А. ФУШЕ

ПЕДАГОГИКА МАТЕМАТИКИ

NOUVELLE ENCYCLOPÉDIE PÉDAGOGIQUE
Collection fondée par ALBERT MILLOT
et dirigée par P. JOULIA

LA PÉDAGOGIE DES MATHÉMATIQUES

par

André FOUCHÉ
Ancien Élève de l'École Normale Supérieure
Agrégé de l'Université
Docteur ès Sciences

Préface de J. DESFORGE
Inspecteur général de l'Instruction publique

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

1952

АНДРЕ ФУШЕ

ПЕДАГОГИКА МАТЕМАТИКИ

Перевод с французского
М. З. Рабиновича

Под редакцией
проф. ***И. К. Андронова***

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
МОСКВА—1969

Фуше Андре.

Ф 95 Педагогика математики Перевод с французского М. З. Рабиновича. Под ред. проф И. К. Андронова. М., «Просвещение», 1969.

128 с. с илл. 48 000 экз 27 к.

Книга отражает одно из уже отстоявшихся направлений в прогрессивной методике математики Франции. Автор не рассматривает всего курса математики а только основательно анализирует начала алгебраического исчисления (включая элементы исчисления бесконечно малых) и начала планиметрии.

Во введении дано развитие общих принципов педагогики математики, отражена борьба двух противоположных по духу методов преподавания — догматического и эвристического.

6-3
162 - 68

51

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА К КНИГЕ А. ФУШЕ «ПЕДАГОГИКА МАТЕМАТИКИ»

I

Советскому учителю математики необходимо знать, что в настоящее время делается за границей в области математического образования. Время сейчас особое: многие традиционные идеи и практика преподавания математики развенчаны, а предлагаемое новое не проверено, оно экспериментируется в школах.

Дело в том, что за столетие XIX в. создалась традиционная система международного математического образования, которую можно характеризовать следующими особенностями:

1) начиная с половины XVII в. происходит полный разрыв между математикой-наукой и сложившимся учебным предметом математики, возникшим на базе науки математики античного и средневекового времени;

2) возник курс элементарной математики, состоящий из четырех самостоятельных дисциплин — арифметики, алгебры, геометрии, тригонометрии, изучаемых в средней школе, а в начальной школе определившийся пропедевтической арифметикой так, что не получилось преемственности между эмпирической арифметикой начальной школы и формально-логизированной математикой средней школы;

3) упрощена цель изучения учебного предмета математики:

а) усвоение исторически сложившихся элементарных фактов, а не математических идей; получение навыков вычисления, преобразования и доказательства на большом числе упражнений;

б) общелогическое развитие учащихся без учета психологии развивающегося мышления;

4) преобладает метод обучения готовым знаниям, когда учитель их передает, а учащийся запоминает и усваивает на решении большого числа традиционных задач, расположенных в четырех задачниках — арифметическом, геометрическом, алгебраическом и тригонометрическом;

5) в результате этой традиционной системы оформилась пирамидальная система продвижения учащихся, когда в каждые следующие классы переходила только часть учащихся (в среднем 90%), так что в последнем классе оказывалось до 50% от тех, которые поступали в начальный класс. Математика стала бичом для многих. Стала бытовать у родителей, школьников и учителей неверная точка зрения, что не все дети, подростки-учащиеся способны обучиться математике.

Вся эта система к концу XIX в. вступила в противоречие с новой практикой — обязательным школьным образованием. Возникло международное реформистское движение в математическом образовании. В 1899 г. в Париже организуется международный журнал «L' Enseignement Mathématique» под редакцией профессора Ш. Лезана и Г. Фера с участием в редакции 20 известных математиков: академиков и профессоров Европы и США. В 1908 г. на IV Международном конгрессе в Риме создается международная комиссия по реформе математического образования с избранием президента — известного математика, профессора Геттингенского университета Феликса Клейна (1849—1925), двух вице-президентов — профессора математики Морской академии Лондона Георга Гренхилла и профессора истории и методики математики Педагогического колледжа Нью-Йорка Давида Смита и генерального секретаря — профессора Цюрихского политехникума Генри Фера. Международная комиссия организовала 25 национальных подкомиссий государств Европы, США и Японии. Реформистское движение оставило большой след в математическом образовании:

1) выпущено 250 томов трудов, которые характеризуют традиционную постановку математики и намечающиеся реформы в математическом образовании в этих странах;

2) началось движение в каждой стране по созданию новых программ, учебников и методик, приближающих учебный предмет школьной математики к математике-науке

XVII и начала XVIII в., введение элементов аналитической геометрии на плоскости и элементов математического анализа одного независимого переменного, а также обновление содержания и метода элементарной математики. Ставятся более высокие цели преподавания математики — развитие у учащихся функционального мышления, пространственной интуиции и алгебраически-оперативной логики. Культивируются эвристические методы изучения математики.

Первая мировая война приостановила прогрессивное международное движение по реформе математического образования — распалась работа международной комиссии и национальных подкомиссий. Только на IX Международном конгрессе в 1932 г. в г. Цюрихе в секции педагогики математики решено избрать новый президиум, так как скончались профессора Клейн (1925) и Г. Гренхилл (1847—1927).

Избран президентом Д. Е. Смит (США), два вице-президента — академик Ж. Адамар (Франция) и профессор В. Литцман (Германия) при генеральном секретаре — несменяемом Г. Фером. Деятельность новой комиссии не успела развернуться, так как вскоре началась жестокая вторая мировая война, и вопросы школы отошли в сторону.

После войны каждое государство, участвовавшее в мировой войне, по-своему залечивало свои раны.

СССР невиданными темпами стал развивать техническую, экономическую, научную, художественную и педагогическую культуру, вступая в соревнование со всеми передовыми странами.

К половине XX в. коренным образом изменилась роль науки, определившей мощное развитие технического и экономического могущества в мировом обществе. Опираясь на современную теорию математики, человечество получило реальные средства больших предвидений и тем самым возможность планового изменения жизни на Земле во имя счастья народа.

В 30-е годы XX в. во Франции — стране высокой математической культуры—выходит многотомный труд «Современная математика», написанный талантливым коллективом математиков: труд вышел под псевдонимом Николая Бурбаки. В этой работе дан итог развития математики XX в. — предмет и метод единой современной математики, данной на высшей ступени абстракции, развиваемой на идее математических структур. С другой стороны, возникновение мощных электронно-вычислительных машин и их массовое внедрение в производственные, технологические, управленческие процессы, значительно повышающие производительность труда, потребовало подготовленного специалиста с хорошим математическим образованием. Чтобы овладеть современной математикой, необходимо пройти математическую школу в детстве, отрочестве и юности. К тому же современная наука психология доказала, что интеллект детей, подростков и юношей недооценивался и недооценивается с его возможностями убыстренного развития при творческой увлекательной работе, поставленной перед молодежью. Отсюда встала проблема о полной реконструкции математического образования с первых классов школы.

В 1950 г. возникает Интернациональная комиссия по изучению и улучшению обучения математике в школе во главе с математиком Г. Шоке (Франция), психологом математического мышления Ж. Пиаже (Швейцария), педагогом-математиком К. Гаттеньо (Англия), привлекших коллектив педагогов-математиков на местах.

В 1958 г. возникает научное Бюро кооперации ученых, выделивших в 1959 г. секцию по изучению новых взглядов на преподавание математики в школе, которую возглавили М. Х. Стоун (США), Г. Шоке (Франция), Ж. Дьедоне (француз, работающий в США).

Началось новое движение за реконструкцию всего математического образования, поставившее две новые задачи:

1) сближение основ наук, изучаемых в школе, с простейшими основными идеями современной математики-науки;

2) пробуждение творческой инициативы всех учащихся, изучающих обязательный курс математики и выбирающих по собственной инициативе дополнительные курсы из современной математики.

Пока меры не найдены в новом предмете и новом педагогическом методе изучения математики. Идут поиски, их и надо изучать, чтобы ставить передовой эксперимент в преподавании математики. Последнее и преследует перевод и издание современных зарубежных педагогов-математиков.

II

Андре Фуше родился во Франции в г. Бресте в 1901 г., учился в Педагогическом институте Парижа — l'Ecole normale supérieure. Эта знаменитая кузница культурных математиков-педагогов открыта в 1794 г. и поныне является славной гордостью одного из лучших французских вузов, куда мечтает поступить наиболее одаренная и способная, в частности к математике, молодежь.

Известные профессора и академики—математики Франции в большинстве прошли через эту школу. Андре Фуше счастлив, что он в 1922 г. окончил l'Ecole normale supérieure по специальности физики и получил место преподавателя лицея в провинции. С 1936 г. он переходит в один из парижских лицеев в качестве преподавателя математики, где работает 30 лет.

Андре Фуше за свои научные исследования сперва получает степень агреже, а потом степень доктора физико-математических наук. Свой большой педагогический опыт Андре Фуше передает в интересной небольшой книге «Педагогика математики», вышедшей из печати в 1952 г. Надо заметить, что учение о рациональном преподавании математики получило почти общепринятое название «Методики математики», впервые (1836) данное немецким педагогом-математиком Адольфом Дистервегом. «Методика математики» в переводе — «Путь в математику».

За сто лет развития традиционной системы математического образования курсы методики математики приобрели односторонний характер догматических стандартных обязательных рецептов для обезличенных средних учеников и средних учителей без основательного учета места и времени развития школы.

Вот почему вместо методики стал прививаться больше термин «дидактика математики», идущий от Яна Амоса Коменского, в переводе—«обучение математике», но в нем дается односторонняя направленность — обучение без воспитывающего обучения. Поэтому еще в 1910 г. в России возник термин «педагогика математики» (в переводе—«воспитание математическое») в труде «Педагогика математики», изданном в Петербурге педагогами-математиками В. Р. Мрочеком и Ф. В. Филипповичем. Этот термин вошел в употребление на шестой секции IX Международного математического конгресса (Цюрих, 1932), когда секция преподавания математики была названа секцией педагогики математики, проходившей под председательством Давида Смита (Нью-Йорк) и Жака Адамара (Париж), при ученом секретаре Вальтере Литцмане (Гёттинген).

Очень удачное название дал Андре Фуше своему труду — «Педагогика математики», вышедшему в издательстве «Универсальная пресса Франции». Предисловие написано генеральным инспектором просвещения Ж. Деформем, который рекомендует книгу А. Фуше преподавателям математики Франции.

Автор книги «Педагогика математики», написанной в виде этюдов, обладает большим передовым опытом, высокой педагогической культурой и замечательным психологическим проникновением в ученическое мышление. Уже во введении в «Педагогику математики» говорится о двух противоположных методах обучения: первом методе, когда учитель передает готовые знания, а ученику остается их понять и запомнить, и втором, эвристическом методе воспитания, когда ученик ищет решение поставленной проблемы и находит знание, а учитель только направляет ученика. В двух случаях роль учителя различна: в первом случае учитель непогрешимый, стоящий над учениками и не терпящий учеников, делающих ошибки, во втором случае учитель — старший товарищ учеников, ищущих и допускающих в процессе искания ошибки, от которых не свободен иногда и учитель. Учитель первого типа передает знания быстро, отчетливо, не произнося ничего лишнего, но усваивают его уроки немногие ученики и запоминают не скоро; учитель второго типа пробуждает мысль учащихся и воспитывает их ум, ведет учеников медленно, но верно, продвигаясь со всей массой учащихся.

Обращая внимание на фактор времени, необходимого первому и второму учителю, автор приходит к выводу синтеза обоих методов.

Автор отмечает создавшийся предрассудок у родителей и в обществе в целом, что дети, подростки якобы распадаются на способных и неспособных к изучению математики. А. Фуше объясняет это односторонним методом догматического обучения такому своеобразному предмету, как математика, требующая активной мысли учащихся. Отсюда психологическое торможение, боязнь провала, отсутствие инициативы у значительной части учащихся.

В этюдах «Педагогика математики» передаются интересные наблюдения и рекомендации в связи с преподаванием начал алгебры и геометрии.

Автор считает необходимым знакомить учащихся с эволюцией алгебраической и геометрической культуры, отмечая, что историческое развитие алгебраической культуры шло медленнее, чем геометрической.

Автор рассматривает жизненные предложения, связанные с величинами, и перевод этих предложений на стенографический язык алгебры с входящими буквенными обозначениями как анонимов чисел. Надо стараться, говорит А. Фуше, чтобы учащиеся увидели в числе, букве и знаках действия не их противоположности, а единое целое операционное исчисление; особенно автор проводит операторную точку зрения на понятии дробного и рационального чисел.

Операции с рациональными числами автор проводит примерно в следующем виде:

$+ (+ 3)$ — прибавить продвижение вперед на 3;
$+ (- 3)$ — прибавить отступление на 3;
$- (+ 3)$ — изъять продвижение на 3;
$- (- 3)$ — изъять отступление на 3.

Надо переучивать учащихся переосмысливать понятия сложения и вычитания чисел, усвоенные в арифметике.

Автор замечает установившиеся неудачные традиции, принятые в алгебраических обозначениях, например: $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = (7 \cdot 7) \cdot 7$, где имеются два одинаковых множителя, хотя по определению их три, а потому рекомендует $7^3 = 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = (1 \cdot 7) \cdot 7 \cdot 7$, где имеются три одинаковых множителя.

Далее переходит: $7^2 = (1 \cdot 7) \cdot 7$ — два одинаковых множителя;

$7^1 = 1 \cdot 7$ — один множитель;

$7^0 = 1$ — ни одного множителя.

Автор рекомендует начать с аналогии родной речи, говоря подробно: «Взять стул, взять стол, взять скамейку» — или короче: «Взять стул, стол, скамейку».

Аналогично: $3a + 3b + 3c = 3(a + b + c)$.

Вместо записи a автор рекомендует писать $1 \cdot a$.

Особое внимание уделяет последовательности операций в многочлене в отличие от одночлена:

а) многочлен $3 + 4 \cdot 5$ (вычисления не в порядке записи, а вначале проводят действие II ступени);

б) одночлен $3 \cdot 4 \cdot 5$ (вычисляют в порядке записи).

Особое внимание обращается на роль скобок:

а) в арифметике как «непреодолимого барьера, указывающего границы изолированной области, например:

$$3(4+5)=3\cdot 9=27\text{»};$$

б) в алгебраическом исчислении скобки утрачивают характер непреодолимого барьера — они имеют лишь временный характер:

$$a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Все ведет к полному перевороту в привычках учащихся — начинается применение к многочленам соответствующих теорем:

$$a-(a-b)=b \text{ и др.}$$

Интересное наблюдение автор отмечает, когда учащиеся впервые переходят к функции, например: $y=0{,}3x^2$, когда можно давать произвольные значения переменному x и вычислять переменное y. «У учащихся возникает неожиданное удивление, что x — свободное переменное. Это внезапное отсутствие скованности вызывает у учащихся боязнь, похожую на страх перед пустотой». Чувство страха учащегося является психологическим тормозом в процессе учения.

Обращает внимание автор на особые случаи, когда $a=1$ или $a=0$. Например, $0\cdot x=0$, где надо правильно сделать перевод со стенографического языка, а именно найти число x, которое при умножении на нуль дает нуль; сделав несколько проб, учащийся видит, что все числа удовлетворяют решению предложенного вопроса.

Автор особое внимание обращает на понятие отношения двух величин $\frac{y}{x}$ и на коэффициент k, где $\frac{y}{x}=k$, имеющих различный качественный, но одинаковый количественный смысл. Понятие скорости также носит двойственный характер, являясь одновременно отношением и коэффициентом, это относится и к производной функции. Приводится красивый пример производной функции от объема воды, заполняющей сосуд любой формы, где производная совпадает с площадью свободной поверхности сечения.

Интересно в «Педагогике математики» показывается, как воспитывать учащихся самостоятельно решать геометрические задачи; с этой целью автор останавливается на четырех типах задач. Для каждого из этих типов задач автор показывает, как определить последовательность этапов решения, как искать и находить начало цепи, чтобы вытянуть всю цепь событий, приводящих к решению.

Автор выделяет следующие этапы: чтение условия без чертежа, переход к чтению со схематически построенным чертежом и с последующим исправлением (уточнением) чертежа; как усматривать в чертеже связь искомого с данными. На конкретных задачах автор показывает самое сложное — как экспериментировать и направлять поиски решения.

Особенно эффективны рекомендации, даваемые автором при отыскании геометрических мест точек, обладающих заданным свойством.

Обращается внимание учащихся на сложность и простоту решения (в зависимости от числа проводимых окружностей и прямых). Уделяется внимание развитию пространственного мышления, начиная с простейшего — ви́дения треугольника ABC, когда даны только три точки A, B и C и воображают проведенные стороны AB, AC, BC, и переходят к тренировке ви́дения и построения трехмерного образа на плоскости — тетраэдра $SABC$. Автор добивается того, что учитель и учащиеся различают абстрактную точность и конкретную правильность и, наоборот, конкретную точность и абстрактную правильность.

В целом этюды «Педагогика математики» заставляют читателя думать там, где привычка создала шаблоны преподавания математики. По-видимому, французскому учителю математики достаточны этюдные намеки, чтобы пробуждать у массы учащихся математическую мысль и интерес к предмету.

Перевод дословный. Пояснения редактора даны в сносках, а также в тексте в скобках (дополнительное разъяснение по смыслу). Условные обозначения в некоторых случаях сохранены, как в оригинале. Например, на рисунке 10 прямая обозначена буквой D, или дано «*км* 82».

Проф. И. К. Андронов

ПРЕДИСЛОВИЕ ГЕНЕРАЛЬНОГО ФРАНЦУЗСКОГО ИНСПЕКТОРА НАРОДНОГО ПРОСВЕЩЕНИЯ Ж. ДЕФОРЖА

Намерение изложить на нескольких страницах «Педагогику математики» может показаться смелой затеей. Ибо нельзя говорить о педагогике в какой бы то ни было области, не проникая в непрестанно изменяющийся мир фактов и идей; и, говоря о математике, в особенности о введении в математику, можно ли избежать соприкосновения с некоторыми из сложных проблем, связанных с генезисом знаний и научной мысли?

Господин Фуше очень четко определил границы предмета своего исследования: преподавание, главным образом, математики на второй ступени обучения и почти исключительно начал алгебры и начал геометрии.

Я говорю «алгебра»; но скорее должен был бы сказать «вычисление», ибо почти все главы этой части труда посвящены логике и технике вычисления. Может вызвать удивление качественное различие, которое, таким образом, устанавливается между алгеброй и геометрией, по крайней мере в начальной фазе. Это требует, по-моему, разъяснений, чтобы избежать какого-либо недоразумения.

Алгебра (включая, разумеется, основания арифметики, а также ее продолжение в анализе) изучает гораздо более широкий класс объектов, чем элементарная геометрия. По мере развития алгебры в ее объектах обнаруживаются свойства бесконечно более сложные и значительные, чем элементарная идея, заложенная в них первоначально; разнообразные возможности, скрытые в них, проявляются постепенно, очень медленно; приведение в порядок постепенно приобретенных ими свойств может быть достигнуто лишь очень продолжительным трудом; впрочем, поле открытий в этой области безгранично по самому ее существу. Не этим ли объясняется медленное развитие вычисления в прошлом и отставание на два тысячелетия между построением элементарной алгебры и элементарной геометрии, которое справедливо отмечает господин Фуше?

Начала алгебры представляют собой основание, на котором построена теория и без которого не может обойтись человек, с какой бы то ни было целью приступающий к изучению математики; алгебраическое исчисление является ее первой составной частью. Господин Фуше тщательно анализирует этапы этих начал и высказывает нам в увлекательной форме соображения и мысли, которые ему подсказаны долгим опытом преподавания. Он особенно настаивает на приобретении приемов, почти автоматических, значимость и пользу которых, очевидно, нельзя отрицать. Однако не следует совершать ошибку, считая, что все в алгебре, и в частности в началах, должно сводиться к действию памяти, даже может быть пассивной памяти. В преподавании алгебры речь не идет о том, чтобы натаскивать начинающего и учить его работать подобно машине; речь идет о том, чтобы познакомить его с алгебраическими объектами и их свойствами, научить его умело обращаться с этими объектами, анализируя, насколько это возможно, достаточно ясно и достаточно глубоко выделять их основные качества, для того чтобы разум мог господствовать и был способен наилучшим образом выбирать и использовать их в каждом конкретном случае.

Впрочем, это направление в развитии умственных способностей, необходимое для хорошего применения алгебры, господин Фуше с присущим ему изяществом обсуждает во второй части («Геометрия»), примеры исследований, которые он приводит в связи с этим в очень живой форме, по моему мнению, могут быть распространены без большого усилия на первую часть («Алгебра»), особенно на раздел задач (уравнения, неравенства и т. д.).

Возникает вопрос: можно ли провести четкую границу между алгеброй и геометрией, если пойти дальше после изложения начал? Заимствуя у алгебры ее объекты и глубокий анализ их свойств, геометрия может выйти за пределы, определенные в ее традиционных началах; в свою очередь, она может прийти на помощь анализу, стимулируя новый его подъем.

Исследования в педагогике необходимо продолжать, так как непрерывно происходит прогресс в науках физиологии и психологии.

Маленькая книга господина Фуше своим фактическим содержанием и интерпретацией вносит очень важный вклад в изучение этих актуальных проблем. Если форма изложения, живая, подвижная, временами принимает повелительный характер, то это, по-моему, имеет целью сильнее поразить ум читателя, вызывая иногда противоречивые точки зрения и всегда размышления, — ибо господин Фуше хорошо знает, что неразумно в этих вопросах говорить: «нужно...» или «не нужно...»; об этом, без всякого сомнения, свидетельствует характер высказываемых им соображений, очень разнообразных и пронизывающих всю его книгу.

Ж. Дефорж

АНДРЕ ФУШЕ

ВВЕДЕНИЕ

РАЗВИТИЕ ПЕДАГОГИКИ МАТЕМАТИКИ

Когда изучается история педагогики математики, то особенно поражает чередование двух противоположных методов.

Действительно, временами торжествует догматизм с его непримиримостью. Тогда требуется сначала выучить и лишь потом понять при помощи примеров, типовых задач, кратких изложений; всё принимает характер раскрытой истины. Тогда нужно доверять, подчиняться правилам, знать теоремы наизусть, действовать, и действовать быстро, ошибка считается недопустимым позором. Преподаватель принуждает следовать за собой паству своих учеников, и, если кто-то из них его не понимает, тем хуже для них, это их вина, и пусть они станут жертвой злого хищника—невежества. Преподаватель непогрешим, лишен человеческих слабостей, это сверхчеловек, который всё знает, никогда не ошибается и о котором невозможно представить, что он когда-то был учеником сам.

Затем входит в моду эвристический метод со свойственной ему свободой обсуждения. Прежде чем выучить, требуется понять, всё принимает характер открытия: надо искать, находить теоремы самим, осмысливать правила критически. Со временем не считаются, еще меньше считаются с затраченными усилиями. Ошибка — это не более чем легко устранимый, даже поучительный инцидент, ибо она помогает обнаруживать истину. Свою паству преподаватель гонит перед собой, заботясь лишь о том, чтобы всё было понятно всем. Не беда, если некоторые продвигаются не очень быстро, злой хищник давно забыт. Преподаватель — не более чем человек, поводырь, почти старший товарищ. Когда ему случается ошибиться, он не смущается, и все понимают, что он не забыл своих детских мучений.

Легко заметить, что истина, правильный метод, который устраивает всех, как учителя, так и учеников, лежит как раз посередине. Можно было бы удивляться, что этот идеальный метод в течение долгого времени оставался неизвестным. Но для этого были веские причины, которые теперь едва начинаем понимать.

В самом деле, эволюция преподавания математики не ограничивается чередованием этих двух противоположных методов, она вместе с тем является поступательным движением вперед под воздействием внешних для преподавания причин. Главной из этих причин является увеличение, количественное и качественное, массы знаний, которые нужно приобрести за тот же промежуток времени. Следовательно, нужно стараться улучшать успеваемость и стараться найти счастливую комбинацию догматизма и эвристики. Эти поиски уже не новы, и они-то и приводят к замене одного метода другим, но они будут доведены до конца только тогда, когда все преподавание математики будет переосмыслено в свете результатов, достигнутых современной наукой о человеке, и особенно о ребенке.

Современный эксперимент с новыми классами, где человеческому фактору отводится очень важная роль, уже показал, что изменено должно быть не только преподавание. Надо будет в некоторых случаях пересмотреть также логические связи в самой математике. Таким образом, проблема исследования улучшения успеваемости (отдачи) относится не только к области психологии, как об этом раньше думали, но и к области чистой логики.

Полезно сопоставить наши педагогические задачи с проблемами современной промышленности, которая также требует повышения производительности. В самом деле, в промышленности это достигнется путем улучшения организации серийного производства, путем более рационального использования фактора времени и более разумного учета человеческого фактора. Обе проблемы имеют много точек соприкосновения, и изучение одной из них может помочь в изучении другой. Математика не должна больше оставаться башней из слоновой кости, она должна изменить свой суровый, отталкивающий вид у некоторых учащихся. Она должна стать, по крайней мере в своих началах, доступной всем, и преподавание, лучше разработанное, лучше организованное, должно стабилизироваться в гармоническом и эффективном сочетании обоих противоположных методов.

Фактор времени. Когда изучают с логической точки зрения черты различия догматического и эвристического методов, то констатируют, что этим методам присущ разный ритм работы, что они не используют время одинаковым образом. Такая же противоположность существует между машиной и ремесленником, между инженером и художником, между роботом и ученым. Время для догматизма, машины, инженера, робота — это деньги. Для эвристики, умельца, художника, ученого время всегда остается самой жизнью.

Настоящий труд открытия обычно требует длительного времени, но все же в конечном счете приводит к выигрышу времени. В самом деле, труд открытия состоит главным образом в приспособлении к новым и непредвиденным обстоятельствам. Часто это труд продолжительный, мучительный и неблагодарный. Если открытие доводится до конца, появляется простой закон и может выкристаллизоваться правило, которое облегчит труд приспособления, когда вновь появятся непредвиденные обстоятельства. При многочисленных или частых повторениях навык может постепенно развиться, и этот навык в конечном итоге приводит почти попутно к выигрышу времени.

Выигрыш времени — это лишь побочный продукт открытия, но в преподавании этот побочный продукт имеет первостепенное значение. Поэтому хотя и является заманчивым избежать труда открытия и объяснить правила догматически, однако при этом выигрыш во времени теряется, так как навык «учиться» приобретается медленнее и менее надежно.

Если последовательные правила, которым следует обучить, логически связаны, то эвристический метод вызывает «снежный ком» и в итоге оказывается более выгодным во времени, которое он создает, способствует усвоению обнаруженного правила и ускоряет приобретение соответствующего навыка. В формулировке правила фиксируется его разумное содержание, указывающее, что нужно делать, и объясняющее, почему нужно поступать именно так. Если нужно затем обучить новому правилу, которое логически увязывается с предыдущим, часть труда открытия уже сделана, и тем быстрее и легче приобретается навык. Напротив, догматический метод располагает рядом последовательных правил, и каждый раз одну и ту же работу приходится делать заново. Правила тогда уже не разумны, а только понятны. Они только говорят то, что нужно делать, но неизвестно, почему им нужно повиноваться. Всю работу выполняет память, навык приобретается только ценой очень большого количества упражнений, и время, затраченное на каждое правило, увеличивается сообразно с умственным утомлением.

Часто применяется промежуточный метод, при котором вначале формулируется правило, а затем оно объясняется или доказывается. При этом упраздняется труд открытия, используется логическая связь правил, откуда проистекает двойной выигрыш времени, но навык приобретается медленнее, и он менее надежен, чем при чистом методе открытия.

Преподаватель, располагающий определенным временем для прохождения данной программы, стоит перед подлинной проблемой экономии. Ритм при методе открытия слишком медлен, чтобы его всегда можно было принять, нужно его использовать в наиболее важных пунктах программы — в начале глав геометрии, в некоторых правилах алгебраического исчисления. Более быстрый ритм промежуточного метода часто необходим в других местах курса математики, а иногда настоятельно необходим чистый догматизм, например, для некоторых правил арифметических вычислений.

Педагогическая методика, которая обеспечит наилучшую успеваемость (отдачу), не может быть устойчивой и единственной комбинацией эвристики и догматизма, определяемой какой-то таинственной химией мышления. Каковы бы ни были успехи, которые мы могли бы сделать в наших исследованиях, педагогика всегда останется в той же мере искусством, как и наукой.

Человеческий фактор. Положение, которое мы только что сформулировали, относилось к идеальному среднему ученику, который, однако, встречается очень редко. Оно подкрепляется рассмотрением человеческого фактора. Часть наших учеников обладает созерцательным мышлением, они являются слишком покорными, пассивными и индифферентными. Их нужно перевоспитать при помощи очень сильной дозы эвристики. Другим —свойственна бесплодная активность — они не умеют ни читать, ни слушать; их слышно всегда, но сами они никогда не слышат. Им нужно дать побольше догматизма.

Искусство и знания педагогов суть искусство и знания практики. Педагогу нужно суметь разобраться в индивидуальных особенностях своих учеников так же хорошо, как и в разнообразных трудностях преподаваемого предмета. Он должен также знать, что если некоторые из учеников его объяснений не понимают, то это не из-за отставания в умственном развитии, но из-за плохого здоровья или по причинам эмоциональным, иногда даже попросту потому, что они боятся преподавателя, боятся математики, боятся показаться глупыми.

В этой работе мы ставим себе основной целью проанализировать мотивы и причины боязни математики у учеников и указать педагогические и логические средства, найденные для ее преодоления. Мы хотим доказать, что не существует неспособности к математике, что эта таинственная и легендарная неспособность есть лишь предрассудок, который, к несчастью, лишил уверенности в своих силах многих детей, причинив им страдание.

Многие ученики, родители которых считают их неспособными к математике, а иногда и некоторые преподаватели так считают, в действительности попросту страдают от комплекса неполноценности, который достаточно проанализировать, чтобы ослабить, а затем и избавиться от него. У некоторых учеников речь идет только о боязни провала. У других этот комплекс проявляется в виде извращенного вкуса к исключительному, который стимулируется плохими научно-популярными изложениями, стремящимися читателя скорее удивить, чем просветить его. В некоторых случаях это связано с недостаточностью физиологической жизнедеятельности, в результате которой ученики стремятся к наименьшему усилию, к легкому труду.

И наоборот, ученики, признанные очень способными, часто в детстве в результате счастливого успеха увлеклись математикой, иногда в ущерб другим предметам. Это увлечение скоро становится опасным, «снежный ком» нарастает неудержимо.

В этом маленьком труде не рассматривается весь курс математики. В нем основательно анализируются начала алгебраического исчисления и начала планиметрии. По поводу остальной части курса ограничиваемся отдельными замечаниями и указаниями.

Часть первая

АЛГЕБРА

Глава 1

СТРУКТУРА СЧЕТА

Эволюция техники счета

Слово «счет» (calcul) произошло от корня khalk, который означает «известняк». Khalix и ka-khlex по-гречески, calculus по-латыни, обозначает «галька».

Дети учились счету при помощи гальки. При помощи камушков, а затем при помощи счетного инструмента дети и торговцы прошлых времен считали и производили элементарные действия.

Сейчас вычисления производятся с помощью гигантских электронных машин, мощность и скорость которых превосходит воображение. Эти машины способны рассчитать даже все детали своего собственного производства, что почти напоминает самозарождение.

Древние дидактические поэмы индийцев свидетельствуют об изумительной силе первых попыток устного счета. Позже арабы[1] собрали, обогатили и передали нам их открытия.

Затем мало-помалу техника счета систематизируется и развивается со все возрастающей быстротой. В наши дни этот прогресс достигает такой стремительности, что в течение своей активной жизни человек должен много раз пересматривать свои знания, чтобы быть на уровне прогресса.

Развитие арифметики было более медленным и более запоздалым, чем развитие геометрии. В XVI столетии действие деление, которому мы сейчас учим детей восьми лет,

---

[1] Надо говорить: многие восточные народы средневековья, писавшие на арабском языке.

было еще сложным делом, доверяемым особым специалистам, тогда как за две тысячи лет до этого геометрия имела в своем активе теоремы, которым и сейчас обучают лишь учеников старших классов.

У этого отставания та же глубокая причина, которая делает таким трудным обучение вычислению: техника вычисления не проста и может стать легкой только после длительных упражнений.

Поэтому может показаться, что работа наших детей будет становиться все более трудной, по мере того как новая техника вычисления будет проникать в начальную школу. К счастью, это не так, потому что технический прогресс всегда ведет к уменьшению труда, делает его более простым и благодаря новым навыкам становится более легким. Так было с недавно изобретенным велосипедом, который значительно облегчает передвижение для тех, кто научился сохранять равновесие. Но хотя ребенок меньше понимает, чем взрослый, он приспособляется значительно быстрее и легче. Не будем умиляться нашими потомками, а вместо этого воздадим должное римлянам, которые должны были умножать, пользуясь своей собственной системой нумерации.

Обучение исчислению, будь то арифметическое, алгебраическое, тригонометрическое, векторное..., включает обучение методам и технике вычислений, развитие у ребенка навыков, которые не являются врожденными. Педагог не должен выпускать из виду двух категорий трудностей различной природы и происхождения.

Все те, которые сделались техниками и которые хотят развивать ее, хорошо понимают одну из этих категорий. Это те логические и технические трудности, которые возникают из особенностей самой техники.

Другая категория трудностей гораздо меньше известна. Об этих трудностях люди бессознательно забывают по мере своего развития и поэтому оказываются неспособными восстановить природу затруднения и способ его преодоления.

Первая категория затруднений преодолевается методом догматизма или методом открытий в зависимости от имеющегося в наличии времени. Вторая категория требует применения метода открытий, поскольку приспособляемость играет более важную роль, чем понимание. Комбинация обоих методов является тонкой, очень деликатной, и педагогика, из нее вытекающая, в большей мере искусство, чем наука, потому что она слишком зависит от характеров и темпераментов учеников и преподавателя. Однако можно вывести несколько общих законов. Одни связаны с представлением о технике вычисления, другие — с психологическим поведением учеников и со следствиями, которые из него вытекают для преподавателя. Эти законы связаны между собой и могут изменяться в зависимости от технических усовершенствований или состава аудитории. Те законы, которые мы сейчас приведем, и те, которые мы приводим в курсе изучения вычисления, годятся почти во всех случаях. Поражает количество и значимость этих законов по сравнению с законами геометрии. Это связано с тем, что в процессе эволюции вычисления возникло очень высокое логическое построение с узким основанием. Для того чтобы совместить значительную мощь вычисления с легкостью понимания, необходимо было установить правила, т. е. сконденсированные выводы. В течение продолжительного времени в представлении учеников эти правила были связаны лишь механически, не будучи объединены логикой в стройное целое. Обычный здравый смысл и, следовательно, приспособляемость подвергались тяжелому испытанию. К математической логике это не имеет отношения. Только опыт преподавания дал возможность открыть эмпирические законы практической педагогики исчисления.

ОБЩЕЕ ПОЛОЖЕНИЕ О ПРАВИЛАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Правило является средством действия, выполняемого автоматически и не требующего рассуждений.

Правило должно быть понятным, ясно излагающим то, что нужно делать, но вовсе не обязательно, чтобы оно указывало, почему нужно поступать так, как оно требует.

Правило есть описание и даже указание навыка, который следует приобрести, следовательно, применение правила должно стать бессознательным, и его содержание должно быть забыто, тотчас же по приобретении навыка.

Навык уничтожить очень трудно, следовательно, не нужно давать правил, навыков, рефлексов, от которых позже придется отказаться. Не нужна систематизация, которая не сможет войти в последующую систематизацию, не нужен навык, который не будет являться частью более общего навыка. Не нужно ничего приблизительного и приблизительных синонимов. Нужно следить за правильностью и точностью речи. Нужно подождать, чтобы новые слова полностью вошли в разговорный язык, прежде чем пользоваться ими для определения новых понятий. Слово «правило» («régle») и слово «прямой» («droite») оба происходят от слова «править» («régir»), которое значит «вести, не отклоняясь в сторону». Понятие правила, следовательно, тесно связано с понятием прямой линии, то есть с линией действия, где ничто не изменяется, где ум может отдыхать, где ученик полагается на «удобства». Правило должно, следовательно, иметь минимум исключений. Лучше, например, писать 1 x вместо просто x, без коэффициента. Особенно не следует отступать перед трудностями вычисления и применения правил и обходить их с ухищрениями минера и физика.

Данное правило может участвовать в двух различных обобщениях, которые будут согласованы только на более высокой ступени. Так, $\frac{a}{b} \cdot b = a$ следует из определения деления. Это действие может составлять одно целое с умножением дроби на число или с понятием обратного оператора (умножение также есть действие, обратное делению). Эти два обобщения сливаются затем в понятие группы. Кажется благоразумным давать в течение продолжительного времени только первое обобщение, не выражать своего нетерпения, если ученики напишут $\frac{a}{b} \cdot b = \frac{a \cdot b}{b} = a$, и дать им самим найти кратчайший путь, который будет поводом переосмыслить первое правило.

В процессе доказательства следует уделять больше внимания последовательной связи, переходу от одной дедукции к другой, чем логике всей дедуктивной системы. Доказательство должно выступать как цепь истин. Ученик, склонный вообще скорее видеть целое, чем детали, должен оттачивать свою способность разделять эту цепь на звенья. Это особенно важно при обобщении правила, когда звенья доказательства должны быть соединены заново, а также для конкретных приложений, когда параметры принимают численные значения (обычно 0, 1, 2).

Наоборот, для некоторых правил, несколько более сложных (соотношение Шаля)[1], доказательство, в котором связь была хорошо установлена, позволяет требовать доверия учеников к правилу, которое они понимают, но с трудом применяют. Благодаря многочисленным упражнениям можно создать искусственный навык, чтобы преодолеть трудный переход и научить применять правило. Созданный навык согласуется затем с уже приобретенными навыками, теряет свой искусственный характер, и это есть начало возросшей умственной культуры.

Алгебраические обозначения всегда нужно рассматривать как стенографическую запись, т. е. буквы представляют анонимные числа (о неизвестных следует говорить только начиная с уравнений). Следовательно, недопустимо, чтобы ученик делал в буквах ошибки, которые он не должен был бы делать в числах. Единственным эффективным методом для избежания этих ошибок является метод, принятый в преподавании иностранных языков: так делают переводы с иностранного на родной язык и обратно, помня, что второй более труден, чем первый.

Дополнительная трудность связана с применением алгебраической символики, ученика необходимо убедить в законности символики, ее связности и универсальности. Две первые характерные черты можно установить логически и упражнениями в переводе с иностранного языка на родной и обратно, но третья устанавливается наверняка только комбинированными упражнениями и взаимным исправлением. Например, преподаватель диктует, используя минимум математических слов, алгебраическое выражение, и во время этого диктанта ученики должны его немедленно записать символически. А затем ученики обмениваются тетрадями, и каждый ученик должен сделать обратный перевод записей своего соседа на родной язык учеников.

Правила и ученики

Не нужно давать слишком много объяснений, ибо этим можно утомить внимание. Ученик не способен сконцентрировать свое внимание больше чем на десять секунд. Его внимание всегда колеблется, и имеются отрывки фраз, которые он слушал, но которые он не слышал, которые не проникли в его сознание. Нужно повторить теми же словами

---

[1] Имеем: $AB + BC + CD = AC + CD = AD$, если A, B, C, D находятся в любом порядке на одной прямой.

то, что не было понято, немного изменив ритм речи. Следовательно, преподаватель должен очень тщательно следить за правильностью и точностью своего языка. Все по той же причине колеблющегося внимания, которое ограничивает возможности понимания, не нужно злоупотреблять новыми условными обозначениями и менять их во время объяснения. Не нужно идти слишком быстро, особенно это относится к мальчикам, которые приспосабливаются труднее, чем девочки. Усвоения следует добиваться путем повторения и установления связи с другими навыками. Не нужно забывать, что страх ошибиться в применении правила вычисления есть естественный, нормальный страх во время приобретения навыка.

Главная трудность вычисления заключается в приобретении техники вычисления. Как для приобретения всякого навыка, для этого нужно много времени и много упражнений. Не нужно забывать, что то, что кажется простым и легким в результате продолжительной практики, в процессе обучения может быть простым и трудным (отношение Шаля, производные...) или сложным и легким (арифметические операции...).

Например, некоторые упрощения алгебраических записей (упразднение коэффициента 1, знака умножения между числом и буквой, скобок, в которые берут произведения) не логичны, точнее, не связаны с логикой вычисления. В глазах детей эти упрощения являются искусственными и произвольными и создают трудности, если их не обосновать. Для этого нужно подниматься к логике намного более элементарной и глубокой, которая привела бы к упрощениям такого же рода, как и в обычном языке. Мы это проиллюстрируем на подробных примерах.

Надо быть осторожным в применении двух правил, близких по форме (произведение сумм и произведение произведений...). Дети искренне считают себя логичными, они охотно обобщают в широком смысле, но в действительности их выводы проистекают из-за склонности к справедливости, из любви к простому, симметричному, из-за субъективного чувства эстетики или же, когда они более образованны, они всюду устанавливают пропорциональность. Время от времени близкие по форме правила должны быть вновь обоснованы, вновь доказаны, даже вновь открыты, чтобы сохранить минимум понятного содержания, который обусловливает различие соответствующих навыков.

Обычно 50% учеников, утверждающих, что они поняли доказательства, говорят это, чтобы вам доставить удовольствие, чтобы избежать новой работы.., 30% могут быть искренними, но они были более удивлены, более поражены, чем действительно убеждены. Бывает, что вторая категория достигает 100% и что все ученики класса утверждают, что они понимают начиная именно с того момента, когда они перестали что-либо понимать. Полезно часто осторожно контролировать так называемое понимание учеников, опрашивая тех, которые чувствуют себя способными воспроизвести доказательство, или время от времени вызывать к доске одного из тех, которые утверждают, что они поняли.

Реальные технические и логические трудности вычисления

Алгебраическое выражение состоит из чисел, букв и знаков действий. Нет никакого существенного различия между числами и буквами, являющимися анонимами чисел. На первый взгляд нет этого различия между числами или буквами и операционными знаками. Технические трудности вычисления — это трудности изобретения и применения знаков. Логические трудности — это трудности комбинаций этих знаков между собой и с числами.

Различие, которое обычно делают между техникой и логикой[1] вычисления, является в действительности поверхностным, а потому и опасным. Оно извращает в умах наших учеников понятие числа, делая из него инертный материал, на который действуют операционные знаки, в то время как число, особенно абстрактное, является первым из всех операторов. Действительно, в практике преподавания вычисления слишком быстро переходят от именованных чисел к отвлеченным, при этом теряется из виду объект, который умножается на эти числа. Отдельно взятое отвлеченное число как бы теряет свой признак численности множества и является только нарицательным именем существительным. Когда переходят затем от арифметики к алгебре, то отвлеченное число, теряя всякую индивидуальность, часто обозначается буквой (зло уже сделано), число не имеет более конкретного содержания. Техника и логика операционных знаков являются единственными объектами

---

[1] Автор имеет в виду технику вычисления и логику ее обоснования.

нашего внимания, и, так как они не имеют больше конкретной поддержки, мы видим, как наши ученики делают не моргнув глазом грубейшие ошибки, которые они не делали бы несколько лет до этого в арифметике. Мы увидим, что достаточно будет восстановить действенный характер числа как множителя, чтобы намного уменьшить трудности в преподавании вычисления, в особенности преподавания дробей.

Кроме понятия числа, которое начиная с III класса[1] должно быть полностью восстановлено в уме наших учеников, имеются другие трудности чисто логического порядка, которые вновь встречаются в различных местах курса. Главная трудность связана с понятием обратного оператора. По нашему мнению, нельзя ограничиваться объяснением одной лишь технической стороны обратной операции, как это часто делают; техническое изложение во всяком случае необходимо дублировать объяснением сущности операции на вполне ясном символическом языке. Ученики, впрочем, не любят этот вид объяснения, который настоятельно требует понимания и усвоения. Они предпочитают хорошее и удобное техническое правило, которое избавляет их от размышлений, но не воспитывает их.

Другая трудность заключается в том, что последовательные действия читаются слева направо, как они написаны, и что ученики имеют тенденцию производить их в том же порядке. Приходится или выдумывать правила первоочередности действия, которые трудно оправдать, или же ставить везде скобки.

Еще одна трудность заключается в употреблении скобок и черт алгебраических дробей и их комбинаций.

Имеется еще много и других значительных трудностей в преподавании арифметики, но в этой маленькой книге невозможно привести их в объеме обычного курса. Это нас увело бы слишком далеко. Нам показалось более интересным и более эффективным сгруппировать их вокруг совокупности понятия числа и понятия обратного оператора. Это приведет нас, вполне естественно, к дробным числам и действиям над дробями, затем к числам относительным и к классическим скобкам и, наконец, к алгебраическим рациональным дробям.

---

[1] Речь идет о классе средней школы, соответствующем примерно нашему IX классу.

Глава 11

ДРОБНОЕ ЧИСЛО И ДЕЙСТВИЯ НАД ДРОБЯМИ

Целое число и число, обратное целому

Число—это слово (или группа слов), которое дает возможность вспомнить и воспроизвести в другом месте и в другое время простую[1] величину с помощью другой простой величины той же природы. Чтобы это сравнение было полезным, нужно выбрать эту вторую величину таким образом, чтобы ее легко было запомнить. Ее называют эталоном или единицей.

Так, стадо баранов содержит некоторое число баранов, деревня — некоторое число домов, расстояние содержит определенное число шагов, или дней ходьбы, или повторенную определенное количество раз длину палки.

Когда речь идет о баранах или домах, получают целое число. Когда речь идет о длине, можно не получить целого числа. Результат сравнения содержится между двумя последовательными целыми числами, и мы дальше увидим, как улучшить эффективность этого результата. Сначала изучим собственный смысл целого числа независимо от величины, для сравнения и измерения которых оно служит.

Когда говорят, что стадо содержит семь баранов, слово «семь» имеет в результате пассивный характер, но когда говорят в другом месте, что для воспроизведения стада той же величины нужно купить семь раз по барану, то слово «семь» имеет активный характер множителя. Слово «семь» употребляется в таком случае со словом «раз», оно становится отвлеченным, и понятие, которое оно выражает,

---

[1] Автор имеет в виду под простой величиной употребительную, хорошо знакомую учащимся величину.

существует независимо от частных величин, для сравнения или измерения которых оно могло служить.

Имеется эквивалентность между выражениями: «семь баранов», «семь раз по барану», «один баран, умноженный на семь» и «один баран, взятый семь раз». Можно заметить инверсию второго выражения в третье и замену слов «умноженное на» операционным знаком, обозначаемым точкой.

Слово «семь» может также иметь активный характер делителя, когда говорят, что, для того чтобы иметь одного барана, нужно разделить на семь целое стадо (множество). Говорят также, что один баран есть одна седьмая стада. Окончание «-ая» служит для того, чтобы отличать от целого обратные числа, выступающие делителями целых чисел, которые обычно действуют как множители. Употребление окончания «-ая», которое также служит для порядковых чисел, определяющих место, может объясняться тем, что, после того как данная величина была разделена на семь равных частей, эти части считают, чтобы проверить число этих частей и чтобы найти последнюю, т. е. седьмую.

Существует эквивалентность между выражениями: «седьмая часть стада», «стадо, разделенное на семь» и «стадо : 7». Можно заметить также инверсию первого выражения во второе и замену слов «разделенное на» операционным знаком.

Первые попытки обобщения целого числа

Мы видим, что, когда хотят сравнить один отрезок с другим, меньшим, служащим эталоном сравнения, в результате не всегда может получиться целое число. Как показывает опыт, это даже самый общий случай. Это не получается, говорят дети.

Рассмотрим два отрезка прямой AB и CD (просим читателя сделать чертеж, взяв AB длиной приблизительно 7 *см* и CD приблизительно 10 *см*). Мысленно наложим отрезок AB на CD так, чтобы точки C и A совпали и чтобы точки B и D были по одну сторону от совмещенных точек A и C. В таком случае оба отрезка имеют общий конец и общую часть, и можно констатировать, что отрезок CD больше отрезка AB.

Для большей точности нужно сравнить остаток, или разность, *BD* с отрезком *AB*, и в нашем случае можно утверждать, что *BD* меньше *AB*. Мы можем тогда сказать, что *CD* больше *AB* и меньше двух *AB*. В другом случае путем последовательного сравнения можно вывести, что один отрезок больше увеличенного в четыре раза и меньше увеличенного в пять раз другого отрезка. Результатом сравнения обоих отрезков является целое число, и тогда говорят, что длина первого отрезка равна четырем с недостатком или пяти с избытком, если второй отрезок взять за основание сравнения, т. е. за единицу, или эталон.

Разум детей не может идти дальше. Они очень хорошо видят, что операция, которую мы только что описали, есть не что иное, как приблизительное конкретное деление; поскольку остаток незначителен, они удовлетворены целочисленным частным. Однако, если их спросить, как они могли бы сделать, чтобы лучше выразить этот остаток, они его перенесут на маленький отрезок, служащий единицей, и скажут в первом примере, что остаток *BD* содержится в *AB* два раза, но не три раза. Они принимают остаток *BD*, который теперь является наименьшим отрезком, за новую единицу и пользуются ею, чтобы измерить прежнюю единицу, но им не придет в голову сравнить *BD* с половиной или с третьей частью *AB*.

Следует признать, что значительно легче увидеть и сказать, что *BD* содержится два раза в *AB*, но не три раза, чем увидеть и сказать, что *BD* больше третьей части и меньше половины *AB*. Здесь не только «жонглирование языком» в целях введения целых делителей, здесь имеется два разных суждения и конкретный факт раздробления *AB* на две, затем на три части.

Чтобы идти дальше, нужно точно сохранить отрезок *AB* в его роли основания для сравнения и учета остатка *BD* прибегнуть к вспомогательной единице, меньшей *AB*, но находящейся в прямой зависимости от него. Возьмем с этой целью отрезок, который содержался бы целое число раз в *AB*, т. е. делитель *AB*.

Египтяне всегда искали наибольший делитель единицы, содержащийся в остатке (в нашем примере это была бы третья часть); для нового остатка они искали новый наибольший делитель, содержащийся в нем, и т. д. Результат этих вычислений имеет любопытный характер, так как состоит из целого числа и ряда чисел, обратных целым, или, как мы сказали бы теперь, последовательности дробей, содержащих общий числитель единицу. Этот способ очень интересен с практической точки зрения и представляет собой превосходное упражнение для учащихся. В действительности этот метод очень быстро приводит к достаточно точному результату, однако он неудобен тем, что вынуждает к слишком разнообразному дроблению единицы.

Дробное число

Метод, который теперь применяют для сравнения двух отрезков, заключается в том, что непосредственно выясняют, существует ли отрезок, который был бы делителем и для AB, и для CD.

Обозначим через u такой отрезок, если он существует, и предположим, что он содержится n раз в AB и m раз в CD, n и m — целые числа. Говорят, что длина CD, когда берут AB за единицу, является дробным числом $\frac{m}{n}$ и длина AB, когда берут CD за единицу, является дробным числом $\frac{n}{m}$.

Прежде чем объяснить происхождение и смысл этих дробных чисел, представляющих комбинацию целых чисел, следует отметить, что нахождение отрезка u, если он существует, не является ни простым, ни легким. В самом деле, нельзя с первого взгляда сказать, какой делитель AB будет также делителем CD, ни даже, существует ли таковой. Не надо забывать также, что наше рассуждение относится только к отрезкам, заданным геометрически, для которых неизвестны численные величины, выраженные через третий, вспомогательный, отрезок, принятый за единицу. Результат может быть достигнут только тем методом последовательного деления, которым дети находят наибольший общий делитель в арифметике.

Мы несколько раз отмечали, что не всегда можно найти общий делитель для двух данных отрезков, т. е. что эти отрезки не обязательно измеримы один с помощью другого, или, как говорят, соизмеримы. Тем не менее кажется, что после достаточно долгих поисков наступит момент, когда все уменьшающийся остаток наконец обратится в нуль. Среди учащихся очень распространена эта псевдоидея, в которой смешивается чувство, что после достаточно большого количества проб успех становится все более и более вероятным, а затем достоверным, и смутное представление о бесконечно малых отрезках, которые, как кажется ученикам, в конце концов становятся равными нулю. Это двойственное представление неточно, можно доказать, что два данных отрезка, вообще говоря, несоизмеримы. Мы проиллюстрируем это ниже, когда будем рассматривать квадратные корни; понятие же бесконечности будет изучено в главе V, посвященной вопросу о функциях. Следовательно, в конкретной практике мы вынуждены довольствоваться сравнениями и приближенными измерениями и признать, что если бы не были придуманы десятичные дроби, то метод египтян был бы все еще наилучшим.

Активный характер дробных чисел

Сначала напомним во избежание путаницы, что подразумевается под дробными числами в начальном обучении: дробное число есть сумма целого числа и дроби. Это важное замечание основывается на том, что дробь обычно меньше единицы, так как она была придумана, чтобы измерять остаток или вообще отрезок, меньший единицы. Однако сложение дробей может привести практически к результату такого же вида, что и дробь, но с числителем, большим знаменателя. В глазах учеников это логическая и этимологическая бессмыслица, так как слово «дробь» обозначает часть единицы. Следовательно, нужно выделить единицы из результата, который таким образом легче и яснее можно себе представить. Эта точка зрения вполне приемлема, если речь идет о конечном результате, но если с полученными числами надо производить дальнейшие арифметические действия, то возникает опасность серьезных осложнений. По этой причине позже отказываются от этого вида чисел, которые к тому же представляют то неудобство, что целое число и дробь пишутся просто рядом и нет никакого знака сложения, который указывал бы, что речь идет о некоторой сумме.

Вернемся теперь к дробному числу в таком виде, как мы его определили выше, и в каком оно употребляется в средней школе, а именно с начала изучения алгебры. Ведущая идея дробного числа — это понятие отношения, которое встречается в геометрии при сравнении двух отрезков, соизмеримых с третьим отрезком, причем нет необходимости уточнять, какой из них самый маленький. Это понятие отношения по существу взаимно и может быть обращено в зависимости от того, берем ли мы за эталон сравнения один или другой из данных отрезков.

Понятие дробного числа чуть-чуть отличается от понятия отношения величин, потому что дробное число есть составное численное выражение, которое измеряет отношение в зависимости от того, берут ли один или другой из данных отрезков за единицу. Можно сказать, что тому же понятию геометрического отношения соответствуют два дробных числа, взаимно обратных одно другому. Эта обратимость долго мешает учащимся, так как имеется трудность в понимании инверсии предложения, которое выражает отношение. Более того, одно из рассматриваемых дробных чисел меньше единицы, в то время как другое хотя и имеет вид дроби, но превышает единицу.

Следует непременно преодолеть это затруднение, происходящее от старой привычки (рассматривать дробное число независимо от отношения), которая имела свое оправдание несколько сотен лет назад, но теперь является причиной многочисленных ученических ошибок. Наилучший способ преодоления этих затруднений — это возвратить дробному числу его активный обратимый характер, рассматривая его как комбинацию числа, обратного целому (делителя), и целого числа (множителя). Здесь имеется деликатный переход, но его нужно преодолеть главным образом путем эвристики и иногда немного путем догматизма. По нашему мнению, полезно изменить порядок изложения действий над дробными числами, как мы дальше укажем.

Приведем численный пример, чтобы яснее выразить нашу мысль. Пусть даны два отрезка прямой AB и CD, имеющие общий делитель u, содержащийся три раза в AB и пять раз в CD.

С таким же успехом мы можем сказать, что AB содержит три раза u, или что u есть третья часть AB, и что CD содержит пять раз u, или что u есть пятая часть CD. Следовательно, AB содержит три раза пятую часть CD, т. е.

$$AB = (CD : 5) \cdot 3,$$

и CD содержит пять раз третью часть AB, т. е.

$$CD = (AB : 3) \cdot 5.$$

Предыдущие выражения, являющиеся единственными, которые могли бы правильно выражать понятие дробного числа с помощью слов и знаков арифметических действий, слишком длинны, чтобы их оставить без изменения.

Выражения на понятном языке могут быть сокращены употреблением множественного числа, которое позволяет опустить слово «раз». Например, говорят, что AB есть три пятых CD. Что касается «стенографических выражений», записанных с помощью знаков деления, умножения и скобок, то можно упростить запись, используя черту дроби, наклонную или горизонтальную. Число, записанное под чертой, есть делитель, или знаменатель, а число, записанное над чертой, есть множитель, или числитель.

Следовательно, имеется эквивалентность между записями, которые обозначают три пятых CD: это $(CD : 5) \times \times 3$ и $\frac{3}{5} CD$. Остается преодолеть последнюю трудность — отказаться от употребления слова de[1], единственно оставшегося слова от первоначального предложения. Это не просто и не легко, и, действительно, условность записи кажется нелогичной и продолжительное время вызывает недоумение многих учеников. Она заключается в перестановке $\frac{3}{5}$ и CD и в замене слова de знаком умножения, точно так же как для целых чисел, когда заменяют понятное выражение «три раза CD» выражением «$CD \cdot 3$».

Следует признать, что учащиеся имеют право на удивление, потому что слово «раз» ничего не имеет общего со словом de, и, делая перевод $CD \cdot \frac{3}{5}$, они пытались бы сказать «три пятых раза CD», что не имеет никакого смысла. Более того, в выражении «$CD \cdot \frac{3}{5}$» умножение на 3 показано перед делением на 5 и не было доказано, что так можно действовать.

---

[1] В данном случае предлог de обозначает родительный падеж и принадлежность, например $\frac{3}{5}$ от CD.

Именно то, что мы только что сказали в последнем предложении, позволяет объяснить вторжение знака умножения перед дробным числом вместо слова de. В самом деле, если доказывают, что $(CD : 5) \cdot 3 = (CD \cdot 3) : 5$, то запись $CD \cdot \frac{3}{5}$ без скобок оправдывается. При чтении этой записи слева направо действия выполняются в логической последовательности (знак деления заменен чертой). Доказательство простое и может, впрочем, основываться на доказательстве коммутативности произведения двух целых чисел.

Дробное число и понятие точного частного

Мы только что использовали эквивалентность деления отрезка на 5, затем умножения полученного результата на 3, или умножения данной длины на 3, затем деления полученного результата на 5. А мы знаем, что в арифметике при умножении длины данного отрезка на целое число, а затем при делении полученного результата на другое целое число получают тот же результат, как и при умножении данной длины на частное от деления первого числа на второе, когда возможно точное деление.

Точное деление числителя дробного числа на его знаменатель вообще невозможно, но между тем существует соответствующий геометрический результат. Следовательно, можно сказать, что дробное число $\frac{3}{5}$ представляет точное частное от деления 3 на 5 и что записи $\frac{3}{5}$ и $3 : 5$ эквивалентны.

Однако с помощью десятичных дробей, определяемых местоположением цифр, можно добавить еще одну запись: $\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6$. Но это лишь прогресс в записи. В геометрическом определении $CD \cdot 0{,}6$ всегда имеется две операции: сначала нужно разделить CD на 10, затем результат умножить на 6. Тем не менее имеется прогресс, если известен размер CD по отношению к третьему отрезку, который служит вспомогательной единицей. Действительно, умножение отрезка CD на 0,6 может быть произведено одной арифметической операцией, и можно сказать, что 0,6 есть точное частное от деления 3 на 5.

Это расширение понятия точного частного при помощи точных десятичных дробей, т. е. ограниченных в своем разложении после запятой, имеет очень ограниченное значение, так как основание нашей системы счисления равно 10. Например, частное от деления 2 на 7 не ограничено в десятичном разложении. Это частное могло бы быть ограничено только в том случае, если бы основание системы счисления равно было семи или кратным семи. Точное частное деление 2 на 7 может быть, следовательно, определено и удобно записано только при помощи дробного числа $\frac{2}{7}$.

Последовательные сравнения нескольких отрезков. Произведения дробных чисел

Пусть даны три отрезка прямой AB, CD и EF. Предположим, что AB и CD имеют общий делитель u, содержащийся три раза в AB и пять раз в CD, и что CD и EF имеют также общий делитель u', отличный от u, содержащийся 7 раз в CD и четыре раза в EF. Следовательно, имеем:

$$AB = \frac{3}{5} \text{ от } CD = CD \cdot \frac{3}{5}$$

и

$$CD = \frac{7}{4} \text{ от } EF = EF \cdot \frac{7}{4}$$

и, таким образом,

$$AB = \frac{3}{5} \text{ от } \left(\frac{7}{4} \text{ от } EF\right) = \left(EF \cdot \frac{7}{4}\right) \cdot \frac{3}{5},$$

следовательно, если предполагают данным отрезок EF, то, чтобы получить отрезок AB, нужно разделить EF на 4, результат умножить на 7, затем разделить полученный результат на 5 и умножить этот последний на 3.

Итак, в арифметике можно доказать, что возможно переставлять порядок последовательных действий умножения и деления, что возможно группировать операции того же рода и заменять каждую группу чисел их произведением:

$$\left(EF\cdot\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{3}{5}=\{[(EF:4)\cdot 7]:5\}\cdot 3=$$

$$=\{[(EF\cdot 7)\cdot 3]:4\}:5=[EF\cdot(7\cdot 3)]:(4\cdot 5),$$

или окончательно

$$\left(EF\cdot\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{3}{5}=EF\cdot\frac{(7\cdot 3)}{(4\cdot 5)}.$$

Следовательно, произведение двух дробных чисел есть дробное число, числитель которого равен произведению числителей данных дробных чисел, а знаменатель — произведению знаменателей этих самых чисел.

Это можно сформулировать короче: произведение двух дробных чисел получается путем перемножения знаменателей между собой и числителей между собой.

Деление на дробное число

По определению частное от деления отрезка (величины) на число есть отрезок (величина), произведение которого на число равно данному отрезку (или вообще величине).

В широком смысле можно, следовательно, записать, что если $AB = CD\cdot\frac{3}{5}$, то $CD = AB:\frac{3}{5}$. Но известно, что $CD = AB\cdot\frac{5}{3}$, следовательно,

$$AB:\frac{3}{5} = AB\cdot\frac{5}{3},$$

и можно сказать, что деление на дробное число можно заменить умножением на обратное дробное число.

В таком виде правило деления на дробь теряет свой удивительный характер, числитель дроби становится делителем, а знаменатель становится множителем. Несколько вдаваясь в крайность, можно было бы представить себе правило комбинации знаков «·» и «:», аналогичное правилу комбинации знаков «+» и «—», которое предшествует относительным числам.

Упрощение и усложнение дробных чисел

В арифметике также можно показать, что в численном выражении, состоящем только из последовательных умножений и делений целых чисел, результат не изменяется, если произвести умножение и деление на одно и то же число (так же как можно прибавлять и вычитать одинаковые числа).

Из этого можно сделать вывод, что дробное число может быть упрощено путем одновременного деления числителя и знаменателя на какой-либо общий делитель или усложнено умножением числителя и знаменателя на одно и то же число.

Например, $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10}$ — это усложнение, и $\frac{15}{20}=$ $=\frac{15:5}{20:5}=\frac{3}{4}$ — это упрощение.

Короче, величина дроби не изменяется, если умножить или разделить числитель и знаменатель на одно и то же число.

Сравнение, сложение и вычитание дробных чисел

Можно, наконец, использовать упрощение и усложнение дробей, чтобы сравнивать, складывать и вычитать эти дроби, приводя их к одному и тому же знаменателю, следуя классическому методу. Но эти действия более сложны, чем умножение и деление дробей, и могут скрыть от учеников простоту (сущность) понятия дроби. Нам кажется целесообразным объяснять эти действия (сложение и вычитание) в последнюю очередь.

Такое изменение в последовательности изложения действий, во-первых, может удивить учеников (но это удивление полезно) и, во-вторых, больше подчеркивает разницу в правилах (действий первой и второй ступени) и предохраняет от механического распространения навыка и операционной техники на новый случай (выявляемый в действиях первой ступени).

Мы несколько раз писали слово «дробь» вместо слов «дробное число». Это традиция, которая очень распространена и против которой трудно бороться. Однако понятие дробного числа, комбинации множителя и делителя, является более общим, чем понятие дроби, от которого первое произошло, и употребление слова «дробь» не должно воскрешать в памяти первоначальное понятие. Однако именно это, по-видимому, происходит в умах наших учеников, и это достойно сожаления, потому что активное понятие дробного числа необходимо для упрощения преподавания алгебры.

Глава III

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА[1] И СКОБКИ

Определение и свойства алгебраических чисел

Алгебраическое число определяют как комбинацию знака «+» или знака «—» с арифметическим числом, целым или дробным. Алгебраические числа служат для измерения направленных величин, т. е. таких величин, которые могут отсчитываться в двух противоположных направлениях, например продвижение вперед или отступление, прибыль или убыток.

Ученики легко воспринимают алгебраические числа и тотчас же привыкают к факту, что знаки сложения и вычитания применяются для указания направления, которое включают в себя алгебраические числа. Ученики также очень удивлены, когда преподаватель пытается оправдать обобщение с введением понятия отрицательного числа, которое ученикам и представляется уже ясным, так как они знали из жизни прибор термометр, что создает легкую привычку к обобщению. У ребенка есть жизненные наблюдения, которые, к сожалению, в школе плохо используются. Между тем это естественное понятие существует не у всех детей, и, по-видимому, довольно непрочно у тех, у которых оно есть, это проявляется при интерпретации отрицательных решений алгебраических задач. Какие бы ни были мотивы для этого удивления, оно существует и выявляется, когда ученик встречается с доказательством более технического характера, чем логического. В самом

---

[1] Фуше, как и многие авторы учебников во Франции, употребляет слово «алгебраический» не в установленном научном смысле, как оно вошло в математику, а в школьном смысле, как число, употребляемое в началах алгебры.

деле, вообще начинают с объяснения отрицательного числа, получающегося в результате вычитания, в котором второе число больше первого, затем говорят об условности записи, которая оправдывается ее удобством и будет обоснована позже.

Однако имеются основания как для желания преподавателя привести доказательства, так и для немедленного усвоения учениками применения знаков сложения и вычитания для ориентирования алгебраических чисел. Действительно, знаки «+» и «—» активны, когда они применяются в сложении и вычитании, и они пассивны в алгебраических числах, являющихся результатами; будь они активны или пассивны, понятия, которые они выражают, сохраняют свой смысл. Имеется, следовательно, материал для доказательства, которое должно касаться исключительно перехода от активных значений «+» и «—» к значениям пассивным, а это почти вопрос грамматики.

Активный смысл знака «+» в сложении передается глаголами в неопределенном наклонении (в инфинитиве) «прибавить», «сложить», «присоединить», которые могут подразумеваться под словами «и», «потом», «затем» или даже под простой запятой. Нужно избегать глагола «увеличивать», который предполагает направление в результате (характеристика новых чисел).

Активный смысл знака «—» в вычитании передается глаголами «отнять», «изъять», «вычесть», «снять» (надо избегать глагола «уменьшать»).

Пассивные числовые значения передаются теми же глаголами в форме причастия прошедшего времени, и в этом проявляется настоящее логическое затруднение. Пассивные значения передаются также словами «продвижение вперед» или «отступление», «прибыль» или «убыток», когда речь идет о величинах с двояким направлением. Эти слова означают, что ориентация пассивных результатов уже выбрана в уме того, кто считает, и, очевидно, выбрана в том (понятном) смысле, который соответствует его интересам (рассматриваемой информации). В самом деле, человек, который считает, выбирает ориентацию и навязывает ту же самую ориентацию величинам, которые он исчисляет. Следовательно, пешеход скажет «+ 3» при продвижении вперед на 3, т. е. при перемещении на 3 в направлении, куда он смотрит, впереди себя. Также бухгалтер применит алгебраическое число —5 для убытка или расхода 5, потому что этот убыток или расход заставляет его на 5 уменьшить то, что он имеет в кассе, т. е. произвести вычитание.

Видно также, почему не следует применять слова «увеличивать» и «уменьшать», чтобы выражать активные значения знаков «+» и «—», эти слова заранее ориентированы. Они имели ясное, естественное значение для арифметических чисел, которые измеряют величины с одним направлением отсчета, естественно ориентированные в направлении их роста, но для алгебраических чисел, как мы сейчас увидим, они могут создать путаницу.

Сложение и вычитание алгебраических чисел

Эти действия ведут к комбинации активных значений знаков «+» и «—» сложения и вычитания и пассивных значений знаков алгебраических чисел.

Можно непосредственно сформулировать правила этих комбинаций знаков. В самом деле, можно записать:

+ (+ 3) = прибавить продвижение вперед на 3 = продвинуться вперед на 3 = + 3

+ (— 3) = прибавить отступление на 3 = отступить на 3 = — 3;

— (+ 3) = изъять продвижение на 3 = отступить на 3= = — 3;

— (— 3) = изъять отступление на 3 = продвинуться на 3 = + 3.

Таким путем приходят к классическому правилу в его первоначальной форме.

Из этих примеров очень ясно видно, что активные значения, которые мы выразили глаголами «прибавить», «изъять», были бы менее ясными, если бы мы их выразили словами «увеличить» и «уменьшить», и еще намного менее ясными, если бы были применены глаголы «продвинуться вперед» и «отступить». Глагол «прибавить» не является абсолютно совершенным в том значении, в котором мы его применили, потому что он содержит легкий оттенок понятия увеличения, но его эквивалент «сложить» является несколько замысловатым для некоторых учеников. Во всяком случае, цель, поставленная в этой части курса, ясна. Следует логически (в некоторых случаях) или технически счистить понятия сложения и вычитания от всех следов понятий увеличения и уменьшения, которые они естественно содержат в арифметике. Это нелегко, привыкание учеников к этому различию очень мучительно, потому что здесь нужно уничтожить навык. Нужно много упражнений, и, несмотря на это, старый навык позже вновь часто будет появляться.

Согласование правила скобок в арифметике и правил сложения и вычитания алгебраических чисел

В арифметике формулируют правило скобок в виде теоремы.

Скобка, впереди которой стоит знак «+», может быть отброшена вместе со знаком, предшествующим ей, без каких-либо других изменений.

Скобка, впереди которой стоит знак «—», может быть отброшена вместе с этим знаком при одновременном изменении знаков, которые стоят впереди членов, содержащихся внутри скобок.

Следует добавить, что первый член, стоящий в скобках, не имеющий впереди себя никакого знака, должен рассматриваться как имеющий впереди себя подразумеваемый знак «+». То же самое в отношении скобок, которые могут стоять перед арифметическим выражением.

Представляя эти теоремы в виде формул, т. е. применяя буквы, которые изображают анонимные числа, получают:

$$\ldots + (a + b - c) + \ldots = \ldots + a + b - c + \ldots,$$
$$\ldots - (a + b - c) + \ldots = \ldots - a - b + c + \ldots\ .$$

Следовательно, арифметическое число, перед которым непосредственно стоит знак «+», подвергается действию двух знаков «+», и эти два активных знака комбинируются в один тоже активный знак «+». Также комбинация одного знака «+» и одного знака «—» даст «—», комбинация одного знака «—» и одного знака «+» даст «—», и, наконец, комбинация двух знаков «—» даст «+». Получается то же самое правило, что и при комбинации знаков в сложении и вычитании алгебраических чисел.

Другое пояснение, технически более ясное, но менее ясное с точки зрения логики, может быть представлено следующим образом:

$\ldots - (0 + b) = - 0 - b = - b$ (правило скобок),

$- (0 + b) = - (+ b) = - b$ (правила алгебраических чисел), но нужно доказать, что алгебраическое число $+ b$ эквивалентно сумме $0 + b$.

Правило скобок для алгебраических чисел

Правило то же самое, что и для арифметических чисел, но практически каждое число, изображенное в скобках, имеет впереди себя три знака, которые (все три) оказывают действие на него. Приходят, следовательно, к обобщению правила скобок для арифметических чисел и к введению квадратных и фигурных скобок. Это лишь вопрос операционной техники; следует много упражняться, чтобы развить устойчивые навыки.

Умножение и деление алгебраических чисел

Предположим, что нужно сделать перевод на язык алгебраических действий следующего предложения: «Прибавить две прибыли по 100 франков к тому, что есть в кассе, и изъять три убытка по 50 франков». Получим:

$$+ 2(+ 100) + (- 3) (- 50).$$

Слова «прибавим 2» переводятся посредством $+ 2$, состоящего из знака сложения и арифметического числа, слова «изъять три» естественно переводятся алгебраическим числом -3. Это число в нашей записи взято в скобки, чтобы избежать соседства знаков «+» и «—», которые переводят соответственно слова «и» и «изъять». Алгебраическое число $- 3$ в этот раз остается целиком активным, потому что оно является отвлеченным множителем. Можно было бы также рассматривать + 2 как алгебраическое число и брать его тоже в скобки, но это было бы бесполезно.

Заметим, что знак умножения больше не появляется в алгебраическом переводе, так же как слово «раз» в предложении. Они, как одно, так и другое, не нужны.

Прибавить две прибыли по 100 франков эквивалентно одной прибыли в 200 франков, следовательно,

$$+ 2(+ 100) = (+ 2) \cdot (+ 100) = + 200,$$

изъять три убытка по 50 франков эквивалентно одной прибыли в 150 франков, следовательно,

$$(- 3) (- 50) = (- 3) \cdot (- 50) = + 150.$$

Снова обнаруживается здесь правило комбинации знаков «+» и «—», применяемое на этот раз к произведению алгебраических чисел.

Техническое согласование умножения алгебраических чисел с арифметическими теоремами, относящимися к произведениям сумм и разностей, также может быть осуществлено в форме доказательства, но его лучше осуществить путем соединения навыков.

Напротив, правило знаков при делении алгебраических чисел технически доказывается довольно просто с использованием правила знаков произведения и определения деления. Это техническое доказательство более приемлемо, чем логическое доказательство, требующее перевода с языка арифметических знаков на разговорный язык, а затем обратного перевода, оно наверняка не понравилось бы ученикам, которые спешат достигнуть практических правил.

Значение технических и логических доказательств и их сопоставление

В III главе мы подчеркивали различие между техническим и логическим доказательством. Это может показаться странным и ненужным, если принять во внимание, что техническое доказательство само по себе логично;

таким образом, введенные нами определения «техническое» и «логическое» условны и не очень удачны. Однако мы не смогли найти лучших терминов для двух способов доказательства, несколько примеров которых мы только что привели. Мы назвали логическим доказательство, использующее основоположные аксиомы и первоначальные понятия, и техническим доказательство, которое использует ранее доказанные теоремы.

В глазах учеников доказательство, которое мы называем логическим, ведет к совершенно бесспорным результатам, потому что оно покоится на первоначальных фактах, тоже бесспорных. Наоборот, доказательство, которое мы называем техническим, значительно менее убедительно, потому что оно покоится на теоремах, которые были хорошо поняты, приняты, но к которым ученики еще не полностью привыкли.

Нам могут возразить, что если дополнить техническое доказательство доказательством использованных (в нем) теорем, то получится логическое доказательство. Это, конечно, верно, но такое рассуждение только яснее показывает отличие технического доказательства от логического. Техническое доказательство, утяжеленное доказательствами предыдущих теорем, было бы логическим построением, слишком внушительным, чтобы быть понятым во всем своем объеме, особенно детьми.

Логическое доказательство, когда оно не слишком длинно, предпочтительнее доказательства технического, которое не завоевывает сразу доверия учеников. Однако нужно приучать детей доверять вычислению, увлекаться им, не теряя необходимой осторожности, надо убедить детей, что вычисление сильнее, мощнее, чем их воображение. Человек изобрел механику вычисления, он ее постепенно совершенствовал технически, проверяя ее. В некоторых случаях, не предусмотренных операционной техникой, применение ее приводило к результатам, которые имели вид на первый взгляд неприемлемый для здравого смысла. Случалось, что лишь через несколько поколений человек привыкал к этим результатам, обнаруживал в них глубокий логический смысл и их просто связывал с интуитивными, бесспорными фактами.

Нам не следует, однако, воспроизводить в своих объяснениях исторический путь открытия простых законов, несмотря на кажущуюся его естественность, в тех случаях, когда этот путь представляет собой тривиальное обобщение. Мы должны давать логическое доказательство и давать его эвристическим методом, несмотря на то что это представляет историческую ошибку[1].

Однако очень полезно, после того как логическое доказательство хорошо понято, вкратце рассказать, каким окольным бывает иногда исторический путь открытия. Мы проиллюстрировали это примером в главе о дробных числах. Ученику, как зрителю, интересен этот рассказ, и он убеждается в том, что нужно доверять вычислению и не слишком полагаться на то, что он считает здравым смыслом. Это будет особенно полезно для него при изучении алгебраического исчисления, когда он столкнется с вещами, к которым сразу нельзя привыкнуть.

---

[1] Доказательство мы должны давать не в готовом виде — догматически, а находить эвристическим методом. Не давать его там, где его нет, когда это является новым определением, что исторически не всегда соблюдалось.

Глава IV

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Показатели степени и одночлены

В арифметике объясняют понятие степени, говоря, например, что 7^3 есть произведение трех множителей, равных семи. Это определение неполно, потому что оно дает лишь пассивный результат. Действительно, $7 \cdot 7 \cdot 7$ представлено как произведение пассивного множимого (первая семерка) на активный множитель (вторая семерка), причем результат в свою очередь умножается на третье число 7, также активное. Ученик смущен тем фактом, что число умножений, нужное для получения 7^3, на единицу меньше показателя, равного трем. Учащиеся доходят до разговора о чудовищных вещах, например, что 7^3 есть произведение числа 7 на самого себя трижды или дважды, смотря по минутному вдохновению.

Интереснее представить 7^3 как краткую стенографическую запись трех активных, последовательных множителей, равных семи, и привести конкретный пример, где какой-нибудь предмет служит пассивным множимым. Так, 7^3 столов $=$ 1 стол $\cdot\ 7^3 =$ [(1 стол $\cdot$ 7) $\cdot$ 7] $\cdot$ 7, говоря, что речь идет о семи классах, в каждом из которых имеем семь рядов по семи столов в каждом ряду. В этом примере показатель степени обозначает число последовательных множителей.

Этот способ изложения обладает также тем большим преимуществом, что он логически объясняет смысл особых показателей 1 и 0, которые сами по себе не имеют права на существование, но появляются в связи с техникой счета. (Это служит замечательным примером убедительного различия между логическим и техническим доказательством.)

В самом деле, 7^1 означает один множитель 7, стало быть, следует умножить один раз на 7, стало быть, нужно умножить на 7. Это ясно показывает, что 7^1 тождественно семи без показателя. Аналогично 7^0 означает 0 множителей 7, стало быть, нужно умножить 0 раз на 7, стало быть, не нужно умножать на 7, или, если обязательно хотят умножить на число, умножают на 1. Это ясно показывает, что 7^0 тождественно единице. Этот вполне логичный результат вызывает (психологическое) удивление учеников, так как число 7 в результате не фигурирует и утрачивает всякое значение. На этом надо настаивать, надо подчеркивать, что число 7 действительно не имеет в данном случае значения, что любое число с показателем 0 тождественно единице. Полезно также полностью повторить эти рассуждения с другими числами.

Можно затем, после объяснения правил умножения и деления степеней, технически согласовать логические понятия, выраженные показателями степеней 1 и 0, с результатом деления степеней в тех частных случаях, когда деление приводит к особым показателям.

Таким способом можно гораздо лучше убедить учеников пользоваться показателем 0, чем одним только классическим техническим доказательством. Последнее приводит к непонятной условности, так как в этом доказательстве ускользает самостоятельный (конкретный) смысл нулевого показателя и ученикам кажется, что этот показатель можно безболезненно упразднить.

Так как положение хорошо разъяснено логическим объяснением показателей 1 и 0, деликатный вопрос о степенях алгебраических одночленов немного облегчается.

Одночлен — это алгебраическое выражение, в котором фигурируют числа, буквы (т. е. анонимные числа) и операционные знаки, степени и корни, при этом знаки «+» и «—» (если они имеются) используются только для образования численных коэффициентов из слагаемых, имеющих, например, вид корней, которые не могут быть выражены десятичной дробью.

С этой оговоркой можно сказать, что одночлен представляет собой комбинацию умножений, делений, степеней и корней. Если рассматривать только рациональные одночлены, действие извлечения корня исключается (если не считать численных коэффициентов). Следовательно, рациональный одночлен представляет собой комбинацию множителей и делителей, некоторые из которых могут повторяться. Если известны численные значения букв, то можно вычислить численное значение одночлена только умножениями и делениями.

Мы сказали, что вопрос о степенях щекотлив. В самом деле, ученики ясно не видят, куда преподаватель клонит, когда он сверх термина «показатель» вводит термин «степень» и переходит к сложению степеней; удивлению нет границ, когда одновременно появляются степени по отношению к множеству различных оснований.

В этот момент очень полезно привести несколько конкретных примеров вычисления площадей и объемов.

Щекотливым моментом является еще и то, что в одночлене не пишут знаков умножения между различными множителями. Эту привычку записи редко обосновывают. Однако это очень просто объяснить ученикам, и это стоит сделать.

В разговорном языке не употребляют выражение «семь раз один стол», вместо этого говорят «семь столов», заменяя слово «раз» множественным числом. Аналогично вместо «семь раз a», или «$a \cdot 7$», скажут «$7a$» , подразумевая a во множественном числе.

Суммы и разности. Многочлены. Техника применения скобок

Мы только что видели, что рациональный одночлен является алгебраическим выражением, содержащим лишь множители и делители, некоторые из которых могут повторяться. Но в арифметике знают, что эти умножения и деления можно сделать в любом порядке, причем деление, если оно не может быть выполнено (точно), остается обозначенным посредством дробной черты.

Следовательно, невозможно ошибиться, когда ищут численное значение одночлена. То же самое относится и к алгебраическим выражениям, которые содержат только обозначения суммы и разности. Однако когда алгебраическое выражение содержит, например, знаки сложения и умножения, то порядок действий уже небезразличен и должен быть строго установлен с помощью скобок.

В этот момент алгебраическое исчисление опасно усложняется, так как, хотя понятие скобки весьма просто само по себе, оно запутано как бы понапрасну необоснованными сверхупрощениями записи и теоремами преобразования произведений сумм и разностей.

Здесь наши ученики теряются и некоторое время спустя забывают, в какой последовательности нужно производить действия. Не находя другого выхода, они доходят до того, что в простом численном выражении, записанном без скобок, производят действия слева направо, в порядке чтения. Они, например, спокойно пишут:

$$2 + 3 \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ вместо } 2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14.$$

Или они всюду видят скобки, даже там, где их нет, и спокойно пишут также:

$$3 \cdot 4 + 2 = 3 \cdot 6 = 18 \text{ вместо } 3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14.$$

Чтобы исправить это положение, нужно уточнить три пункта различной природы, но одинаковой значимости.

Первый пункт чисто технический. Следует точно установить техническую роль скобок как непреодолимого барьера, указывающего границы изолированной области. Следует объяснить, почему считают ненужным брать в скобки произведения и вообще одночлены.

Следует формулировать правила первоочередности, которые заменяют скобки.

Второй пункт также технический. Следует привести много примеров нахождения численных значений многочленов и других алгебраических выражений, соблюдая порядок действий, предписываемый скобками, в которые заключены суммы и разности, и правилами очередности действий. Эти вычисления, производимые в последовательности, в которой они записаны, называются прямыми вычислениями.

Третий пункт главным образом логический. Применение к многочленам арифметических теорем о произведениях сумм и разностей ведет к полному перевороту в последовательности действий. Скобки утрачивают характер непреодолимого барьера, они имеют лишь временное значение. Этот переворот должен оставаться логическим и ограничиваться алгебраическим исчислением, распространяясь лишь на буквенные выражения, но никоим образом не на численные. Граница здесь должна быть очень четкой. В порядке проверки численное значение алгебраического выражения может быть найдено до и после его преобразования. Численные вычисления, выполненные после преобразований, называются косвенными вычислениями.

Техническое правило применения скобок. Скобки — это письменные знаки, ограничивающие поле деятельности операционных знаков и чисел, которые содержатся внутри скобок. Стало быть, операционный знак, или число, расположенные внутри скобок, не воздействуют на величины, находящиеся вне этих скобок (тем более, если эти величины заключены в другие скобки). Скобка может быть упразднена только тогда, когда все действия внутри скобок уже произведены.

Тем не менее считают ненужным брать в скобки произведение и вообще одночлены. Это в основном является следствием привычки упразднять знаки умножения между сомножителями произведения, как и упразднять слово «раз» в разговорном языке. Благодаря этому произведение и вообще одночлен образуют единое целое, и нет необходимости брать его в скобки. Из этого проистекает экономия в записи и особенно важная экономия в чтении. На всякий случай полезно дополнить эту нелогичную привычку следующими правилами первоочередности.

Правила первоочередности. В алгебраическом выражении внутри скобок умножение и деление могут выполняться в любой последовательности, но они должны быть выполнены раньше сложения и вычитания. Короче, умножение и деление предшествуют сложению и вычитанию.

Также возведение в степень и извлечение корня предшествуют умножению и делению.

Совершенно необходимо закреплять эти правила первоочередности в сознании учеников посредством многочисленных упражнений. Это должны быть упражнения на произведения многочленов и на алгебраические дроби, с тем чтобы закрепить привычку рассматривать скобки и черты дробей как границы изолированных участков, в которых должны быть полностью закончены вычисления перед тем, как убрать эти границы. В самом деле, скобки и правила первоочередности, которые предписывают очень строгий порядок в последовательности выполнения действий, могут быть обойдены различными правилами преобразования, которые позволяют достичь того же конечного результата, отнимая у скобок их характер непреодолимых барьеров.

Например, правило произведения суммы на другую сумму, установленное в арифметике, позволяет умножить каждый член первой суммы на каждый член другой суммы и сложить полученные результаты. Наоборот, если преобразовать выражение путем вынесения общего множителя, то сложение будет предшествовать умножению.

Для того чтобы лучше отметить разницу между прямыми арифметическими действиями, когда скобки сохранены, и косвенными вычислениями, когда скобки играют только преходящую (временную) роль, превосходным и очень полезным примером может послужить численная проверка замечательных тождеств, в справедливости которых ученики обычно убеждаются с большим трудом.

Разложение на множители алгебраического выражения

Разложение на множители[1] алгебраического выражения — это операция, обратная почленному перемножению многочленов. Разложение алгебраического выражения на множители не всегда возможно, как и всякая обратная операция. Разложение на множители достигается следующими способами: вынесением за скобки общего множителя одночлена, использованием замечательных тождеств и исследованием через распознавание и отождествление. Вынесение за скобки общего множителя не составляет труда и довольно легко технически воспринимается учениками. Тем не менее следует в течение продолжительного времени заставлять учеников проверять результаты путем раскрытия скобок. Вынесение общего множителя имеет аналогию в языке, где глагол как бы выполняет функцию общего множителя, когда он имеет несколько дополнений. Однако роль и взаимоотношение алгебраических членов (или дополнений в данной аналогии) могут глубоко различаться в зависимости от природы действия глагола.

Так, выражение «взять стол, взять стул и взять скамейку» может быть записано в виде «взять стол, стул и скамей-

---

[1] По-французски — factorisation. По мнению автора, этот термин является очень выразительным.

ку» или алгебраически «взять (стол + стул + скамейку)». То же самое:

$$3a + 3b + 3c = 3\,(a + b + c).$$

Наоборот, выражение «увеличить a на 3, затем увеличить b на 3» можно записать таким образом: «увеличить a на 3, затем b на 3», но не так: «увеличить $(a + b)$ на 3»[1].

Применение замечательных тождеств является полностью техническим. Оно не имеет никакой аналогии в разговорной речи и поэтому требует очень большого числа упражнений.

Исследования с помощью распознавания и отождествления также являются чисто техническим способом, но они обладают тем достоинством, что заставляют ум работать в направлении открытия, наталкивая его на целеустремленные поиски; полученные этим способом результаты кажутся более убедительными. В частности, очень полезно давать ученикам примеры на разложение, в которых надо распознать квадрат суммы, с тем чтобы они быстрее и непосредственнее привыкли к замечательным тождествам.

Рациональные алгебраические дроби

Почти все изложение этой части курса носит технический характер. Именно поэтому ученики испытывают много трудностей, прежде чем научатся получать правильные результаты. Поэтому нужно восстанавливать взаимосвязь с основными аксиомами и понятиями через посредство вспомогательных теорем. Главная теорема касается упрощения и усложнения дробей. Чтобы к ней привыкнуть, нужны систематические упражнения на разложение числителя и знаменателя на множители; в течение продолжительного времени следует избегать устного сокращения.

---

[1] В данных примерах противопоставляются две логические возможности: 1) объекты из некоторой совокупности рассматриваются не каждый в отдельности, а в сумме; 2) эти объекты рассматриваются независимо, в отдельности. При вынесении глагола за скобки в первом случае объекты соединяются знаком «+», а во втором случае остаются разделенными.

Активный характер алгебраического выражения

Алгебраическое выражение есть комбинация простых операторов, действие которых не зависит от анонимных чисел, к которым они относятся.

С этой точки зрения алгебраическое выражение имеет активный характер сложного оператора и называется алгебраической функцией (слово «функция» происходит от слова «производить»). Каждый раз, когда системе анонимных чисел, представленных буквами, дают определенные численные значения, алгебраическое выражение дает («производит») соответствующий численный результат. Эти анонимные числа, на которые воздействует оператор и которые могут принимать различные значения, называются переменными величинами или, короче, переменными.

Глава V

ФУНКЦИИ. ЗАДАЧИ. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Функции. Задачи

Понятие функции является более общим, чем понятие алгебраической функции, которую мы только что рассматривали. Когда существует зависимость между значениями нескольких величин, т. е. одна величина определяется заданием остальных, говорят, что первая является функцией остальных величин. В обычной жизни зависимость между величинами выражается численными таблицами, полученными экспериментально; случай алгебраической функции является исключительным или искусственным. После того как изучение техники вычисления будет окончено, очень уместно пояснить общее понятие функции и особенно общее понятие переменной величины, взятых из физики. Изучение функций связано для учеников с новым умственным процессом, в котором возникает очень серьезное эмоциональное затруднение в тот момент, когда приходится переходить от конкретных чисел к переменной величине, свободно принимающей произвольное численное значение. Это внезапное отсутствие скованности вызывает у них боязнь, которая похожа на страх перед пустотой. Они испытывают такое же чувство страха при изучении геометрии, решая задачи на геометрические места или на построение, в которых приходится изменять некоторые элементы геометрических фигур. Это чувство страха (которое мы подробнее проанализируем в разделе геометрии) является одной из глубоких причин влияния психической деятельности человека на его умственные действия в поисках решения алгебраической или геометрической проблемы.

Вообще решить задачу — это значит собрать и согласовать различные законы, непосредственно более пригодные для поставленной цели. Для этого обычно приходится приравнивать или сравнивать несколько функций. Если эти функции являются алгебраическими, мы имеем алгебраические уравнения или неравенства.

Элементарное изучение уравнений и неравенств, очевидно, предполагает ознакомление с определенной техникой, но эта техника не должна быть отрезана от логики целого, ибо она в значительной мере представляет собой обдуманное и обоснованное применение свойств алгебраических объектов, о которых идет речь. Полезно подчеркнуть этот в высшей степени активный аспект данного раздела алгебры, который требует внимательного наблюдения, порой некоторого воображения и всегда инициативы в выборе необходимой операции.

Уравнение

Уравнение есть равенство, которое еще не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенными, что этого можно достичь. Уравнение есть равенство, которого нужно достичь, и этот активный смысл выражен суффиксом -tion[1], который выражает идею изменения во времени, тогда как суффикс -té[2] содержит только неизменное понятие пассивного результата. Знак равенства, употребленный в уравнениях, имеет активный смысл[3].

Решить уравнение — это значит определить, если возможно, содержащиеся в нем неизвестные элементы так, чтобы оно стало равенством. Это достигается путем преобразования уравнения по правилам, которые справедливы, строго говоря, только для равенств; чтобы обосновать это, следовало бы пользоваться условным наклонением.

---

[1] «Уравнение» по-французски — équation.

[2] «Равенство» по-французски — égalité.

[3] Во французском языке существуют разные оттенки слова «равно»: прилагательное égal (равный), носящее пассивный характер, и глагол égale (равняется), имеющий активный смысл. По мнению автора, знак равенства пишется égal в случае тождества и égale в случае уравнения.

Главное из этих правил является техническим; оно гласит, что можно перенести член из одной части уравнения в другую с одновременным изменением его знака. Чтобы сделать это правило понятным и логичным в представлении детей, которых несколько удивляет возможность эквивалентного преобразования уравнений, применяют много наглядных сравнений, более или менее удачных, в частности сравнение с равновесием чашек весов. Большей наглядности можно достичь сравнением с гимнастической игрой с веревкой. Веревку можно заменить жердью, каждый конец которой удерживает команда игроков. В каждой из команд некоторые тянут, другие толкают, и в результате действий всех игроков жердь остается неподвижной. Если руководитель игры снимает какого-нибудь игрока из одной команды, он должен послать этого игрока в другую команду, с тем чтобы изменить направление его действия по отношению к команде, но не по отношению к жерди. Если этот игрок тянул в первой команде, он должен толкать во второй, а если он толкал в первой команде, он должен тянуть во второй. Можно также представить себе аналогичное правило по отношению к множителям, которые могут переходить из одной части уравнения в другую при условии изменения операционного знака. Но это слишком рано для средних учеников, которые могут спутать два внешне сходных правила. Мы рассмотрим это правило в VI главе II части.

Число нуль. Единственным щекотливым пунктом при объяснении уравнений является роль числа 0. Это связано не столько с плохими воспоминаниями об этом числе, которые могли остаться в памяти у ленивых учеников, сколько с исключительным характером этого числа, так же как и числа 1. Эти два числа часто смешиваются в представлении учеников, которые запоминают только технику правил. Так, дробное число, в котором числитель и знаменатель есть одно и то же число, по их мнению, равно нулю, потому что после упрощения более ничего не остается, и это ничто есть 0. Иногда, наоборот, некоторые ученики, получая в ответе число 0, колеблются назвать ответ, так как он им кажется неправильным.

Ученики с трудом воспринимают запрет умножать или делить на нуль обе части уравнения. Они не понимают, на каком основании существует этот запрет. Напрасно им говорить, что при умножении на нуль обеих частей ложного равенства получают верное равенство, которое заставляет думать, будто бы первое равенство также верно, все это для них остается «разговорами ученого Косинуса» и не имеет конкретного смысла.

Эту тему можно очень наглядно проиллюстрировать, если нарисовать на листе бумаги два параллельных отрезка прямой с четко различимой длиной и показать листок ученикам так, чтобы отрезки были расположены вертикально. Потом надо повернуть лист вокруг его нижнего края, и перспектива сократит отрезки. Когда наклон достигнет 30° по отношению к горизонтальной плоскости, отрезки уменьшатся вдвое и они по-прежнему будут восприниматься как неравные. Когда лист примет горизонтальное положение и ученики увидят его с края, оба отрезка умножены на 0 и они равны в перспективе. Ученик, который не наблюдал бы за этими операциями и лишь увидел бы конечный результат, имел бы полное право думать, что оба отрезка были с самого начала равными.

Число 0 встречается также в (психологически) тяжелых для учеников и для преподавателя условиях, когда при последнем преобразовании уравнения первой степени все члены, содержащие неизвестное, исчезают. Ученики соглашаются, что этот результат выражается словами «0 раз неизвестное», это им кажется справедливым; однако, чтобы они действительно поняли рассуждение, оно должно быть переведено на ясный (алгебраический) язык и подробно записано на классной доске. Например, если в результате последнего преобразования уравнение примет вид «0 раз неизвестное равно 2», следует напомнить ученикам, что решить это уравнение — значит разыскать число, которое, будучи умножено на 0, дает произведение, равное 2. Такого числа не существует, предложенное уравнение не имеет решения, решение невозможно. Далее, решить уравнение «0 раз неизвестное равно 0» — это значит найти число, которое, умноженное на 0, дает произведение, равное 0. Если все числа являются решениями, то уравнение является неопределенным. Рассматривая уравнения вида $0 \cdot x = a$, не следует слишком много говорить о том, что решением является бесконечность. Это иллюзорное решение (психологически) удивляет учеников, и, что еще важнее, это ошибочно с точки зрения чисто математической, как мы это увидим дальше.

Неравенства

Техника решения неравенств довольно сложна и должна быть объектом тщательного изложения. Наиболее тонким местом при решении неравенств является умножение или деление двух частей неравенства на одно и то же положительное или отрицательное число или на алгебраическое выражение, знак которого неизвестен. Этот последний случай встречается, в частности, если ученик пытается сократить в обеих частях неравенства одинаковые множители, содержащие неизвестное, или одинаковые знаменатели.

В случае неравенств, не содержащих неизвестного в знаменателе, иногда стремятся согласовать технику преобразования с обычной логической процедурой, применяемой при решении уравнений. С этой целью переносят члены, содержащие неизвестное, в левую или правую часть неравенства таким образом, чтобы коэффициент при неизвестном был положительным. Это не что иное, как стремление избежать технической трудности ценой рассуждения. Такое стремление не согласуется с духом алгебры, где всегда стараются расширить поле применения технических правил, которым придают такую форму, чтобы эти правила можно было интерпретировать единственным способом, чтобы избежать двусмысленности и неопределенности в изложении.

Для неравенств, где неизвестное фигурирует в знаменателе, операционная техника принимает совершенно другой вид. В этом случае применяется интересный технический прием, в котором используется разложение числителя и знаменателя на множители и который позволяет средним ученикам в уме определять знак рациональной алгебраической дроби.

Функции первой степени. Отношение и коэффициент

Понятие об этих функциях основано на важной идее пропорциональности между изменением функции и изменением независимой переменной. Эту идею необходимо поскорее подчеркнуть, надо поступить подобно физику, изучающему экспериментально полученную функцию. Тем хуже для красивых доказательств. Если слишком много времени посвящается доказательству, внимание учеников рассеивается и они окончательно теряют контакт с преподавателем. Идея пропорциональности выражена в графическом изображении постоянным наклоном. В самом деле, наклон есть пассивное отношение изменения y к соответствующему x и в то же время коэффициент, на который надо умножить изменение x для нахождения соответствующего изменения y. Мы уже встречали это двойственное понятие, пассивное и активное, отношения и коэффициента; это очень общее понятие, которое возникает во всех случаях, когда производится измерение. Чтобы перейти от понятия отношения к понятию коэффициента, необходимо изменить способ мышления, что всегда тягостно для учеников. Так, в физике плотность определяется как отношение массы тела к массе равного объема воды. Но яснее и эффективнее будет, если сказать, что плотность есть число, на которое нужно умножить массу равного объема воды, чтобы получить массу данного тела. Именно это второе понятие выражает большая часть смертных (людей практики), говоря, например, что железо в 7,8 раза тяжелее воды.

Так же обстоит дело и с понятием наклона: понятие отношения и понятие коэффициента должны быть разделены, чтобы в них можно было хорошо разобраться. Можно затем получить без труда уравнение прямой с заданным наклоном, проходящей через данную точку. Превосходным техническим упражнением может послужить нахождение уравнения прямой, проходящей через две данные точки: отношение изменения y к изменению x, от одной точки к другой, дает наклон, и этот наклон, используемый как коэффициент, дает затем уравнение прямой. Здесь не следует еще уделять много внимания доказательствам, надо перейти к действиям, причем действовать в какой-то степени догматически: заставить применить формулу и проверить затем численный результат. Таким образом, созданная искусственная привычка легко согласуется с логикой целого и обогащает ее.

Очень полезным практическим применением может послужить общее уравнение равномерного движения, которое мы даем нашим ученикам, чтобы помочь им решать задачи о курьере. Здесь понятие скорости также носит двойственный характер, являясь одновременно отношением и коэффициентом. Помимо этого, общее уравнение равномерного движения дает возможность повторить понятия вектора и абсциссы и использование соотношения Шаля, которому также следовало бы «форсированно» обучать после правильного и краткого доказательства, повторенного максимум один или два раза. Так, чтобы записать уравнение движения экипажа, проходящего 82-й километр в 13 часов, затем 32 километра за 15 часов, мы запишем[1]:

$$\text{скорость} = (\textit{км}\ 32 - \textit{км}\ 82) : (\textit{ч}\ 15 - \textit{ч}\ 13) =$$
$$= (-50) : (+2)\ \textit{км/ч} = -25\ \textit{км/ч}.$$
$$\textit{км}\ x - \textit{км}\ 82 = -25\ \textit{км/ч}\ (\textit{ч}\ t - \textit{ч}\ 13).$$

Иными словами:

$$x - 82 = -25\,(t - 13).$$

Заметим, что мы пишем *км* 82 таким образом, как, впрочем, принято в разговорном языке, чтобы отличать абсциссы от векторов, таких, например, как пройденные расстояния. Абсциссы должны действительно выступать в роли километровых столбов (знаков).

Производная функции

Понятие производной также двойственно; для того чтобы эффективно дать ясное представление о нем, сначала надо представить его как коэффициент, а только потом как отношение. Для этого достаточно вычислить приращение y в функции от приращения x и определить отсюда производную как коэффициент пропорциональности между приращениями y и x. То обстоятельство, что приращения (затем) устремляют к нулю, является второстепенным, и средним ученикам лучше говорить об очень малых (конечных) приращениях, как это делают физики. В сущности понятие дифференциала, главной части приращения, должно предшествовать понятию производной, которая выступает, таким образом, как дифференциальный «коэффициент». Все это должно быть пояснено разнообразными примерами из различных областей, для того чтобы не сводить смысл производной исключительно к наклону

---

[1] Отметим, что автор, следуя традициям французской школы, пишет «*км* 32», тогда как у нас пишут «32 *км*», и т. д.

касательной к кривой. Очень хорошим примером является производная объема воды, заполняющей сосуд какой-нибудь формы (этот объем рассматривается как функция уровня свободной поверхности воды). В этом случае производная как раз совпадает с площадью свободной поверхности. Операция, обратная дифференцированию (отыскание примитивных функций), в этом примере приобретает очень ясный и поучительный смысл.

Понятие бесконечности

Для того чтобы окончить этот краткий обзор алгебры, скажем несколько слов о бесконечности в том виде, в каком считаем ее доступной нашим ученикам. Прежде всего следует неустанно подчеркивать, что бесконечность не число, что она не есть последнее число, пограничный столб, за которым ничего нет. Не следует также думать, что бесконечность есть понятие таинственное, объясняющееся ее отдаленностью, тайна, в которую можно проникнуть только при помощи мощного телескопа. Когда ученикам приходится вычислять предельное значение функции при бесконечно большом значении аргумента, удобно начать с практической бесконечности, т. е. с бесконечности в интерпретации физика; это постепенно приучает их к математической бесконечности. Можно сказать ученикам, что для фотографа практическая бесконечность — это 20 *м*, для артиллериста — 100 *км*, для астронома — миллионы световых лет[1].

Чтобы быть еще более ясным и более определенным по крайней мере в области практики, можно также сказать, что физическая бесконечность не обратна нулю, но что она обратна очень малой величине, такой малой, что самый мощный микроскоп не может ее обнаружить, и что эта величина никогда не является нулем. Эта микроскопическая величина может быть использована при вычислении пределов и нахождении асимптот, так же как и обратная ей практическая бесконечность. Очень полезно также спрашивать учеников, почему они не боятся бесконечно

---

[1] Здесь опущены два предложения (неудачные примеры), которыми автор хочет пояснить, что такое бесконечность.

малой величины, тогда как они боятся бесконечно большой величины.

Практическая бесконечность, которая не выходит за пределы конкретной области, должна быть использована для перехода к математической бесконечности, так как иначе ученики привыкнут рассматривать бесконечность не как процесс, а как большое число. Этой ошибки необходимо остерегаться. В связи с этим можно отметить разницу между ходом мышления физика, который ищет краткости, и ходом мышления математика, который стремится достичь точности.

Часть вторая

ГЕОМЕТРИЯ

Глава 1

РАЗВИТИЕ И СТРУКТУРА ГЕОМЕТРИИ

Слово «геометрия» имеет греческое происхождение и буквально означает «измерение земли». Измерение участков производилось для взимания земельных налогов. Вообще говоря, древние открывали геометрию постепенно, пытаясь измерять площади и объемы. Геометрия в основном была практической и ограничивалась определенным количеством формул, которые были не совсем точными.

Греки, дав волю своему воображению, впоследствии освободили геометрию от практических потребностей и дали ей необычайное развитие.

Однако вывод результатов всегда основывался на рисунке и опирался на наглядные представления; всегда использовалась возможность наблюдения, измерения и проверки результатов умозаключений; абстрактному всегда предшествовало конкретное.

Преподавание геометрии, следовательно, в силу самой ее природы весьма отличается от преподавания счета. Наглядный характер геометрии в большой степени способствует ее пониманию, однако применение достигнутых результатов не всегда бывает легким. Затруднения, возникающие в преподавании геометрии, связаны не с приобретением новых навыков, а с необходимостью освободить воображение от всяких предубеждений и привычек, развить способность к наблюдению и дерзанию.

Очень трудно убедить учеников в необходимости вышесказанного. Для многих из них курс геометрии представляется собранием теорем, которые надо знать наизусть, а задача — коварной загадкой, попыткой сбить с толку и обмануть. Некоторые из них не понимают, что можно задавать себе определенные вопросы, считают, что все и так очевидно. Другие, более робкие, постоянно боятся ошибиться, их приводят в изумление и внушают тревогу «гениальные озарения», освещающие путь к решению задачи. Для тех и других геометрия является сборником, состоящим из сухих доказательств.

С самого начала преподавания геометрии следует, однако, убедить учеников, что тот, кто ищет, тот находит, что успех — больше вопрос характера и настойчивости, чем ума, и что, имея терпение, воображение и искреннее желание, каждый может добиться успеха. Ученики, несомненно, будут удивлены, что им не говорят об интуиции, этой таинственной способности отгадывания, которой якобы владеют сильные в математике. Интуиция придет позже, после первых успехов, она является почти немедленным их следствием, но отнюдь не причиной, и нужно сначала обеспечить эти первые успехи. Действительно, интуиция есть все более и более быстрое мысленное вúдение, являющееся результатом уверенности в себе, которую дает привычка успеха, и силы воображения. Способность к интуиции свойственна каждому, и только страх ошибиться парализует нормальное ее развитие. Настоящий труд в геометрии заключается в том, чтобы составлять задачи, рационально искать и находить их решения. Геометрия скорее культура ума, умственная гимнастика, чем собрание выводов.

Однако, для того чтобы искать и находить решения задач, следует знать теоремы геометрии, а для того чтобы хорошо знать ее теоремы, и следует их открывать как задачи. Следовательно, метод эвристики обязателен в геометрии, но вопрос осложняется тем, что первые теоремы кажутся слишком простыми, слишком очевидными. Логика стройного целого, непосредственно ощутимая, например в теореме о вертикальных углах, преобладает над элементом дедукции.

Ученики не видят необходимости в доказательстве очевидного, абстрактное не достигает еще достаточной значимости и не выделяется из конкретного. У учеников возникает ложное представление о том, что такое доказательство, им надоедает пустословие, которое им кажется неинтересным и смехотворно неэффективным.

В начале преподавания геометрии стоит принимать некоторые утверждения как истинные, конкретная очевидность которых непосредственно вытекает из опыта ощущений детей. В процессе решения задач с использованием этих очевидных истин у детей изменяется психология восприятия геометрии. В самом деле, как только ученик однажды совершенно самостоятельно решил настоящую задачу, курс геометрии принимает для него совершенно другой вид. Он оценивает как знаток тонкости рассуждений, вместо того чтобы воспринимать их пассивно и со скукой. Взаимосвязь умозаключений становится столь же интересной, как и логика стройного целого, и входит в ее состав.

Тогда хорошо снова постепенно повторить различные очевидности, принятые как истинные, и попробовать, как бы играя, их логически связать, привести несколько вариантов доказательств. Собрание теорем гармонично упорядочивается, становится связным, и логическое здание геометрии начинает вырисовываться.

Ниже мы дадим изложение геометрии, построенное на этом принципе.

Допустим, что мы быстро прошли и приняли значительную часть основных результатов первого раздела геометрии, посвященного основным свойствам прямых углов. Мы подготовили учеников к решению некоторых «настоящих» задач трех видов, принципиально различающихся с педагогической точки зрения. Задачи первого вида предназначены для развития правильного образа мышления ученика и носят психологический характер. Второй вид задач должен научить детей разбираться в сплетении логических рассуждений и действовать самостоятельно. Задачи третьего вида должны пояснить детям сущность перехода от конкретного к абстрактному, который заключается в поисках абсолютной, идеальной, абстрактной правильности через относительные материальные, конкретные уточнения. В связи с задачами первого вида мы подробно проанализируем связь между формулировкой открытия решения и восприятия его умом ученика. Вытекающие отсюда следствия дадут нам возможность сократить изложение некоторых вопросов, не нанося ущерба их воспитательному значению. Мы затем перейдем к рассмотрению классического курса.

Общие положения о задачах

Этимологически задача означает вопрос, который необходимо решить, для того чтобы продвинуться вперед. Вообще говоря, как в обычной жизни, так и в научном исследовании существуют задачи различных типов, в зависимости от того, насколько точно определены цель и средства для достижения цели.

Имеется четыре основных типа геометрических задач:

1°. Обнаружить все свойства данной фигуры. Средства даны, но цель остается неопределенной. Речь идет, следовательно, о чистом открытии. Ученики не очень любят этот тип задач, в связи с тем что цель не определена, и им кажется, что нет границы, даже отдаленной, их усилиям.

2°. Доказать, что данная фигура, обладающая определенными свойствами, имеет также другое свойство. Средства даны и цель точно указана. Речь идет, следовательно, об открытии и исследовании. В этом случае имеется граница усилиям, но существование этой границы порождает нервное напряжение, которое изменяет направление этого усилия. Торопясь достичь цели и покончить с задачей, большинство учеников ведут себя как попавшее в ловушку животное и стараются скорее угадать,чем открыть, решение. Мы подробно проанализируем такое изменение направления поисков в ходе рассмотрения первой задачи.

3°. Построить фигуру, обладающую данным свойством. Выражаясь более точно, надо, во-первых, доказать, что существует по крайней мере одна фигура, которая обладает данным свойством и может быть в принципе построена, и, во-вторых, указать, как можно построить эту фигуру, используя только линейку и циркуль. Цель здесь вполне определена, но средства не указаны. Речь идет, следовательно, о чистом исследовании, которое, как мы увидим в рассматриваемых дальше задачах, отличается по своему характеру от открытия.

4°. Какой должна быть фигура, все точки которой обладают данным свойством? Это задача на геометрические места, которую большинство учеников боится не только по причине длинного названия, но и потому, что цель (т. е. фигура) совершенно неизвестна. В задачах этого типа стремление учеников угадать ответ проявляется гораздо сильнее, чем в других задачах. Мы укажем, как исправить этот неправильный ход рассуждений.

Этот анализ типов задач приводит нас к первому рабочему принципу: *в геометрии скорее, чем во всякой другой науке, не угадывают, а открывают*. Для того чтобы проиллюстрировать этот первый принцип и показать, что поиски решения также суть вид открытия, мы сейчас рассмотрим очень простую задачу второго типа. Прежде чем анализировать задачу, мы дадим ученикам некоторые советы, полезные при решении задач данного типа.

Глава II

КАК НАХОДИТЬ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ТИПА?

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОПРЕДЕЛЕННОГО СВОЙСТВА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ

1°. Необходимо сначала прочитать условие задачи, не изображая фигуры, для того чтобы составить себе представление о задаче и привыкнуть к ней. Вновь прочитать условие задачи, сделав наскоро общий набросок, для того чтобы хорошо понять условие задачи. Можно пользоваться условными значками, чтобы показать на чертеже равенство элементов фигуры, вытекающее из условия задачи.

Если условие задачи уже хорошо понято, сделать новый чертеж при помощи линейки и циркуля с использованием всех данных.

2°. Потом набраться спокойствия, терпения, как для физического усилия, и приступить к исследованию, *забывая о том, что нужно доказать*. Посмотреть, что точно означают данные и какие непосредственные следствия можно из них извлечь, говоря себе: «Раз правильно это, то с *необходимостью* правильно и то». Не вычерчивать линий, не указанных в условии задачи, пока не будет *полной* уверенности в том, что сделаны все возможные непосредственные открытия. В противном случае будет усложняться фигура и возрастать число свойств, подлежащих открытию; в результате исследование утратит целенаправленность.

Если сразу не видно ничего существенного, может оказаться полезным самому произвольно выбрать подходящие численные величины и точно воспроизвести условие на чертеже.

3°. Снова обратиться к условию и посмотреть, что требуется доказать; если требуемое легко обозримо, попытаться доказать это как одно целое.

В противном случае сделать заново другую фигуру такого же вида, как та, над которой только что трудились, но без условных обозначений, появившихся в результате предварительного анализа. С помощью этого нового рисунка надо попытаться доказать требуемое, «отступая назад», т. е. путем рассуждений типа: *для того чтобы было правильно то, достаточно, чтобы было правильно вот это.*

Наступает момент, когда открытия, сделанные непосредственно на основании данных задачи, и открытия, сделанные путем «отступления назад», приходят к одному и тому же, тогда задача решена.

Сказанного, вообще говоря, достаточно, но ученику, который еще никогда не решал задачу без посторонней помощи, это кажется слишком простым и красивым, но недостаточным; у него нет уверенности в себе и присутствия духа, необходимых для достижения успеха. Нужно признать, что трудно следовать советам пункта 2°, когда встреча между двумя направлениями поисков наступает не скоро. В этом случае ученики обычно упорствуют в поисках путем «отступления назад» (пункт 3°), так как боятся отойти от привлекающей и гипнотизирующей их цели. Учеников охватывает нетерпение, и к тому же вмешивается самолюбие. Это мешает нормальному восприятию и пониманию.

В таких случаях имеет смысл отложить решение задачи по крайней мере на несколько часов, чтобы вернулось спокойствие и цель перестала раздражать кажущейся близостью и недоступностью.

Задача I

Исходят из того, что учащимся известны все случаи равенства треугольников и все то, что предшествует этому в обычном курсе; но нельзя пользоваться теоремой о сумме углов треугольника и каким-либо другим свойством параллельных прямых.

Условие задачи. Пусть дан равнобедренный треугольник ABC, основание которого BC меньше равных сторон AB и AC. Продолжим AB за пределы B на отрезок BD и

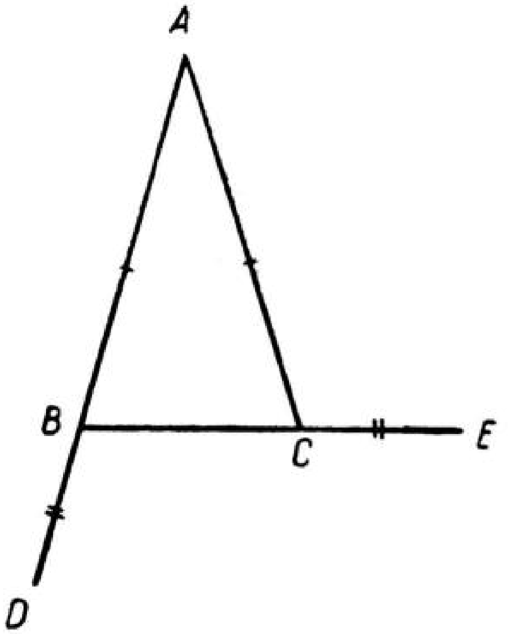

Рис. 1

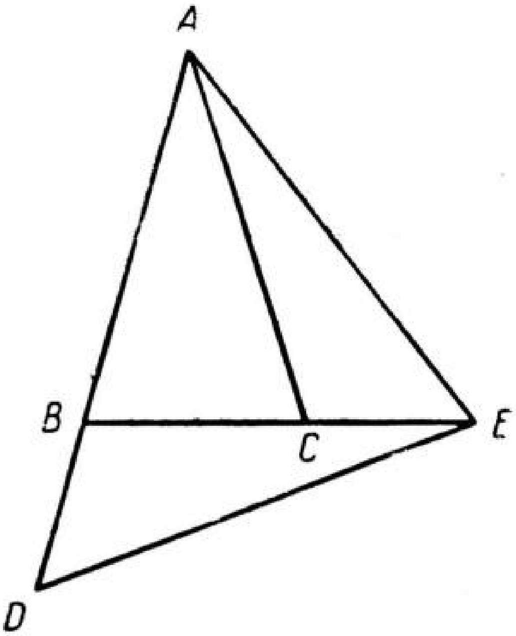

Рис. 1а

BC за пределы *C* на отрезок *CE*, причем отрезки *BD* и *CE* оба равны разности *AB* — *BC* (рис. 1)[1].

1°. Рассмотреть треугольники *ACE* и *EBD* и сравнить их.

2°. Рассмотреть треугольник *EAD*.

3°. Доказать, что угол *ADE* равен полусумме углов *BAC* и *AED* (рис. 1а).

Чтобы удобнее было следить за ходом изложения, мы предлагаем читателю сделать рисунок исследуемой фигуры и постепенно отмечать на нем сделанные открытия. Было бы даже хорошо, чтобы он попытался самостоятельно решить поставленную задачу, не читая решение, которое мы даем. Он мог бы лучше судить о трудностях, с которыми встречаются в поисках решения, и сравнить свой собственный опыт с описываемым нами опытом ученика.

Ход поисков решения. Хорошо поняв условие задачи, ученик начинает изображать первую фигуру, вычерчивая равнобедренный треугольник определенно более высокий, чем широкий, однако встречает необычную трудность при нахождении разности *AB* — *BC*.

Следует ли с помощью циркуля из центра *B* отложить *BC* на *BA* и циркулем-измерителем отметить разность или

---

[1] В оригинале рисунки не приводятся, однако для большей наглядности мы здесь и в дальнейшем будем пояснять текст рисунками.

же измерить AB и BC на нарисованном равнобедренном треугольнике, найти разность размеров и перенести ее на BD и CE? Первая идея может явиться исходной в открытиях, однако вторая более непосредственна, это та идея, которая была принята с условием позже возвратиться к первой идее в случае необходимости.

Расположив точки D и E, ученик отмечает на фигуре равенство сторон AB и AC, углов ABC и ACB и равенство отрезков BD и CE (рис. 1б).

Очень соблазнительно провести теперь отрезки DE и AE, чтобы получить треугольники, которые требуется рассмотреть; однако нами еще не использованы $BD = CE = AB - BC$. Как ввести эти данные в цепь решения? Что они точно означают? Представим эти данные в следующем виде: отрезок BD, так же как и CE, является остатком при откладывании отрезка BC на AB. Следовательно, добавлением отрезков CE и BD мы дополняем отрезок BC до отрезка AB, так что $BE = AB = AC$.

Это первый результат, который мы отмечаем на фигуре. В отношении отрезка BD мы ничего интересного не видим. Заметим мимоходом, что использование численных данных при построении фигуры могло бы привести нас быстрее к результату, но больше ничего не может дать. Проведем теперь DE и AE. В результате появляются два треугольника (рис. 1в), которые требуется рассмотреть в пункте 1° условия задачи.

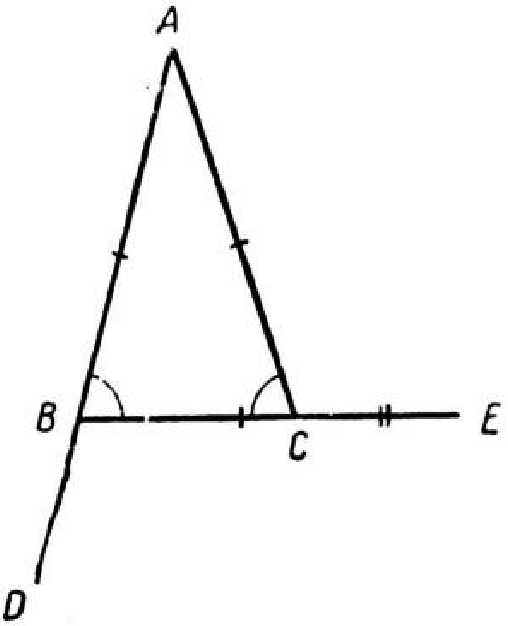

Рис. 1б

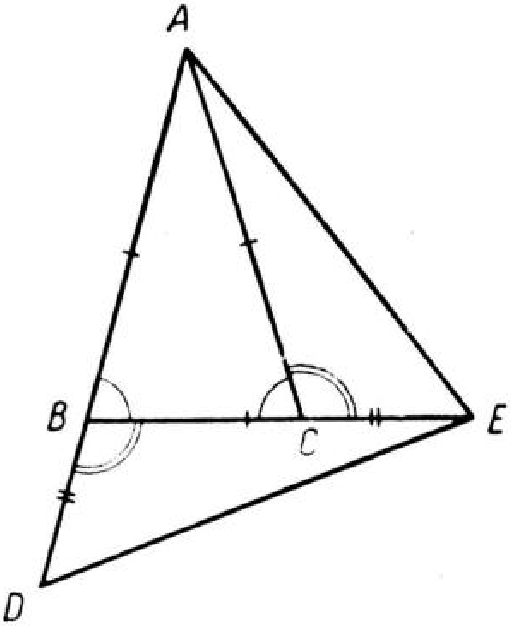

Рис. 1в

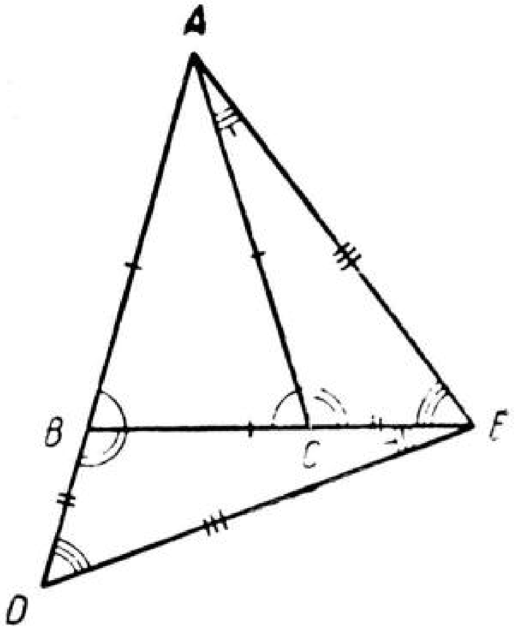

Рис. 1г

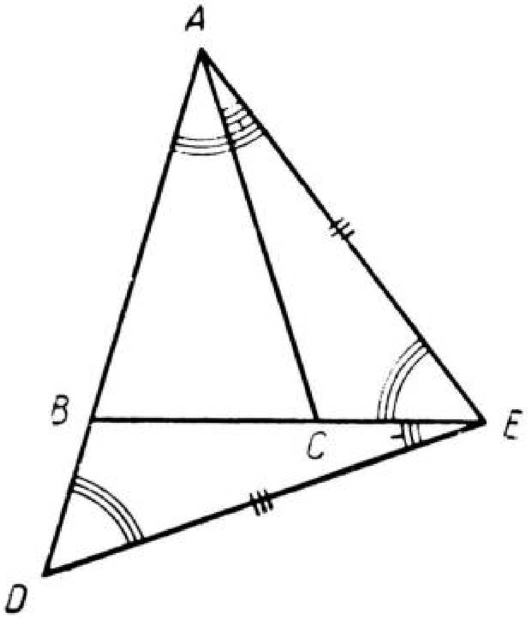

Рис. 1д

Очень сильным становится искушение, вопреки советам преподавателя, всецело попытаться достигнуть цели путем «отступления назад».

Оба треугольника ACE и EDB имеют по две равные стороны $CE = BD$ и $AC = BE$, и не хватает лишь третьей стороны или заключенного между ними угла, чтобы треугольники были равными. Мы не имеем никаких сведений о третьих сторонах AE и DE, однако теперь, когда наше внимание напряжено, мы видим, что углы ACE и EBD равны между собой, потому что они являются пополнительными соответственно углам ACB и ABC, равным между собой. Мы должны были бы это увидеть раньше и отметить перед тем, как проводить DE и AE. У нас не хватило терпения.

Следовательно, треугольники ACE и EBD действительно равны, и отсюда тотчас же делаем вывод, что $AE = DE$, $\angle AEC = \angle EDB$ и $\angle CAE = \angle BED$ (рис. 1г).

Фигура, возникшая в результате поисков, становится сложной, и возникает опасность, что исследование утратит целенаправленность. Поэтому следует вновь обратиться к условию задачи и посмотреть, что оно требует.

Пункт 1° решен. Пункт 2° требует рассмотреть треугольник EAD. Теперь видно, что этот треугольник равнобедренный, потому что, как мы нашли, $AE = DE$, следовательно, углы DAE и ADE равны. Здесь еще раз констатируем, что у нас не хватило немного терпения.

Что касается пункта 3°, он на первый взгляд удивляет. В самом деле, непонятно, как наглядно истолковать полусумму, т. е. среднее арифметическое, углов в фигуре, которая стала достаточно сложной благодаря четырем различным обозначениям, которые отмечают равенства углов.

Теперь наступило время сделать другой рисунок и попытаться сделать открытие путем отступления, исходя из поставленной цели. Так как полусумма является среднеарифметическим, достаточно было бы доказать, что величина угла ADE есть средняя арифметическая величина углов BAC и AED, но мы ничего еще не знаем об угле BAC.

Отметим на новой фигуре (рис. 1д) найденные ранее результаты, пользуясь теми же условными обозначениями для равных отрезков или углов. Тогда три угла ADE, DAE и AEC будут помечены одним значком, а углы CAE и BED другим. У нас остаются значки двух видов, причем угол BAC придется рассматривать как разность двух углов, помеченных разными значками, а угол AED — как их сумму. Тогда можно записать:

$$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE = \angle ADE - \angle CAE$$

и

$$\angle AED = \angle AEB + \angle BED = \angle ADE + \angle CAE,$$

откуда вытекает, что угол ADE — среднее арифметическое углов BAC и AED.

В самом деле, угол BAC равен углу ADE минус угол CAE и угол AED равен тому же первому углу ADE плюс тот же второй угол CAE. Следовательно, величина угла ADE находится посередине между величинами углов BAC и AED.

Тот же результат можно получить, складывая почленно полученные два равенства. Тогда угол CAE исчезает и получается:

$$\angle BAC + \angle AED = 2\angle ADE,$$

т. е. $$\angle ADE = (\angle BAC + \angle AED) : 2.$$

Решение, которое мы только что привели, было найдено учеником средних способностей, но очень добросовестным в течение одного урока индивидуальной работы. Мы воспроизводим решение с наиболее возможной точностью, с теми же рассуждениями, которые он нам привел, когда мы пришли посмотреть, как у него идут дела, но мы не могли знать всех попыток в различных направлениях, которые он мог за это время предпринять.

Большинство из его товарищей представили работу совершенно отличную, выполненную менее эффективно или более разбросанно. Некоторые не могли увидеть, что $BE = AB = AC$. Те, которые сумели преодолеть это затруднение, легко нашли пункт 1°, но некоторые, думая только об углах, забыли отметить, что $DE = AE$, и не могли выполнить пункт 2°. Те, которые ответили на пункт 2°, не смогли разобраться в пункте 3°, хотя потратили на него много времени. Напротив, трое учеников гораздо легче нашли ответ на пункт 1°, додумавшись отложить AB на BC, проведя окружность из центра B, вместо того чтобы поступить наоборот, как их товарищи. Таким образом, немедленно следует, что $BE = AB$. Затем мы потребовали дать коллективное письменное изложение решения задачи. Нам казалось, что стоит лучше подождать несколько дней, чтобы объяснение было более объективным и не отражало в чрезмерной степени трудности поисков. Детям могло показаться несправедливым свести результаты поисков всего лишь к двум линиям, которые надо провести, чтобы доказать равенство $BE = AB = AC$.

После решения I задачи автор делает пояснения к каждому из трех намеченных этапов решения I задачи.

Конец пункта 1° требовал нанесения нескольких линий, пункт 2° — нескольких слов, что должно было польстить тщеславию авторов. Что касается пункта 3°, содержащего «отступление назад», то дети не знали, с чего начать, чтобы поставить это «отступление» на надлежащее место.

Письменное объяснение решения должно быть сделано хладнокровно, не так, как при поисках решения.

Письменное изложение решения. Вот письменное объяснение решения, сделанное сообща.

Чтобы получить разность $AB - BC$, отложим на прямой BC, начиная от B, в направлении от B и C отрезок, равный AB. Разность длин этого отрезка и отрезка BC равна искомой разности $AB - BC$. Она оказывается расположенной так, как это указано в условии задачи, чтобы построить точку E. Конец отрезка, отличный от точки B, есть, следовательно, точка E. Таким образом, получаем $BE = AB = AC$.

Перенесем на продолжении AB, за B, отрезок CE, получим точку D.

Проведем AE и DE. В треугольниках ACE и EBD имеем $CE = BD$, $AC = BE$ и углы ACE и EBD равны как дополнительные равных углов C и B данного равнобедренного треугольника. Оба треугольника ACE и EBD имеют, следовательно, по равному углу, заключенному между соответственно равными сторонами. Они равны, и их другие элементы соответственно равны. Следовательно, имеем:

$$AE = DE, \angle CAE = \angle BED, \angle AEC = \angle BDE.$$

2°. Треугольник EAD равнобедренный, так как он имеет две равные стороны AE и DE; следовательно, углы DAE и ADE равны.

3°. Из равенства углов, которые были получены, можно записать:

$$\angle ADE = \angle DAE = \angle BAC + \angle CAE$$

и

$$\angle ADE = \angle AEB = \angle AED - \angle BED = \angle AED - \angle CAE,$$

или, сложив, получим:

$$\angle ADE + \angle ADE = (\angle BAC + \angle CAE) + (\angle AED - \angle CAE),$$

или

$$2\angle ADE = \angle BAC + \angle AED,$$

или, наконец,

$$\angle ADE = (\angle BAC + \angle AED) : 2.$$

Заметим, что все начало объяснения не свободно от двусмысленностей, связанных с ненужными отрезками. Следовало, с одной стороны, произвести построение точки E таким образом, чтобы разность $AB - BC$ была определена без использования точки E, потому что эта разность служит в дальнейшем, чтобы эту точку построить. С другой стороны, следовало использовать идею трех учащихся, которые наложили BA на BC, вместо того чтобы наложить BC на BA, потому что эта идея позволяет непосредственно установить, что $BE = AB = AC$. Объяснение должно было бы также удовлетворять общему принципу, согласно которому указания должны быть достаточными для того, чтобы читатель мог бы самостоятельно построить фигуру, не прибегая к вспомогательному пояснительному чертежу.

Можно также заметить ученикам по поводу этого начала, что первая мысль, которая приходит в голову, чтобы найти разность $AB - BC$, — это наложить меньший отрезок на больший, и что только трое из них рассуждали достаточно свободно и решили испробовать обратное. Нет никакого основания заранее считать, что вторая мысль интереснее или глубже первой, но следует подумать об обоих вариантах и исследовать эффективность каждого из них, не предрешая результата. Больше того, хорошим ученикам полезно показать, что их нерешительность при использовании разности $AB - BC$ происходит главным образом от того, что они рассматривают эту разность как остаток, не думая о том, что она может быть рассматриваема как дополнение (добавление) согласно самому определению вычитания — действия, обратного сложению.

Можно, наконец, отметить, что никто из учеников не догадался развить открытие пункта 1° следующим образом: $AB = BE$, треугольник ABE равнобедренный, $\angle BEA = \angle BAE$. Затем, установив равенство треугольников ACE и EDB, доказываем, что $\angle BAE = \angle EDB$, треугольник EAD равнобедренный.

Эти замечания ведут ко второму рабочему принципу, трудному для восприятия начинающего, но необходимому для освобождения творческого открытия от поспешности. Этот принцип может быть сформулирован следующим образом: *геометрия не является последовательным рядом фактов и рассуждений, который можно вытянуть в одну линию.*

В самом деле, научное исследование, в особенности в геометрии, вообще говоря, не сводится к ряду связанных один с другим открытий с одной-единственной нитью «следовательно...»; но даже в этом случае очень редко создается впечатление прямой линии, так как не чувствуется, что каждое открытие продолжает предшествующее. Вообще говоря, ход открытия представляет разветвления, перекрестки, пути с односторонним движением, тупики, и самое трудное в поиске, как в начале, так и в конце каждого открытия, — найти направление, в котором нужно начинать или вновь приниматься за поиски. Здесь требуется много терпения, до тех пор пока не образуется нужная интуиция.

Очень важно, перед тем как приступать к письменному объяснению решения, найти все пути открытия, которые ведут из совокупности данных геометрических фактов в совокупность геометрических фактов, которые нужно доказать. Это позволяет выбирать среди найденных рассуждений те, цепь которых наиболее ясна.

Этот выбор порой мучителен для самолюбия учеников, имеющих склонность считать свои рассуждения более понятными, чем рассуждения других, авторское тщеславие свойственно всем возрастам, но именно поэтому этот выбор имеет большое воспитательное значение. Он способствует освобождению творческого открытия от инстинкта собственности, который приводит к тому, что ученик, зашедший в логический тупик, не хочет отказаться от того, что он, по его мнению, открыл и что принадлежит ему как подлинное продолжение его самого. Так, мы видим учеников, которые упорствуют в доказательстве случайно верного равенства на фигуре, которую они нарисовали; они не в состоянии отказаться от своей мысли, не соглашаются даже нарисовать другую фигуру, чтобы опытным путем проверить, является ли дорогая для них мысль правильной.

Эта психологическая сторона открытия в геометрии гораздо важнее, о чем обычно не думают. Состояние духа, в котором надлежит отправляться на открытие, то, что мы короче называем творческим открытием, есть «умственная спортивность», которая равным образом применяется в играх и в жизни и представляет сущность экспериментального направления. Эта «умственная спортивность» заключается в том, чтобы играть в открытую с трудностями, не превращать успех в вопрос самолюбия, в том, чтобы не терять терпения и не обижаться, если сразу же не находишь решения или находишь медленнее, чем другие, в том, чтобы не стараться угадать и слишком легко верить желаемому и особенно остерегаться «толчка», который завершает поиски почти бессознательно. Именно поэтому мы требуем, чтобы ученики забыли в начале поисков то, что им нужно доказать, таким образом, чтобы их открытие было бы более объективным и полнее отражало бы все направления, искания, которые исходят из данных условия. В самом деле, как только исследование получит цель, оно перестает быть свободным поиском всевозможных открытий, оно приобретает характер ориентированного поиска; отсюда проистекает пренебрежение к сведениям, которые на первый взгляд не имеют отношения к преследуемой цели и в особенности попытке к предвидению результата. Итак, именно эти две тенденции одного и того же психологического происхождения являются главными причинами неудач в решении задач.

Глава III

КАК НАХОДИТЬ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ТИПА?

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

(Автор начинает с оглавления, которое лучше было бы назвать «Метод геометрических мест точек» при подобранных ниже геометрических задачах, и ставит в начале также этапы, которые ученики проходят при решении задачи.)

1°. Сначала прочитать условие задачи, не делая чертежа. Вновь прочитать условие задачи, сделав набросок, на котором обозначены с помощью условных знаков данные в условии равенства.

Вновь сделать другой чертеж с помощью линейки и циркуля с размерами, соответствующими данным задачи.

2°. Набраться спокойствия, терпения и отправиться на поиски открытия, *исследуя опытным путем, как может перемещаться точка*, обладающая данным свойством. Исследовать каждое возможное перемещение, отмечая мимоходом интересные частные случаи и особенно чрезвычайные случаи.

3°. Когда геометрическое место точек нащупано опытным путем, соединить подвижную точку с основными точками фигуры и с особыми положениями (самой) подвижной точки и действовать затем, как и в задаче второго типа, т. е. доказывать свойство, которое заранее предполагается верным. Если попытки доказательства не достигают цели, снова приступить к более подробному исследованию опытным путем.

Благоразумнее не соединять подвижную точку со всеми основными точками и особыми положениями одновременно, а действовать постепенно, чтобы без необходимости не усложнять слишком быстро чертеж. Первые линии проводятся в соответствии с опытным исследованием геометрического места точек, но не следует придавать такому выбору линий слишком большого, тем более окончательного значения.

4°. Установить обратную теорему и исследовать ограничения, налагаемые на геометрическое место.

Замечание I. Пункты 2° и 3° могут быть заменены исследованием, *носящим характер поисков чистого открытия*, причем набросок содержит всего лишь одну точку геометрического места, как в задаче первого типа. Если в процессе этого открытия без заранее определенной цели находят такое свойство точки, которое определяет ее геометрическое место, то это свойство непосредственно приводит к решению задачи.

Этот способ действия носит более спортивный характер, чем первый, в котором чистое открытие было заменено поиском вероятной цели опытным исследованием. Этот второй способ требует от учеников усилия на более высоком математическом уровне, но рискует быть менее эффективным. В самом деле, ученик не знает, с какой точкой соединить точку геометрического места, не осмеливается выбрать какое-либо направление действий и испытывает ужасные колебания «буриданова ослика», которому предстояло выбрать один из двух одинаковых стогов сена.

С воспитательной точки зрения оба варианта различаются менее, чем кажется на первый взгляд. В самом деле, мы видели, что конфликт между открытием и исследованием равным образом возникает в начале решения задач на доказательство свойства; мы горячо советовали ученикам превращать начало решения в поиски чистого открытия, забывая о том, что надлежит доказать. Мы считаем, что для начинающих предпочтителен метод опытного исследования, в котором конфликт «чистое открытие — направленные поиски» разрешается доказательством вероятного свойства.

Замечание II. Условия задач на геометрические места точек могут различаться в зависимости от того, требуется ли найти линию, описанную подвижной или переменной точкой, или требуется найти линию, на которой находятся все точки, обладающие некоторым свойством. Первое условие соответствует идее траектории, второе — идее множества точек. Различие является довольно тонким, такого же порядка, как и различие между двумя направлениями исследования, о которых мы только что говорили, но оно представляет интерес, когда речь идет об обратных теоремах. Мы увидим примеры тому в ходе изучения курса, но для начинающих систематизация по этому признаку была бы преждевременной.

Задача II

Предполагаются известными основные теоремы равенства и параллельности, изложенные в первой части курса.

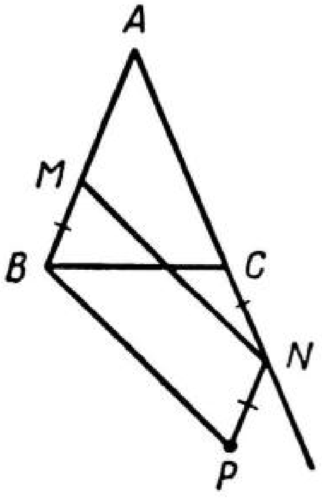

Рис. 2

Условие задачи. Дан равнобедренный треугольник с вершиной A и основанием BC (рис. 2).

На стороне AB берется произвольная точка M и на продолжении AC, от точки C, — произвольная точка N. Точки M и N могут перемещаться, но всегда таким образом, чтобы BM и CN были равны по длине. Строят затем параллелограмм $BMNP$, три последовательные вершины которого B, M и N. Какой является линия, описанная точкой P, если точка M перемещается от точки A к точке B?

Мы выбрали элементарную задачу, особенно интересную потому, что трудно заранее предвидеть положение искомого геометрического места точек по отношению к треугольнику ABC. Ученики долго не могут выйти из тупика, даже после некоторого опытного исследования, которое должно быть очень подробным и точным, чтобы быть эффективным.

Мы попросим читателя сделать чертеж и постепенно дополнять его, следуя указаниям, которые мы дадим.

Поиски решения. Мы не будем описывать поиски решения ученика так полно, как в первой задаче, но только укажем некоторые тонкие моменты.

Если точка M находится в вершине A, то точка N совпадает с фиксированной точкой D, расположенной на продолжении AC таким образом, что $CD = AC$. Тогда параллелограмм $BMNP$ совпадает с параллелограммом $BADE$

(точка E определена как соответствующее положение точки P, рис. 2а).

Когда точка M находится в B, то N и P находятся в C (рис. 2б).

Детальное опытное исследование показывает, что все построенные точки P, по-видимому, укладываются на прямую линию, которая, очевидно, проходит через предельные положения точки P, именно E и C (рис. 2в).

Таким образом, поставленная задача сводится к доказательству того, что точка P расположена на одной прямой с E и C. Теперь построим новую фигуру и нанесем только точки P и E. Треугольники CDE и CNP (рис. 2г) равнобедренные, их углы у вершины равны, как соответственные при параллельных и секущей, их углы при основании, следовательно, также равны, так что углы DCE и PCN равны. Так как эти два угла равны и имеют общую сторону и общую вершину, то вторые стороны этих углов CE и CP расположены на одной прямой; следовательно, точки P, C и E находятся на одной прямой.

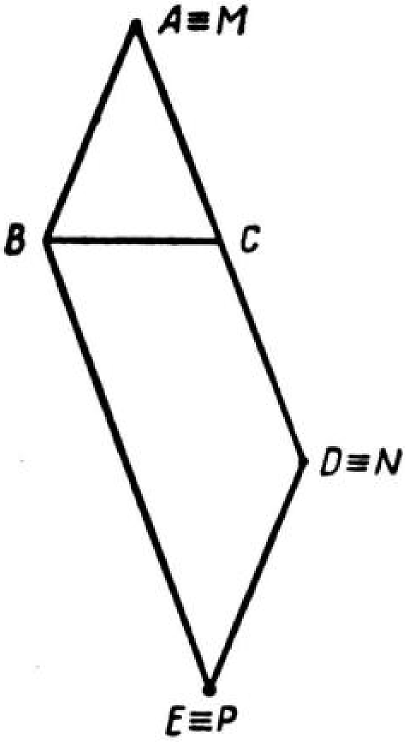

Рис. 2а

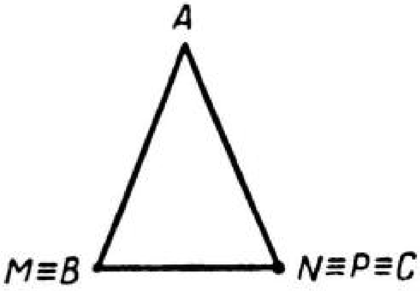

Рис. 2б

Ученики, которые боятся использовать точку E, слишком удаленную от треугольника ABC, очень редко находят это решение. Опытное исследование приводит их вообще к тому, что они соединяют точку P с точкой C, но это единственная польза, которую они отсюда извлекают. Это, впрочем, не является ничтожной пользой, потому что они видят равнобедренный треугольник CNP, но многие на этом останавливаются. В самом деле, параллельность маленького отрезка NP и прямой AB от них ускользает, и они поэтому не могут сделать вывод, что угол CNP является постоянным, потому что он является пополнительным к углу BAC. Они, следовательно, не замечают, что угол меж-

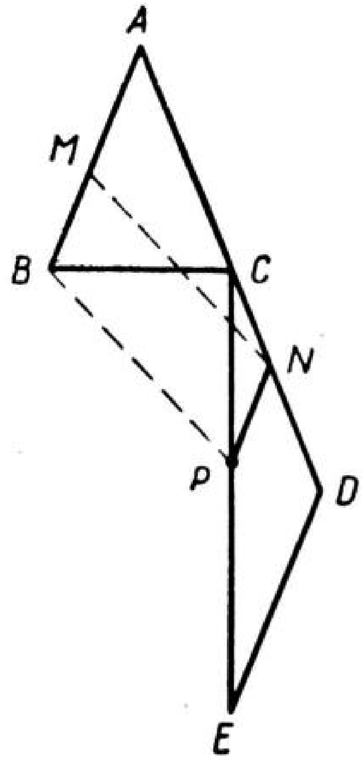

Рис. 2в

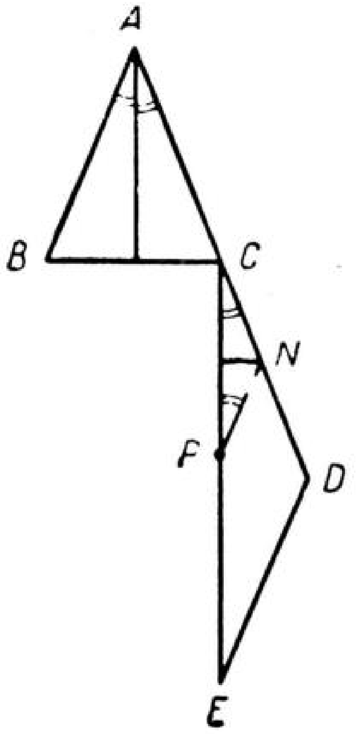

Рис. 2г

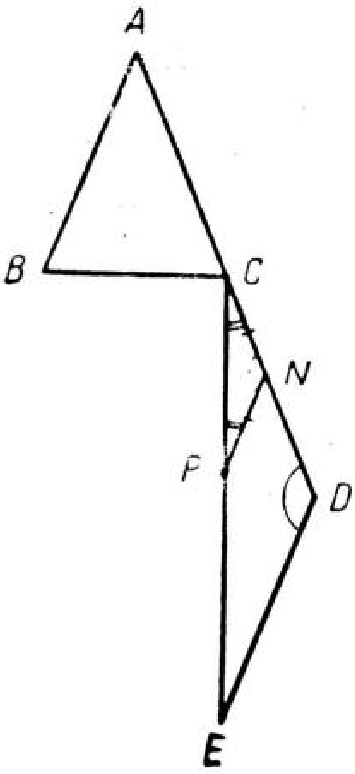

Рис. 2д

ду CP и продолжением AC также является постоянным, а это позволило бы им найти решение.

Второе заключение, которое вообще от них ускользает, состоит в том, что CP параллельна биссектрисе угла BAC, следовательно, перпендикулярна BC (рис. 2д).

Это замечание может быть сделано при помощи рассмотрения углов, но интересно показать ученикам, что можно найти этот результат непосредственно. Действительно, так как стороны равнобедренного треугольника CNP параллельны сторонам данного треугольника, то биссектрисы углов при вершинах N и A параллельны или попарно перпендикулярны, следовательно, перпендикулярны также основания CP и BC (рис. 2д).

Очевидно, нечего надеяться, что ученики найдут это решение «большим искусством», которое требует большой силы абстракции, но очень хорошо им дать его в самом конце работы, чтобы показать, к каким в высшей степени простым решениям можно прийти путем чистого открытия.

Что касается обратной теоремы и ограничения на найденное геометрическое место точек, то оно не представляет никакой особой трудности, потому что достаточно взять некоторую точку P' на отрезке CE, провести через эту точку $P'N'$, параллельную ED или AB, и провести обратную последовательность рассуждений, которые показывают, что треугольник $CP'N'$ равнобедренный, и т. д.

Имеются и другие решения этой задачи, но все они основаны на искусственном приеме, в котором проводится прямая, не указанная в условии задачи, как например биссектриса угла BAC или параллельная из C к AB.

Глава IV

КАК НАХОДИТЬ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО ТИПА?

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

(Автор начинает с указания характерных трех этапов, которые учащиеся проходят при ниже предложенной геометрической задаче.)

1°. Прочесть условие задачи, не делая чертежа. Снова прочесть условие задачи, сделав краткий набросок, и отметить на нем данные в условии равенства, а также предлагаемые численные значения.

2°. Отправиться открывать, делая точный чертеж при помощи линейки и циркуля. Ученик должен вообразить, что он является чертежником, которому инженер вручил пояснительный набросок, который он должен переписать начисто, чтобы он служил образцом для исполнителя.

С этой целью чертежник опытным путем изучает возможность непосредственного построения возможно большей части фигуры, начиная по очереди с каждого из ее заданных элементов. Может случиться, причем чаще, чем это кажется ученикам, что одно из этих исследований приведет к полному построению. Следовательно, очень полезно сделать все попытки перед тем, как упорствовать в завершении одной из них.

3°. Обычно в исследовании имеется точка или прямая, которую не удается построить непосредственно. Тогда можно попытаться действовать путем пересечения геометрических мест согласно классическим учебникам. Если это не достигает цели, надлежит исследовать краткий набросок как задачу первого типа, ища новое свойство фигуры.

Мы классифицировали типы задач по характеру их эмоциональной трудности; однако часто классифицируют за-

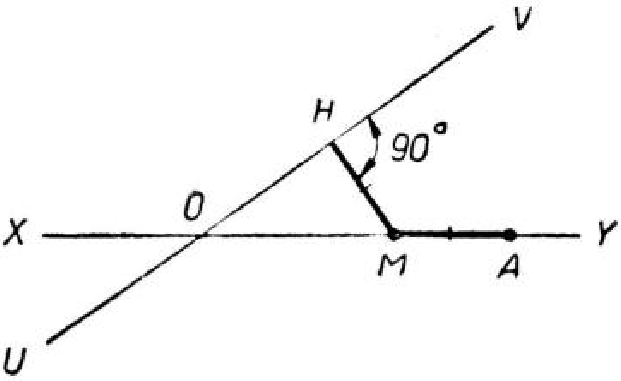

Рис. 3

дачи на построение аналогично задачам на геометрические места, потому что последние часто используются для решения первых. Заметим, наконец, следующее. При решении элементарных задач на построение следует знакомить начинающих с различными аспектами этих задач, но было бы преждевременно знакомить их с некоторым особым понятием систематического исследования точности. Это понятие приведет нас к третьему рабочему принципу в геометрии. Этот принцип будет особенно полезен для того, чтобы заставить учеников понять истинный смысл абстрактного доказательства некоторых конкретных очевидностей. Мы сумеем также вновь переосмыслить курс первой части более эффективно. Мы закончим рассмотрение этих нескольких задач воспитательного характера некоторой задачей на построение, которая поможет нам приблизиться к сущности третьего рабочего принципа. Мы выбрали задачу, в которой не может быть использован метод пересечения геометрических мест.

Задача III

Условие задачи. Даны две некоторые прямые XY и UV и на первой прямой точка A, отличная от точки пересечения двух данных прямых, если они пересекаются. Построить на XY точку M, равноудаленную от точки A и от прямой UV (рис. 3).

Мы попросим читателя построить фигуру, постепенно дополняя ее, и укажем ему, если он хочет самостоятельно искать решение, что метод пересечения геометрических мест не может быть использован для требуемого построения. В самом деле, геометрическое место точек, равноотстоящих от точки A и прямой UV, является параболой с фокусом A и директрисой UV.

Исследование. Проведем две прямые, образующие между собой угол, отличный от прямого угла, чтобы избежать особого случая. Пусть O — их точка пересечения.

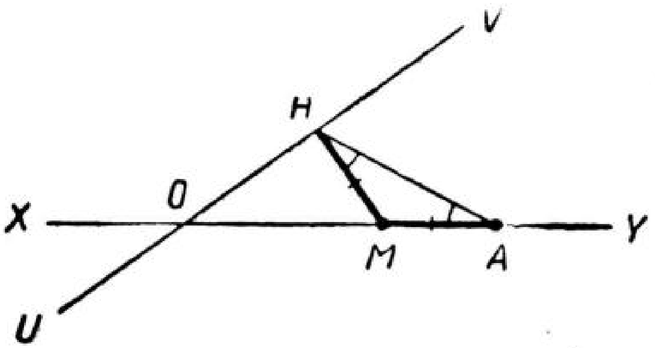

Рис. 3а

Возьмем на одной из прямых точку A, отличную от O. Эта прямая будет XY, другая UV. Возьмем на XY точку M, между O и A, например, и опустим из точки M перпендикуляр MH на UV. Следует найти M таким образом, чтобы AM и MH были равны.

Очевидно, нужно брать точку M ближе к A, чем к O, потому что MH меньше, чем MO.

Фигура, которую мы только что нарисовали, конечно, неточна, несмотря на тщательность, с которой была выбрана точка M путем постепенных измерений MA и MH. С помощью таких измерений принципиально невозможно построить абсолютно точную фигуру. Мы, следовательно, вынуждены рассуждать, смотря на искаженную фигуру, но мы можем представить себе, что эта искаженная фигура является неточным рисунком идеально точной фигуры, которую мы ищем, и предположить, что она существует. Таким образом, мы должны выбрать один из двух способов рассуждений: в условном наклонении, если мы рассуждаем на неточной реальной фигуре, или в изъявительном наклонении, если мы рассуждаем на точной фигуре, которую мы себе воображаем. Применение условного наклонения сложнее, чем применение изъявительного, оно является единственно правильным, потому что мы еще не знаем, что точная фигура существует. Мы применим условное наклонение в этом примере. Если бы MH и MA были равны, треугольник AMH был бы равнобедренным (рис. 3а).

Проведем, следовательно, MH на реальной фигуре. Первая мысль, которая приходит на ум по поводу равнобедренного треугольника, — углы при основании равны. Итак, открытие может принять следующее направление.

Если бы MA равнялось MH, угол MAH равнялся бы углу MHA и каждый из них равнялся бы половине угла HMO, внешнего угла треугольника MAH. Но этот угол дополнительный по отношению к известному углу MOH, образованному двумя данными прямыми. Следовательно, если бы фигура была точной, угол MAH должен был бы равняться половине дополнительного к известному углу

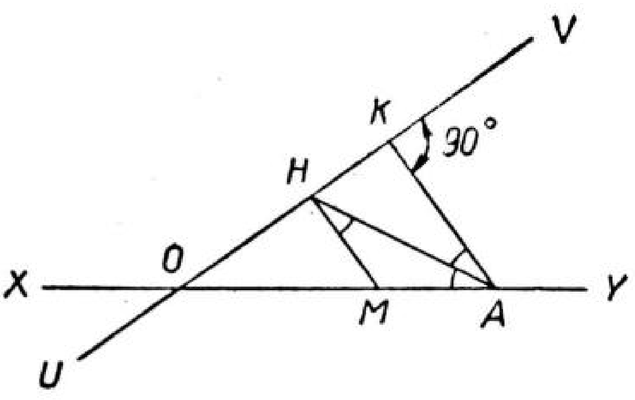

Рис. 3б

MOH. Построение же половины угла с помощью линейки и циркуля может быть выполнено намного точнее, чем непосредственное определение точки *M*, которое мы вначале приближенно произвели, чтобы сделать чертеж. Таким образом, абстрактное рассуждение, которое мы только что провели в условном наклонении, на искаженном чертеже приводит нас к более точному построению фигуры. Теперь поищем способ улучшить наше решение. Проведем из точки *A* перпендикуляр *AK* к *UV* (рис. 3б), угол *OAK* является дополнительным к углу *MOH*, следовательно, угол *MAH* должен бы быть половиной этого угла *OAK*, т. е. прямая *AH* должна бы быть биссектрисой угла *OAK*.

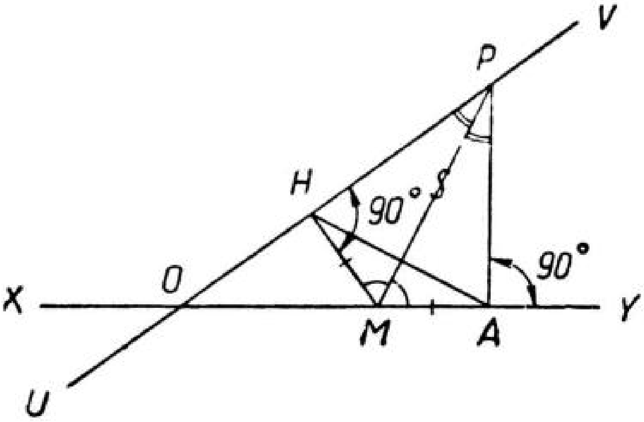

Рис. 3в

Следовало бы, может быть, догадаться провести *AK* в начале открытия и непосредственно доказать путем рассмотрения внутренних разносторонних углов, что прямая *AH* должна быть биссектрисой угла *OAK*; однако эта мысль появляется как «гениальный проблеск» или как смелое открытие, к которому прибег бы тот, кто забыл бы, что каждый угол при основании равнобедренного треугольника составляет половину внешнего угла при вершине.

Возможно и другое направление открытия, более естественное, чем рассмотренное только что исследование, использующее теорему о внешнем угле, но одновременно и более смелое. Представление о равнобедренном треугольнике вызывает представление о совпадающих между собой медиане, высоте, биссектрисе угла при вершине; следовательно, было бы естественно опустить из точки *M* перпендикуляр на *AH* и продолжить эту прямую до пересечения с *UV* в точке *P* (рис. 3в). Соединим затем *P* с *A* и заметим,

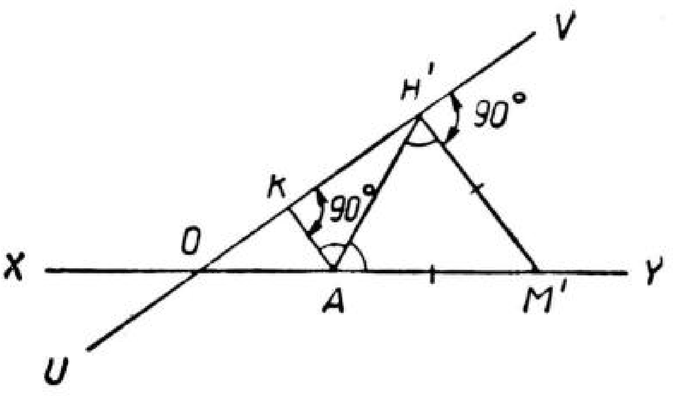

Рис. 3г

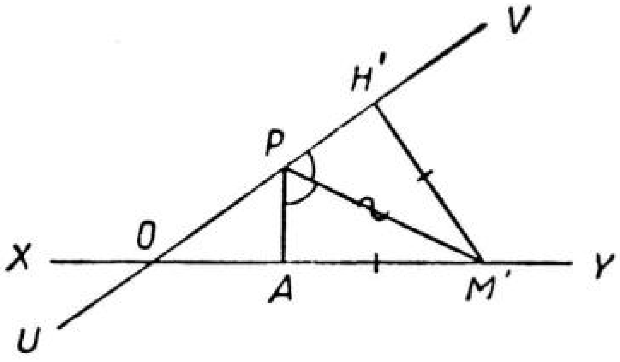

Рис. 3д

что $PA = PH$, что отрезок PA перпендикулярен к XY и что PM является биссектрисой угла HPA. Этот естественный ход открытия приводит к новому способу построения.

Для того чтобы дать ясное письменное изложение решения, полезно заново просмотреть всю совокупность поисков. При этом мы замечаем, что вначале мы случайно выбрали точку M между O и A. Очевидно, было бы бесполезно пытаться взять точку M за точкой O, но можно было бы попытаться взять точку M за точкой A. Опытным путем мы устанавливаем, что имеется в самом деле такое решение. Для нахождения этого решения также естественно провести AK перпендикулярно к UV (рис. 3г) или AP перпендикулярно к XY (рис. 3д).

Письменное изложение решения. Было бы недопустимо признать в письменном объяснении, что второе решение было открыто эмпирически. Интуиция, которая нам указывала дорогу, не обнаружила трех возможностей решения. Каждая из этих возможностей должна быть рассмотрена отдельно (в письменном объяснении). Между тем возможно составить решение более искусным образом, так, чтобы оно объединяло все три случая в одном рассуждении; однако оно слишком отвлеченно для начинающих.

Мы здесь видим другой подход второго рабочего принципа, который был рассмотрен в конце первой задачи и будет изучен более основательно в течение курса. В самом деле, в процессе открытия говорят себе на каждом шагу: «Если это правильно, то другое непременно правильно». Таким образом устанавливают цепочку условий, в которой каждое предыдущее звено содержит в себе последующее, но может содержать также и другие геометрические свойства, которые не будут тотчас рассмотрены и даже, быть может, вообще не будут использованы.

Каждое свойство, выраженное в теореме, не обязательно должно повлечь за собой свойство, выраженное в предшествующей теореме, так как первое свойство может не быть достаточным для вывода второго потому, что первая и вторая теоремы могут быть неэквивалентными. Следовательно, необходимо установить обратную теорему или цепь частичных обратных теорем, чтобы быть уверенным в том, что конечное свойство, полученное в результате построения, влечет за собой также первоначальные свойства, данные в условии. После этого объяснения не составляет труда решение, и мы предоставляем читателю сделать его и дополнить рассмотрением частных случаев, когда XY и UV параллельны или перпендикулярны.

Техническая дискуссия. Этот логический подход к задачам на построение заслоняет собой наиболее существенный аспект, заключающийся в систематических поисках определенности и точности. Настоящее исследование этих задач заключается в том, чтобы свести построение к непрерывной последовательности набросков прямых и окружностей, а затем глубоко проанализировать относительную ценность найденных способов, рассматривая прямые и окружности, используемые в каждом способе. Отметим, что порой возникают сюрпризы. Так, в результате точного подсчета оказывается, что в задаче, в которой мы только что рассматривали способ нахождения точки K, потребовалось тринадцать окружностей и пять прямых; тогда как второй способ обходится лишь восьмью окружностями и тремя прямыми. Второй способ, следовательно, на первый взгляд является предпочтительным. Может быть, удалось бы выиграть еще одну или две окружности, но это потребовало бы очень подробных исследований, которые, впрочем, способны очень заинтересовать учеников.

Действительный практический аспект обсуждения, на который мы только что указали, обладает воспитательным значением в гораздо большей степени, чем обычно думают. Этот аспект подчеркивает переход от конкретного к абстрактному, который ученики склонны не принимать во внимание, потому что они реализуют обратный переход от абстрактного к конкретному. Чтобы еще лучше отметить этот переход, такой деликатный для начинающих, проявляющийся, в частности, в необходимости доказательства конкретных очевидностей, мы будем употреблять слово «точный» в конкретной области и слово «правильный» в абстрактной области. Выше мы применили в доказательстве условное наклонение в тех случаях, когда, пользуясь нарисованными фигурами, рассуждают на реальных фигурах. Если же рассуждают, представляя себе идеальную фигуру, то проникают в область абстрактного. Когда же мы ведем исследование в области абстрактного, задача становится более легкой, элементы фигуры, на которых проводится рассуждение, — более удобными, можно их перемещать, сравнивать, преобразовывать без усилия и без потери времени, потому что все происходит в уме. Рассуждения образуют конструкцию, где одно подкрепляется другим и происходит взаимная проверка.

Итак, рассмотрим реальную фигуру, обладающую некоторым свойством с некоторой точностью; соответствующая идеальная фигура обладает тем же вполне правильным свойством. Если рассуждение приводит к выводу, что идеальная фигура должна обладать другими свойствами, то реальная фигура должна обладать также другими свойствами, более или менее точными.

Рассуждение на абстрактной фигуре делает бесполезным экспериментальную проверку новых свойств, или, напротив, эта экспериментальная проверка новых свойств позволяет контролировать точность, с которой исходное свойство было реализовано. Отсюда третий рабочий принцип: *точность в конкретном достигается с помощью правильности в абстрактном, и, наоборот, точность в конкретном помогает открыть новые правильные закономерности в абстрактном.*

Глава V

УЧЕБНЫЙ КУРС

Изложение курса

Когда какая-либо задача поставлена с указанием цели, которую нужно достичь, ученик отчаянно цепляется за то, что требуется доказать, предполагает его заранее истинным и робко пятится к данным. Такой подход слишком естествен, чтобы в нем упрекать ученика. Открытие решения, начиная с данных условия, трудно, так как разветвляется в слишком многих направлениях и среди этих направлений необходимо выбрать те, которые ведут к цели; тогда решение задачи сведется к соединению чистого открытия и открытия путем «отступления назад».

Поэтому изложение решения должно учитывать два требования. С одной стороны, нужно преодолеть авторское тщеславие, отвергнуть то, что бесполезно, и не увлекаться развитием того, что кажется трудным. С другой стороны, подходя логически, нужно, изменяя направление открытий, суметь направить решение в том направлении, которое ведет к цели. Эта вторая сторона открытия кажется какой-то искусственной и удивляет своей кажущейся гениальностью тех, которые не проследили за логической линией поисков.

Эти две тенденции проявляются при изложении элементарных вопросов, составляющих то, что называется курсом. Вторая из них проявляется с большей настойчивостью, несмотря на все предосторожности, которые теперь принимают при составлении обычных учебников. В самом деле, невозможно представить весь курс в виде естественного логического открытия, так, чтобы каждый результат вытекал непосредственно из элементарных геометрических фактов. Чтобы выиграть время, необходимо прибегнуть к техническим доказательствам, которые связывают новые факты с теми, которые были доказаны прежде. Логика стройного целого не всегда ясно выступает, техническая связь становится основным средством развития теории, и, если нужно прибегнуть к отдаленной теореме, ученик, который уже больше о ней не думал, полностью сбит с толку.

Другая причина, которая увеличивает замешательство учеников, заключается в том, что геометрия построена на многочисленных и разрозненных элементарных фактах, которые кажутся непосредственно очевидными, но истинность которых в действительности основана на экспериментальной проверке; элементарные истины относятся, таким образом, к практической, эмпирической области. Всякое же экспериментальное доказательство, каким бы точным оно ни было, не влечет за собой абсолютной правильности. Так, экспериментальная проверка того факта, что прямая линия представляет собой кратчайшее расстояние от одной точки к другой, может быть сделана с точностью до 1 *мм* или до 0,001 *мм*, но она никогда не будет совершенно точной.

Таким образом, мы имеем три принципа, которые были сформулированы применительно к методике решения задач, но целиком применимы к изложению курса. Первый принцип утверждает, что, по меньшей мере, начало каждой главы должно быть изложено способом чистого открытия, без заранее поставленной конечной цели. Второй принцип подтверждает необходимость косвенных технических доказательств. Третий принцип предостерегает от слишком поспешного принятия кажущихся истин, которые представляются непосредственно очевидными. Часто эти три принципа применяются одновременно. В самом деле, если связь двух элементарных очевидностей обеспечена техническим доказательством, которое связывает следствия этих очевидностей, то экспериментальная проверка одной из них становится ненужной.

Согласно известному остроумному выражению, геометрия является искусством правильно рассуждать на неправильных фигурах. Это, действительно, глубокая истина, и необходимо, чтобы наши ученики всегда сохраняли ее в памяти. Это особенно важно в начале курса.

1°. Вертикальные углы.

Пусть две прямые XY и UV пересекаются в одной точке O (рис. 4). Полупрямые OX и OY образуют некоторый развернутый угол. То же самое можно сказать относительно полупрямых OU и OV. Эти два факта — одна и та же очевидность, описанная определенными словами «полуоборот» или «развернутый». Как только понятие угла хорошо усвоено учениками, для них становится очевидным, что углы XOU и YOV равны. Эти две очевидности бесспорны в глазах учеников. Однако ни одна из них не может быть проверена опытным путем. Прямые не являются совершенными, транспортир не обладает высокой степенью точности и не очень удобен в работе в связи с плохим конкретным определением его центра, и, если, с одной стороны читают 28°, с другой стороны прочтут 29°. Проверка калькой может быть сделана с большей степенью точности, но никогда не будет совершенно точной.

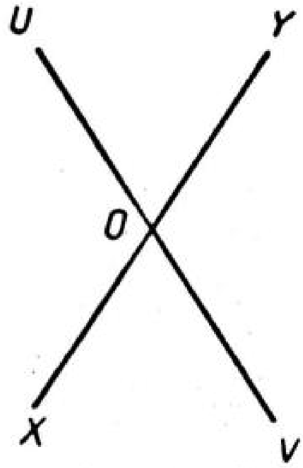

Рис. 4

Перейдем к абстракции и для выражения своей мысли воспользуемся условным наклонением. Если бы прямые были совершенными, углы XOU и YOV были бы оба пополнительными одного какого-то из углов XOV или YOU, то они, следовательно, были бы равны.

2°. Перпендикуляр, проведенный к прямой через точку вне этой прямой.

Невозможно опытным путем доказать, что из некоторой точки O, не расположенной на прямой XY, можно провести к ней лишь только один перпендикуляр. Это кажется очевидным ученикам, которые невольно связывают эту очевидность с очевидностью кратчайшего расстояния. Они считают, что опустить на прямую перпендикуляр означает прямо идти к этой прямой.

Можно технически связать эту очевидность с одной из тех, которые определяют прямую: прямая является единственной линией, которая может вращаться вокруг самой себя, не перемещаясь. (Это свойство используется для того, чтобы экспериментально проверить прямолинейность

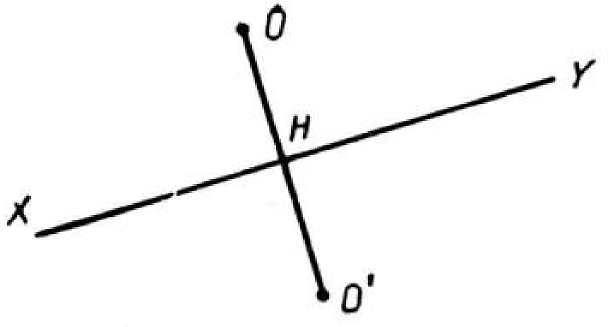

Рис. 5

края линейки.) В самом деле, мы можем сказать, что, если бы прямая XY была совершенной, она совпадала бы сама с собой при вращении вокруг самой себя. Эта операция, сделанная таким же образом, как и при проверке линейки, оставляет фиксированными все точки прямой XY и переводит точку O в положение O'. Перпендикуляр OH, проведенный из O на XY, займет положение $O'H$ (рис. 5).

Если бы этот перпендикуляр был правильным, четыре угла фигуры должны были бы быть прямыми и сумма двух из них должна равняться развернутому углу. В частности, угол OHO', сумма углов OHX и $O'HX$, должен был бы быть развернутым. Следовательно, точки O, H и O' должны были бы лежать на одной прямой.

Это доказательство, характер которого должен быть выражен применением условного наклонения, особенно для начинающих, позволяет утверждать, что существует перпендикуляр OH, который указывает некоторый способ его построения и показывает, что он является единственным, потому что имеется только единственная прямая, проходящая через O и O'.

Этому способу доказательства может быть поставлено в упрек, что в нем используется вращение, которое является операцией в пространстве трех измерений, однако классическое доказательство перегибанием имеет тот же недостаток. Можно также сказать, что практически доказательство, которое мы предлагаем, требует применения чертежа на кальке и необходимость обозначить некоторую точку на прямой XY, чтобы избежать ее перемещения, однако операция перегибания практически еще менее удобна и значительно менее точна.

Это рассуждение утрачивает интерес к абстрактной области. Можно поэтому проводить доказательства как посредством перегибания, так и путем поворота, однако при любом способе нужно четко выделить основную мысль, что речь идет о техническом доказательстве, опирающемся на некоторое характеристическое свойство прямой, и что это свойство подсказывает мысль посмотреть, что происходит по другую сторону от прямой XY.

Наиболее сильным ученикам, тем из них, которые пробудились к творческому мышлению, можно добавить, что было бы интересно попробовать опереться на свойство скольжения линии самой по себе, которым обладают прямая и окружность. Рассмотрение этого вопроса интересно, так как оно раньше, чем нужно, ведет к идее постулата Евклида. Постулат имеет огромное воспитательное значение и показывает конкретную опору, которую могут иметь неевклидовы геометрии. Здесь имеется прекрасное введение в аксиоматику.

Запоминание учебного курса

Для большинства учеников преждевременно заниматься логической формалистикой, такой же головоломной, как и эквилибристика рассуждений о постулате Евклида. Главное заключается в том, чтобы ученик хорошо знал свой курс, чтобы умел самостоятельно решать задачи. Это единственный способ освободить ум от всякой формалистики и развить способность к открытию. Наилучшее средство для этого заключается в том, чтобы ученик делал сам фигуры больших размеров, которые целиком построены при помощи линейки и циркуля и на которые распространяются все свойства равенства и неравенства. Различные свойства заранее не даны, работа заключается в том, чтобы соединить их в последовательную систему и проверить путем сопоставления. Это приводит в действие механизм запоминания. Геометрические фигуры, как и географические карты, развивают зрительную память; поэтому интересно также делать немые чертежи. Более того, свойства неравенства логически дополняют свойства равенств и геометрические соотношения обоих видов согласуются между собой.

Эти геометрические «карты», которые можно «украсить» штрихами различной толщины и разнообразных цветов, представляют также интерес и тем, что крепко «сколачивают» курс, обеспечивая внутреннюю связь каждой из фигур целого и связь одной фигуры с другой.

Такая группировка свойств интересна также тем, что придает каждой части курса логический аспект, который непосредственно связывает их с элементарными фактами геометрии. Технические доказательства, которые послужили, установлению некоторых свойств фигуры, предстают в общем логическом сплетении и перестают казаться искусственными. Связь одной дедукции с другой принимает конструктивный характер, который больше не шокирует, потому что линия логики целого соблюдена. Наконец, эти группы свойств понемногу включаются в здравый смысл и помогают в развитии интуиции. В самом деле, когда в какой-либо задаче какое-либо свойство группы затронуто, все другие появляются одновременно и уму остается только выбирать из них те, которые нужны для открытия.

Ученикам должна быть предоставлена инициатива в построении системы фигур, обладающих аналогичными свойствами, и особенно в рассмотрении свойств, которые нужно выделить в одной фигуре. Некоторые ученики изучат большое количество теорем на одном и том же рисунке, другие будут испытывать необходимость сделать несколько фигур для достижения того же самого результата.

Важно, чтобы эта работа была индивидуальной и чтобы она была сделана самостоятельно. Вмешательство преподавателя должно ограничиваться необходимым моментом и ставить себе целью только выбор объединяющей темы, не навязывая количества фигур. (Дальше автор рассматривает интересные поиски, возникающие у учащихся в процессе классных занятий, которые учитель направляет в должное русло.)

То, что не излагается в учебном курсе

На уроках преподаватель часто получает неожиданные признания учеников в связи с целесообразным подсказом, сделанным преподавателем. Например, когда ученики должны найти окружность заданного радиуса, касательную к двум данным прямым, ученики легко устанавливают, что центр окружности должен быть расположен на одной из биссектрис, но не догадываются рассмотреть параллельные прямые — геометрические места центров окружностей данного радиуса, касательных к одной из данных прямых. Они поражены, когда мы подаем им мысль об этом. Один из учеников, одобряемый большинством своих товарищей, непосредственно признался, что он никогда бы об этом не подумал, потому что он не хотел бросать циркуль, с помощью которого он только что провел значительное количество окружностей. Мысль о прямой линии не приходила ему больше в голову.

Другой пример, более близкий для преподавателя, — это пример о треугольниках, которых ученики не видят. Так, в фигуре, образованной прямой, несущей точки A, B, C, следующие друг за другом в указанном порядке, и отрезками, соединяющими эти точки с некоторой точкой O, расположенной вне прямой, большинство из учеников не видит треугольника AOC. Они замечают треугольник только тогда, когда он образован явным проведением отрезков, соединяющих три данные точки.

Первый пример показывает, что процесс поисков мобилизует все способности детей. Нужно, чтобы они иногда приостановили свои поиски для того, чтобы подумать о другом направлении действий, отличном от прежнего направления. Второй пример показывает неприятные последствия старой привычки, которая действует еще в течение продолжительного времени, как в уме взрослых. Здесь нужно заняться настоящим логическим воспитанием в вопросе геометрических задач, распространить это воспитание на все области, где должен упражняться аналитический ум.

Приведем последний пример, чтобы закончить это рассмотрение нелогичного поведения учеников при решении геометрических задач. Этот пример покажет, что их непонимание задачи может также иметь чисто физиологическое происхождение. Мы увидим, впрочем, что речь идет скорее о затруднениях в применении знаний, чем о непонимании.

Когда требуют от ученика провести на доске высоты треугольника, одна из сторон которого была нарисована горизонтально, он проводит правильно вертикальную высоту и приблизительно правильно обе другие высоты, если углы данного треугольника все три острые. Если один из углов при основании треугольника тупой, ученик будет колебаться, прежде чем провести вертикальную высоту, потому что он удивлен тем, что высота проходит вне треугольника; он решится на это после того, как взглянет на преподавателя, робко и вопросительно. Если же показать ему, как провести две остальные высоты, то он заявляет, что это непонятно. Если, наконец, ему задают треугольник, угол при вершине которого тупой, он без колебаний проводит вертикальную высоту и немного колеблется в отношении двух других, которые он затем храбро проведет внутри треугольника. При таком замешательстве вообще обвиняют преподавателя, что он плохо справился со своими обязанностями, что он всегда рисует треугольники, одна сторона которых горизонтальна, и, наконец, в том, что он не сумел усовершенствовать представления о перпендикуляре и прямом угле, отделяя их от первоначальных понятий горизонтали и вертикали. Это не так просто, как кажется, потому что можно принять все предосторожности против этого обстоятельства, но ошибка остается или скоро снова появляется. Чтобы предугадать истину, достаточно спросить себя, почему так охотно называют вертикальную прямую, нарисованную на листе, положенном на стол, когда эта прямая направлена к наблюдателю. Эта прямая тем не менее горизонтальна, как все прямые, которые можно было бы нарисовать на листе.

Это объясняется тем, что мы имеем два глаза и что зрительная память отметила движения в вертикальном направлении, происходящие в плоскости симметрии человека, перпендикулярной к горизонтальной линии глаз. Когда оба глаза наблюдают за прямой, которая находится в плоскости симметрии тела человека, естественно, что они передают ее в мозг в виде вертикали. Следовательно, не нужно пытаться без предварительного длительного перевоспитания отделять экспериментально восприятие вертикали от перпендикуляра. В течение долгого времени нужно соглашаться с тем, что учащийся наклоняет набок голову, нужно даже его поощрять в этом, чтобы точно провести перпендикуляр.

Глава VI

ГЕОМЕТРИЯ И СЧЕТ

Подобие и конфигурация

В разделах I и II планиметрии главным образом рассматриваются вопросы равенства и неравенства. Посредничество счета практически ограничено сложением, вычитанием и умножением или делением на 2. Умножение или деление на некоторое целое число применяется только при исследовании соизмеримости углов или отрезков. Умножение или деление отрезков (углов) производят также для того, чтобы изобразить геометрически данные условия (если в нем заданы соотношения между отрезками) или результаты решения задач.

Начиная с третьего раздела понятие отношения и понятие меры, которое вытекает из первого, занимают первое место, и эти понятия позволят сейчас уточнить и лучше определить неясное понятие о подобии, представление о котором ученики имеют значительно раньше, чем представление о равенстве.

Для ребенка две фигуры подобны, когда одна может быть рассматриваема как рисунок другой. Понятие формы предшествует понятию величины, но положение по отношению к наблюдателю играет для начинающих некоторую роль в оценке подобия. Так, если переместить одну из фигур произвольным образом, то подобие более не воспринимается; но если фигура перемещается так, что ее положение относительно линии глаз не изменяется, то восприятие подобия сохраняется. Это перемещение может привести к тому, что фигура будет дальше или ближе к глазу наблюдателя, а изображение ее на сетчатке глаза соответственно меньше или больше, но форма изображения воспринимается такой же самой. Именно понятие формы возникает у ребенка таким образом: форма есть множество признаков фигуры, которые остаются неизменными, когда изменяется расстояние, с которого наблюдают фигуру. Если фигура образована из прямых линий, этими признаками являются углы и отношения отрезков.

Если две фигуры подобны, углы одной равны соответствующим углам другой. Также отношение некоторых размеров одной из фигур равно отношению двух соответствующих размеров другой фигуры. Так, художник, рисующий голову, выбирает на своем рисунке основной размер, например общую высоту, и с помощью карандаша, который он держит в вытянутой руке, он измеряет отношения, которые существуют между высотой головы, с одной стороны, и размерами, которые его интересуют, с другой. Если он находит, что ширина составляет $\frac{3}{5}$ высоты, он сделает то же самое на своем рисунке. Что касается углов, он их определяет в долях прямого угла. Следовательно, первоначальное понятие подобия есть понятие равенства углов и отношений соответствующих отрезков. Это понятие существует независимо от понятий относительной величины одной фигуры по отношению к другой. Все рисунки одной и той же головы, которые художник может сделать, подобны между собой и подобны оригиналу, какой бы ни была выбранная на рисунке общая высота. В каждом из рисунков, например, ширина составляет $\frac{3}{5}$ высоты.

Существует другой способ рисовать, заключающийся в том, что на оригинале отмечают углы и отрезки, затем умножают все эти отрезки на одно и то же число. Тогда получают единственный рисунок, величина которого по отношению к оригиналу определена этим числом.

Следовательно, подобие двух фигур может выражаться двумя различными способами. Так, если два треугольника ABC и MNP подобны, углы A, B, C первого будут соответственно равны углам M, N, P второго (рис. 6), можно записать первым способом:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{MN}{NP}; \quad \frac{AB}{AC}=\frac{MN}{MP}; \quad \frac{BC}{AC}=\frac{NP}{MP}$$

и вторым способом:

$$\frac{AB}{MN}=\frac{AC}{MP}=\frac{BC}{NP}.$$

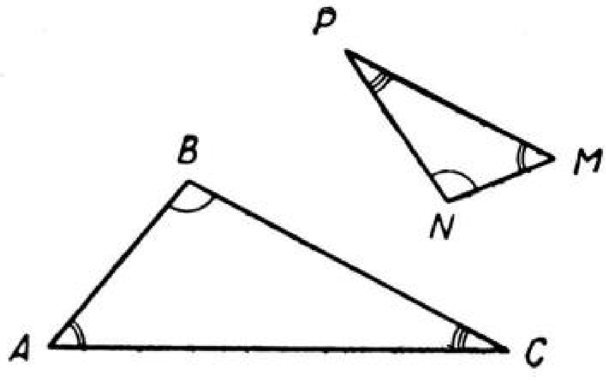

Рис. 6

Если речь идет лишь о двух фигурах, второй способ более удобен, но если речь идет больше чем о двух фигурах, более приемлем первый способ. От первой системы пропорций ко второй переходят путем перестановки средних или крайних членов пропорции.

Оба способа могут быть показаны хорошим ученикам одновременно, это предохранит их от грубых ошибок, но для средних учеников стоит лучше выбрать один определенный способ. В самом деле, ученикам следует дать техническое средство открывать подобие двух фигур независимо от их взаимной ориентации или положения относительно линии глаз, когда непосредственно не воспринимается подобие фигур. Мы выбрали второй способ, потому что мы рассуждаем сначала о двух фигурах.

Раздел курса, посвященный подобию, начинается с теоремы Фалеса[1]. Затем рассматриваются случаи подобия треугольников. С помощью технических экстраполяций приходят к гомотетии, которая сильнее подчеркивает отношение одной фигуры к другой. Наконец, подходят с новой точки зрения к подобию фигур, говоря, что они подобны, если одна фигура равна некоторой фигуре, гомотетичной другой. После всего этого технического изложения весьма интересно возвратиться к понятию подобия, к его естественной исходной точке и рассмотреть другой способ его выражения. Для этого мы применим слово «конфигурация» вместо слова «форма», а внутренние отношения некоторой фигуры назовем конфигурационными отношениями. Мы уточняем и подтверждаем с помощью примеров, что эти отношения являются признаками формы в такой же степени, как и углы, и затем мы формулируем следующую теорему.

Теорема. Если несколько фигур подобны, то признаки соответствующих форм, а именно углы и конфигурационные отношения, равны между собой.

---

[1] Мыслитель (из Милета), VI в. до н. э.

Случаи подобия треугольников могут быть, таким образом обобщены, при утверждении, что треугольники подобны, если они имеют два признака формы, надлежащим образом выбранные, соответственно равные. В частности, прямоугольные треугольники подобны, когда они, кроме прямого угла, имеют одинаковый признак формы, характеризующий элементы, одинаково расположенные по отношению к прямому углу. Можно, наконец, технически связать случаи подобия со случаями равенства путем следующего следствия.

Следствие. Если две фигуры подобны и, кроме того, имеют по одной соответственно равной стороне, они равны..

Тригонометрия. Отношения и коэффициенты

Конфигурационные отношения часто встречаются на протяжении курса, в частности при рассмотрении правильных многоугольников и окружности. Впрочем, понятие конфигурационных отношений является весьма общим; оно выходит за рамки геометрии и встречается во всех областях науки, где приходится изучать две группы величин разной природы, но со сходными внутренними (конфигурационными) отношениями.

В геометрии систематическое изучение конфигурационных отношений очень интересно, потому что для данной фигуры число признаков формы избыточно и часть этих признаков формы является следствием других. В частности, в прямоугольном треугольнике существует 8 признаков формы: 2 острых угла и 6 отношений каждой из сторон к другим. Если один признак дан, форма прямоугольного треугольника фиксирована, следовательно, также семью другими признаками, это показывает, что восемь признаков формы любого прямоугольного треугольника связаны семью независимыми соотношениями.

Оба острых угла являются дополнительными, а конфигурационные отношения связаны между собой перестановкой и теоремой Пифагора.

Зависимость конфигурационных отношений от углов не поддается вычислению средствами, доступными для наших учеников, но она объективно существует. Она может быть

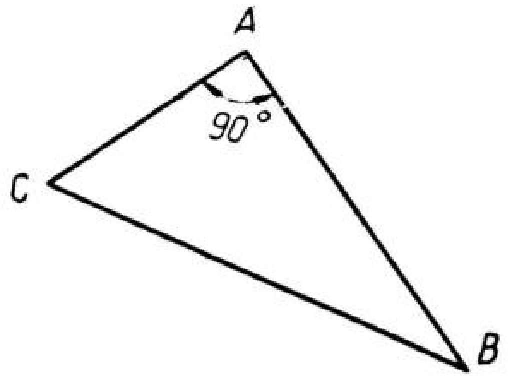

Рис. 7

определена с помощью измерений, результаты которых можно свести в таблицу; это естественное начало тригонометрии.

Чтобы фиксировать соответствие углов и конфигурационных отношений в прямоугольных треугольниках, назвали синусом одного из углов отношение противоположного этому углу катета к гипотенузе, косинусом — отношение прилежащего катета к гипотенузе, тангенсом — отношение противоположного катета к прилежащему и котангенсом — отношение, обратное предыдущему. Отношения, обратные двум первым, были названы секансом и косекансом, но они вышли из употребления. Так, в треугольнике ABC с прямым углом A устанавливают (рис. 7):

$$\frac{AC}{BC} = \sin B = \cos C; \quad \frac{AB}{BC} = \cos B = \sin C;$$

$$\frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} C; \quad \frac{AB}{AC} = \operatorname{ctg} B = \operatorname{tg} C.$$

Чтобы приучить учеников к этим названиям и заставить их составить численную таблицу, одновременно подготавливая обобщение, которое будет сделано позже, можно поступить следующим образом.

На листе миллиметровой бумаги проводят радиусом 114 *мм* круг, который, следовательно, имеет окружность длиной приблизительно 720 *мм*, т. е. 2 *мм* в дуговом градусе. Затем только с помощью линейки и циркуля проводят два перпендикулярных диаметра $A'OA$ и $B'OB$, потом все с той же линейкой и циркулем делят прямой угол AOB на шесть равных частей (рис. 8). Дуга AB в таком случае разделена на шесть дуг по 15°. Так как каждая из этих дуг имеет длину, приблизительно равную 30 *мм*, можно ее разделить на пятнадцать равных частей с помощью линейки, на которой имеются миллиметровые отметки. Фигура, таким образом, представляет собой превосходный транспортир.

Проводят затем из того же самого центра O радиусом 100 *мм* окружность, которая автоматически разделена на

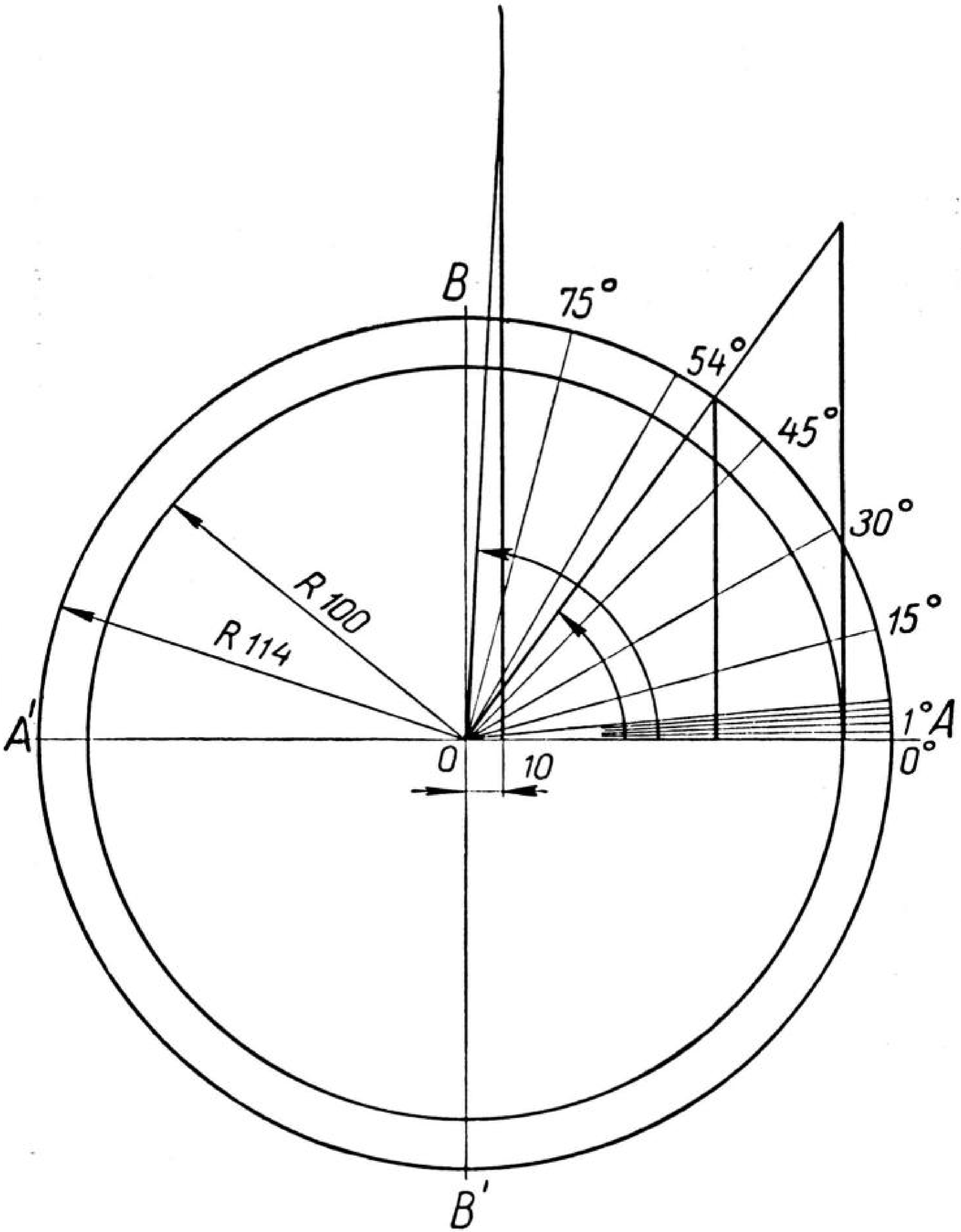

Рис. 8

градусы предыдущими отметками. Легко прочесть синусы и косинусы углов с помощью миллиметровой сетки. Для нахождения тангенсов достаточно провести касательную ко второй окружности в точке ее пересечения с OA и прочитать соответствующие размеры на сетке. В том случае, когда углы слишком близки к 90°, касательные выходят за пределы рисунка, однако значения тангенсов можно прочесть на основании подобия на перпендикуляре к OA, который проходит в 10 *мм* от 0.

Ученики выполняют этот рисунок с удовольствием, и те, которые делают его точно и проводят достаточно тонкие линии, достигают точности двух десятичных знаков. Они очень довольны констатировать, что они вновь находят те же значения от 0° до 45° и от 90° до 45°, которые в науке были открыты раньше, но с большей точностью. Так возникает интерес к численным таблицам.

Несколько упражнений для подтверждения формул

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\text{и} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

и вот наши ученики вооружены, чтобы заниматься тригонометрией. Но именно в этот момент появляется новая трудность, хотя и прежнего свойства, при использовании только что составленной таблицы. В самом деле, все эти числа передают отношения, являются частными от деления и в то же время они будут использованы как множители или делители, т. е. как коэффициенты. Наши ученики вновь сталкиваются с теми же противоречивыми аспектами отношения, которые их несколько раз ставили в тупик в курсе алгебры, начиная с дробных чисел.

Рассмотрим, например, треугольник ABC с прямым углом A, угол B которого содержит 28° (признак формы), сторона AB равна 23 *мм* (линейный размер), и зададимся целью вычислить AC и BC. С одной стороны, имеем $\frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} 28°$, т. е. $\frac{AC}{23} = 0{,}532$, откуда $AC = 23 \cdot 0{,}532$, и, с другой стороны, $\frac{AB}{BC} = \cos 28°$, т. е. $\frac{23}{BC} = 0{,}883$, откуда $BC = 23 : 0{,}883$.

Вычисление AC является легким, так как оно следует из определения деления: делимое равно произведению делителя 23 на частное 0,532. Однако иначе обстоит дело при вычислении BC. В самом деле, чтобы получить BC, нужно перейти через промежуточное равенство $23 = BC \cdot 0{,}883$, которое следует из определения деления, переставить оба члена этого равенства, не изменяя в них знаков, записав $BC \cdot 0{,}883 = 23$, чтобы, наконец, прийти к $BC = 23 : 0{,}883$.

Для большинства наших учеников вычисление BC является, следовательно, продолжительным. Эта техника вычисления не была рассматриваема в классических учебниках в виде правила или теоремы. Однако постепенно ученики выдумывают для своего собственного пользования небольшое практическое правило, согласно которому можно переставить число слева, снизу (из знаменателя) направо, вверх (т. е. в числитель) или же слева, сверху направо, вниз. Это правило позволяет им производить устно относительно громоздкие вычисления.

Очень полезно уточнить это правило и придать ему логическую форму, с тем чтобы на него можно было бы ссылаться в технике вычисления. Можно это сделать в алгебре, в отношениях и пропорциях или в уравнении первой степени, но эффективность этого была бы менее значительной. Лучше всего сейчас же придать этому правилу логическую форму, связывая его с понятием обратного оператора, которое возникло при рассмотрении действий над дробными числами.

Правило. В равенстве, в котором обе части содержат только знаки умножения и деления, можно перенести множитель из одной части в другую при условии изменения его операционного знака.

Это правило имеет очень сходную форму с правилом, которое позволяет перенести выражение из одной части равенства в другую при условии изменения его знака. Отсюда видно, что было бы опасно очень рано дать это правило, потому что могло бы произойти смешение одного правила с другим. Следует подождать, чтобы правило, относящееся к выражениям прибавляемым и вычитаемым, стало интуитивным рефлексом, и только после этого давать правило, относящееся к множителям, которые умножают или делят. Это второе правило, ставшее в свою очередь интуитивным рефлексом, может быть распространено на любые равенства следующим образом: можно переносить множитель из одной части равенства в другую, изменяя его операционный знак, при условии, что рассматриваемый множитель умножается на всю левую или правую часть равенства.

Что касается перестановки обеих частей одного равенства, то она является слишком очевидной, чтобы требовать доказательства, однако благоразумно ее не разрешать слишком рано, потому что имеется опасность смешения с правилом, которое предписывает изменение знака при перенесении слагаемого из одной части равенства в другую.

Метрические соотношения в треугольнике и круге (несоизмеримые отрезки, иррациональные числа)

Классическое изложение метрических соотношений в треугольнике и круге обычно делается с помощью рассмотрения пар подобных треугольников с использованием понятия подобия, которое учитывает постоянное отношение соответственных элементов одной и другой фигуры. Можно это сделать также с помощью конфигурационных отношений и тригонометрии. Оба способа изложения отличаются только с технической точки зрения. В обоих случаях приходят к применению свойств отношений и пропорций, однако новым является то, что появляются произведения отрезков. Древние придавали конкретный смысл этим произведениям, которые фактически измеряют площади прямоугольника, и теорема Пифагора формулировалась так: площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на каждой из сторон прямого угла. В настоящем курсе площади нами были отнесены к разделу IV. Изложение курса геометрии от этого выигрывает в технической простоте и становится более абстрактным, следовательно, более поддающимся обобщению.

Таким образом, мы вынуждены говорить об отрезке, квадрат которого равен произведению двух других, затем, взяв единицу длины, мы вынуждены говорить о числе, квадрат которого равен произведению двух чисел. В общем случае первый отрезок не является соизмеримым с двумя другими и число, которое его измеряет, не является дробным числом, когда за единицу берут некоторый общий делитель этих двух других отрезков. В этом заключается удивительный на первый взгляд факт, и, не желая систематически смущать ум учеников, полезно уточнить на примере конкретную реальность этой неправдоподобности. Наиболее простым и наиболее ярким примером является диагональ квадрата, несоизмеримая со стороной; этот пример показывает, что не существует дробного числа, квадрат которого равен двум. Древние нашли доказательство, основанное на факте, что измерения диагонали и стороны не могут быть одновременно ни четными, ни нечетными числами. Это доказательство, очень остроумное, может быть упрощено при помощи дробей. Если диагональ и сторона квадрата имеют общую меру, их отношение выражается дробью, которую можно предположить несократимой, и квадрат такой дроби является также несократимой дробью, следовательно, он не может быть целым числом. Однако теорема Пифагора показывает, что отношение диагонали к стороне является числом, квадрат которого равен двум, следовательно, имеется противоречие.

Можно добавить, что отсутствие общей меры является намного более частым фактом, чем это предполагает здравый смысл, и что два любых отрезка, вообще говоря, несоизмеримы.

Глава VII

ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Увидеть в пространстве и построить фигуру

Трудности, которые наши ученики встречают в этой области, значительно отличаются от тех, которые они встретили в планиметрии. Представления намного менее ясны для большинства учеников. Все могут хорошо увидеть в пространстве, это лишь дело тренировки, приобретения навыка, что должно с особой тщательностью прививаться с самого начала. В самом деле, чтобы научиться видеть в пространстве, следует научиться рисовать предметы объемно на одном плоском чертеже, видимые части сплошными линиями, а невидимые части пунктиром; но чтобы рисовать, нужно мысленно представлять себе, а чтобы способствовать воображению, нужно рисовать. Здесь имеется дилемма, которая доминирует во всей стереометрии в такой мере, что в большинстве задач на степень бакалавра, которые относятся к части программы, половина трудностей заключается в построении пространственной фигуры.

Мы только что сказали «построить фигуру», это больше, чем ее просто нарисовать правдоподобным образом. Настоящее затруднение в стереометрии и в то же самое время средство, чтобы его преодолеть, заключается в том, что требуется совершенно иной подход, чем для имитационного рисунка, ибо невидимые части имеют такое же значение, как и видимые части, и могут помочь определить эти последние.

Наилучшее средство для того, чтобы развивать этот подход, который мы называем конструктивным мышлением, заключается в том, чтобы сделать как можно больше задач на построение при помощи прямых и секущих плос-

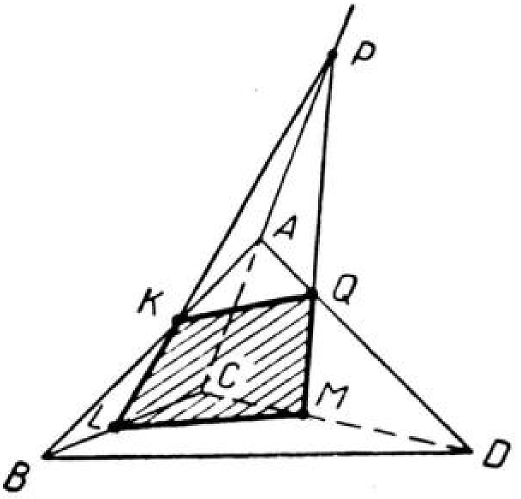

Рис. 9

костей. Не следует приступать к рассмотрению параллельных прямых, прежде чем ученики не сумеют определить и правильно нарисовать сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, определенной тремя точками K, L, M, соответственно расположенными на трех ребрах AB, BC, CD (рис. 9). Существует добрый десяток задач на нахождение отдельных точек геометрической фигуры, которые предшествуют только что приведенной. Процесс поисков доказательства, что три точки L, K, P находятся на одной прямой, потому что они одновременно расположены в плоскости сечения и в плоскости боковой грани, имеет очень большое воспитательное значение, и этому следует посвятить достаточно времени.

Также хорошо заставить решить в уме, без фигуры, несколько более простых задач такого же рода. Ученики очень не любят этого, они настойчиво просят преподавателя, чтобы он им помог изобразить рисунок. Однако все же следует настоять на своем, уменьшая в случае надобности трудность заданных вопросов. Следует также заставить их подробно описать фигуру, возникшую в их воображении, и на этой фигуре провести настоящее доказательство. Это трудные упражнения, их нужно делать медленно, однако общая продолжительность умственной и словесной работы не должна превышать каждый раз примерно двадцати минут.

Все это воспитание ума задачами на построение, решение которых требует лишь знания определяющих свойств плоскости, должно предшествовать рассмотрению параллельных прямых. В самом деле, изучение параллельных прямых требует применения перспективы и бесчисленных теорем со сложными доказательствами, что особенно усугубляет главную трудность, которая заключается в необходимости видеть фигуру в пространстве и строить ее. Кроме того, навыки, приобретаемые решением задач на построение, дают еще то большое преимущество, что ученики начинают отличать различные плоскости, хорошо представлять себе скрещивающиеся прямые, и это очень помогает им ориентироваться в запутанных переплетениях технических доказательств, используемых в курсе.

Доказательство от противного. Противоположные и противоречивые факты

Доказательство от противного является особенно четко выраженным видом технического доказательства. Порой его встречают в планиметрии, и ученики принимают его довольно легко, но в стереометрии этот вид доказательства имеет огромное значение и соответствующие аргументы, труднее для понимания. Поэтому хорошо сказать или напомнить, если об этом уже говорили, что доказательство от противного есть не непосредственное доказательство истинности данного свойства, а доказательство ложности свойства, противоположного данному.

Настоящая трудность в том, чтобы хорошо показать, что образовавшаяся в конце доказательства противоречивость ведет к доказательству истинности первоначального суждения. Здесь возникают два понятия: противоположное и противоречивое, которые являются синонимами для учеников и даже взрослых. Следует уточнить основное их различие. Общее между этими понятиями состоит в том, что два противоречивых или два противоположных факта взаимно исключают друг друга: если один из них является истинным, то другой не может быть истинным. Два факта являются противоречивыми, если, сверх того, один из двух фактов обязательно истинен (например, быть в классе и быть вне этого класса). Два факта являются только противоположными, если они не могут быть одновременно истинными, например быть в каком-то классе и быть в другом классе; можно в самом деле быть в каком-то III классе или в другом месте. Два противоречивых факта взаимно исключаются и дополняются, они оба содержат в себе все возможности. Два противоположных факта взаимно исключаются, но не дополняются, вне их существуют другие возможности.

Когда разница этих обоих слов вполне ясна в умах учеников, можно добавить, что если несколько фактов, взаимно исключающих друг друга, содержат все возможности,

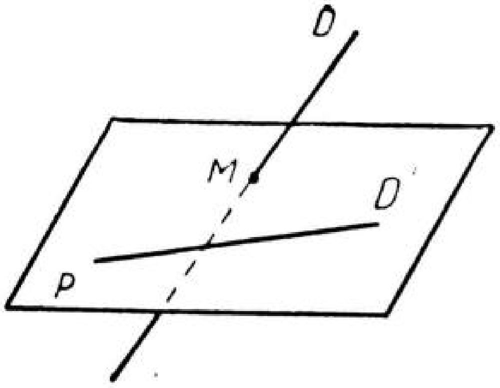

Рис. 10а

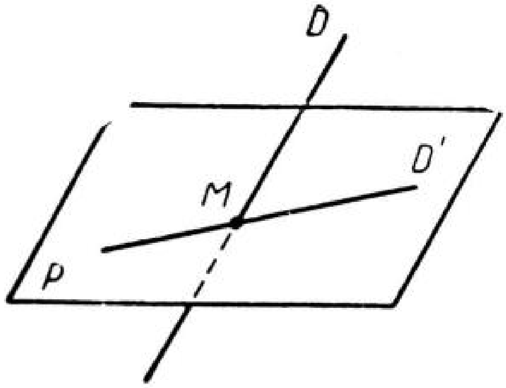

Рис. 10б

то один из фактов противоположен каждому из других фактов и противоречив по отношению к совокупности остальных фактов. Для того чтобы первый факт был бы истинным, нужно, следовательно, доказать, что каждый из этих остальных фактов является ложным.

Доказательство от противного очень выигрывает в ясности, когда оно представлено как исследование всех возможностей, причем заранее не дается предпочтения ни одной из них.

Пример. Прямая D параллельна прямой D', принадлежащей плоскости P. Относительное положение прямых D, D' и плоскости P на первый взгляд представляет четыре возможности.

1°. Прямая D пересекает плоскость P в некоторой единственной точке M, не расположенной на D' (рис. 10а).

2°. Точка M лежит на D' (рис. 10б).

3°. Прямая D целиком лежит в плоскости P (рис. 10в).

4°. Прямая D не пересекает плоскость P (рис. 10г).

Так как прямые D и D' параллельны, они расположены в одной и той же плоскости Q. Прямая D является общей

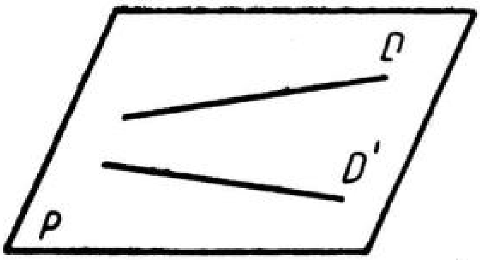

Рис. 10в

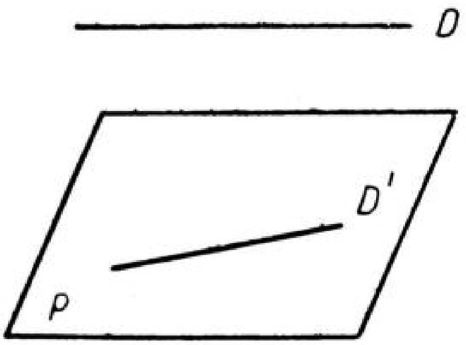

Рис. 10г

прямой плоскостей *P* и *Q*. Рассмотрим последовательно четыре возможности.

1°. Точка *M*, расположенная в плоскости *P* и на прямой *D* плоскости *Q*, является общей для *P* и *Q*. Эти плоскости имеют, следовательно, общую прямую *D′* и точку *M*, не расположенную на *D′*, они, следовательно, совпадают. Прямая *D* плоскости *Q* расположена, следовательно, в плоскости *P*, это невозможно, потому что мы предположили, что прямая *D* и плоскость *P* имеют общую единственную точку *M*.

2°. Точка *M* является общей для *D* и *D′*. Так как прямые параллельны, то этот случай невозможен.

3° и 4°. Эти случаи не являются невозможными, но они взаимно исключают друг друга. Они, следовательно, взаимно противоречивы. Один из этих случаев имеет место тогда и только тогда, если второй не имеет места.

Можно, следовательно, сформулировать:

Теорема. Если прямая параллельна прямой, принадлежащей плоскости, она либо не пересекает плоскость, либо целиком ей принадлежит.

Характерные свойства. Необходимые и достаточные условия

Существует теорема, обратная по отношению к предыдущей, которую можно доказать аналогично и которая формулируется так:

Если прямая не пересекает плоскости, она параллельна некоторой прямой этой плоскости и, как следствие, всем прямым плоскости, которые параллельны последней прямой.

Первая теорема доказывает существование прямых, не пересекающих плоскость, и позволяет сказать, что прямая называется параллельной к плоскости, если она ее не пересекает. Действительно, следует доказать существование объекта перед тем, как дать ему наименование.

Можно сформулировать вместе обе теоремы одним предложением:

Характерным свойством прямой, параллельной к плоскости является ее параллельность некоторой прямой этой плоскости.

Это не единственное характерное свойство. Плотник будет больше убежден в том, что прямая параллельна плоскости, если он проверит, что расстояния двух точек прямой от плоскости равны.

Можно, наконец, сформулировать обе теоремы в одном следующем предложении:

Условие, которое необходимо выполняется, если прямая параллельна плоскости, и достаточно для того, чтобы она была ей параллельна, заключается в параллельности ее к какой-нибудь прямой плоскости.

Обе формулировки: 1) характерное свойство или же 2) условие, одновременно необходимо выполняющееся, «если...» и достаточное, «для того чтобы...», совершенно бесспорны.

Они не вызывают никакой двусмысленности в умах учеников, чего, однако, нельзя сказать о классической формулировке, в которой говорится только о необходимом и достаточном условии «для того чтобы».

Выражение «необходимый и достаточный» является бесполезным, если не вредным, точно так же, как выражение «нужно и достаточно». Эти слова лишь могут более или менее удачно усилить смысл союзов «если» и «чтобы», которые сами по себе указывают, что является предпосылкой и что заключением. Две отдельные формулировки, которые мы выше дали, начинаются союзом «если» и не используют слово «необходимо», которое могло бы только неприятно утяжелить смысл предложения.

Проще всего полностью отказаться от терминов «необходимо» и «достаточно» и использовать понятие о характерном свойстве, которое является совершенно ясным. Что касается отдельных формулировок, желательно их излагать при помощи слова «если», которое позволяет указать предпосылку, а потом заключение.

Эта дискуссия, которая заканчивает наше рассмотрение геометрии, показывает, что в математике чрезмерная краткость в языке, обусловленная стремлением облегчить запоминание, не всегда достигает цели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Педагогика математики должна руководствоваться общей научной педагогикой. Так, ученик интересуется изучаемой им областью науки только в той мере, в какой он является ее участником. Следовательно, экспериментальное направление со всеми его психологическими воздействиями должно быть преимущественным для ученика класса математики. Речь идет не только о том, чтобы внушить ему чувство ответственности, когда он доводит до конца численные расчеты и делает точные чертежи, но и о том, чтобы придать его мышлению направление открытия и воспитать в нем вкус к несколько аналогичной деятельности настоящего ученого.

Чтобы воспитывать детей в этом направлении, мы показали в алгебре важность переводов и обратных переводов алгебраических символов и в геометрии пользу, которую можно извлечь из противопоставления конкретной точности и абстрактной правильности. Мы также видели в нашей преподавательской практике, что было очень часто заманчивым смешивать объективно простое и субъективно легкое, что приносит большой вред ученикам.

Именно две простые идеи, которые нам стали так близки, что мы их больше не осознаем, делают таким трудным для детей понимание абстрактных рассуждений. Двойственность числа, пассивного результата и активного оператора, и то обстоятельство, что техника, фрагмент логики, иногда не совпадает с основной логической линией, находится в кажущемся противоречии с ней.

Мы надеемся, что достаточно будет осознать и учесть в преподавании математики эти две идеи, для того чтобы помочь многим ученикам победить в себе большой страх перед математикой.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Андре Фуше

ПЕДАГОГИКА МАТЕМАТИКИ

Редактор *Э. К.* Викулина
Художник *М. К.* Шевцов
Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *Л. К. Кухаревич*
Корректор *М. В. Голубева*

Сдано в набор 25/VI 1968 г. Подписано
к печати 18/VI 1969 г. $84\times108^1/_{32}$.
Типографская № 2, печ. л. 6,72(4)+
+ вкл. 0,21(0,125). Уч.-изд. л. 5,71 +
+ вкл. 0,06. Тираж 48 тыс. экз. (Пл.
1968 г. № 162.)

Издательство „Просвещение" Комитета
по печати при Совете Министров
РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной
рощи, 41.

Отпечатано с матриц в Сортавальской
типографии Управления по печати
при Совете Министров КАССР,
г. Сортавала, Карельская 42. Заказ 684

Цена 29 коп.

Цена 29 коп.