъ повѣрить, вѣрно ли мы сосчитали? Какая зависимость существуетъ между величиной части и числомъ частей? На 20 копеекъ куплены пряники по 5 копеекъ за штуку; сколько пряниковъ было куплено? Какъ рѣшить эту задачу? Почему можно изъ 20 копеекъ вычитать стоимость пряника? Всегда ли можно это сдѣлать? Какъ проще рѣшить задачу? Почему такъ можно сдѣлать? Будетъ ли стоимость одного пряника частью 20 копеекъ и почему?

Этимъ далеко не исчерпывается вопросъ о дѣленіи, которое я считаю непосильнымъ для перваго года обученія и переношу его во второй годъ, гдѣ могутъ быть подробно разобраны всѣ логическіе оттѣнки этого дѣйствія какъ по отношенію къ дѣленію на части, такъ и по отношенію къ дѣленію по содержанію.

Глава 4-я.

Счетъ цѣлыми десятками.

§ 1. Счетъ цѣлыми десятками не представляетъ собою особенной трудности въ психологическомъ отношеніи, и ребенокъ, понявшій въ предыдущемъ идею счета, нисколько не затруднится распространить ее на десятки. Если я выдѣлилъ этотъ счетъ въ особую главу, то только потому, что въ системѣ обученія счетъ десятками долженъ занять особое мѣсто.

Это особое мѣсто не является слѣдствіемъ педагогическаго пріема обученія, но является особымъ по своему внутреннему смыслу. Въ первой главѣ я особенно настаивалъ на томъ, что число не есть собраніе счетныхъ единицъ, а нѣкоторое количество, теперь приходится обратить вниманіе именно на эту счетную сторону. Хотя само число, какъ таковое, не утратило своего количественнаго значенія, но изображеніе числа и его словесный составъ имѣютъ исключительно счетный характеръ. Въ то время какъ мы измѣряемъ вѣсъ пудами, фунтами, золотниками, устанавливая между этими единицами измѣренія своеобразныя числовыя отношенія; измѣряемъ разстояніе верстами, саженями, аршинами, устанавливая для нихъ свое особое числовое соотношеніе; въ то же время мы считаемъ всегда десятками, устанавливая для единицъ счета постоянное числовое отношеніе 10. Итакъ, система счисленія есть нѣчто построенное умомъ человѣка со спеціальнымъ назначеніемъ счета и записи числа. Какъ получились числовыя соотношенія для измѣренія вѣса, разстояній, времени, емкости, мы опредѣленно не знаемъ; они также построены умомъ человѣка, но не для счета, а для измѣренія; здѣсь же мы имѣемъ систему, построенную спеціально для счета.

Эту мысль нужно особенно имѣть въ виду, когда приходится знакомить дѣтей съ системой счисленія, и, быть можетъ, полезно было бы сообщить имъ въ какой-либо формѣ для выясненія вопроса, почему мы считаемъ такъ, а не иначе. Конечно, разсмотрѣніе вопроса о разныхъ системахъ счисленія здѣсь было бы неумѣстно, но я считалъ бы возможнымъ сказать имъ, что мы имѣемъ 9 различныхъ словъ для выраженія 9 чиселъ и 9 различныхъ цифровыхъ символовъ для обозначенія этихъ чиселъ. Пользуясь этими наименованіями и соотвѣтственными числовыми знаками, можно продолжить счетъ дальше, не вводя ни новыхъ словъ, ни новыхъ числовыхъ знаковъ. Насколько умѣстна такая рѣчь въ этотъ періодъ возраста, я сказать не могу, и только для учителя спеціально упоминаю объ этомъ, потому что здѣсь весь вопросъ обученія переносится въ новую область счета и только счета, а потому измѣняется и самый методъ обученія, а въ силу всего этого понадобилась и новая глава.

Очевидно, что здѣсь придется разсмотрѣть очень немного вопросовъ, такъ какъ всѣ они уже разобраны въ предыдущемъ и самая глава естественнымъ образомъ распадается на 3 рубрики: 1) словесное счисленіе, 2) письменное счисленіе и 3) приложеніе того и другого къ рѣшенію задачъ, вѣрнѣе упражненіе въ томъ и другомъ.

§ 2. Словесное счисленіе.

Такъ какъ нашей задачей является словесное счисленіе, то основнымъ вопросомъ будетъ наученіе счету; но кромѣ этого основного вопроса, вѣрнѣе въ немъ самомъ, находится другой вопросъ о выдѣленіи десятка въ особую счетную единицу. Въ силу этой двойственности нашей задачи мы должны подобрать наглядныя пособія такъ, чтобы они выдѣлили и ту и другую идею.

Такъ какъ объекты счета въ данномъ случаѣ не играютъ особой роли, то всего лучше начать обученіе со спичками или особыми палочками, которыя цѣлой грудой будутъ лежать на столѣ учителя. Учитель вызываетъ ученика и предлагаетъ ему отсчитать десятокъ, поясняя, что десяткомъ называется 10 палочекъ. Это поясненіе встрѣчалось уже въ курсѣ, но его нужно напомнить и вновь выяснить, такъ какъ въ данномъ случаѣ оно особенно важно. Ученикъ отсчитываетъ десятокъ, завязываетъ его ленточкой и кладетъ въ сторону. Вызывается другой ученикъ и отсчитываетъ другой десятокъ, который также завязывается ленточкой и откладывается. Сколько десятковъ мы отсчитали? Какъ можно иначе назвать это число? Вызывается третій ученикъ, который отсчитываетъ третій десятокъ, и т. д. По мѣрѣ накопленія этихъ десятковъ учитель спрашиваетъ каждый разъ, сколько ихъ, и заучиваетъ соотвѣтственныя числа. При этомъ онъ ставитъ вопросъ о сложеніи десятковъ, показывая, напримѣръ, 2 пучка, т.-е. 2 десятка, и 3 пучка, т. е. 3 десятка, и спрашиваетъ, сколько будетъ всего десятковъ, а 5 десятковъ переводится на 50 единицъ. Точно также ставится вопросъ о вычитаніи десятковъ, которые являются простыми по существу и служатъ упражненіемъ въ переводѣ 3 десятковъ въ 30 единицъ и прочее.

Такъ прорабатывается вся сотня, въ которой насчитывается 10 десятковъ.

На этомъ пособіи необходимо, чтобы ученики вполнѣ освоились съ наименованіемъ чиселъ и хорошо бы поняли, что, напримѣръ, 7 десятковъ все-равно, что 70 единицъ.

Хотя на этомъ наглядномъ пособіи хорошо выясняется основная идея счета, но я бы не ограничился только имъ и вотъ почему. Сметливыя дѣти хорошо поймутъ, что счетъ 10 палочекъ есть только проформа—сущность же заключается въ томъ, чтобы пачку палочекъ связать въ одно цѣлое и назвать десяткомъ; они возьмутъ кучу палочекъ и скажутъ: „пусть это будетъ десятокъ, „свяжемъ его и никто не догадается, что здѣсь не десять палочекъ". Такое предложеніе очень цѣнно само по себѣ, и нельзя даже убѣдить дѣтей, что такъ дѣлать нельзя. Въ самомъ дѣлѣ, намъ нуженъ десятокъ, который и играетъ главную доминирующую роль, и если въ пучкѣ будетъ не 10 палочекъ а 12, то вѣдь въ дальнѣйшемъ это будетъ совершенно незамѣтно. Если бы случился въ классѣ такой инцидентъ, то я бы оставилъ дѣтей связывать миѳическіе десятки палочекъ; однако такая операція нарушаетъ счетную систему, нарушаетъ идею счета, если предметы счета имѣютъ цѣнность. Вотъ почему я предложилъ бы сосчитать бумагу, распредѣливъ ее по тетрадямъ въ 10 листовъ; здѣсь тетрадка, не вѣрно сосчитанная, будетъ неправильной, и кому она достанется, тотъ будетъ обиженъ; это хорошо поймутъ дѣти и несомнѣнно будутъ считать аккуратно. Бумагу я предложилъ бы имъ въ продажныхъ пачкахъ по 6 листовъ, при этомъ новый счетъ связался бы самъ собой во внутреннемъ представленіи съ новымъ опредѣленіемъ по группамъ. Бумага была распредѣлена по 6 листовъ, а стали по 10 листовъ, значитъ, группы могутъ быть какія угодно, но для насъ почему-то важны группы по 10 листовъ. Сосчитавъ бумагу, учитель предлагаетъ дѣтямъ тѣ же вопросы, при которыхъ получается и сложеніе, и вычитаніе цѣлыхъ десятковъ, и переходъ отъ десятковъ къ единицамъ; но въ этомъ переходѣ есть новая психологическая подкладка: объекты счета имѣютъ практическое жизненное значеніе, тогда какъ палочки не имѣютъ никакого значенія. Здѣсь счетъ важенъ и необходимъ, а тамъ это только такъ, для упражненія.

Теперь, когда ученики хорошо выяснили себѣ счетъ десятками, полезно указать имъ на то, что десятокъ есть особая счетная группа, имѣющая особое счетное значеніе. Для этого я предложилъ бы слѣдующее. Взять листъ съ квадратными дюймами, при чемъ въ каждой строкѣ было бы по 10 квадратовъ; предложить дѣтямъ сосчитать, сколько квадратовъ въ полосѣ, и оторвать эту полосу. Сколько квадратовъ мы оторвали? Какъ иначе называется это число? Что считаютъ десятками? (яблоки, вообще фрукты, яйца и т. п.). Потомъ оторвемъ другую полосу. Сколько квадратовъ мы оторвали? Сколько десятковъ у насъ оторвано? Сколько это будетъ квадратовъ? Что значитъ 20 квадратовъ? (Это значитъ, что если мы разорвемъ каждую полосу на отдѣльные квадраты, то получимъ 20 квадратовъ). Оторвемъ еще полосу. Сколько теперь оторвано десятковъ? Сколько это будетъ отдѣльныхъ квадратовъ?

Продолжая отрывать полосы, мы дойдемъ до 10 десятковъ, что составитъ 100 квадратовъ.

Здѣсь каждый десятокъ представляетъ собою отдѣльное цѣлое, а потому и мыслится, какъ нѣчто цѣлое. Это очень важно при переходѣ къ деньгамъ, гдѣ цѣнность гривенника становится легче представляемой и понятной. Счетомъ денегъ и можно закончить обученіе счету цѣлыми десятками. Деньги или модели ихъ должны остановить на себѣ нѣсколько большее вниманіе какъ потому, что здѣсь встрѣчаются особыя наименованія: двугривенный, рубль, пятіалтынный, такъ и потому, что дробленіе здѣсь имѣетъ установленное числовое соотношеніе, которымъ необходимо воспользоваться, чтобы нѣсколько расширить представленіе счетнаго числа и связать его съ измѣреніемъ. Я полагалъ бы, что можно здѣсь сосчитать пятачки. Сколько пятачковъ въ гривенникѣ? Сколько ихъ въ двугривенномъ? въ 30 копейкахъ и т. д. до рубля.

Это даетъ возможность также нѣсколько расширить область счета, показавъ на опытѣ, что въ 30 копейкахъ будетъ 10 трешниковъ, 15 двухкопеечниковъ и т. п. Здѣсь же могутъ быть вообще поставлены вопросы: какъ сосчитать, сколько пятачковъ въ 40 копейкакъ? Отв.—40 копеекъ есть 4 гривенника, въ каждомъ гривенникѣ 2 пятачка, а въ 4 будетъ столько, сколько будетъ $2+2+2+2$ или 2×4. Но можно считать и такъ: 40 копеекъ есть два двугривенныхъ, въ каждомъ двугривенномъ 4 пятачка, слѣдовательно, всего будетъ $4+4=8$ пятачковъ. Можно ли составить двугривенный изъ трехкопеечниковъ? Изъ двухкопеечниковъ? Сколько копеекъ будетъ въ

10 пятакахъ? Можно ли 50 копеекъ составить изъ двугривенныхъ? Изъ какихъ монетъ можно составить пятіалтынный?

Всѣ эти и имъ подобныя задачи полезно здѣсь разобрать съ особой подробностью, чтобы, съ одной стороны, полнѣе ознакомить дѣтей съ обращающимися денежными знаками, а съ другой—дать имъ возможность связать счетъ съ измѣреніемъ и единицы съ десятками. Всѣ задачи должны быть поставлены на моделяхъ или дѣйствительныхъ деньгахъ и должны быть проработаны до полной ясности; быть можетъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно затронуть вопросъ и о дѣленіи, гдѣ будетъ или послѣдовательное вычитаніе или непосредственный счетъ монетъ. Напримѣръ, сколько въ 30 копейкахъ пятачковъ? Для этого размѣняемъ 30 копеекъ на пятачки, мы видимъ, что вмѣсто 30 копеекъ у насъ будетъ 6 пятачковъ, слѣдовательно, пятачекъ содержится въ 30 копейкахъ 6 разъ, или $30 : 5 = 6$. Но, можетъ быть, эти вопросы здѣсь лучше не затрогивать, чтобы не мѣшать идеѣ упрощенія числа и групповому представленію.

§ 3. Изображеніе цѣлыхъ десятковъ.

Прежде, чѣмъ говорить объ изображеніи цѣлыхъ десятковъ, слѣдуетъ указать на то, что весь этотъ вопросъ, выдѣленный въ отдѣльный параграфъ, долженъ въ обученіи войти въ предыдущій, и самое наученіе изображенію чиселъ должно занять мѣсто послѣ наученія счету при помощи палочекъ. Выдѣленіе вопроса въ отдѣльный параграфъ необходимо потому, что при самомъ способѣ наученія встрѣчаются вопросы, разсмотрѣніе которыхъ необходимо сдѣлать особо. Самымъ главнымъ изъ этихъ вопросовъ будетъ вопросъ о нумераціи, о значеніи нуля, какъ числового знака; этихъ вопросовъ избѣжать нельзя, хотя выясненіе ихъ, конечно, должно быть совершенно элементарно. Дѣти уже знаютъ, какъ написать двузначное число изъ изученія чиселъ второго десятка, а потому дальнѣйшее развитіе этого вопроса возможно вести двумя путями: или положивъ въ основу начертаніе чиселъ второго десятка, или какъ самостоятельное изложеніе вопроса, изъ разсмотрѣнія котораго будетъ вытекать и правило начертанія чиселъ второго десятка. При этомъ второмъ методѣ въ самосознаніи дѣтей должна возникнуть идея, почему мы обозначаемъ 18 именно такъ, какъ это указано. Съ своей стороны я бы рекомендовалъ именно этотъ путь изученія, не скрывая отъ себя его трудности и того, что здѣсь придется поставить вопросъ о нумераціи.

Въ ходѣ этого изученія есть два кардинальныхъ вопроса.

изъ которыхъ одинъ можно характеризовать уясненіемъ правой и лѣвой стороны, а другой уясненіемъ значенія нуля, какъ цифрового символа.

На первый вопросъ въ обученіи обыкновенно не тратятъ времени, хотя это напрасно, такъ какъ даже въ 3-мъ классѣ гимназіи встрѣчаются дѣти, не знающія правой и лѣвой стороны, да и самый вопросъ совершенно не такъ простъ, какъ это кажется съ перваго взгляда, просто потому, что учителя считаютъ его совершенно извѣстнымъ изъ обыденнаго опыта жизни. Съ выясненія этого вопроса я бы и началъ обученіе, предложивъ дѣтямъ сначала указать правую и лѣвую руку, затѣмъ перечислить въ классѣ предметы, которые находятся съ правой стороны, и предметы — съ лѣвой стороны. Затѣмъ указать въ тетрадяхъ правый и лѣвый край, при этомъ обратить ихъ вниманіе на то, какъ мы читаемъ и пишемъ. Когда рядомъ подобныхъ вопросовъ будетъ выяснена правая и лѣвая сторона, полезно предложить имъ раздѣлить первую строку на страницѣ тетради на равные квадраты. То же самое сдѣлать на доскѣ такъ, чтобы число квадратовъ тетради совпадало съ числомъ квадратовъ на доскѣ. Въ каждомъ квадратѣ написать какое-нибудь однозначное число и заставить прочитать эту строку справа налѣво и слѣва направо, указавъ, что каждый квадратъ занимаетъ по отношенію къ сосѣднему или правое положеніе или лѣвое.

Теперь выдѣлить въ тетради и на доскѣ вертикальный столбецъ квадратовъ по два и условиться писать въ лѣвыхъ квадратахъ десятки, а въ правыхъ единицы. Такимъ образомъ, по нашему условію каждое число занимаетъ два квадрата, одинъ правый и одинъ лѣвый. Написавъ затѣмъ однозначныя числа въ этихъ квадратахъ, спросимъ, какія числа написаны на доскѣ? Почему мы однѣ числа считаемъ десятками, а другія единицами? Можно ли написать единицы въ правомъ квадратѣ? Почему нельзя этого сдѣлать? Почему нельзя десятки написать въ лѣвыхъ квадратахъ? Изъ ряда этихъ вопросовъ дѣти должны выяснить, что значеніе цифры можетъ измѣняться въ зависимости отъ мѣста, гдѣ она написана.

Здѣсь многіе предлагаютъ воспользоваться такъ называемыми шведскими счетами, и показать дѣтямъ, какъ на нихъ можно положить число десятковъ и число единицъ. Я бы высказался противъ этого пособія въ данномъ мѣстѣ курса, такъ какъ оно требуетъ дополнительныхъ идей: значеніе косточки измѣняется съ проволокой подобно тому, какъ значеніе цифры съ мѣстомъ, гдѣ она записана. Эта идея хороша въ обратномъ значеніи: объясненіе употребленія счетовъ какъ приложенія идеи нумераціи; кромѣ того, уподобленіе цифры косточкѣ есть совершенно новый самостоятельный психическій актъ. Въ силу этого я думаю, что указаніе на счеты не уясняетъ дѣтямъ нумераціи, а нѣсколько затемняетъ основную идею.

Въ данномъ мѣстѣ курса я ограничился бы только указаннымъ упражненіемъ съ клѣточками, предложивъ записать по этому методу нѣсколько группъ сосчитанныхъ палочекъ, при чемъ весь вопросъ я бы не помѣстилъ въ одинъ урокъ, а по крайней мѣрѣ въ два, такъ, чтобы особенно подчеркнуть ту мысль, что при условіи писать десятки налѣво, а единицы направо мы можемъ изобразить любое число десятковъ и никогда не смѣшать его съ числомъ единицъ. И вотъ, когда эта мысль будетъ совершенно ясна, тогда можно поискать способа обойтись въ этой записи безъ клѣточекъ, замѣняя отсутствующую цифру нулемъ.

Знакъ нуль я бы на первыхъ порахъ просто показалъ, написавъ его въ тѣхъ клѣточкахъ, гдѣ нѣтъ цифры, но при этомъ указалъ бы, что писаніе нуля слѣва безцѣльно, а имѣетъ значеніе онъ только справа, чтобы отодвинуть цифру на второе мѣсто. Теперь можно прійти къ написанію десятковъ безъ квадратовъ, повторивъ запись счета палочекъ и распространивъ ее на другія пособія: счетъ бумаги, счетъ квадратовъ и счетъ денегъ. Послѣ этого можно перейти въ вопросу, что такое нуль, какъ цифровой знакъ, показавъ, почему мы числа второго десятка записывали именно такъ, а не иначе. Это указаніе покажетъ, насколько выбранный нами путь былъ раціоналенъ, потому что здѣсь уже сами дѣти должны дать вполнѣ правильные и ясные отвѣты.

§ 4. Обзоръ пройденнаго.

Такъ какъ эта глава заканчиваетъ курсъ перваго года обученія, то упражненія въ концѣ этого года пріобрѣтаютъ особое значеніе. Въ нихъ должно сказаться резюме пройденнаго, пріобрѣтенныя идеи должны какъ бы формулироваться въ нѣкотораго рода положенія и въ то же время дать во внутреннемъ самосознаніи идеи, способныя къ развитію. По отношенію къ обученію слѣдуетъ сдѣлать общее замѣчаніе, что то, что усвоено, не только остается въ памяти послѣ каникулъ, но укрѣпляется и расширяется, а все то, что было только запомнено, то забывается и требуетъ почти новаго прохожденія. Въ настоящее время, т. е. въ концѣ учебнаго года, трудно еще судить о томъ, что ученики запомнили и что они усвоили;

но для учителя важно выдѣлить въ курсѣ, главнымъ образомъ, то, что необходимо, чтобы учениками было усвоено. Вотъ на это-то необходимое и слѣдуетъ обратить особое вниманіе при подборѣ упражненій въ концѣ перваго года обученія.

Для того, чтобы разобраться въ вопросѣ, слѣдуетъ окинуть общимъ взглядомъ пройденный курсъ и намѣтить въ немъ тѣ его стороны, которыя необходимо особенно подчеркнуть.

Мы начали съ того, что предложили ученикамъ добыть себѣ представленія числа, какъ нѣкотораго количества, при чемъ это представленіе должно было быть получено въ конкретномъ видѣ. Другими словами, основная цѣль нашего курса состояла въ томъ, чтобы ученики познакомились не съ отвлеченнымъ представленіемъ числа, а съ рядомъ именованныхъ чиселъ, полученныхъ отъ фактическаго измѣренія нѣкоторыхъ величинъ. При этомъ число величинъ было ограничено слѣдующими: длина, вѣсъ, емкость, площадь (въ идеѣ, фактически число квадратовъ), цѣнность, стоимость, прибыль, убытокъ. Къ этому ряду величинъ былъ прибавленъ еще рядъ счетныхъ единицъ изъ области практической жизни. Это ограниченіе разсматриваемыхъ величинъ было сдѣлано съ той цѣлью, чтобы ученики могли полнѣе познакомиться съ каждой изъ нихъ и вникнуть въ тѣ функціональныя отношенія, которыя содержатся въ этихъ величинахъ. Уясненію свойствъ этихъ функціональныхъ отношеній было удѣлено достаточно времени и былъ подобранъ рядъ задачъ, уясняющихъ эти свойства и ту зависимость, по которой можно сравнивать разнородныя величины. Въ силу этого въ курсъ вошелъ вопросъ объ однородныхъ и разнородныхъ величинахъ и ихъ прямой пропорціональности.

Всѣ эти вопросы, несмотря на ихъ огромное значеніе именно въ начальномъ курсѣ, я бы не подчеркнулъ. Относительно ихъ можно сказать лишь одно изъ двухъ, или они поняты и соотвѣтственныя идеи запали въ самосознаніи; или они не поняты. Въ первомъ случаѣ повтореніе безцѣльно, а во второмъ безполезно, ибо не время въ концѣ года воспроизводить вновь черновую работу, которая требуетъ значительно большаго количества времени. Если эти вопросы не поняты, то ихъ вновь слѣдуетъ возбудить во второй годъ обученія, а не повторять въ концѣ года.

Но кромѣ этихъ вопросовъ внутренняго содержанія у насъ были вопросы формальные, относящіеся къ вычисленію, производству дѣйствій; эти вопросы слѣдуетъ особо подчеркнуть и ими особенно заняться въ концѣ курса перваго года. Но и эти вопросы распались какъ бы на два отдѣла: выясненіе смысла дѣйствія въ связи съ содержаніемъ задачи и вопросъ чистаго вычисленія. Оба эти отдѣла слѣдуетъ вновь повторить и распространить на область цѣлыхъ десятковъ. Этимъ опредѣляется тотъ характеръ упражненій, которымъ и закончился первый годъ обученія.

§ 5. Упражненія надъ числами въ цѣлыхъ десяткахъ.

Вычисленія съ цѣлыми десятками въ своей основѣ должны содержать ту мысль, что десятокъ есть новая единица, и всѣ дѣйствія надъ этими единицами совершенно тождественны съ дѣйствіями надъ простыми единицами. Въ силу этого надо пріучить дѣтей съ самаго начала переводить числа единицъ въ число десятковъ. Напр., дано 30—это есть 3 десятка, дано 50—это 5 десятковъ и т. п. Тогда сумма чиселъ $60+20$ есть сумма 6 десятковъ и 2 десятка, что даетъ 8 десятковъ, или 80 единицъ. Чтобы закрѣпить это представленіе, можно дать числовые примѣры со скобками въ родѣ слѣдующихъ.

1) $30+20+40=90$; 2) $(80-50)+(70-40)+(30+10)=100$; 3) $(14+6)+30=50$; 4) $(16-6)+(15+5)+60=90$.

Въ этихъ примѣрахъ я не помѣстилъ бы суммъ, въ родѣ $7+8$ или $9+5$ и т. п., равно какъ и разностей $15-8$ и т. п., относя весь процессъ такого вычисленія ко второму году обученія, когда все равно придется къ нему возвратиться и съ нимъ особенно повозиться; здѣсь же очень умѣстны и важны тѣ суммы и разности, которыя даютъ цѣлые десятки: ихъ должны дѣти особенно хорошо вычислять, такъ какъ въ будущемъ на этомъ именно и будетъ основанъ способъ нахожденія суммъ двузначныхъ чиселъ.

Что касается до умноженія и дѣленія, то предѣлъ вычисленія здѣсь очень ограниченъ, однако и его надо вспомнить, для чего можно предложить хотя бы слѣдующія строки:

1) $(3\times3\times1)+20=30$; 2) $4\times5+40-30=30$; 3) $3\times5+2\times2+1$; 4) $(20:4+5)+(60-40)$; 5) $20:4+15:3+20$; 6) $40\times2+20-10\times3$.

Вычисленія слѣдуетъ производить, написавъ предварительно таблицу Пиѳагора до 25.

Кромѣ числовыхъ строчекъ, слѣдуетъ дать и рядъ задачъ съ условіемъ, но содержаніе этихъ задачъ должно быть отнесено къ изученнымъ величинамъ и ихъ соотношенію; при этомъ можно указать новое вѣсовое соотношеніе, что пудъ имѣетъ 40 фунтовъ и бочка содержитъ 40 ведеръ. Содержаніе задачъ будетъ то же, что было и ранѣе.